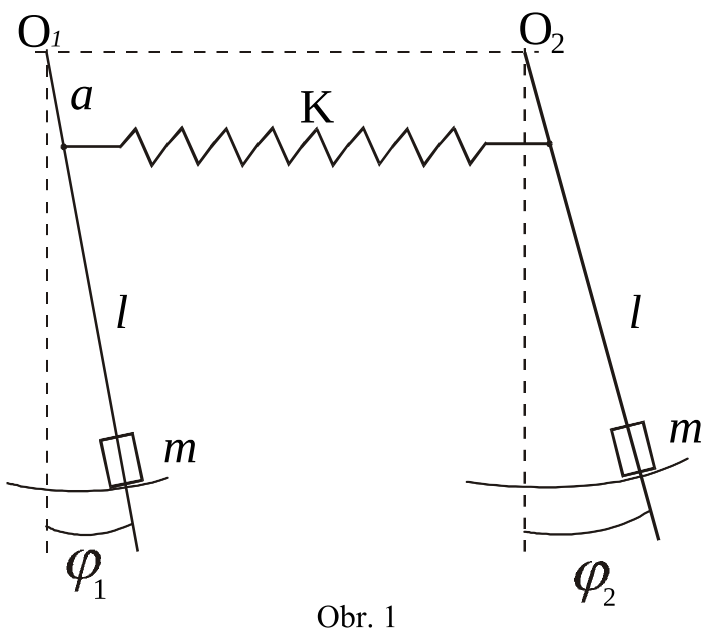
VYŠETROVANIE KMITOV DVOCH SPRIAHNUTÝCH KYVADIEL

RNDr. Jaroslav Kovár

Teoretický úvod:
Pri skladaní jednoduchých sústav do zložitejších celkov sa obyčajne aj ich možný pohyb stáva zložitejším. Takouto zložitejšou sústavou sú napr. dve kyvadlá kmitajúce v jednej rovine spojené pružinou. Táto sústava je príkladom mechanického kmitavého systému s dvoma stupňami voľnosti. Takáto sústava má dve nezávislé súradnice – výchylky kyvadiel z ich rovnovážnych polôh φ_1, φ_2. Ako nezávislé by sa takéto kyvadlá mohli pohybovať jednoduchým kmitavým pohybom. Vzájomné pôsobenie medzi kyvadlami sa môže vytvoriť spojením kyvadiel pružinou, ktorej pružinovú konštantu označme k. Sila, ktorou pôsobí táto pružina je na oboch jej koncoch rovnako veľká, ale opačne orientovaná, a je úmerná predĺženiu pružiny, t. j. rozdielu výchyliek obidvoch kyvadiel $\varphi_2 - \varphi_1$. V prípade, že výchylky kyvadiel nepresahujú 5°, možno pohyb systému kyvadiel opísať sústavou dvoch lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu s konštantnými koeficientami – kmitavý systém je lineárny. Vyšetrením zákonitostí takéhoto systému získame prehľad o kmitavých dejoch v ľubovoľnom systéme, opísanom diferenciálnymi rovnicami uvedeného typu – napr. spiahnutých elektrických obvodoch.



Obr. 1

Uvažovaný systém kyvadiel nech pre jednoduchosť tvoria dve rovnaké nastavovateľné kyvadlá obr.1, ktoré môžu kmitať iba v jednej rovine, pričom osi O_1 a O_2 sú horizontálne a navzájom rovnobežné. Pružina K nech je pripojená k obom kyvadlám vo vzdialenosti a od osi otáčania. Tuhosť pružiny označme k. Hmotnosti m oboch závaží nech sú rovnaké. Ich vzdialenosti l od osi otáčania nech sú rovnaké tiež a nech obe kyvadlá v stave pokoja sú vo zvislej polohe, t. j. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Zmenšovanie amplitúdy kyvadiel v dôsledku tlmenia (najmä v ložiskách, odpor vzduchu) zanedbáme. Prípad značného tlmenia má pre prax malý význam, pretože vtedy ovplyvňovanie sa kyvadiel je slabé v porovnaní s vplyvom tlmenia

Pohybove rovnice takejto sústavy dvoch spriahnutých kyvadiel potom sú:

$$J\,\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1}$$

$$J\,\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{2}$$

kde $J = ml^2$ je moment zotrvačnosti kyvadiel. Kyvadlá považujeme za matematické kyvadlá vzhľadom na podmienku, že hmotnosť závažia je omnoho väčšia ako hmotnosť tyče kyvadla. Prvý člen pravej strany rovníc predstavuje moment tiažových síl, druhý zasa moment elastických síl pružiny. Rovnice (1) a (2) sa od známych rovníc pre nezávislé kyvadlá odlišujú práve len členom

$ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Pomer $\gamma = \dfrac{ka^2}{mgl + ka^2}$ určuje veľkosť vzájomného pôsobenia kyvadiel a nazýva sa koeficientom spriahnutia.

Sústavu rovníc (1), (2) môžeme upraviť do tvaru

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \left(\frac{mgl}{J} + \frac{ka^2}{J}\right)\varphi_1 - \frac{ka^2}{J}\varphi_2 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \left(\frac{mgl}{J} + \frac{ka^2}{J}\right)\varphi_2 - \frac{ka^2}{J}\varphi_1 = 0\ . \tag{4}$$

Upevnením jedného z kyvadiel v rovnovážnej polohe dostaneme tzv. parciálnu sústavu. Ako vidieť z daných rovníc (3), (4) parciálna uhlová frekvencia (ďalej len parciálna frekvencia) bude pre obe kyvadlá rovnaká a to

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J} + \frac{ka^2}{J}}\ . \tag{5}$$

Sčítaním a odčítaním rovníc (1) a (2) dostaneme

$$\frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{6}$$

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{mgl + 2ka}{J}(\varphi_1 - \varphi_2)\ . \tag{7}$$

Ak zavedieme označenie

$$\omega_1^2 = \frac{mgl}{J}; \quad \omega_2^2 = \frac{mgl + 2ka^2}{J} \tag{8}$$

a pomocné premenné α_1, α_2 vzťahmi

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha_1 \tag{9}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\alpha_2 \tag{10}$$

potom rovnice (6), (7) môžeme zapísať

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\omega_1^2\alpha_1 \tag{11}$$

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = -\omega_2^2\alpha_2\ . \tag{12}$$

Frekvencie ω_1 a ω_2 sú vlastné frekvencie našej sústavy spriahnutých kyvadiel. Výhoda zavedenia α_1, α_2 je vtom, že pre tieto veličiny sme dostali jednoduché rovnice harmonických kmitov. Ich všeobecné riešenia sú:

$$\alpha_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{13}$$

$$\alpha_2 = B\cos(\omega_2 t + \phi_2)\ . \tag{14}$$

Tieto riešenia vyhovujú rovniciam (11), (12) pri každej voľbe konštánt A, B, ϕ_1, ϕ_2. Ich určením možno splniť počiatočné podmienky. Z (13) a (14) potom pomocou (9), (10) máme

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{15}$$

$$\varphi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) - B\cos(\omega_2 t + \phi_2)\ . \tag{16}$$

Tieto výchylky kyvadiel φ_1, φ_2 ako funkcie času popisujú pohyb spriahnutých kyvadiel všeobecne. Všimnime si teraz niektoré význačné prípady, dané špeciálnou voľbou A, B. Uvažujme

a) Ak $B = 0$ vtedy je $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{17}$$

.

To odpovedá situácii, keď obidve kyvadlá kmitajú súbežne s uhlovou frekvenciou ω_1 a ich výchylky a rýchlosti sú v každom časovom okamihu, teda i v čase $t = 0$ rovnaké.

b) Ak $A = 0$ vtedy je $\varphi_1 = -\varphi_2$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = B\,cos(\omega_2 t + \phi_2) \; . \tag{18}$$

V tomto prípade výchylky a aj rýchlosti obidvoch kyvadiel sú v každom časovom okamihu, teda i v čase $t = 0$ navzájom opačné. Obidve kyvadlá kmitajú s uhlovou frekvenciou ω_2.

Taký pohyb sústavy, pri ktorom každý jej člen vykonáva kmitavý pohyb s rovnakou frekvenciou, nazývame normálnymi (vlastnými) kmitmi. Z rovníc (15), (16) vidíme, že kmity s jednou frekvenciou nastanú len ak jedna z konštánt A, B je nulová. Dva uvedené význačné druhy kmitov (súbežné a protibežné) sú teda normálnymi kmitmi tejto sústavy a iných už niet. Z (15), (16) tiež vidíme, že všeobecný pohyb tejto sústavy dostaneme zložením dvoch normálnych kmitaní.

c) Keď $A = B$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

To odpovedá prípadu, keď v čase $t = 0$ druhé kyvadlo má nulovú výchylku aj rýchlosť, prvé má výchylku rovnú A a nulovú rýchlosť. Z rovníc (15), (16) dostaneme pomocou súčtových vzorcov

$$\varphi_1(t) = \left[2A\,cos\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right] cos\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \tag{19}$$

$$\varphi_2(t) = \left[2A\,sin\,\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right] cos\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \quad . \tag{20}$$

Ak väzba medzi kyvadlami je slabá t.j. konštanta k je malá, odlišujú sa ω_1 a ω_2 len o malú hodnotu (vzťah (8)) a ich rozdiel je nepatrný v porovnaní s ich súčtom. Preto výrazy v hranatej zátvorke vzťahov (19), (20) možno považovať za pomaly sa meniace amplitúdy kmitov. V čase $t = 0$ je amplitúda kmitov pre φ_2 nulová, zatiaľ čo pre φ_1 je maximálna. Postupom času amplitúda kmitov druhého kyvadla narastá a je maximálna pre taký čas t_0, ktorý splňa podmienku

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t_0 = \frac{\pi}{2} .$$

Amplitúda je teda maximálna v čase

$$t_0 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad . \tag{21}$$

Prvé kyvadlo odovzdalo energiu svojich kmitov druhému. Takéto vzájomné odovzdávanie energie medzi kyvadlami prebieha neustále. Čas t_0 sa nazýva čas výmeny energie.

Úlohy:

Pomocou súboru meraní uvedenom nižšie vyšetrite kmity spriahnutej sústavy dvoch rovnakých kyvadiel v závislosti od zmeny väzbovej vzdialenosti a pružiny K od osi otáčania. Príslušné veličiny merajte aspoň pre desať vhodne zvolených väzbových vzdialeností. Pri meraní času použite metódu postupných meraní. Získané závislosti spracujte graficky a posúďte zhodu teórie s experimentom.

1. Vyšetrite závislosť parciálnej frekvencie ω_0 od väzbovej vzdialenosti a.
2. Zmerajte a vyšetrite závislosť ω_1 a ω_2 od väzbovej vzdialenosti a.
3. Pomocou vzťahu (22) vypočítajte koeficient väzby γ a stanovte jeho závislosť od väzbovej vzdialenosti a.
4. Určite frekvenciu rázov výmeny energie Ω pre všetky zvolené väzbové vzdialenosti a a porovnajte zmerané Ω s hodnotami získanými podľa vzťahu $\Omega = \omega_2 - \omega_1$.
5. Určite hodnotu času t_0 výmeny energie výpočtom i experimentálne.
6. Zo vzťahov (23), (24) určite koeficient väzby γ a stanovte jeho závislosť od väzbovej vzdialenosti a.

Postup merania a vyhodnotenie výsledkov:

1. Upevníme jedno z kyvadiel napr. tak, že ho držíme a druhé necháme kývať. Zmeriame jeho periódu T_0 a vypočítame jeho parciálnu kruhovu frekvenciu ω_0. Meranie urobíme aspoň pre 10 zvolených polôh väzbovej vzdialenosti a.
2. Vychýlime obe kyvadlá na jednu stranu o rovnaký uhol, pustíme ich a necháme kývať. Meraním periódy jedného z kyvadiel určíme hodnotu T_1 a tým aj odpovedajúcu frekvenciu normálnych kmitov sústavy ω_1. Potom kyvadlá vychýlime oproti sebe, zasa o rovnaký uhol a opäť pustíme. Meraním periódy jedného z kyvadiel určíme hodnotu T_2 a k nej odpovedajúcu hodnotu druhej frekvencie normálnych kmitov ω_2. Meranie periódy T_2 robíme pre všetky zvolené väzbové vzdialenosti. Z hodnôt ω_1, ω_2 vypočítame pomocou rovníc (8) koeficient spriahnutia
$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \; . \qquad (22)$$
3. Vychýlime jedno z kyvadiel (druhé ostáva v pokoji) a pustíme ho. Kmitajúce kyvadlo odovzdáva energiu druhému kyvadlu. Druhé kyvadlo sa postupne rozkmitáva, až je jeho výchylka maximálna. Výchylka prvého kyvadla je vtedy nulová. Všetka energia prešla do druhého kyvadla. Určíme tento čas t_0^* a porovnáme s hodnotou zistenou zo vzťahu (21).

   Zo vzťahov (5) a (8) možno nájsť súvis medzi parciálnou frekvenciou sústavy, normálnymi frekvenciami sústavy ω_1, ω_2 a koeficientom väzby γ. Príslušný výpočet poskytuje vzťahy:
$$\omega_1^2 = \omega_0^2(1-\gamma) \qquad (23)$$
$$\omega_2^2 = \omega_0^2(1+\gamma). \qquad (24)$$
   Doba prechodu kmitania z jedného kyvadla na druhé závisí od koeficientu väzby γ. Frekvencia odpovedajúca tomuto prechodu
$$\Omega_v = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0\left(\sqrt{1+\gamma} - \sqrt{1-\gamma}\right). \qquad (25)$$
   Pri slabej väzbe vzťah (25) môžeme písať v tvare
$$\Omega_p = \omega_2 - \omega_1 \doteq \omega_0 \gamma \; . \qquad (26)$$
4. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky
5.

a	ω_1 $[\mathrm{s}^{-1}]$	ω_2 $[\mathrm{s}^{-1}]$	t_0[s]	t_0^*[s]	γ	$\Omega_v[\mathrm{s}^{-1}]$	$\Omega_p[\mathrm{s}^{-1}]$

Kontrolné otázky:

1. Čo sú normálne kmity?
2. Aké sú to parciálne kmity sústavy?
3. Vysvetlite bez počítania, prečo súbežné a protibežné kmity sú normálnymi kmitmi.
4. Prečo je $\omega_2 > \omega_1$?
5. Čo je koeficient väzby a aká je jeho interpretácia?
6. Čo je doba výmeny energie?
7. Aké by boli normálne kmity sústavy troch spriahnutých kyvadiel?

Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. *„Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky"*, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.