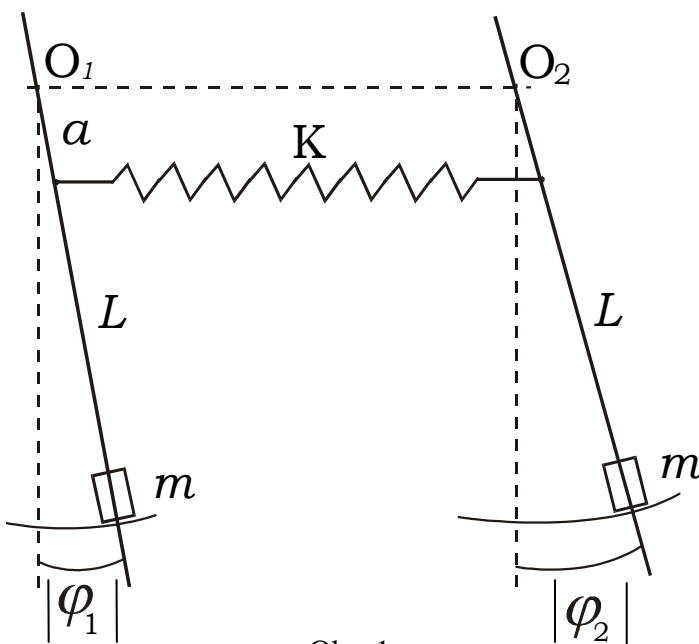


VYŠETROVANIE KMITOV DVOCH SPRIAHNUTÝCH KYVADIEL

RNDr. Jaroslav Kovár, RNDr. Beáta Trpišová, Ph.D.

Teoretický úvod:

Pri skladaní jednoduchých sústav do zložitejších celkov sa obyčajne aj ich možný pohyb stáva zložitejším. Takouto zložitejšou sústavou sú napr. dve kyvadlá kmitajúce v jednej rovine spojené pružinou. Táto sústava je príkladom mechanického kmitavého systému s dvoma stupňami voľnosti, ktoré sú reprezentované dvoma nezávislými premennými φ_1, φ_2 , absolútne hodnoty ktorých sú výchylky kyvadiel z ich rovnovážnych polôh, t. j. uhly, ktoré zvierajú pozdĺžne osi kyvadiel s vertikálou ležiacou v rovine kmitania kyvadiel. Absolútne hodnoty preto, lebo φ_1, φ_2 môžu nadobúdať ako kladné, tak aj záporné hodnoty, čo vysvetlíme ďalej. Ako nezávislé by sa takéto kyvadlá mohli pohybovať jednoduchým kmitavým pohybom. Vzájomné pôsobenie medzi kyvadlami sa môže vytvoriť spojením kyvadiel pružinou, ktorej pružinovú konštantu, alebo tuhosť, označme k . Sila, ktorou pôsobí táto pružina, je na oboch jej koncoch rovnako veľká, ale opačne orientovaná, a je úmerná predĺženiu, resp. stlačeniu, pružiny, t. j. rozdielu $\varphi_2 - \varphi_1$. V prípade, že absolútne hodnoty výchyliek kyvadiel nepresahujú 5° , možno ich pohyb opísať sústavou dvoch



Obr. 1

lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu s konštantnými koeficientami – kmitavý systém je lineárny. Vyšetrením zákonitostí pohybu takéhoto systému získame prehľad o kmitavých dejoch v ľubovoľnom systéme opísanom diferenciálnymi rovnicami uvedeného typu – napr. v spriahnutých elektrických obvodoch.

Náš systém kyvadiel nech pre jednoduchosť tvoria dve rovnaké nastavovateľné kyvadlá, ako ilustruje Obr.1. Každé z kyvadiel pozostáva z valcovej tyče o hmotnosti m , dĺžke L a polomere podstavy r , na ktorú je nasunutú závažie tvaru valcovej vrstvy o hmotnosti m , výške h , vonkajšom polomere R a vnútornom polomere r . Polohu tohto závažia na tyči možno

meniť. My v našom meraní umiestnime závažie na dolný koniec tyče, a to tak, aby jeho dolná podstava a dolná podstava tyče ležali v jednej rovine. Obe kyvadlá môžu kmitať iba v jednej rovine – vertikálnej – okolo osí O_1 a O_2 , ktoré sú kolmé na túto rovinu, t. j. sú upevnené k stene horizontálne, a to v rovnakej výške a sú navzájom rovnobežné. Pružina K nech je pripojená k obom kyvadlám vo vzdialenosti a od osí otáčania. Ako je zrejmé, vzdialenosti ťažísk d závaží od osí otáčania sú rovnaké. Obe kyvadlá v stave pokoja sú vo zvislej polohe, t. j. $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$.

Naše kyvadlá sú fyzikálne kyvadlá, t. j. telesá kmitajúce okolo osi neprechádzajúcej ich ťažiskom. Len poznamenajme, že druhý typ kyvadla používaný vo fyzike je matematické kyvadlo, čo je hmotný bod upevnený na nehmotnej tyči. Evidentne naše kyvadlá (ďalej len kyvadlá) by mohli byť považované za matematické len s veľkým priblížením.

Diferenciálne rovnice (1), (2) uvedené v ďalšom texte reprezentujúce pohyb kyvadiel sú odvodené za predpokladu, že na každé z kyvadiel pôsobí len tiažová sila v jeho ťažisku a elastická sila pružiny s pôsobiskom zrejme v bode upevnenia pružiny ku kyvadlu. Zanedbávame teda zmenšovanie amplitúdy kmitov kyvadiel v dôsledku tlmenia (najmä v ložiskách, odpor vzduchu). Prípád značného tlmenia má pre prax malý význam, pretože vtedy ovplyvňovanie sa kyvadiel je slabé v porovnaní s vplyvom tlmenia. Pohybové rovnice tu opísanej sústavy dvoch spriahnutých kyvadiel v prípade, že $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq 5^\circ$, potom sú

$$I \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -mgd\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1)$$

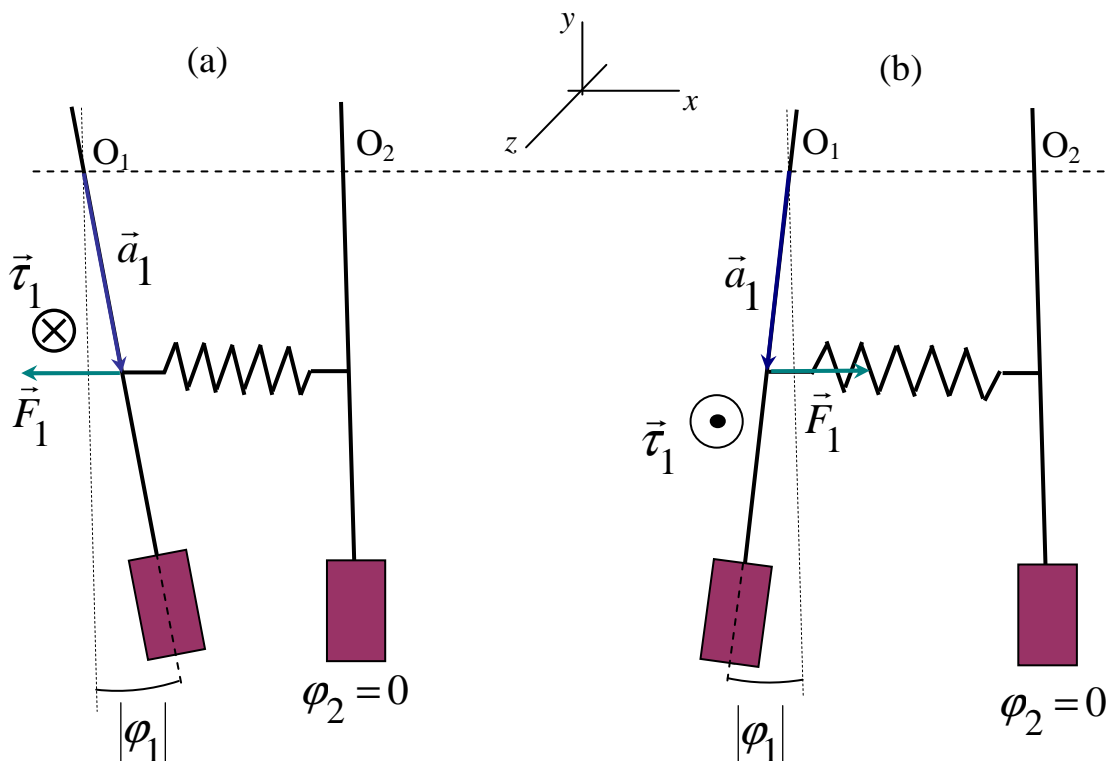
$$I \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -mgd\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (2)$$

kde I je moment zotrvačnosti kyvadiel, ktorý je daný súčtom pravých strán vzťahov (28) a (30).

Prvé členy na pravej strane (1) a (2) predstavujú momenty tiažových síl, druhé členy na pravej strane týchto rovníc sú momenty elastických síl pôsobiacich na kyvadlá. Všetky tieto momenty podľa pravidiel určovania smeru vektorového súčinu sú kolmé na rovinu kmitania kyvadiel. Ak teda stotožníme túto rovinu s rovinou xy , os z bude na ňu kolmá a jediné nenulové zložky momentov tiažovej a elastickej sily budú z -ové. Veličiny φ_1 a φ_2 sú v našej konfigurácii jedinými nenulovými – z -ovými – zložkami vektorov $\vec{\varphi}_1$ a $\vec{\varphi}_2$, ktoré sú takisto kolmé na rovinu kmitania kyvadiel, a teda φ_1 a φ_2 môžu nadobúdať nielen kladné, ale aj záporné hodnoty podľa toho, či sú $\vec{\varphi}_1$, $\vec{\varphi}_2$ orientované pred túto rovinu alebo za túto rovinu [1].

Odvedenie výrazov pre momenty tiažových síl pôsobiacich na fyzikálne kyvadlo je podrobne uvedené v úlohe “Moment zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla” [2]. Preto tu ukážeme len platnosť druhých výrazov na pravej strane rovníc (1) a (2) reprezentujúcich momenty elastických síl za predpokladu $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq 5^\circ$.

Uvažujme najprv situáciu ako na Obr. 2a,b – rozkmitáme prvé kyvadlo tak, aby amplitúda jeho kmitov nepresiahla 5° , pričom druhé kyvadlo fixujeme v jeho rovnovážnej polohe. Obr. 2a



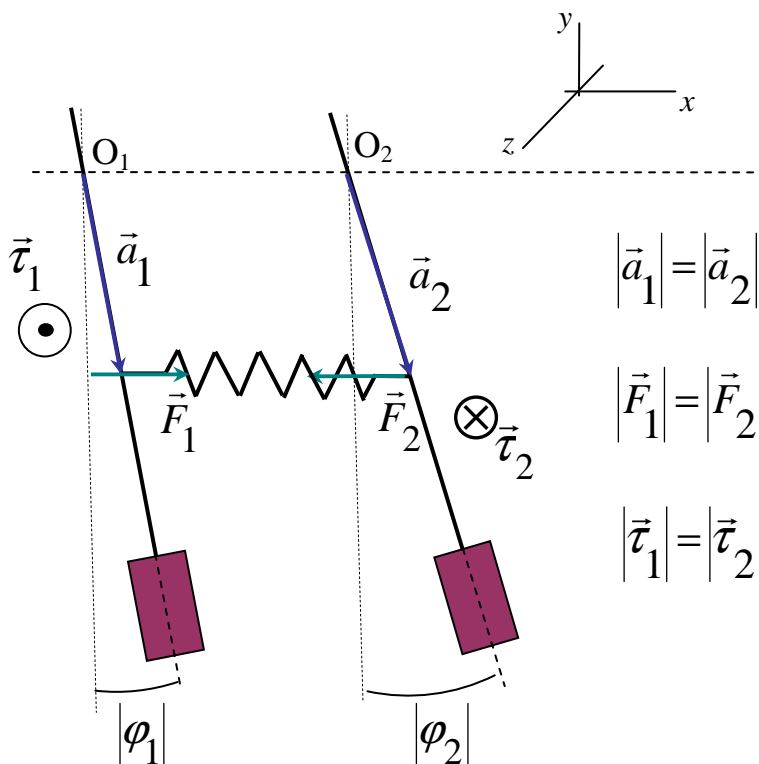
Obr. 2.

zobrazuje konfiguráciu, v ktorej je prvé kyvadlo vychýlené vpravo od svojej rovnovážnej polohy o uhol $|\varphi_1|$. Keďže pružina je v tejto konfigurácii stlačená, na kmitajúce kyvadlo v mieste upevnenia pružiny k nemu pôsobí sila \vec{F}_1 prakticky horizontálne a doľava. Stlačenie pružiny je evidentne rovné $a_1 \sin|\varphi_1| = a \sin|\varphi_1| \cong a|\varphi_1| = a\varphi_1$, pretože $\varphi_1 > 0$ pre výchylky kmitajúceho kyvadla vpravo od jeho rovnovážnej polohy, kedy vektor $\vec{\varphi}_1$ je orientovaný pred rovinu kmitania kyvadiel. Potom $|\vec{F}_1| = ka\varphi_1$ a veľkosť momentu sily \vec{F}_1 vzhľadom na os otáčania O_1 je $|\vec{\tau}_1| = |\vec{a}_1| |\vec{F}_1| \sin 90^\circ = ka^2\varphi_1$, kde sme za predpokladu, že $|\varphi_1| \leq 5^\circ$, považovali vektory \vec{a}_1 a \vec{F}_1 s dobrou presnosťou za kolmé. Pretože \vec{a}_1 a \vec{F}_1 ležia v rovine kmitania kyvadiel, je vektor momentu elastickej sily \vec{F}_1 pôsobiacej na kmitajúce kyvadlo $\vec{\tau}_1$ kolmý na túto rovinu a je orientovaný za ňu, pretože rotácia \vec{a}_1 do smeru \vec{F}_1 pozdĺž kratšieho uhla zvieraného týmito vektormi sa javí spoza roviny kmitania kyvadiel v smere proti chodu hodinových ručičiek. Je teda jeho jediná nenulová zložka záporná, t. j. $\tau_{1z} = -ka^2\varphi_1$, čo súhlasí s druhým členom na pravej strane (1), ak $\varphi_2 = 0$.

Na Obr. 2b vidíme druhú možnú konfiguráciu kyvadiel, ak druhé z nich je fixované vo svojej rovnovážnej polohe – prvé kyvadlo je v polohe naľavo od svojej rovnovážnej polohy. Pružina je teda natiahnutá o $a \sin|\varphi_1| \cong a|\varphi_1| = -a\varphi_1$. Znamienko “-” v poslednom výraze je dané tým, že $\varphi_1 < 0$, pretože vektor $\vec{\varphi}_1$ je orientovaný za rovinu kmitania kyvadiel. Keďže elastickej sily \vec{F}_1 je orientovaná opačne ako v konfigurácii na Obr. 2a, aj vektor momentu tejto sily $\vec{\tau}_1$ vzhľadom na os otáčania O_1 bude orientovaný opačne, a teda pred rovinu kmitania kyvadiel (rotácia \vec{a}_1 do smeru \vec{F}_1 pozdĺž kratšieho uhla zvieraného týmito vektormi sa javí spredu roviny kmitania kyvadiel v smere proti chodu hodinových ručičiek). Bude teda jeho jediná nenulová zložka kladné číslo, t. j. bude daná tým istým výrazom, ako v konfigurácii zobrazenej na Obr. 2a, a teda druhý člen na

pravej strane (1) pre $\varphi_2 = 0$ naozaj predstavuje moment elastickej sily pružiny vzhľadom na os otáčania O_1 pre ľubovoľnú polohu pohybujúceho sa kyvadla.

Napokon uvažujme situáciu ako na Obr. 1, ktorá je prekreslená aj s príslušnými vektormi na Obr. 3. Obe kyvadlá sa pohybujú a je zobrazený okamih, keď sú obe vychýlené doprava, pričom $|\varphi_2| > |\varphi_1|$ a stále platí, že amplitúdy výchyliek kyvadiel z ich rovnovážnych polôh sú nanajvyš rovné 5° . Pružina je teda natiahnutá a elastickej sily pôsobiacej na kyvadlá budú orientované tak, ako sú zakreslené, pričom sú rovnako veľké a opačne orientované. Natiahnutie pružiny je evidentne rovné



Obr. 3.

$a \sin \varphi_2 - a \sin \varphi_1 \cong a(\varphi_2 - \varphi_1)$ (φ_1 a φ_2 sú kladné čísla), a teda $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = ka(\varphi_2 - \varphi_1)$. Ako je zrejmé, moment sily \vec{F}_1 vzhľadom na os O_1 je orientovaný pred rovinu kmitania kyvadiel, takže jeho jediná nenulová zložka bude kladné číslo dané výrazom $\tau_{1z} = ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Naopak moment sily \vec{F}_2 vzhľadom na os O_2 je orientovaný za rovinu kmitania kyvadiel, *t. j.* jeho jediná nenulová zložka bude záporné číslo vyjadrené výrazom $\tau_{2z} = -ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Ako teda vidíme, dostali sme výsledky konzistentné s druhými členmi na pravej strane rovníc (1) a (2). Úplne analogické úvahy by sme mohli urobiť aj pre ostatné možné konfigurácie kyvadiel. Dospeli by sme k rovnakým výrazom.

Rovnice (1) a (2) sa od známych rovníc pre nezávislé kyvadlá odlišujú práve len členom $ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Pomer $\gamma = \frac{ka^2}{mgd}$ určuje veľkosť vzájomného pôsobenia kyvadiel a nazýva sa koeficientom spriahnutia.

Sústavu rovníc (1), (2) môžeme upraviť do tvaru

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I} + \frac{ka^2}{I} \right) \varphi_1 - \frac{ka^2}{I} \varphi_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \left(\frac{mgd}{I} + \frac{ka^2}{I} \right) \varphi_2 - \frac{ka^2}{I} \varphi_1 = 0 . \quad (4)$$

Upevnením jedného z kyvadiel v rovnovážnej polohe, čo sme analyzovali v predchádzajúcom texte, dostaneme tzv. parciálnu sústavu. Ako vidieť z daných rovníc (3), (4) parciálna uhlová frekvencia bude pre obe kyvadlá rovnaká a to

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I} + \frac{ka^2}{I}} . \quad (5)$$

Sčítaním a odčítaním rovníc (1) a (2) dostaneme

$$\frac{d^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (6)$$

$$\frac{d^2(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt^2} = -\frac{mgd + 2ka^2}{I}(\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (7)$$

Ak zavedieme označenie

$$\omega_1^2 = \frac{mgd}{I} ; \quad \omega_2^2 = \frac{mgd + 2ka^2}{I} \quad (8)$$

a pomocné premenné α_1 , α_2 vzťahmi

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\alpha_1 \quad (9)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\alpha_2 \quad (10)$$

potom rovnice (6), (7) môžeme zapísať

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -\omega_1^2\alpha_1 \quad (11)$$

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = -\omega_2^2\alpha_2 . \quad (12)$$

Frekvencie ω_1 a ω_2 sú vlastné frekvencie našej sústavy spriahnutých kyvadiel. Výhoda zavedenia α_1 , α_2 je v tom, že pre tieto veličiny sme dostali jednoduché rovnice harmonických kmitov. Ich všeobecné riešenia sú:

$$\alpha_1 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (13)$$

$$\alpha_2 = B \cos(\omega_2 t + \phi_2) . \quad (14)$$

Tieto riešenia vyhovujú rovnicam (11), (12) pri každej voľbe konštánt A , B , ϕ_1 , ϕ_2 . Ich určením možno splniť počiatkové podmienky. Z (13) a (14) potom pomocou (9), (10) máme

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) - B \cos(\omega_2 t + \phi_2) . \quad (16)$$

Tieto výchylky kyvadiel φ_1 , φ_2 ako funkcie času popisujú pohyb spriahnutých kyvadiel všeobecne. Všimnime si teraz niektoré význačné prípady, dané špeciálnou voľbou A , B . Uvažujme

a) Ak $B = 0$ vtedy je $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (17)$$

To odpovedá situácii, keď obidve kyvadlá kmitajú súbežne s uhlovou frekvenciou ω_1 a ich výchylky a rýchlosti sú v každom časovom okamihu, teda i v čase $t = 0$ rovnaké.

b) Ak $A = 0$ vtedy je $\varphi_1 = -\varphi_2$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = B \cos(\omega_2 t + \phi_2) . \quad (18)$$

V tomto prípade výchylky a aj rýchlosti obidvoch kyvadiel sú v každom časovom okamihu, teda i v čase $t = 0$ navzájom opačné. Obidve kyvadlá kmitajú s uhlovou frekvenciou ω_2 .

Taký pohyb sústavy, pri ktorom každý jej člen vykonáva kmitavý pohyb s rovnakou frekvenciou, nazývame normálnymi (vlastnými) kmitmi. Z rovníc (15), (16) vidíme, že kmity s jednou frekvenciou nastanú len ak jedna z konštánt A , B je nulová. Dva uvedené význačné druhy kmitov (súbežné a protibežné) sú teda normálnymi kmitmi tejto sústavy a iných už niet. Z (15), (16) tiež vidíme, že všeobecný pohyb tejto sústavy dostaneme zložením dvoch normálnych kmitaní.

c) Keď $A = B$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

To odpovedá prípadu, keď v čase $t = 0$ druhé kyvadlo má nulovú výchylku aj rýchlosť, prvé má výchylku rovnú $2A$ a nulovú rýchlosť. Z rovníc (15), (16) dostaneme pomocou súčtových vzorcov

$$\varphi_1(t) = \left[2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right] \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \quad (19)$$

$$\varphi_2(t) = \left[2A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right] \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t . \quad (20)$$

Ak väzba medzi kyvadlami je slabá *t. j.* konštanta k je malá, odlišujú sa ω_1 a ω_2 len o malú hodnotu, ako vidieť zo vzťahu (8), a ich rozdiel je nepatrný v porovnaní s ich súčtom. Preto výrazy v hranatej zátvorke vzťahov (19), (20) možno považovať za pomaly sa meniace amplitúdy kmitov funkcie $\cos[(\omega_1 + \omega_2)/2t]$. Príklad takýchto kmitov je znázornený na Obr. 4 a vzhľadom na ich charakter ich nazývame rázy. Obr. 4 zrejme znázorňuje rázy (20), *t. j.* kmity druhého kyvadla. Ako vidíme, rázy sa opakujú s periódou π radiánov, čo je polovica periódy funkcií sínus a kosínus. Ako je zrejmé, je to perióda, s ktorou sa opakuje absolútna hodnota amplitúdy týchto funkcií. Musí teda platiť

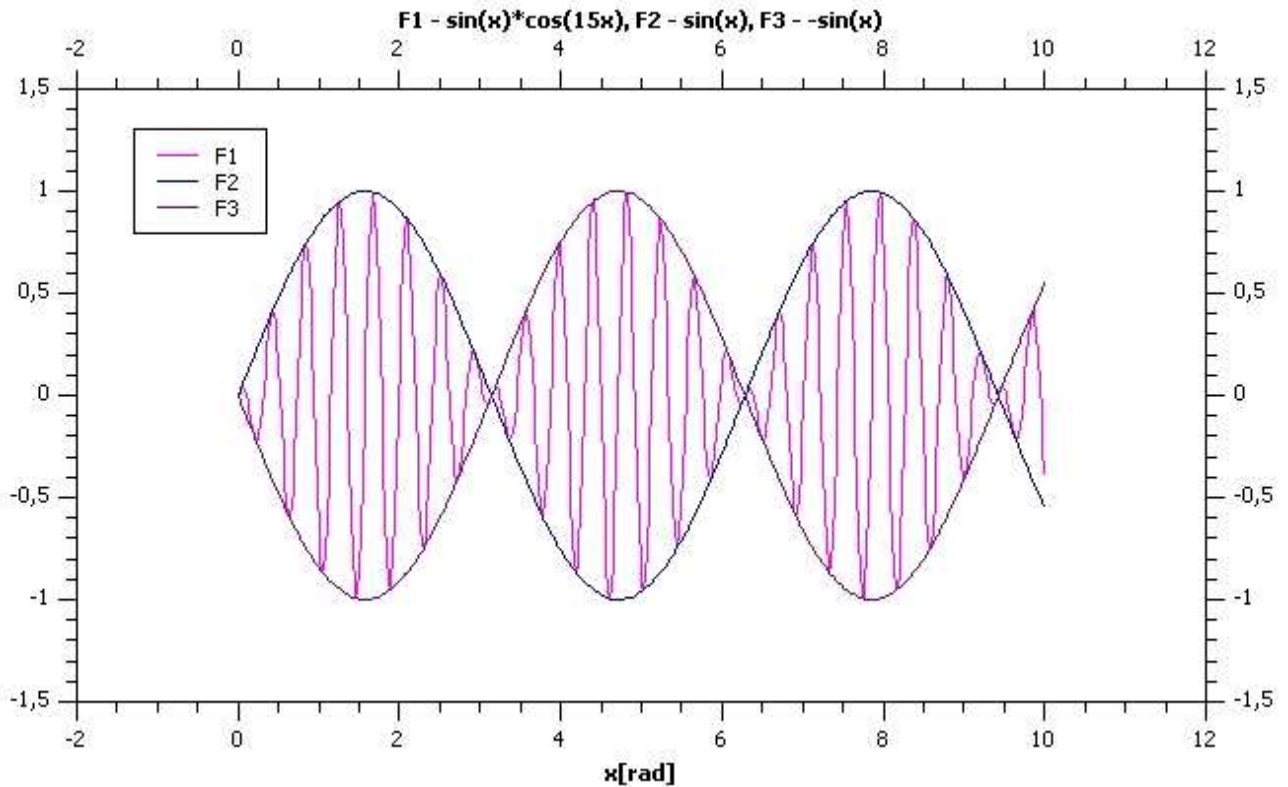
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} (t + T_r) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \pi , \quad (21)$$

odkiaľ pre periódou T_r rázov v sekundách dostávame

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} . \quad (22)$$

K tomu istému výsledku dospejeme, ak si uvedomíme, že uhlová frekvencia rázov je $\omega_2 - \omega_1$, *t. j.* dvojnásobok uhlovej frekvencie vystupujúcej v argumentoch goniometrických funkcií v hranatých zátvorkách (19) a (20). Polovica T_r sa rovná času t_0 výmeny energie medzi kyvadlami

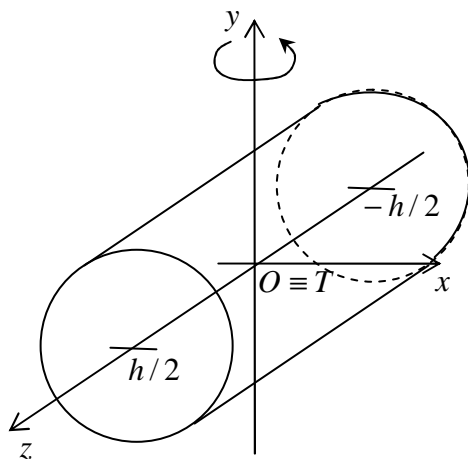
$$t_0 = \frac{\pi}{\omega_2 - \omega_1} . \quad (23)$$



Obr. 4.

Ako je zrejmé aj z Obr. 4 a zo vzorcov (19), (20), t_0 je čas, za ktorý kyvadlo, ktoré bolo v určitom okamihu v pokoji, nadobudne maximálnu výchylku svojho kmitania, kým druhé z kyvadiel prejde za tento časový úsek zo stavu kmitania s maximálnou výchylkou do stavu pokoja. Takéto stavy, keď jedno z kyvadiel je práve v pokoji a druhé práve kmitá s maximálnou výchylkou, nastávajú vždy, keď argumenty goniometrických funkcií vystupujúcich v hranatých zátvorkách rovníc (19), (20) sú rovné celočíselným násobkom $\pi/2$. Kyvadlá si teda za čas t_0 vymenia energiu a táto výmena prebieha neustále.

Moment zotrvačnosti a ťažisko kyvadiel:



Obr. 5.

Aby sme vedeli vypočítať teoretické hodnoty uhlových frekvencií ω_0 , ω_1 a ω_2 zo vzťahov (5) a (8), musíme odvodiť vzorce pre moment zotrvačnosti I kyvadiel vzhľadom na os otáčania a vzdialenosť d osi otáčania od ťažiska kyvadiel. Moment zotrvačnosti I určíme ako superpozíciu momentu zotrvačnosti I_1 valcového závažia vzhľadom na os otáčania a momentu zotrvačnosti I_2 tyče, na ktorej je závažie zavesené, počítaného tiež vzhľadom na os otáčania. Budeme pritom predpokladať, že závažie je upevnené na tyči tak, že rovina jeho dolnej podstavy splyva s rovinou dolného konca tyče. Pre lepšie pochopenie nášho postupu najskôr vypočítame moment zotrvačnosti I_V spojitého homogénneho valca o výške h a polomere podstavy R vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom valca

a kolmú na pozdĺžnu os valca, *t. j.* priamku spájajúcu stredy jeho podstáv. Túto priamku stotožníme s osou z a počiatok súradnicovej sústavy položíme do ťažiska valca. Situácia je vyobrazená na Obr. 5. Ako vidno, os y je os, vzhľadom na ktorú I_V počítame.

Za účelom nášho výpočtu sa na valec o hmotnosti m_V budeme pozerat' ako na súbor nekonečne veľa kruhových dosiek o polomere R a infinitezimálnej hrúbke dz uložených jedna vedľa druhej. Moment zotrvačnosti jednej takejto dosky je vzhľadom na os ležiacu v rovine dosky a rovnobežnú s osu y , *t. j.* prechádzajúcu aj ťažiskom dosky, daný vzorcom

$$dI_{V,T} = \frac{dm_V R^2}{4} = \frac{\rho\pi R^4}{4} dz, \quad (24)$$

kde dm_V je hmotnosť dosky a ρ je hustota materiálu, z ktorého je valec vyrobený. Potom moment zotrvačnosti dI_V dosky, ktorá je v polohe so súradnicou z , vzhľadom na os y určíme pomocou Steinerovej vety, ktorá znie:

Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os O neprechádzajúcu jeho ťažiskom sa rovná súčtu momentu zotrvačnosti tohto telesa vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom a s osou O rovnobežnou a súčinu jeho hmotnosti a štvorca kolmej vzdialenosti oboch osí.

V našom prípade teda

$$dI_V = dI_{V,T} + (dm_V)z^2 = \frac{\rho\pi R^4}{4} dz + \rho\pi R^2 z^2 dz. \quad (25)$$

Moment zotrvačnosti I_V potom získame súčtom nekonečného počtu infinitezimálnych príspevkov (25), *t. j.* integráciou (25) podľa z od $-h/2$ po $h/2$, čo dáva

$$I_V = \frac{m_V R^2}{4} + \frac{m_V h^2}{12}. \quad (26)$$

Teraz môžeme vypočítat' moment zotrvačnosti $I_{1,T}$ nášho závažia, teda valcovej vrstvy o vnútornom polomere r , vonkajšom polomere R a výške h vzhľadom na os prechádzajúcu jej ťažiskom a kolmú na jej pozdĺžnu os, keď od I_V danou rovnicou (26) odčítame moment zotrvačnosti valca o polomere r , výške h a hmotnosti $m_{V,r}$ vzhľadom na túto os, pričom použijeme tiež rovnicu (26) s výsledkom

$$I_{1,T} = \frac{m_V R^2}{4} + \frac{m_V h^2}{12} - \left(\frac{m_{V,r} r^2}{4} + \frac{m_{V,r} h^2}{12} \right) = \frac{\rho\pi h}{4} (R^4 - r^4) + \frac{mh^2}{12}, \quad (27)$$

kde $m = m_V - m_{V,r}$ je hmotnosť nášho závažia. S využitím Steinerovej vety a (27) moment zotrvačnosti závažia vzhľadom na os otáčania kyvadla je daný vyjadrením

$$I_1 = I_{1,T} + m \left(L - L_1 - \frac{h}{2} \right)^2 = \frac{\rho\pi h}{4} (R^4 - r^4) + \frac{mh^2}{12} + m \left(L - L_1 - \frac{h}{2} \right)^2, \quad (28)$$

kde L_1 je vzdialenosť osi otáčania od horného konca kyvadiel.

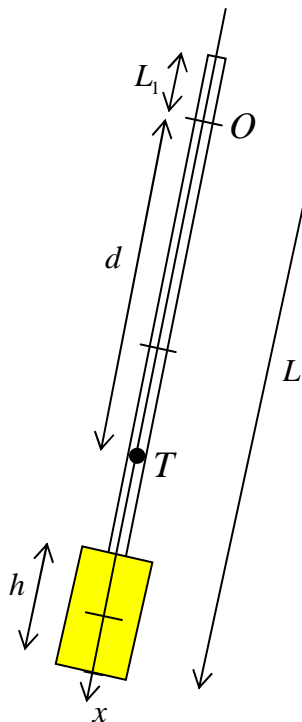
Pri výpočte momentu zotrvačnosti I_2 tyče, na ktorej je upevnené valcové závažie, vzhľadom na os otáčania kyvadiel postupujeme podobne ako pri výpočte I_1 . Tyč rozdelíme na nekonečne veľa kruhových dosiek o polomere r a infinitezimálnej hrúbke dz a v analógii s (24) a (25) vyjadríme moment zotrvačnosti ľubovoľnej takejto dosky, ktorá je v polohe z na osi z , vzhľadom na os otáčania kyvadla, ktorú stotožníme s osou y . Dostaneme výraz

$$dI_2 = \frac{\rho_i \pi r^4}{4} dz + \rho_i \pi r^2 z^2 dz, \quad (29)$$

kde ρ_i je hustota materiálu, z ktorého je tyč vyrobená. Vyjadrenie (29) budeme integrovať od $-L_1$ po $L_2 = L - L_1$ a dostaneme tak

$$I_2 = \frac{m_t r^2}{4} + \frac{m_t}{3L} (L_2^3 + L_1^3). \quad (30)$$

Súčet pravých strán (28) a (30) nám dáva vyjadrenie pre moment zotrvačnosti každého z našich kyvadiel vzhľadom na ich os otáčania.



Obr. 6.

Aby sme zistili vzdialenosť d osi otáčania kyvadla od jeho ťažiska, musíme zrejme nájsť polohu ťažiska kyvadla. Stále predpokladáme, že závažie je na tyči kyvadla upevnené tak, že rovina jeho dolnej podstavy je totožná s rovinou dolnej podstavy tyče. Pri určovaní d využijeme fakt, že vieme polohu ťažísk závažia a tyče vzhľadom na ich symetriu. Budeme predpokladať, že hmotnosti závažia a tyče sú sústredené do hmotných bodov umiestnených v týchto ťažiskách. Za účelom nášho výpočtu stotožníme pozdĺžnu os kyvadla, *t. j.* priamku prechádzajúcu stredmi jeho podstav, s osou x . Nech počiatok O osi x je v jej priesečníku s osou otáčania. Keďže ťažiská závažia a tyče, a teda aj hmotné body ich reprezentujúce, ležia na osi x , bude aj ťažisko kyvadla ležať na osi x , čo je aj zrejme zo symetrie kyvadiel. Situácia je znázornená na Obr. 6.

Vzhľadom na vyššie uvedené fakty polohu ťažiska T kyvadla vzhľadom na počiatok osi x O zistíme zo známeho vzorca pre napr. x -ovú súradnicu ťažiska použitého pre náš problém

$$x_T = d = \frac{m_t(L/2 - L_1) + m(L - L_1 - L/2)}{m_t + m}, \quad (31)$$

kde výrazy v okrúhlych zátvorkách sú (x -ové) súradnice ťažísk závažia a tyče, *t. j.* polohy týchto ťažísk na osi x vzhľadom na jej počiatok v bode O .

Úlohy:

Pomocou súboru meraní uvedenom nižšie vyšetrite kmity spriahnutej sústavy dvoch rovnakých kyvadiel v závislosti od zmeny väzbovej vzdialenosti a pružiny K od osi otáčania. Príslušné veličiny merajte pre väzbové vzdialenosti 45 cm, 50 cm a 55 cm.

1. Zmerajte konštantu pružiny k a parametre kyvadla potrebné na určenie I a d .
2. Určte uhlové frekvencie ω_0 , ω_1 , ω_2 pomocou nasnímania priebehu príslušných kmitov systémom IP Coach. Tieto čísla porovnajte s teoretickými výpočtami na základe rovníc (5) a (8).
3. Určte uhlovú frekvenciu Ω rázov pomocou nasnímania ich priebehu systémom IP Coach a porovnajte tieto Ω s hodnotami získanými podľa vzťahu $\Omega = \omega_2 - \omega_1$. Za ω_1 a ω_2 dosadzte jednak hodnoty získané v bode 2 pomocou systému IP Coach, jednak hodnoty teoretické zistené z rovníc (5) a (8).
4. Určte hodnotu času t_0 výmeny energie pomocou uhlovej frekvencie rázov Ω určenej v bode 3 nasnímaním ich priebehu pomocou systému IP Coach, výpočtom z rovnice (23), kde za ω_1 a ω_2 dosadzte jednak hodnoty získané v bode 2 pomocou systému IP Coach, jednak hodnoty teoretické zistené z rovníc (8), i meraním stopkami.
5. Pomocou vzťahu (33) vypočítajte koeficient väzby γ použijúc jednak uhlové frekvencie zistené nasnímaním kmitov pomocou systému IP Coach, jednak uhlové frekvencie vypočítané z rovníc (8) – bod 2. Použijúc tieto hodnoty γ a príslušnú uhlovú frekvenciu parciálnych kmitov ω_0 vypočítajte uhlovú frekvenciu rázov z približného vzorca (37).

Postup merania a vyhodnotenie výsledkov:

1. Určte moment zotrvačnosti kyvadla I a vzdialenosť d osi otáčania od ťažiska za predpokladu, že závažie je na tyči upevnené tak, že jeho rovina jeho dolnej podstavky je totožná s rovinou dolnej podstavky tyče. Použite teda vzorce (28), (30) a (31). Za týmto účelom zmerajte nasledovné parametre závažia a tyče:
 - (a) Odvážte závažie so šróbom, pomocou ktorého je k tyči upevnené, *t. j.* zistíte m , a bez šróbu – túto hmotnosť označte m' . Takisto odvážte tyč, čím určíte parameter m_t .
 - (b) Posuvným meradlom zmerajte vnútorný priemer závažia d , vonkajší priemer závažia D a z týchto údajov vypočítajte vnútorný polomer závažia r a vonkajší polomer závažia R . Ďalej posuvným meradlom zmerajte výšku závažia h .
 - (c) Metrom odmerajte dĺžku tyče L a vzdialenosť L_1 osi otáčania kyvadla od bližšieho (horného) konca tyče. Priemer tyče je zrejme totožný s vnútorným priemerom závažia r , ktorý už bol zistený v bode (b).
 - (d) Určte hustotu ρ materiálu, z ktorého je vyrobený valec, pomocou vzorca

$$\rho = \frac{m'}{V - V'} = \frac{m'}{(\pi R^2 - \pi r^2)h - \pi r_s^2(R - r)}, \quad (32)$$

kde r_s je polomer kanáliku, do ktorého sa zaskrutkováva šrób. Tento zistíte z merania priemeru kanáliku d_s posuvným meradlom.

2. Zistite konštantu pružiny k pomocou vzorca $F = kx$, kde F je veľkosť sily, pôsobením ktorej sa pružina predĺži o x . Na to zmerajte predĺženie pružiny x_i z jej relaxovanej polohy pre 5 záťaží odstupňovaných po 25 g. Začnite s $m_1 = 25$ g, čo je hmotnosť misky, na ktorú budete dávať závažia. Je zrejme, že bude $F_i = G_i = m_i g = k_i x_i$, $i = 1, \dots, 5$, kde $g = 9.81$ ms⁻². Je teda $k_i = m_i g / x_i$, $i = 1, \dots, 5$. Z takto zistených hodnôt k_i nájdite aritmetický priemer a tento použite pri výpočtoch uhlových frekvencií ω_0 a ω_2 z rovníc (5) a (8).
3. Upevnite pružinu ku kyvadlám tak, aby vzdialenosť jej bodov upevnenia na kyvadlá a osi otáčania, *t. j.* väzbová vzdialenosť a , bola 45 cm.
4. Upevnite senzor na snímanie kmitov na stenu a pripojte ho k počítaču. Otvorte IP Coach.
5. Parciálnu frekvenciu ω_0 budeme merať, keď jedno kyvadlo upevníme v jeho rovnovážnej polohe a druhé vychýlime o uhol $|\varphi| \leq 5^\circ$ a pustíme. Frekvencie súbežných kmitov ω_1 budeme merať v situácii, keď obe kyvadlá vychýlime na tú istú stranu o rovnaký uhol $|\varphi| \leq 5^\circ$ a pustíme. Pri protibežných kmitoch zase vychýlime kyvadlá na opačné strany o rovnaký uhol $|\varphi| \leq 5^\circ$ a pustíme. Nasnímavanie kmitov kyvadiel začne po kliknutí na tlačítko **Štart** – zelený krúžok so šípkou – v okne IP Coach a skončí automaticky po uplynutí predvolenej doby snímania.
6. Rozlíšenie na zvislej osi grafu so zobrazeným kmitaním – signálom – nastavíme na maximálne možné kliknutím pravým tlačítkom na myši na tento graf a voľbou **Lupa automaticky**. Ďalej postupujeme tak, že opäť pravým tlačítkom na myši klikneme na graf so zobrazeným signálom. Ak chceme tento signál vymazať, klikneme na **Vymazať hodnoty**. Ak chceme signál spracovať, klikneme na **Spracuj/Analyzuj**. Zvolíme **Fitovanie funkciou**. Zobrazí sa panel s názvom **Fitovanie**. V ňom vyberieme **Typ funkcie** – sínusoidu $a \sin(bx + c) + d$, kde x predstavuje čas v sekundách. Potom klikneme na **Odhadnúť** a **Vylepšiť**. Takto dostaneme dve krivky – graf pôvodného signálu a sínusoidu, ktorou ho fitujeme – fitováciu sínusoidu. Taktiež sa ukážu hodnoty koeficientov a , b , c a d , ktoré odpovedajú fitovacej sínusoide. Je zrejme, že uhlovej frekvencii kmitov, ktorú chceme zistiť, odpovedá koeficient b . Panel **Fitovanie** zatvoríme kliknutím na **Zrušiť**.

7. Uhlové frekvencie zistené v bodoch 5 a 6, ktoré označíme ω_{0IP} , ω_{1IP} , ω_{2IP} porovnáme s príslušnými uhlovými frekvenciami vypočítanými z rovníc (5) a (8), ktoré označíme ω_0 , ω_1 , ω_2 .
8. Kliknutím na tlačítko s hodinami v IP Coach dostanete panel, na ktorom nastavte čas okolo 100 s. Kým jedno kyvadlo je v pokoji, druhé vychýľte o uhol $|\varphi| \leq 5^\circ$ a pustite. Nasnímajte priebeh kmitov – rázy. Pre určenie ich uhlovej frekvencie potrebujeme zistiť ich periódu v sekundách, čo je doba trvania jedného rázu. Z nasnímaného grafu túto hodnotu odčítame tak, že klikneme pravým tlačítkom na myši na graf rázov a zvolíme postupne **Spracuj/Analyzuj** a **Vyber/Odstráň dáta**. Ukáže sa panel **Vybrať/Odstrániť Dáta**, na ktorom je náš graf. Kliknutím na tento graf a podržaním ľavého tlačítka na myši na zvislej čiarkovanej čiare môžeme túto čiaru posúvať a tak zhruba určiť periódu rázov, *t. j.* vzdialenosť medzi dvoma susednými minimami signálu. Podobný efekt môžeme dosiahnuť aj tak, že po kliknutí na **Spracuj/Analyzuj** zvolíme aplikáciu **Sklon**, kde pohybujeme osovým krížom po grafe v okne **Sklon grafu (Gradient)** len posúvaním myši bez stlačenia pravého, či ľavého tlačítka. Z jedným alebo druhým spôsobom zistenej periódy rázov T_r ľahko zistíme ich uhlovú frekvenciu $\Omega_{IP1} = 2\pi/T_r$. Túto hodnotu porovnáme s hodnotou zistenou výpočtom používajúc uhlové frekvencie normálnych kmitov jednak zistených v bodoch 5 a 6 pomocou systému IP Coach, *t. j.* $\Omega_{IP2} = \omega_{2IP} - \omega_{1IP}$, jednak používajúc uhlové frekvencie normálnych kmitov vypočítané zo vzorcov (8), čím dostaneme $\Omega = \omega_2 - \omega_1$.
9. Zo vzťahu (23) vypočítajte čas výmeny energie používajúc uhlové frekvencie normálnych kmitov ω_{1IP} , ω_{2IP} nájdené pomocou systému IP Coach – čas t_{0IP} , uhlové frekvencie ω_1 , ω_2 zistené výpočtom zo vzorcov (8) – čas t_0 , uhlovú frekvenciu rázov nájdenú z ich periódy T_r určenej z nasnímania rázov podľa bodu 8 – čas t_{0razy} . Napokon zistite čas výmeny energie aj priamo meraním stopkami – zmerajte čas najmenej piatich výmien energie, takže čas výmeny energie bude potom pomer tohto času a počtu výmien energie – čas t_{0stop} .
10. Pomocou rovníc (8) nájdeme vyjadrenie pre koeficient spriahnutia

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (33)$$

Tento vypočítajte používajúc ako uhlové frekvencie normálnych kmitov zistené pomocou systému IP Coach ω_{1IP} , ω_{2IP} v bodoch 5 a 6, tak teoretické hodnoty uhlových frekvencií normálnych kmitov ω_1 , ω_2 vypočítané zo vzťahov (8). Výsledné koeficienty označte γ_{IP} a γ .

11. Zo vzťahov (5) a (8) možno nájsť súvis medzi parciálnou frekvenciou sústavy ω_0 , normálnymi frekvenciami sústavy ω_1 , ω_2 a koeficientom väzby γ . Príslušný výpočet poskytuje vzťahy:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(1 - \gamma) \quad (34)$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2(1 + \gamma). \quad (35)$$

Potom zrejme uhlová frekvencia rázov závisí od koeficientu väzby γ , a to prostredníctvom vzťahu

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0(\sqrt{1 + \gamma} - \sqrt{1 - \gamma}). \quad (36)$$

Pri slabej väzbe vzťah (36) môžeme písať v tvare

$$\Omega_p = \omega_2 - \omega_1 \doteq \omega_0 \gamma. \quad (37)$$

Vypočítajte uhlovú frekvenciu rázov z tohto vzorca jednak používajúc γ_{IP} a ω_{0IP} – dostaneme

Ω_{pIP} , jednak ω_0 a γ vypočítané na základe vzťahov (8) – dostaneme Ω_p . Výsledky porovnajte s hodnotami uhlovej frekvencie rázov zistenými v bode 8.

12. Body 1-11 zopakujte ešte pre väzbové vzdialenosti 50 cm a 55 cm.

13. Namerané hodnoty zapisujte do dvoch tabuliek. Tabuľka 1 bude obsahovať veličiny získané z nasnímania kmitov pomocou systému IP Coach, v prípade merania času výmeny energie medzi kyvadlami zahrňte do tejto tabuľky aj čas meraný pomocou stopiek t_{0stop} . Tabuľka 2 bude obsahovať parciálnu uhlovú frekvenciu a uhlové frekvencie vypočítané zo vzorcov (5) a (8) a veličiny zistené pomocou týchto uhlových frekvencií.

Tabuľka 1.

a [cm]	ω_{0IP} [s ⁻¹]	ω_{1IP} [s ⁻¹]	ω_{2IP} [s ⁻¹]	Ω_{IP1} [s ⁻¹]	Ω_{IP2} [s ⁻¹]	t_{0IP} [s]	t_{0razy} [s]	t_{0stop} [s]	γ_{IP}	Ω_{pIP} [s ⁻¹]

Tabuľka 2.

a [cm]	ω_0 [s ⁻¹]	ω_1 [s ⁻¹]	ω_2 [s ⁻¹]	Ω [s ⁻¹]	t_0 [s]	γ	Ω_p [s ⁻¹]

Kontrolné otázky:

1. Odvodte vzťahy pre momenty elastických síl pôsobiace na obe kyvadlá, ktoré sú dané druhými členmi na pravých stranách rovníc (1) a (2).
2. Na základe rovníc (15), (16) a príslušných počiatočných podmienok popíšte, aké sú to normálne kmity sústavy dvoch rovnakých spriahnutých kyvadiel?
3. Aké sú to parciálne kmity sústavy?
4. Vysvetlite bez počítania, prečo súbežné a protibežné kmity sú normálnymi kmitmi.
5. Prečo je $\omega_2 > \omega_1$?
6. Čo je koeficient väzby a aká je jeho interpretácia?
7. Odvodte vzorce (19) a (20). Čím je daný vznik rázov? Čo je doba výmeny energie medzi dvoma rovnakými spriahnutými kyvadlami?
8. Aké by boli normálne kmity sústavy troch spriahnutých kyvadiel?
9. Odvodte vzorec vyjadrujúci moment zotrvačnosti homogénneho valca vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom valca a kolmú na priamku spájajúcu stredy jeho podstav.

LITERATÚRA

[1] Dionýz Ilkovič, *Fyzika*, SVTL Bratislava, SNTL Praha, 1958

[2] <http://fyzika.uniza.sk/~trpisova>

Doplnená a upravená úloha zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahošlav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc., “*Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky*”, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003