2 Základy vektorového počtu

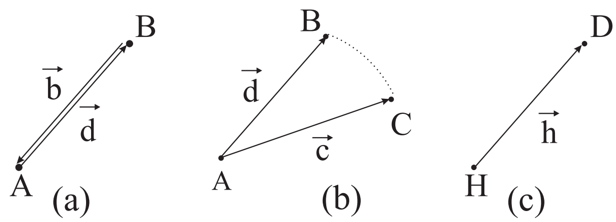
Fyzikálne veličíny sa dajú rozdeliť do dvoch skupín. Prvú skupinu fyzikálnych veličín tvoria tie, pre ktorých jednoznačné určenie postačí poznať veľkosť danej fyzikálnej veličiny so zodpovedajúcou jednotkou, napr. určenie dĺžky $l = 2\,m$, hmotnosti $m = 3\,kg$, objemu $V = 7\,m^3$. Druhú skupinu fyzikálnych veličín tvoria tie, kde pre ich jednoznačné určenie nestačí poznať len veľkosť a jednotku, napr. rýchlosť vetra je $v = 5\ m/s$ alebo na teleso pôsobí sila $F = 3\,N$. Pre určenie týchto veličín je potrebné poznať aj smer. Prvej skupine fyzikálnych veličín hovoríme, že sú **skalárne fyzikálne veličiny**, druhú skupinu veličín zaraďujeme k **vektorovým fyzikálnym veličinám**.

2.1 Skalárne a vektorové fyzikálne veličiny

Skalárne fyzikálne veličiny - **skaláry** (z lat. *scalae* - stupnice) sú jednoznačne určené veľkosťou číselnej hodnoty a jednotkou, v ktorej sa príslušná veličina meria. Medzi skalárne veličiny patrí napr. čas, teplota, hustota a iné. Hodnotu skaláru znázorňujeme bodom na príslušnej stupnici, napr. bodom na časovej stupnici (časovej osi) alebo na ciferníku hodín, bodom na teplotnej stupnici, bodom na dĺžkovej stupnici (stupnici dĺžkového meradla). Skalárne fyzikálne veličiny označujeme písmenami, t. j. dohodnutými značkami príslušných veličín. Pre operácie so skalárnymi veličinami platia pravidlá algebry.

Vektorové fyzikálne veličiny - **vektory** (z lat. *vektor* - nosič, jazdec) sú jednoznačne určené veľkosťou (číselnou hodnotou a jednotkou) a smerom. Medzi vektorové fyzikálne veličiny patrí napr. sila, moment sily, rýchlosť a iné. Graficky vektor znázorňujeme **orientovanou úsečkou**. Priamka preložená jej koncovými bodmi sa nazýva vektorová priamka. Vektorová priamka a šípka označujú smer a dĺžka úsečky znázorňuje veľkosť vektora. Je potrebné si uvedomiť, že veľkosť vektora je skalár. Ako symbol pre vektory sa v tlači používa hrubé písmeno, (napr. **F** - sila) alebo vektory označujeme šípkou nad písmenom fyzikálnej veličiny $\vec{F}$ (takýmto spôsobom budeme aj my označovať vektory v tejto učebnici).

Na obrázku 2.1(a) je znázornený vektor posunutia $\vec{d}$, ktorý charakterizuje zmenu polohy ľubovoľného telesa (napr. auta) z miesta A do miesta B. Dĺžka úsečky AB znázorňuje vo zvolenej mierke vzdialenosť začiatočného a koncového bodu pri pohybe a nazýva sa **veľkosť posunutia** d (budeme označovať $\left|\vec{d}\right|$). Smer polpriamky AB **určuje smer posunutia**. V prípade posunutia z miesta B do miesta A ide o opačný smer, a teda vektor $\vec{b} = -\vec{d}$, vektor $\vec{b}$ je rovnako veľký ako vektor $\vec{d}$, ale je opačne orientovaný (hovoríme, že vektor $\vec{b}$ je **opačným vektorom** k vektoru $\vec{d}$). Vektory, ktoré sú rovnobežné s jednou priamkou nazývame **kolineárne**. Posunutie z miesta A do miesta C má rovnakú veľkosť, ale rôzny smer, preto vektory $\vec{c}$ a $\vec{d}$ aj keď majú rovnakú veľkosť, nie sú rovnaké (obr. 2.1(b)). Dva vektory považujeme za rovnaké len vtedy, ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (vektory $\vec{d}$ a $\vec{h}$ (obr. 2.1(c))). Vektory rovnobežné s jednou rovinou sa nazývajú **komplanárne**.



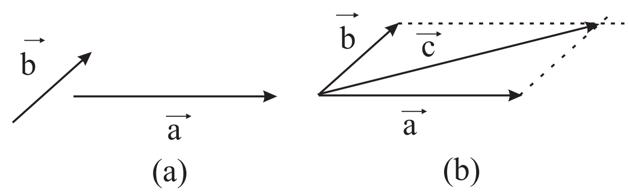
Obrázok 2.1: a) Posunutie z miesta A do miesta B charakterizované vektorom $\vec{d}$. Posunutie z miesta B do A je vektor $\vec{b}$ (príklad kolineárnych vektorov). b) Znázornenie posunutia z A do C reprezentované vektorom $\vec{c}$ s rovnakou veľkosťou ako $\vec{d}$, ale rôznym smerom (príklad komplanárnych vektorov). c) Posunutie z miesta H do D je vektor $\vec{h}$, ktorý má rovnakú veľkosť a smer ako vektor $\vec{d}$, t. j. je to ten istý vektor $\vec{d}$.

2.2 Operácie s vektormi

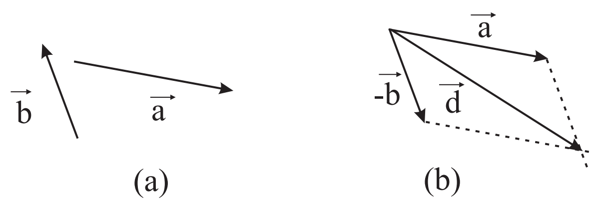
Pre počítanie s vektormi platia odlišné pravidlá ako pre počítanie s reálnymi číslami. Výsledkom vektorového **súčtu dvoch vektorov** $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\ . \tag{2.1}$$

Grafický súčet vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ (obr. 2.2(a)) je možné znázorniť dvoma spôsobmi. Prvým spôsobom sa posunú vektory do spoločného počiatku (obr. 2.2(b)). Potom cez koncové body vektorov vedieme rovnobežky s príslušnými vektormi. Spojením počiatočného bodu vektorov s priesečníkom rovnobežiek dostávame výsledný vektor $\vec{c}$ ako súčet vektorov $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Pri druhom spôsobe sa do koncového bodu prvého vektora umiestni začiatočný bod druhého vektora (obr. 2.2(c)). Výsledný vektor $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ je určený začiatočným bodom prvého vektora a koncovým bodom druhého vektora. Súčet vektorov je komutatívna operácia, čiže výsledok súčtu nezávisí od poradia vektorov: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Ak chceme spočítať viacero vektorov, spočítavame ich postupne, t. j. k súčtu prvých dvoch pripočítame tretí vektor atď.



Obrázok 2.2: Grafický súčet vektorov.



Obrázok 2.3: Grafický rozdiel vektorov.

Rozdiel vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ môžeme definovať ako súčet vektora $\vec{a}$ s opačne orientovaným vektorom k $\vec{b}$ (Vektor $-\vec{b}$ má rovnakú dĺžku ako vektor $\vec{b}$, ale má opačný smer ako vektor $\vec{b}$.)

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \, . \tag{2.2}$$

Graficky rozdiel môžeme znázorniť analogickým postupom ako súčet, čo vyplýva priamo zo zápisu rozdielu. Ak graficky získame opačne orientovaný vektor $-\vec{b}$ k vektoru $\vec{b}$, celá operácia rozdielu sa zmení na súčet dvoch vektorov. Rovnako aj pri odčítaní dvoch vektorov je možné postupovať obidvoma spôsobmi (obr. 2.3). Sčítanie alebo odčítanie vektorov má vo fyzike zmysel len pre fyzikálne veličiny rovnakého druhu (napr. len pre sily, momenty síl atď.)

Násobenie vektora $\vec{a}$ kladným číslom n dáva vektor $\vec{c}$ rovnakého smeru, ktorého veľkosť sa rovná n-násobku veľkosti násobeného vektora

$$\vec{c} = n\,\vec{a}\,. \tag{2.3}$$

Skalárny násobok vektora je vektorovou veličinou, t. j. keď násobíme silu reálnym číslom, tento súčin je opäť sila. Pri násobení vektora záporným číslom ($n < 0$) má výsledný vektor $\vec{c}$ opačný smer ako vektor $\vec{a}$. Veľkosť vektora $|\vec{c}|$ je $|\vec{c}| = n\,|\vec{a}|$, t. j. absolútna veľkosť vektora je n-krát väčšia ako veľkosť vektora $\vec{a}$.

Každý vektor je možné vždy vyjadriť ako skalárny násobok tzv. **jednotkového vektora** $\vec{a}^{\,0}$ a skalárnej hodnoty, ktorá je reprezentovaná jeho absolútnou hodnotou

$$\vec{a} = |\vec{a}|\;\vec{a}^{\,0} = a\,\vec{a}^{\,0}\,. \tag{2.4}$$

Jednotkový vektor je definovaný ako vektor, ktorého veľkosť, a teda absolútna hodnota je rovná jednej. Označuje sa zvyčajne symbolmi $\vec{\nu}$, $\vec{\rho}$, $\vec{a}^{\,0}$, $\vec{b}^{\,0}$ alebo v prípade jednotkových vektorov totožných s kladnými smermi súradnicového systému xyz $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Pre veľkosť jednotkových vektorov $\vec{a}^{\,0}$, resp. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ teda platí

$$\left|\vec{a}^{\,0}\right| = \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1\,. \tag{2.5}$$

Tak, ako je možné súčtom vektorov vytvoriť výsledný vektor, existuje inverzný postup, pri ktorom je pomocou **rozkladu vektora do daných smerov** možné získať zložky vektora. Takýto rozklad je možné urobiť do ľubovoľných smerov, ale najčastejšie aj z praktických dôvodov sa používa rozklad do smerov totožných so smerom osí súradnicového systému, v ktorom je vektor definovaný.

Ak máme vektor $\vec{a}$ v dvojrozmernom súradnicovom systéme x, y, rozklad vektora do daných smerov (napr. určených polpriamkami x, y) robíme pomocou vektorového rovnobežníka, t. j. hľadáme také dva vektory, aby ich zložením vznikol vektor $\vec{a}$. Vektory $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ predstavujú kolmé priemety vektora $\vec{a}$ do osí x a y súradnicovej sústavy a nazývajú sa zložky vektora (obr. 2.4), pričom platí

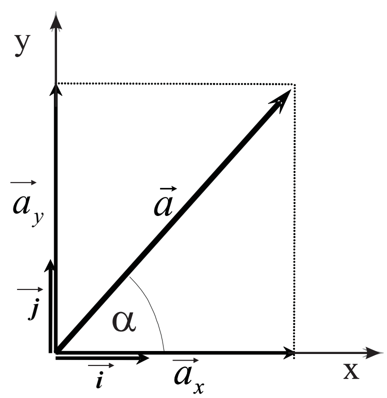
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y\,. \tag{2.6}$$

Veľkosť vektora možno na základe predchádzajúcej definície vypočítať pomocou vzťahu

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\ . \tag{2.7}$$

Veľkosť vektora je vždy kladná hodnota. Je zrejmé, že vektor $\vec{a}$ v takomto súradnicovom systéme zviera s osou x uhol α. Zložky vektora $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ sa potom dajú vyjadriť ako kolmé priemety takto

$$\begin{aligned} \vec{a}_x &= |\vec{a}|\cos\alpha\,\vec{i}\,, \\ \vec{a}_y &= |\vec{a}|\sin\alpha\,\vec{j}\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$



Obrázok 2.4: Znázornenie vektora $\vec{a}$, jeho zložiek $\vec{a}_x$ a $\vec{a}_y$ v pravouhlej súradnicovej sústave a jednotkových vektorov $\vec{i}$ a $\vec{j}$ v smere osí x a y.

Pri vyjadrovaní fyzikálnych zákonov a veličín sa často stretávame so skalárnym a vektorovým súčinom. Samotný názov napovedá, že výsledkom skalárneho súčinu je skalár a výsledkom vektorového súčinu je vektor.

Výsledkom **skalárneho súčinu** vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je hodnota, ktorú dostaneme ako súčin absolútnych hodnôt vektorov a kosínusu uhla, ktorý zvierajú

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\alpha = a\,b\,\cos\alpha\ . \tag{2.9}$$

Z takejto definície vyplýva, že v prípade kolmých vektorov je výsledkom skalárneho súčinu nulová hodnota a v prípade rovnobežných vektorov je výsledkom súčin veľkostí obidvoch vektorov $a\,b$. Skalárny súčin vektora so sebou samým je

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^{\,2} = a\,a\,\cos\alpha = a^2\ . \tag{2.10}$$

Ak vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ sú v trojrozmernom Euklidovom súradnicovom systéme (systém troch navzájom kolmých osí v priestore pretínajúcich sa v jednom bode) definované pomocou zložiek $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ a $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$, možno ich zapísať ako lineárnu kombináciu jednotkových vektorov $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\ , \\ \vec{b} &= b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\ . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Skalárny súčin je možné vyjadriť nasledujúco

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k})\cdot(b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) \\ &= a_x\,b_x\,\vec{i}\cdot\vec{i} + a_x\,b_y\,\vec{i}\cdot\vec{j} + a_x\,b_z\,\vec{i}\cdot\vec{k} \\ &+ a_y\,b_x\,\vec{j}\cdot\vec{i} + a_y\,b_y\,\vec{j}\cdot\vec{j} + a_y\,b_z\,\vec{j}\cdot\vec{k} \\ &+ a_z\,b_x\,\vec{k}\cdot\vec{i} + a_z\,b_y\,\vec{k}\cdot\vec{j} + a_z\,b_z\,\vec{k}\cdot\vec{k} \\ &= a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\ . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Násobenie členov so zmiešanými zložkami ako $a_x\,b_y$, $a_x\,b_z$ atď. je nulové, pretože skalárne súčiny vzájomne kolmých jednotkových vektorov sú rovné nule. Pre skalárny súčin dvoch vektorov platí komutatívny zákon

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\ . \tag{2.13}$$

Výsledkom **vektorového súčinu** dvoch vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$. Symbolicky sa vektorový súčin zapíše takto

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\ . \tag{2.14}$$

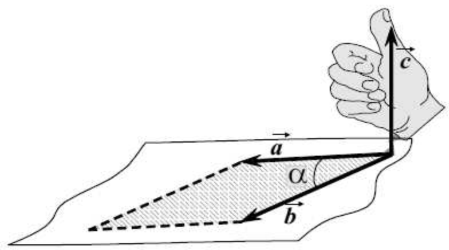
Výsledný vektor $\vec{c}$ je kolmý na rovinu určenú vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Vektor $\vec{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora súčinu s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. Praktickejší spôsob pre určenie smeru je definícia pomocou pravidla pravej ruky, podľa ktorej vektor $\vec{c}$ smeruje na tú stranu roviny, na ktorú ukazuje vztýčený palec, ak zahnuté prsty pravej ruky smerujú po kratšom oblúku od prvého vektora k druhému (obr. 2.5).

Pre veľkosť vektora $\vec{c}$ platí

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = a\,b\,\sin\alpha\ . \tag{2.15}$$

Graficky veľkosť vektora zodpovedá obsahu rovnobežníka určeného vektormi $\vec{a}$ a $\vec{b}$. Ak $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor v smere vektora $\vec{c}$ potom môžeme vektorový súčin zapísať tiež v tvare

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = a\, b \sin\alpha\, \vec{\nu}\ . \tag{2.16}$$



Obrázok 2.5: Vektorový súčin dvoch vektorov a smer výsledného vektora.

Ak sú jednotkové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ totožné so smermi osí pravouhlého súradnicového systému x, y, z, môžeme pre vektorový súčin medzi jednotkovými vektormi písať

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0} & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}\ . \end{array} \tag{2.17}$$

V prípade, že je známy rozklad vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$ v trojrozmernom súradnicovom systéme pomocou zložiek, ako je uvedené vo vzťahu (2.11) je možné vektorový súčin vyjadriť nasledujúco

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}) \times (b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}) = \\ &= a_x\,b_x\,\vec{i}\times\vec{i} + a_x\,b_y\,\vec{i}\times\vec{j} + a_x\,b_z\,\vec{i}\times\vec{k} + a_y\,b_x\,\vec{j}\times\vec{i} + a_y\,b_y\,\vec{j}\times\vec{j} + \\ &+ a_y\,b_z\,\vec{j}\times\vec{k} + a_z\,b_x\,\vec{k}\times\vec{i} + a_z\,b_y\,\vec{k}\times\vec{j} + a_z\,b_z\,\vec{k}\times\vec{k} \\ &= (a_y\,b_z - a_z\,b_y)\,\vec{i} + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\,\vec{j} + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\,\vec{k}\ , \end{aligned} \tag{2.18}$$

pričom pre získanie výsledného vzťahu pre vektorový súčin sme využili poznatky o vektorovom súčine jednotkových vektorov zo vzťahu (2.17). Vektorový súčin môžeme zapísať aj pomocou determinantu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

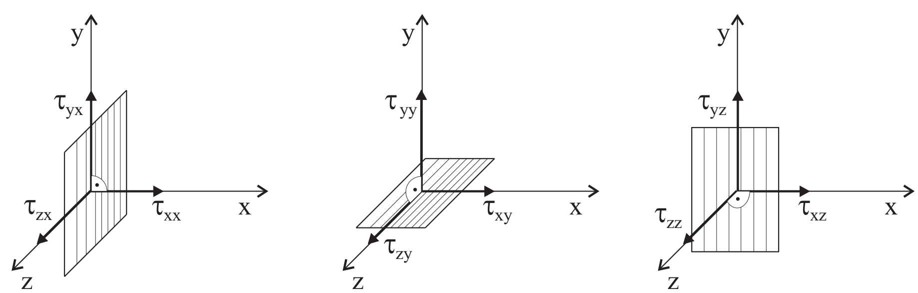
Pre vektorový súčin na rozdiel od skalárneho súčinu neplatí komutatívny zákon. Zmenou poradia sa zmení aj smer výsledného vektora

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) . \tag{2.20}$$

Okrem skalárnych a vektorových fyzikálnych veličín poznáme aj tzv. **tenzorové** fyzikálne veličiny. Sú to veličiny, ktoré charakterizuje 9 (3^2, prípadne $3^3 = 27$) zložiek. Ak napríklad rozložíme vektor napätia σ na jednotlivé napätia v smere osí x, y, z a to jednak normálové pôsobiace kolmo k rovine súradníc a jednak na dotyčnicové (tangenciálne) pôsobiace v smere osí súradníc a všetky napätia označíme znakom τ s dvoma indexami, pričom prvý udáva smer osí súradníc, v ktorom napätie pôsobí a druhý udáva smer, ku ktorému je rovina, v ktorej napätie pôsobí kolmá (druhý index určuje smer normály k rovine, v ktorej napätie pôsobí) dostaneme systém zložiek, ktoré je možné usporiadať do matice

$$\tau_{pq} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} , \tag{2.21}$$

pričom τ_{xx} predstavuje napätie v smere osi x v rovine kolmej k osi x, teda normálové napätie, naproti tomu τ_{xy} je napätie v smere osi x ale v rovine kolmej k osi y, teda tangenciálne napätie v rovine xz v smere osi x (obr. 2.6).



Obrázok 2.6: Zložky tenzora napätia.

V tenzorovom chápaní veličín *skalár* predstavuje tenzor nultého rádu, *vektor* α_i so zložkami $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ je tenzor prvého rádu, tenzor druhého rádu bol už spomínaný (vzťah 2.21), tenzor tretieho rádu α_{pqs} má všeobecne $3^3 = 27$ zložiek, pričom indexy p, q, s predstavujú ktorékoľvek z písmen x, y, z.