

5 Trecie sily

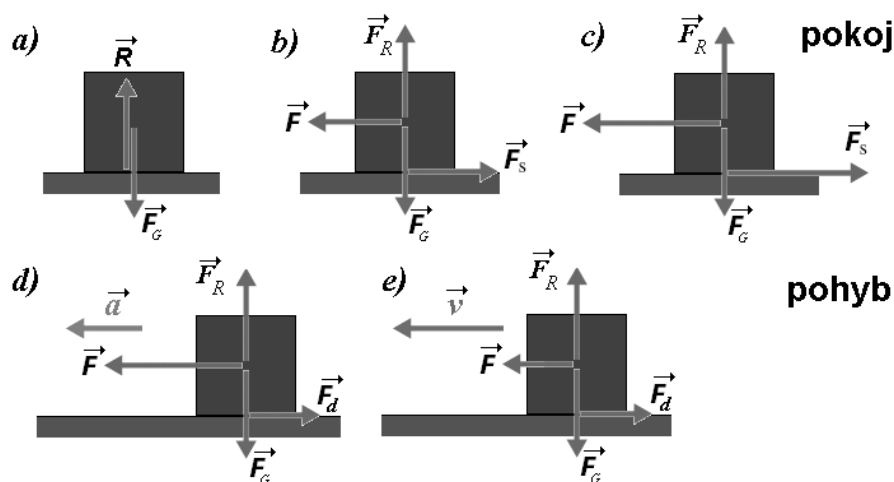
S trením sa stretávame doslova na každom kroku. Bez trenia by nebola možná naša chôdza, pohyb auta či bicykla, nemohli by sme písať perom, prípadne ho držať v ruke. Skrutky by nespĺňali svoj účel, utkaná látka by sa rozpadla a uzly by sa rozviazali. Na druhej strane vplyvom trenia v motore a hnacích mechanizmoch sa spotrebováva okolo 20 % benzínu v automobile navyše.

Podstatou vzniku trecích síl je vzájomné pôsobenie povrchových atómov dotýkajúcich sa telies. Skutočná mikroskopická dotyková plocha je omnoho menšia ako zdanlivá makroskopická styčná plocha (niekedy dokonca až 10^4 násobne). Pri pohybe telesa po podložke dochádza najprv ku krátkemu spojeniu a následne sklúznutiu stykových plôšok. Nepretržitost' opakovania šmyku a kontaktu stykových plôšok môže byť niekedy sprevádzané rôznymi zvukmi, napr. pri šmyku kolies na suchej dlažbe, pri škrabaní nechtom po tabuli, ťahmi sláčika po husľovej strune atď. Z pohľadu druhov pohybu, pri ktorých sa trenie prejavuje, rozlišujeme trenie šmykové a valivé.

5.1 Šmykové trenie

Na nasledujúcom myšlienkovom experimente si objasníme mechanizmy pôsobenia a vlastnosti síl trenia. Predstavme si kváder, ktorý leží na podlahe. Snažíme sa ho tlačiť vodorovne stálou silou, ale kváder sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila, ktorou na kváder pôsobíme je kompenzovaná vodorovnou brzdnu silou, ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste dna kvádra. Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na kváder pôsobili. Existuje istá veľkosť sily, ktorú už brzdna sila kvádra nedokáže vykompenzovať a kváder sa pohne. Trecia sila, ktorou bude podlaha pôsobiť na pohybujúci sa kváder, bude ho postupne spomaľovať, až kým sa kváder zastaví. Keby sme chceli, aby sa

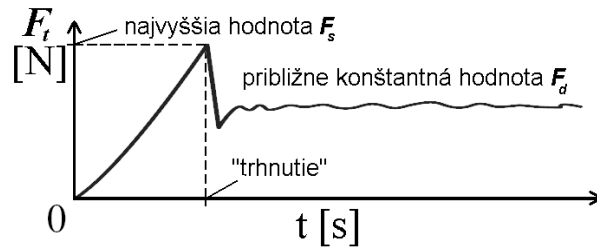
kváder pohyboval po podlahe konštantnou rýchlosťou, museli by sme ho tlačiť alebo ťahať silou, ktorá má rovnakú veľkosť ale opačný smer ako trecia sila, ktorá bráni jeho pohybu. Celá situácia je podrobne rozobraná z fyzikálneho hľadiska na obrázku 5.1. Na začiatku (a), kedy je kváder v pokoji, pôsobí na kváder tiažová sila Zeme \vec{F}_G , ktorá je vykompenzovaná reakciou \vec{R} tlakovej sily podložky na kváder.



Obrázok 5.1: Pôsobenie síl na kváder. (a - c) Kváder je v pokoji, (d - e) kváder sa pohybuje. Keď je kváder v pokoji, vonkajšia sila \vec{F} je kompenzovaná rovnako veľkou, opačne orientovanou silou statického šmykového trenia \vec{F}_s . S rastúcou silou \vec{F} narastá aj veľkosť sily \vec{F}_s až do najvyššej hodnoty (c). Potom nastane “trhnutie” a kváder sa začne pohybovať so zrýchlením \vec{a} (d). Ak chceme, aby sa kváder pohyboval rovnomerne rýchlosťou \vec{v} , musíme veľkosť sily \vec{F} znížiť tak, aby kompenzovala dynamickú šmykovú treciu silu \vec{F}_d (e).

V ďalších obrázkoch sme reakciu \vec{R} pre lepšiu názornosť presunuli po vektorovej priamke do ťažiska kvádra a označili \vec{F}_R . Ak začneme na kváder pôsobiť silou \vec{F} (b) a snažíme sa ho odtlačiť doľava, ako odozva vznikne **statická šmyková trecia sila** \vec{F}_s , ktorá smeruje vpravo a kompenzuje silu \vec{F} . Kváder je stále v pokoji. So zväčšovaním sily \vec{F} narastá aj sila \vec{F}_s (c) až po určitú kritickú hodnotu, kedy sa kváder “trhne”, stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa so zrýchlením \vec{a} pohybovať smerom vľavo (d). V tomto prípade už ale kváder brzdí **dynamická (kinetická) šmyková trecia sila** \vec{F}_d , ktorá má menšiu veľkosť ako najväčšia prípustná hodnota veľkosti statickej šmykovej trecej sily pôsobiacej len v pokoji. Ak by sme chceli, aby sa kváder pohy-

boval rovnomerne, museli by sme v okamihu pohnutia kvádra veľkosť našej pôsobiacej sily znížiť.



Obrázok 5.2: Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je kváder v pokoji cez začiatok pohybu až po približne rovnomerný pohyb.

Obrázok 5.2 ukazuje závislosť zväčšujúcej sa pôsobiacej sily na kváder, ktorý chceme uviesť do pohybu, až do času, kedy nastane “trhnutie” kvádra a následné zmenšenie pôsobiacej sily, keďže chceme kváder tlačiť približne rovnomerne.

Výsledky nášho myšlienkového experimentu môžeme zhrnúť nasledujúco:

- Ak začneme pôsobiť silou \vec{F} na teleso, ktoré ostáva v pokoji, statická šmyková trecia sila \vec{F}_s pôsobiaca na teleso má rovnakú veľkosť ako priemet sily \vec{F} do podložky a je voči nej opačne orientovaná.
- Veľkosť sily \vec{F}_s dosahuje maximálnu hodnotu $F_{s,max}$ danú vzťahom

$$F_{s,max} = \mu_s F_n , \quad (5.1)$$

kde μ_s je **koeficient (faktor) statického šmykového trenia** a F_n je veľkosť normálovej tlakovej sily, ktorou je teleso pritlačované k podložke (veľkosť je taktiež rovná sile, ktorou pôsobí podložka na teleso). Ak prevýši veľkosť našej pôsobiacej sily \vec{F} hodnotu $F_{s,max}$, začne sa teleso pohybovať po podložke.

- Keď sa teleso dá do pohybu a budeme na neho pôsobiť takou silou \vec{F} , aby sa pohybovalo približne rovnomerne, klesne veľkosť šmykovej trecej sily z $F_{s,max}$ na hodnotu F_d , ktorá je určená vzťahom

$$F_d = \mu_d F_n , \quad (5.2)$$

kde μ_d je **koeficient (faktor) dynamického (kinetického) šmykového trenia**. Túto veľkosť F_d má dynamická trecia sila v priebehu celého pohybu.

Podľa **Amontonovovho – Coulombovho zákona** veľkosť trecej sily pri šmykovom trení nezávisí od veľkosti styčnej plochy a je úmerná len veľkosti normálovej sily F_n , ktorú v predchádzajúcom myšlienkovom experimente predstavuje tiažová sila $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Treba ešte zdôrazniť, že predchádzajúce rovnice nemajú vektorový charakter, koeficienty μ_s a μ_d sú bezrozmerné a zisťujú sa experimentálne. Hodnoty koeficientov závisia od vlastností ako telesa, tak aj podložky, takže zvykneme hovoriť o koeficientoch trenia medzi podložkou a telesom alebo medzi dvoma materiálmi (napr. hodnota koeficientu statického šmykového trenia μ_s medzi oceľou a ľadom je 0,027). Taktiež predpokladáme, že hodnota koeficientu dynamického trenia μ_d nezávisí od rýchlosti pohybu telesa po podložke. Statické trenie medzi ľadom a podrážkou topánky je častokrát veľmi malé a nezabráni pošmyknutiu. Preto si statické trenie často zvyšujeme posypaním ľadu pieskom, prípadne štrkom či popolom. Na druhej strane trenie minimalizujeme, keď styčné plochy vzájomne sa pohybujúcich telies namažeme vrstvou maziva.

So silou šmykového trenia je totožná maximálna ťažná sila pohybového mechanizmu. Pri väčšej sile sa začnú kolesá na podložke šmýkať, takže z hľadiska pohybu bude už táto sila menej účinná. Ak n je počet kolies ťažného mechanizmu, z nich je m kolies poháňaných \vec{F}_G je tiažová sila mechanizmu, potom celková sila trenia

$$T = \frac{\mu_s m F_G}{n} = F_{\max} \quad (5.3)$$

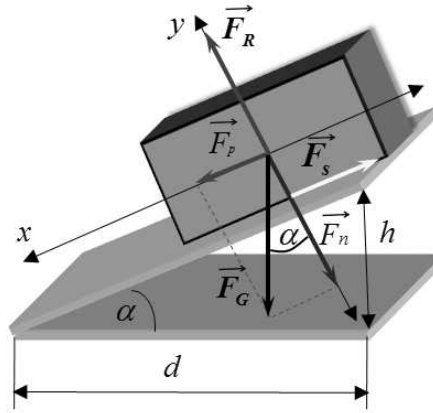
je rovná maximálnej ťažnej sile pohybového mechanizmu.

V ďalšom sa pokúsime zmerať koeficient statického šmykového trenia medzi kvádom a podložkou. Je niekoľko možností, ako určiť hľadaný koeficient statického šmykového trenia. Jednou z nich by mohlo byť využitie silomeru a odmeranie veľkosti pôsobiacej sily v momente, kedy sa kváder dá do pohybu (obr. 5.1(c)). Zo znalosti hmotnosti kvádra a využitím vzťahu (5.1) by sme určili hľadaný koeficient.

Iným spôsobom riešenia tejto úlohy bez silomeru a znalosti hmotnosti kvádra je využitie naklonenej roviny. Ak by bolo možné podložku (napr. stôl) postupne nakláňať, pri určitom uhle sa kváder na stole pohne. Rozoberieme si túto situáciu z fyzikálneho hľadiska.

Na obrázku 5.3 je znázornený kváder na naklonenej rovine v momente, kedy sa práve začína pohybovať. Na kváder bude pôsobiť tiažová sila \vec{F}_G , tlaková

sila od podložky \vec{F}_R v smere kolmom na naklonenú rovinu a trecia sila \vec{F}_s v smere pozdĺž naklonenej roviny.



Obrázok 5.3: Kváder na naklonenej rovine a znázornenie síl, keď je kváder v pokoji ($F_P = F_S$) pri rovnomernom pohybe.

Keďže je kváder tesne pred začatím pohybu v pokoji, musí podľa II. Newtonovéhó pohybového zákona platiť, že výslednica síl pôsobiacich na kváder je rovná nule

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_s = m \vec{a} = 0 . \quad (5.4)$$

Túto rovnicu budeme riešiť zvlášť pre x -ovú a y -ovú zložku. Pre x -ovú zložku môžeme predchádzajúcu vektorovú rovnicu prepísať do tvaru pre veľkosti síl

$$\sum F_x = F_p - F_s = m a = 0 , \quad (5.5)$$

kde F_p predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily \vec{F}_G do smeru osi x ($F_p = F_G \sin \alpha$). Pre y -ovú zložku dostávame

$$\sum F_y = F_R - F_n = 0 , \quad (5.6)$$

kde F_n je normálová sila a predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily \vec{F}_G do smeru osi y ($F_n = F_G \cos \alpha$). Keďže pohyb kvádra je realizovaný vždy len v smere osi x (po splnení istých podmienok), bude predchádzajúca rovnica vždy rovná nule, to znamená, že normálová sila \vec{F}_n je vždy vykompenzovaná reakciou podložky \vec{F}_R . V závislosti od toho, ako sa bude kváder pohybovať, bude pravá

strana rovnice (5.5) nenulová (v prípade zrýchleného pohybu so zrýchlením \vec{a}) alebo tak ako v našom prípade rovná nule (rovnomerný pohyb kvádra, prípadne kváder je v pokoji). V okamihu, kedy sa kváder začína pohybovať, nadobúda veľkosť statickej šmykovej trecej sily \vec{F}_s maximálnu hodnotu, teda $F_{s,max} = \mu_s F_n$, kde $F_n = F_G \cos \alpha$. Úpravou rovnice (5.5) teda dostávame

$$F_p = F_{s,max} , \quad (5.7)$$

$$F_G \sin \alpha = \mu_s F_G \cos \alpha , \quad (5.8)$$

odtiaľ,

$$\mu_s = \tan \alpha . \quad (5.9)$$

Ako teda jednoducho určiť hodnotu súčiniteľa šmykového trenia μ_s ? Stačí zmerať hodnoty d a h charakterizujúce naklonenú rovinu (obr. 5.3), a tak vypočítať $\tan \alpha = h/d$, ktorý predstavuje hodnotu koeficientu statického šmykového trenia.

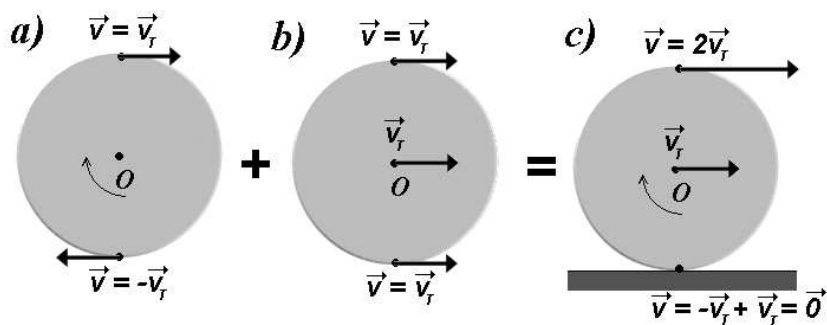
5.2 Valivé trenie

Keďže sila trenia spomaľuje pohyb, snažíme sa ju zmenšiť. Preto sa medzi trecie plochy často umiestňujú guľôčky alebo valčeky, pretože sila valivého odporu je ďaleko menšia ako sila šmykového trenia (tento poznatok sa využíva v ložiskách). Pod valivým pohybom rozumieme taký pohyb, pri ktorom sa teleso otáča okolo okamžitej osi danej dotykovou priamkou na povrchu druhého telesa (napr. podložke). Ak budeme pozorovať pohyb bicyklového kolesa, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou (presnejšie povedané geometrický stred kolesa sa pohybuje stálou rýchlosťou) po priamej dráhe a neprešmykuje, môžeme tento pohyb považovať za valivý pohyb. V prípade valenia kolesa platí vzťah

$$v_T = \omega R , \quad (5.10)$$

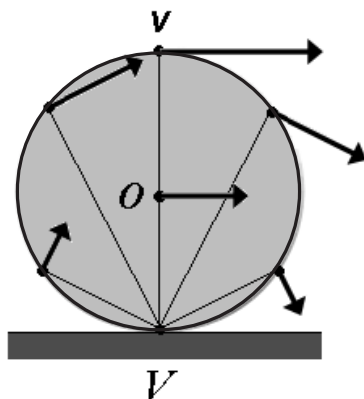
kde v_T predstavuje obvodovú rýchlosť pohybu stredu kolesa, ω je uhlová rýchlosť otáčania kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa, ktorá je rovnobežná s podložkou a R je polomer kolesa.

Ako ukazuje obrázok 5.4, môžeme tento pohyb chápať aj ako zloženie posuvného a otáčavého pohybu kolesa. Pri otáčavom pohybe, kedy os otáčania je v pokoji, ľubovoľný bod na vonkajšom obvode kolesa má obvodovú rýchlosť v_T danú vzťahom (5.10). Všetky body kolesa majú rovnakú uhlovú rýchlosť



Obrázok 5.4: Valenie kola ako zloženie a) otáčavého a b) posuvného pohybu.

ω . Pri posuvnom pohybe (bez otáčania) sa všetky body kola pohybujú rovnakou rýchlosťou v_T . Zložením týchto dvoch pohybov dostaneme valivý pohyb. Zaujímavosťou je, že body nachádzajúce sa v blízkosti dotyku kola s podložkou sú takmer v pokoji, zatiaľ čo body na vrchole kola sa pohybujú najväčšou rýchlosťou $v = 2v_T$ (obr. 5.4).



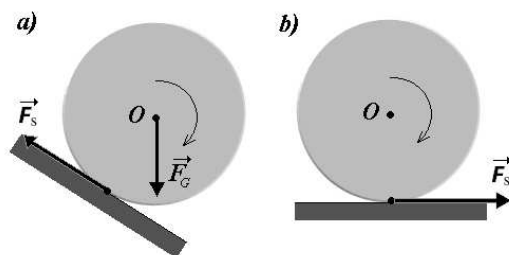
Obrázok 5.5: Valivý pohyb kola môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom V dotyku podložky s kolesom.

Iný spôsob pohľadu na valivý pohyb ukazuje obrázok 5.5. Tento pohyb môžeme totiž interpretovať ako otáčanie okolo okamžitej osi, ktorá prechádza bodom dotyku kola V s podložkou a je kolmá na rovinu kola. Okamžité rýchlosti jednotlivých bodov valiaceho sa kola sú na obrázku 5.5 označené šípkami. Dá sa ukázať, že uhlová rýchlosť otáčania sa kola bicykla okolo osi prechádzajúcej v mieste dotyku kola s podložkou, ktorú vníma pozorovateľ

v pokoji je taká istá, ako uhlová rýchlosť, ktorú vníma cyklista pri otáčaní kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa.

Aj pri valivom pohybe zohrávajú úlohu trecie sily. Je vôbec možné, aby sa koleso otáčalo po dokonale hladkej podložke? Ak by sme roztočili koleso uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ a udelili mu vodorovnú rýchlosť veľkosti $v = \omega R$, kde R je polomer kolesa, možnože by sa to podarilo tak, aby v mieste dotyku kolesa s podložkou koleso neprekĺzavalo a nešmýkalo sa po podložke. Podobným spôsobom môžeme uviesť koleso do valivého pohybu bez kĺzania i v prípade, že podložka nebude dokonale hladká.

Ak by sa koleso pohybovalo po podložke rovnomerne (pričom zatiaľ zanedbávame valivý odpor podložky proti pohybu) a žiadna ďalšia vodorovná sila by pohyb neudržiavala, musela by byť aj statická trecia sila nulová. Iná situácia však nastane, keď sa pokúsime zmeniť postupnú alebo uhlovú rýchlosť kolesa. V tomto prípade však musíme na koleso pôsobiť vodorovnou silou a pripustiť, že sa koleso v mieste dotyku s podložkou môže aj šmýkať. Pokiaľ k šmyku nedôjde, bude podložka pôsobiť statickou trecou silou \vec{F}_s , ktorá bude smerovať „proti snahe“ kolesa prešmykovať. Ak k šmyku dôjde, dynamická trecia sila \vec{F}_d bude namierená proti skutočnému sklzu.



Obrázok 5.6: a) Valenie kolesa po naklonenej rovine bez prešmykovania a b) po vodorovnej podložke s narastajúcou uhlovou rýchlosťou. (Ak by sa koleso šmýkalo, pôsobila by v bode dotyku kolesa s podložkou sila dynamického trenia F_d .)

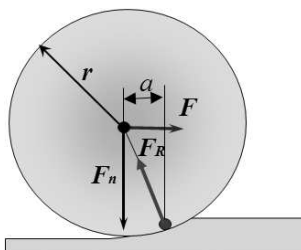
Na obrázku 5.6 je znázornené koleso, ktoré sa valí po naklonenej rovine (obr. 5.6(a)) a po vodorovnej podložke (obr. 5.6(b)). V ťažisku kolesa pôsobí tiažová sila \vec{F}_g , ktorej rameno vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu stredom kolesa je nulové, takže aj jej zodpovedajúci moment sily je nulový. Tiažová sila teda nebude prispievať k roztáčaniu kolesa, iba sa bude snažiť v prípade obrázku 5.6(a) šmýkať koleso po naklonenej rovine. V bode P však bude pô-

sobiť na koleso trecia sila smerujúca proti “tendencii k šmyku”, t. j. nahor pozdĺž naklonenej roviny. Jej rameno vzhľadom na os otáčania je nenulové (má veľkosť polomeru kolesa), a teda vzhľadom k osi vedenej stredom kolesa moment trecej sily bude roztáčať koleso. Pri pohybe kolesa po vodorovnej podložke narastajúcou uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega}$ (obr. 5.6(b), napr. prudký rozjazd auta na zľadovatenom parkovisku), sa spodná časť kolesa snaží preklízuť doľava. Trecia sila v bode dotyku podložky s kolesom bude smerovať proti očakávanému smeru sklzu, t. j. vpravo.

Doteraz sme uvažovali dokonalý kontakt medzi kolesom a podložkou, po ktorej by sa koleso v prípade rovnomerného pohybu po vodorovnej podložke valilo bez trenia. V skutočnosti však v dôsledku miernych deformácií oboch objektov (a posunu reakcie podložky oproti priamke prechádzajúcej stredom kolesa) vzniká valivý odpor podložky proti pohybu kolesa. Pohyb kolesa môže nastať len vtedy, keď moment reakcie vzhľadom na bod dotyku kolesa s podložkou ($F_n a$) bude vykompenzovaný momentom ťažnej sily ($F r$), t. j. keď bude splnená podmienka

$$F r = F_n a, \quad (5.11)$$

kde a je vzdialenosť pôsobiska reakcie podložky od zvislej priamky prechádzajúcej stredom kolesa a r je polomer kolesa (obr. 5.7).



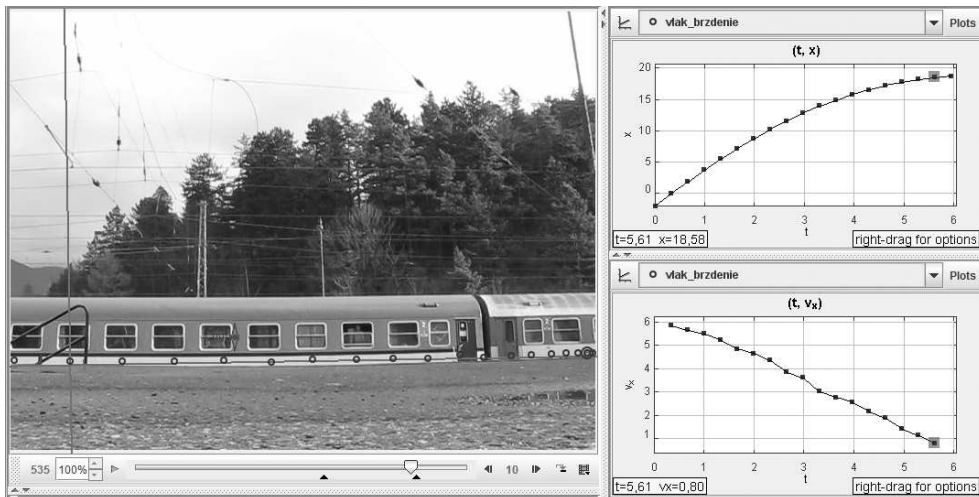
Obrázok 5.7: Vznik valivého trenia.

Z predchádzajúcej rovnice vyplýva vzťah pre valivé trenie pri valivom pohybe jedného telesa po inom

$$F = \frac{a}{r} F_n = \mu_{val} F_n, \quad (5.12)$$

kde μ_{val} je **koeficient (súčiniteľ) valivého trenia**, ktorý je vždy menší ako koeficient šmykového trenia, zvlášť ak sú valiace sa teleso a podložka z tvrdého a pružného materiálu. Dôsledkom toho je zhotovovanie guľových a valčekových ložísk, používanie kolies na vozidlách atď. Z predchádzajúcej definície vyplýva,

že podhustené pneumatiky automobilu zvyšujú valivé trenie. So zvyšovaním valivého trenia sa zároveň zvyšuje opotrebenie pneumatík a taktiež aj spotreba paliva (až o 5 %). Sila valivého trenia je omnoho menšia ako šmykového trenia, preto je lepšie napr. sud valiť ako šmýkať. Valivé trenie teda spomaľuje pohyb v menšej miere ako šmykové trenie.



Obrázok 5.8: Analýzou brzdenia vlaku a následným určením prejdenej dráhy a spomalenia je možné riešením pohybovej rovnice určiť koeficient šmykového trenia medzi kolesami vlaku a koľajnicami.