6 Gravitačné pole

Pojem pole patrí k najzákladnejším pojmom fyziky. Predstavuje formu interakcie (tzv. silového pôsobenia) v prostredí medzi materiálnymi objektmi ako sú častice, atómy, molekuly a zložitejšie objekty. Táto interakcia sa nedeje priamo "na diaľku" nekonečne rýchlo, ale prostredníctvom kvánt poľa konečnou rýchlosťou. Mechanizmus pôsobenia je taký, že jeden interagujúci objekt kvantá vysiela, druhý ich prijíma a opačne. Výsledkom je príťažlivá alebo odpudivá sila medzi pôsobiacimi objektmi. Interagujúce objekty predstavujú v takto opísanej schéme zdroje poľa. Samotné pole tu možno chápať ako priestor, ktorý prenáša silové pôsobenia a v ktorom prebieha výmena kvánt.

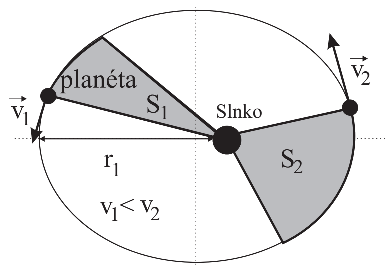
Gravitačné sily sú príťažlivé a existujú medzi všetkými materiálnymi objektmi, podlieha im všetka hmota bez výnimky, dokonca aj svetlo. Nezávisia od vlastností prostredia, nemožno ich ničím "zatieniť". Kvantami tohto poľa sú pravdepodobne častice zvané **gravitóny**, ktoré však dosiaľ neboli priamo zaregistrované. Gravitačné sily spôsobujú napr. príťažlivosť Zeme a iných nebeských telies, udržiavajú planéty na obežných dráhach okolo Slnka, Mesiac a umelé družice na obežných dráhach okolo Zeme a pod.; môžeme povedať, že udržiavajú "poriadok" vo Vesmíre. Sú "najslabšie" zo všetkých druhov síl, takže sa výraznejšie prejavujú len v makrosvete. Ich dosah je nekonečný.

6.1 Keplerove zákony

Astronómovia už od staroveku skúmali našu slnečnú sústavu a sledovali pohyby planét. Do 16. storočia panoval geocentrický názor, podľa ktorého Zem bola v strede vesmíru a všetko sa pohybovalo okolo nej. V tej dobe na základe mnohých presnejších pozorovaní M. Kopernik[1] dospel k názoru,

[1]MIKULÁŠ KOPERNIK (1473 – 1543) bol poľsko-nemecký astronóm, filozof, humanista, kanonik v katolíckej cirkvi a ekonóm; významný predstaviteľ renesančnej filozofie; nahradil

že Slnko je stredom vesmíru a planéty obiehajú okolo neho po kružniciach. Svoje pozorovania a závery spísal v diele "O obehoch nebeských telies". Nedosiahol však úplný súhlas s vypočítanými a pozorovanými polohami planét. Nový správny popis pohybu planét objavil nemecký hvezdár J. Kepler[2], ktorý spracoval dlhoročné a na tú dobu veľmi presné merania dánskeho hvezdára T. Brahe[3]. Svoje zistenia sformuloval do troch zákonov, ktoré sa dnes volajú **Keplerovými zákonmi**:



Obrázok 6.1: Pohyb planéty okolo Slnka.

- I. Keplerov zákon: Planéty obiehajú okolo Slnka po elipsách s malou výstrednosťou, pričom Slnko sa nachádza v ich spoločnom ohnisku (obr. 6.1).

- II. Keplerov zákon: Plochy opísané sprievodičom tej istej planéty, vzťahujúcim sa na stred Slnka, v rovnakých časových intervaloch sú rovnaké ($S_1 = S_2$, obr. 6.1).

- III. Keplerov zákon: Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch ľubovoľných planét (T_1, T_2) sa rovná pomeru tretích mocnín hlavných poloosí (r_1, r_2) ich dráh.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}\,. \tag{6.1}$$

geocentrický obraz sveta heliocentrickým. Kopernikovo učenie obsahovalo kinematickú schému slnečnej sústavy, ktorá sa stala začiatkom vývinu nebeskej mechaniky a umožnila aplikovať pojmy zemskej mechaniky na vesmír.

[2]JAHANNES KEPLER (1571 – 1630) bol nemecký astronóm, fyzik, optik a matematik, objaviteľ troch základných zákonov pohybu nebeských telies. Objavom tzv. Keplerových zákonov rozriešil definitívne spor medzi heliocentrizmom a geocentrizmom v prospech Kopernikovej teórie. Keplerove zákony je možné použiť i na popis ďalších telies, ktoré sa pohybujú v gravitačnom poli Slnka, napr. umelých družíc.

[3]TYCHO BRAHE (1546 – 1601) bol význačný dánsky astronóm. Je považovaný za najlepšieho a najpresnejšieho pozorovateľa hviezdnej oblohy, ktorý bol prekonaný až šesťdesiat rokov po vynájdení ďalekohľadu.

6.2 Newtonov gravitačný zákon

Ako prvý sa skúmaním gravitačných síl vážnejšie zaoberal Isaac Newton. Je známa jeho príhoda s padajúcim jablkom, ktorá ho priviedla na myšlienku, že sila nútiaca padať telesá zvislo k Zemi je totožná so silou, ktorá núti obiehať planéty po obežných dráhach okolo Slnka, aj Mesiac okolo Zeme. V tom čase už boli známe zákonitosti pohybu planét, ktoré objavil nemecký astronóm Johannes Kepler. V nasledujúcej časti si ukážeme možný postup Newtona, ako pomocou týchto troch Keplerových zákonov odvodil všeobecne platný gravitačný zákon. Pre jednoduchosť nasledujúcich výpočtov budeme predpokladať, že planéty obiehajú okolo Slnka po kruhových dráhach s polomerom r (kružnica je elipsa s nulovou výstrednosťou). Z II. Keplerovho zákona potom vyplýva, že táto rýchlosť je konštantná a jej veľkosť je $v = 2\pi\, r/T$. Ako už vieme, pri rovnomernom pohybe telesa po kružnici jeho zrýchlenie smeruje do stredu kružnice; tangenciálne zrýchlenie sa rovná nule a celkové zrýchlenie a sa rovná normálovému zrýchleniu a_n, ktoré má veľkosť: $a_n = v^2/r$ (3.70). Ak spojíme tieto informácie spolu s III. Keplerovým zákonom: $T^2 = b\, r^3$ (b - konštanta) môžeme urobiť nasledujúce úpravy pre vyjadrenie dostredivého zrýchlenia planéty

$$a_{nP} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi\, r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2\, r}{b\, r^3} = \frac{4\,\pi^2}{b}\frac{1}{r^2} = k\frac{1}{r^2}\ , \tag{6.2}$$

kde $k = \frac{4\,\pi^2}{b}$ je konštanta. Podľa II. Newtonovho pohybového zákona sily (4.1) na planétu s hmotnosťou m účinkuje sila smerujúca do stredu Slnka, ktorej veľkosť je: $F_S = m\, a_{nP} = k\, m/r^2$. Ak zoberieme do úvahy, že je to sila, ktorou pôsobí Slnko na planétu, potom to platí aj opačným smerom, teda aj planéta pôsobí na Slnko silou $F_p = k'\, M_S/r^2$. Keďže však platí III. Newtonov zákon akcie a reakcie, tieto sily musia byť rovnako veľké ($F_S = F_p$), čo dosiahneme napr. tým, že konštantu k vo vzťahu pre F_S zapíšeme ako súčin dvoch iných konštánt, pričom jedna z nich bude hmotnosť Slnka: $k = \kappa M_S$. Konečný vzťah má potom tvar

$$F = \kappa \frac{M_S\, m}{r^2}\ . \tag{6.3}$$

Tento vzťah predstavuje vyjadrenie veľkosti gravitačných síl, ktorými pôsobia na seba dve hmotné telesá.

Matematická formulácia **Newtonovho gravitačného zákona** (6.3) znie: **dve telesá s hmotnosťami M a m sa navzájom priťahujú silou F_g,**

ktorá je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamoúmerná druhej mocnine ich vzájomnej vzdialenosti r. Vektorový zápis tohto zákona má tvar

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{M\,m}{r^3} \vec{r}\,, \tag{6.4}$$

kde $\kappa = 6,670 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$ je univerzálna gravitačná konštanta.

Rovnica (6.4) platí presne len pre hmotné body a pre homogénne gule, pri ktorých za r dosadzujeme vzdialenosť ich stredov. S veľkou presnosťou ju môžeme použiť aj pre veľké telesá (planéty), ktorých rozmery sú zanedbateľné voči ich vzájomnej vzdialenosti; za r vtedy dosadzujeme vzdialenosť ich ťažísk. Pokiaľ teda v ďalšom texte na niektorých miestach použijeme miesto pojmu "hmotné body" pojem "telesá", budú sa tu rozumieť práve takéto prípady (napr. pri popise gravitačného poľa Zeme).

6.3 Intenzita gravitačného poľa

Na popis gravitačného poľa v okolí každého hmotného telesa, či už napr. hmotného bodu alebo planéty, používame pojmy: intenzita a potenciál. Sú to trochu abstraktnejšie fyzikálne veličiny, no používajú sa pri popise každého fyzikálneho poľa.

Intenzita gravitačného poľa v okolí telesa s hmotnosťou M je vektorová veličina definovaná vzťahom

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3}\,\vec{r}\,, \tag{6.5}$$

kde $\vec{F}_g$ je sila, ktorá v danom bode poľa pôsobí na hmotný bod hmotnosti m. Jednotkou intenzity je ($N/kg = m/s^2$).

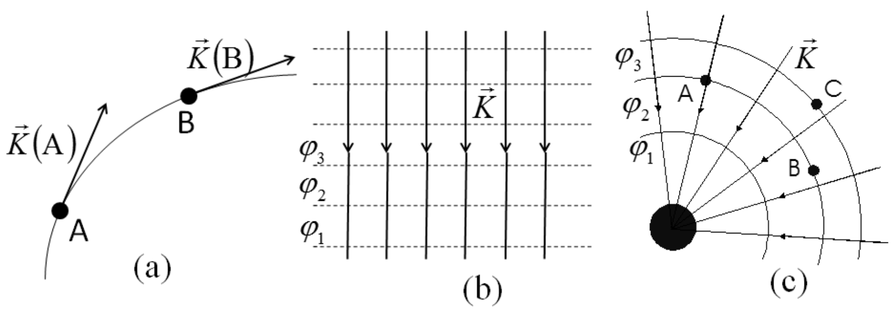
Pomocou intenzity sa dá charakterizovať gravitačné pole v každom bode priestoru v okolí daného hmotného telesa. Ak poznáme intenzitu poľa v nejakom bode, tak $F = m\,K$ je sila, akou pole pôsobí na bod hmotnosti m. Ak porovnáme toto vyjadrenie s II. Newtonovým zákonom $F = m\,a$, tak potom **intenzita gravitačného poľa zodpovedá zrýchleniu, ktoré pole udeľuje hmotnému bodu v danom mieste** (za predpokladu, že tu nepôsobia ešte ďalšie sily).

Ak do vzťahu (6.5) dosadíme parametre týkajúce sa Zeme, dostaneme známu hodnotu **tiažového zrýchlenia -** g:

$$K = g = 6,670 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2 \frac{5,98 \times 10^{24}\, kg}{(6\,378\,000)^2\, m^2} = 9,80523\; N/kg\ .$$

Intenzita gravitačného poľa na Mesiaci je $K_{Mesiac} = 1,62\ N/kg$.

Každému bodu gravitačného poľa sme priradili vektor intenzity $\vec{K}$. Na prehľadné znázornenie poľa sa zavádza pojem **siločiara**. **Siločiara je orientovaná čiara vedená tak, že dotyčnica v ktoromkoľvek jej bode má smer a orientáciu intenzity poľa v tomto bode** (obr. 6.2(a)). Pri zobrazovaní sa počet siločiar, t. j. počet siločiar prechádzajúcich jednotkovou plochou postavenou kolmo na smer siločiar, volí tak, aby bol úmerný veľkosti intenzity v danom mieste poľa. V prípade homogénneho poľa (obr. 6.2(b)) sú siločiary rovnobežné orientované priamky všade rovnakej hustoty a pre radiálne pole (obr. 6.2(c)) majú smer kolmo na hmotné teleso.



Obrázok 6.2: a) K definícii siločiary. b) Homogénne gravitačné pole. c) Siločiary hmotného bodu - radiálne gravitačné pole.

6.4 Potenciál gravitačného poľa

Už v časti dynamika sme zaviedli pojem súvisiaci s tiažovým poľom Zeme a to bola potenciálna energia. Potenciálnu energiu sme definovali ako energiu, ktorú má teleso vo výške h nad povrchom Zeme: $E_p = m\,g\,h$ (4.33). Tento vzťah platí len pre homogénne gravitačné pole (napr. v blízkosti povrchu Zeme), kde je konštantná intenzita gravitačného poľa. Podobne aj v nehomogénnom (radiálnom) gravitačnom poli definujeme potenciálnu energiu telesa hmotnosti m, no pri výpočte musíme uvažovať zmenu intenzity gravitačného poľa objektu s hmotnosťou M.

Pri presune daného telesa z bodu B do bodu C (obr. 6.2(c)) v gravitačnom poli konáme prácu, ktorá je určená rozdielom jeho **potenciálnych energií** v daných miestach. Túto prácu si môžeme vyjadriť nasledujúco

$$W = \int_{r_B}^{r_C} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_B}^{\infty} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{r_C}^{\infty} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_p(r_B) - E_p(r_C)\ , \qquad (6.6)$$

pričom sme využili, rozdelenie integračných hraníc v integráli. Pomocou predošlého vyjadrenia môžeme potenciálnu energiu telesa v bode B upraviť aj na nasledujúci tvar

$$E_p(B) = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m\int_{\infty}^{r_B} \kappa\frac{M}{r^3}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\,m\int_{\infty}^{r_B} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\ , \qquad (6.7)$$

kde sme využili vzťah pre intenzitu gravitačného poľa (6.5). Ako je vidieť vo všeobecnom prípade, potenciálna energia nie je funkciou výšky, ale intenzity gravitačného poľa.

Ako už bolo spomenuté, na popis poľa používame okrem intenzity aj **potenciál gravitačného poľa -** φ. Pokiaľ intenzita je definovaná ako vektorová veličina, tak potom potenciál je skalárna veličina charakterizujúca gravitačné pole. **Potenciál je definovaný ako podiel potenciálnej energie hmotného bodu v danom mieste a hmotnosti tohto hmotného bodu**

$$\varphi = \frac{E_p}{m}\ . \qquad (6.8)$$

Ak do predošlého vzťahu dosadíme vyjadrenie potenciálnej energie zo vzťahu (6.7), potom sa dá vyjadriť potenciál radiálneho gravitačného poľa v hociktorom mieste - r_B, čo je vzdialenosť bodu B od zdroja gravitačného poľa, ako:

$$\begin{aligned} \varphi(r_B) &= -\int_{\infty}^{r_B} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad (6.9) \\ &= \int_{\infty}^{r_B} \kappa\frac{M}{r^3}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \kappa\, M\int_{\infty}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \kappa\, M\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r_B} = -\kappa\frac{M}{r_B}\ . \end{aligned}$$

Množiny bodov poľa, v ktorých má potenciál rovnakú hodnotu, voláme **potenciálne hladiny** alebo **ekvipotenciálne plochy**. V homogénnom gravitačnom poli sú ekvipotenciálne hladiny vodorovné čiary (obr. 6.2(b)) a pri radiálnom poli sú ekvipotenciálne plochy guľové so stredom v bode zdroja poľa (obr. 6.2(c)).

6.5 Vzťah intenzity a potenciálu gravitačného poľa

V predchádzajúcom odseku bolo uvedené, že intenzita a potenciál gravitačného poľa navzájom súvisia integrálnym vzťahom. Daný vzťah si môžeme zapísať nasledujúco

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{6.10}$$

Na základe tohto vzťahu odvodíme inverzný, diferenciálny vzťah medzi $\vec{K}$ a φ. Pre totálny diferenciál potenciálu z predošlého vzťahu vyplýva

$$\mathrm{d}\varphi = -\vec{K} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = K_x\,\mathrm{d}x + K_y\,\mathrm{d}y + K_z\,\mathrm{d}z\,. \tag{6.11}$$

Keďže potenciál je funkciou priestorových súradníc $\varphi(x, y, z)$, platí pre jeho totálny diferenciál bežný definičný vzťah z diferenciálneho počtu

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,. \tag{6.12}$$

Predošlé dva vzťahy možno spojiť pomocou **Hamiltonovho diferenciálneho operátora nabla -** ∇, ktorý je definovaný v kartézskych súradniciach ako

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}\,. \tag{6.13}$$

Aplikáciu tohto operátora na skalárnu funkciu nazývame **gradientom** danej funkcie: $\nabla\varphi = grad\,\varphi$. Gradient skalárnej funkcie je vektorová funkcia, ktorej hodnota sa v každom bode poľa rovná maximálnej zmene skalárnej funkcie na jednotku dĺžky v danom bode a má smer jej maximálneho stúpania. Priamym výpočtom zistíme, že platí

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi = (\nabla\varphi) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}) \cdot (\mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}) = \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z = (grad\varphi) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

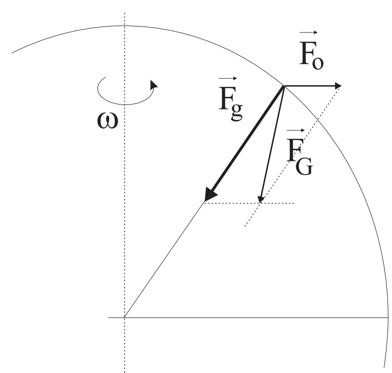
a porovnaním vzťahu (6.11) s predošlým vzťahom dostaneme

$$\vec{K} = -\nabla\varphi(r)\,. \tag{6.14}$$

z ktorého vyplýva, že **intenzita gravitačného poľa je rovná zápornému gradientu potenciálu**.

6.6 Gravitácia v okolí Zeme

Zjednodušme si situáciu. Predpokladajme, že Zem je homogénna guľa s hmotnosťou M a polomerom $R = 6378\,km$. Potom podľa Newtonovho gravitačného zákona vzťah $F_g = m\,K$ (6.3) predstavuje silu, ktorou Zem pôsobí na teleso hmotnosti m vo vzdialenosti $r > R$ od stredu Zeme. No v skutočnosti sa teleso (dom, most, človek, ...) nachádza na povrchu Zeme a pohybuje sa spolu s ňou. Práve preto nemôžeme používať daný vzťah na výpočet gravitačnej sily na naše teleso. Používame potom pojem tiažová sila $F_G = m\,g$. Vysvetlime si teraz rozdiel medzi gravitačným zrýchlením K a tiažovým zrýchlením g. Veľkosť tiažovej a gravitačnej sily Zeme sa však líši a to z nasledujúcich dôvodov:



Obrázok 6.3: Vysvetlenie rozdielu medzi gravitačnou a tiažovou silou.

1. Gravitačná sila závisí od vzdialenosti telesa od stredu Zeme, ale Zem nie je dokonalá guľa, je to elipsoid sploštený na póloch. Tiažové zrýchlenie rastie smerom od rovníka k pólu - mení sa so zemepisnou šírkou.

2. Hustota Zeme sa mení v jednotlivých oblastiach pod povrchom Zeme. Preto tiež tiažové zrýchlenie je rôzne na rôznych miestach Zeme.

3. Najväčší vplyv má však rotácia Zeme. Ak sa pozrieme na obrázok 6.3, vidíme, že na teleso na povrchu Zeme pôsobí gravitačná sila F_g. Ale pretože Zem rotuje uhlovou rýchlosťou ω, pôsobí na toto teleso i odstredivá sila $F_O = m\,\omega\,r$. Uhlová rýchlosť rotácie Zeme je na všetkých zemepisných šírkach rovnaká, no polomer otáčania $r < R$ sa smerom od rovníku ($r = R$) zmenšuje. Výsledná tiažová sila pôsobiaca na teleso je daná

vektorovým súčtom gravitačnej a odstredivej sily, ak zanedbáme ostatné menej významné sily.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_o \qquad \vec{g} = \vec{K} + \vec{a}_o \; . \tag{6.15}$$

Napríklad na rovníku je gravitačné zrýchlenie $K = 9,83\ m/s^2$, no výsledná veľkosť tiažového zrýchlenia vplyvom odstredivej sily je $g = 9,81\ m/s^2$.

6.7 Pohyby v tiažovom poli Zeme

V tejto časti budeme uvažovať základné pohyby telies v tiažovom poli Zeme v malej vzdialenosti od zemského povrchu, kde je tiažové pole homogénne a pôsobiacu tiažovú silu možno vyjadriť výrazom $F_G = G = m\,g$. Pri týchto pohyboch nebudeme uvažovať žiadne odporové sily. Medzi tieto pohyby patria: voľný pád, vrh zvislý nahor, vodorovný vrh a šikmý vrh. V nasledujúcej časti (Kozmické rýchlosti) budeme skúmať pohyby vo veľkej výške nad zemským povrchom, kde je už radiálne gravitačné pole a pre silu platí Newtonov gravitačný zákon (6.4).

Pre všeobecný pohyb telesa v homogénnom gravitačnom poli platí nasledujúci vektorový vzťah

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{K} \; , \tag{6.16}$$

kde pre intenzitu homogénneho gravitačného poľa platí $\vec{K} = (0, 0, -g)$. Pre x-ovú a z-ovú zložku zrýchlenia potom platí

$$a_x = 0 \qquad a_z = -g \; , \tag{6.17}$$

pričom pohyb v smere osi y neuvažujeme, lebo pre riešenie týchto typov pohybov úplne vystačíme s rovinným riešením.

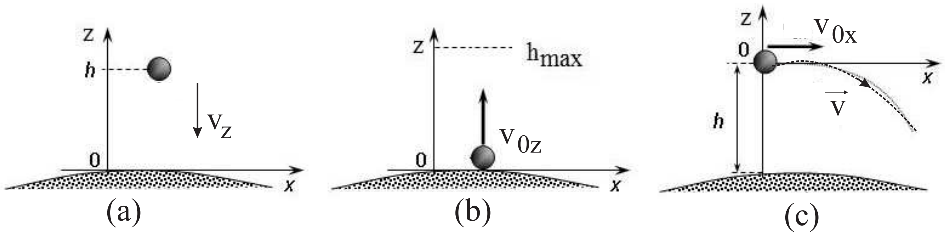
Z rovníc (6.17) vyplýva, že v smere osi x môžeme očakávať pohyb rovnomerný a v smere osi z pohyb rovnomerne zrýchlený so zrýchlením $-g$. S priamočiarym rovnomerným a rovnomerne zrýchleným pohybom sme sa už ale stretli v kapitole 3.2.1, takže rýchlosti hmotného bodu v tiažovom poli Zeme vypočítame z integrálneho vzťahu $v = -\int g\,\mathrm{d}t$, ktorého výsledok sú rýchlosti v jednotlivých smeroch osí x a z

$$v_x = v_{0x} \qquad v_z = v_{0z} - g\,t \; , \tag{6.18}$$

kde v_{0x} je počiatočná rýchlosť v smere osi x a v_{0z} je počiatočná rýchlosť v smere osi z. Keď poznáme vyjadrenia rýchlosti v závislosti od času, dráhu v smere jednotlivých osí vypočítame použitím integrálneho vzťahu (3.15) $s = \int v dt$. Keďže ide o neurčitý integrál, jeho výsledok je správny až vzhľadom na integračnú konštantu C. Ak uvážime integračné konštanty, ktoré sa určujú z počiatočných podmienok pre dráhy v čase $t = 0\,s$, môžeme vo všeobecnosti pre dráhy v smere osí x a z napísať

$$x = x_0 + v_{0x}\,t \qquad z = z_0 + v_{0z}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2 \,. \tag{6.19}$$

kde x_0, z_0 je počiatočná dráha v smere osi x resp. osi z.



Obrázok 6.4: (a) Voľný pád. (b) Vrh zvislý nahor. (c) Vodorovný vrh.

Vzťahy (6.18) a (6.19) sú základné všeobecné vzťahy popisujúce každý typ rovinného pohybu v homogénnom gravitačnom poli. Na základe týchto vzťahov a vhodných počiatočných podmienok v čase $t = 0\,s$ špecifických pre každý typ pohybu môžeme rovno napísať základné vzťahy pre daný typ pohybu.

6.7.1 Voľný pád

Za voľný pád považujeme taký pohyb, pri ktorom je teleso pustené z určitej výšky h nad zemským povrchom (obr. 6.4(a)). Počiatočné podmienky na začiatku takéhoto pohybu sú nasledujúce: $v_{0x} = v_{0z} = 0\ m/s$ (teleso na začiatku pohybu má nulovú rýchlosť) a $x = x_0$, $z_0 = h$. Z našich všeobecných rovníc (6.18) a (6.19) pre voľný pád dostaneme

$$x = x_0, \qquad z = h - \frac{1}{2} g\,t^2 \,, \tag{6.20}$$

$$v_x = 0\,m/s, \qquad v_z = -g\,t \,. \tag{6.21}$$

Z predošlých rovníc vyplýva, že pri voľnom páde pohyb prebieha len v smere osi z-ovej a ide o pohyb rovnomerne zrýchlený smerom nadol s počiatočnou nulovou rýchlosťou. Zo znalosti, že teleso má pri dopade na zem nulovú výšku $z = 0\,m$ vieme určiť čas dopadu t_d a zo znalosti tohto času aj rýchlosť tesne pred dopadom v_d. Pre tieto veličiny platia nasledujúce vzťahy

$$t_d = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}, \qquad v_d = \sqrt{2\,g\,h}\,. \tag{6.22}$$

V týchto vzťahoch nevystupuje hmotnosť telesa. To ale znamená, že telesá s rôznymi hmotnosťami (napr. pierko sojky a 1 kg guľu) spustené z rovnakej výšky, by za našich predpokladov, ktoré sme si stanovili na začiatku (bezodporové prostredie a malá výška nad zemským povrchom), dopadli naraz a s rovnakými rýchlosťami. Podobný pokus urobili aj kozmonauti na Mesiaci. Reálne na Zemi to však môžeme pozorovať len vo vákuovej trubici, lebo inak by sme v prípade pierka museli zarátať aj odpor prostredia, ktorý sme neuvažovali. Od Aristotelových čias sa verilo, že ťažšie telesá padajú rýchlejšie ako ľahšie. Až Galileo Galilei[4] svojimi experimentmi, ktorými skúmal pohyb telies púšťaním zo šikmej veže v Pise dokázal, že rýchlosť telies takmer nezávisí od ich hmotnosti.

6.7.2 Vrh zvislý nahor

Vrh zvislý nahor je pohyb, keď vyhadzujeme teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0 kolmo nahor od zemského povrchu, t. j. v smere osi z (obr. 6.4(b)). Pri tomto pohybe sú počiatočné podmienky nasledujúce: $v_{0x} = 0\ m/s$, $v_{0z} = v_0$, $x_0 = z_0 = 0\,m$. Zo všeobecných rovníc (6.18) a (6.19) pre vrh zvislý nahor dostaneme

$$x = 0\,m, \qquad z = v_0\,t - \frac{1}{2} g\,t^2\,, \tag{6.23}$$

$$v_x = 0\ m/s, \qquad v_z = v_0 - g\,t\,. \tag{6.24}$$

Z týchto rovníc vidíme, že daný pohyb je opäť len v smere osi z. Zo skúsenosti vieme, že teleso postupne spomaľuje, až nakoniec zastane v najvyššom bode svojho pohybu a potom začne voľne padať smerom nadol ako v predošlom prípade - voľný pád. Keďže teleso v najvyššom bode h_{max} má nulovú rýchlosť $v_z(h_{max}) = 0\ m/s$, dá sa z tejto informácie vypočítať aj kedy sa to stane:

[4]GALILEO GALILEI (1564 – 1642) bol taliansky filozof, fyzik, astronóm, matematik obdobia renesancie, jeden zo zakladateľov súčasnej experimentálno-teoretickej prírodovedy.

$t_v = v_0/g$. Teraz ak do vzťahu pre dráhu - výšku z dosadíme za čas t čas t_v, potom pre maximálnu výšku h_{max} dostaneme po úpravách vzťah

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2\,g}\,. \tag{6.25}$$

6.7.3 Vodorovný vrh

O vodorovnom vrhu hovoríme, pokiaľ telesu v určitej výške h nad zemským povrchom udelíme počiatočnú rýchlosť v_0 rovnobežne so zemským povrchom (obr. 6.4(c)). Tento pohyb tiež možno vyšetrovať ako súčet dvoch pohybov, a to voľného pádu (os z) a rovnomerného pohybu v smere pôvodnej rýchlosti (os x). Tiež však možno použiť všeobecné rovnice (6.18) a (6.19) s nasledujúcimi počiatočnými podmienkami: $v_{0x} = v_0$, $v_{0z} = 0\ m/s$, $x_0 = 0\,m$, $z_0 = h$. Teda po dosadení dostaneme

$$x = v_0\,t, \qquad z = h - \frac{1}{2} g\,t^2\,, \tag{6.26}$$

$$v_x = v_0, \qquad v_z = -g\,t\,. \tag{6.27}$$

V prípade tohto pohybu sú zaujímavé dve informácie: čas t_d a miesto dopadu x_d. V prípade času dopadu t_d bude jeho z-ová súradnica nulová a z predošlej rovnice po úprave dostaneme

$$t_d = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,, \tag{6.28}$$

čo je rovnaký čas dopadu ako pri voľnom páde (6.22). Vzdialenosť dopadu x_d už teraz určíme jednoducho, lebo poznáme čas letu alebo dopadu telesa (neuvažujeme odpor vzduchu) a počiatočnú rýchlosť v_0 v smere osi x a to nasledovne

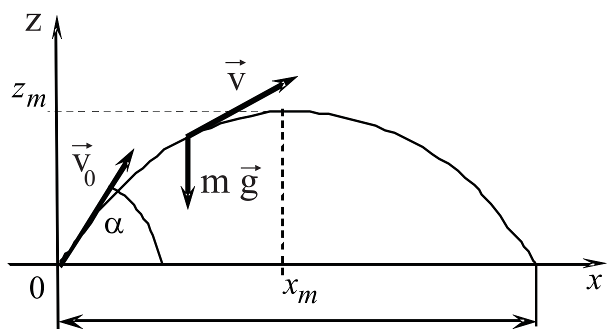
$$x_d = v_0 \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,. \tag{6.29}$$

6.7.4 Šikmý vrh

O šikmom vrhu hovoríme vtedy, keď je teleso vrhnuté počiatočnou rýchlosťou v_0 v rovine xz pod určitým uhlom α s osou x, t. j. so zemským povrchom (obr. 6.5, napríklad hod oštepom). Tento pohyb tiež možno vyšetrovať ako súčet dvoch pohybov a to vrh zvislý nahor (os z) a rovnomerného pohybu v smere osi x. Tiež však možno použiť všeobecné rovnice (6.18) a (6.19) s nasledujúcimi počiatočnými podmienkami: $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$, $v_{0z} = v_0 \sin\alpha$, $x_0 = 0\,m$, $z_0 = 0\,m$. Teda po dosadení dostaneme

$$x = v_0\, t\, \cos(\alpha), \qquad z = v_0\, t\, \sin\alpha - \frac{1}{2} g\, t^2\ , \tag{6.30}$$

$$v_x = v_0\, \cos(\alpha), \qquad v_z = v_0\, \sin\alpha - g\, t\ . \tag{6.31}$$



Obrázok 6.5: Šikmý vrh.

Teleso pri svojom pohybe postupne zvyšuje svoju výšku a najvyššiu výšku dosahuje práve vtedy, keď z-ová zložka rýchlosti je nulová, teda: $v_0 \sin\alpha = g\, t_m$. Z tohto vzťahu sa dá určiť čas dosiahnutia najvyššej výšky ako

$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\ . \tag{6.32}$$

Vzdialenosť dopadu pri šikmom vrhu nám určuje x-ová súradnica. Keď v rovnici pre x dosadíme za čas $t_d = 2\, t_m$, pre vzdialenosť dopadu dostaneme

$$l = \frac{2\, v_0^2}{g} \sin\alpha\, \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\, \sin(2\alpha)\ . \tag{6.33}$$

6.8 Kozmické rýchlosti

Pokiaľ chceme, aby delová guľa vystrelená z dela neustále lietala okolo Zeme tesne nad jej povrchom, treba jej na začiatku pohybu udeliť dostatočnú počiatočnú rýchlosť v_I vodorovným smerom. Ak pri tomto pohybe zanedbáme odpor vzduchu, potom podmienka, ktorú treba splniť na jej obiehania je, aby odstredivá sila: $F = m\, a_n$ (a_n viď (3.70)) bola rovnako veľká ako príťažlivá tiažová sila, ktorou na ňu pôsobí Zem. Tiažová sila však pri obiehaní v malej výške h (výšku h môžeme považovať za malú, ak $h << R_Z = 6378\,km$) je daná vzťahom: $G = m\,g$. Musí teda platiť

$$m\frac{v_I^2}{R_Z} = m\,g\ , \tag{6.34}$$

lebo polomer obežnej dráhy družice je prakticky zhodný s polomerom Zeme. Na základe jednoduchej úpravy dostaneme pre počiatočnú - obežnú rýchlosť - **I. kozmickú rýchlosť** vzťah

$$v_I = \sqrt{R_Z\,g} \approx 7,9\,km/s\ .$$

Za aký čas by teda obletela delová guľa okolo Zeme? To sa dá už ľahko vypočítať - veď poznáme rýchlosť družice v_I i polomer jej obežnej dráhy R_Z. Výpočtom vychádza $T = 2\,\pi\,R_Z/v_I \approx 90\,min$. Za rovnakú dobu obletel r. 1961 Zem aj prvý kozmonaut Jurij Gagarin.

Obiehanie delovej gule okolo Zeme je aj v súčasnosti fikcia, no život bez geostacionárnych družíc by sme si nevedeli predstaviť. Takéto družice, "stojace" nad tým istým miestom zemského povrchu zabezpečujú množstvo funkcií: satelitnú televíziu a telefonovanie, GPS, družicové zábery zemskej atmosféry a množstvo ďalších funkcií. Geostacionárna družica obieha okolo Zeme súhlasne s rotáciou Zeme a jej perióda obiehania teda je $T = 24\,h$. Pre podmienku obiehania stacionárnej družice platí podobný vzťah ako (6.34) no s tým rozdielom, že v tomto prípade nemožno zanedbať jej výšku h nad povrchom Zeme a zmenu intenzity gravitačného poľa. Ak použijeme Newtonov gravitačný zákon (6.4), dostaneme

$$m\frac{v^2}{R_Z + h} = \kappa\frac{M_Z\,m}{(R_Z + h)^2}\ ,$$

kde $R_Z + h$ je polomer obežnej dráhy a v obežná rýchlosť. Pre **obežnú rýchlosť** potom platí

$$v^2 = \frac{\kappa\,M_Z}{R_Z + h}\ . \tag{6.35}$$

Geostacionárna dráha je kruhová dráha umelej družice umiestnenej nad zemským rovníkom vo výške $36\,000\,km$ pričom podľa predošlého vzťahu sa pohybuje rýchlosťou približne $3\,km/s$.

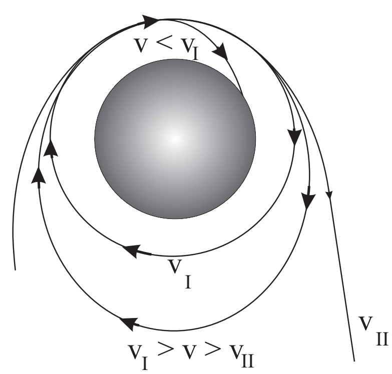
Akú rýchlosť musíme minimálne udeliť kozmickej rakete, aby sa dostala z dosahu zemskej gravitácie? Odpoveď všetci dobre poznáme, táto rýchlosť má aj pomenovanie a volá sa **II. kozmická rýchlosť** a jej hodnota predstavuje okolo 11 km/s. Ukážme si teraz na základe akého postupu sme dospeli k spomínanej hodnote. Pri vzďaľovaní rakety zo zemského povrchu sa koná práca, ktorej veľkosť určíme takto

$$W = \int F_g \, dr = \int_{R_Z}^{\infty} \kappa \frac{M\,m}{r^2} dr = \left[-\kappa \frac{M\,m}{r} \right]_{R_Z}^{\infty} = \kappa \frac{M\,m}{R_Z} \,. \tag{6.36}$$

Integračná hranica ∞ zodpovedá v podstate miestu, kde gravitačné pole Zeme pôsobiace na raketu je už zanedbateľné so silovým pôsobením iných nebeských telies. Ak premiestňujeme napr. teleso hmotnosti 1 kg, potrebujeme energiu približne 60 MJ. Celá táto energia alebo práca, ktorú treba dodať, sa hradí z kinetickej energie telesa, rakety. Ak dáme do rovnosti kinetickú energiu $E_k = 1/2\, m\, v^2$ a potrebnú prácu zo vzťahu (6.36), dostaneme vyjadrenie pre **II. kozmickú rýchlosť**

$$v_{II} = \sqrt{\kappa \frac{2\,M}{R_Z}} = \sqrt{2}\, v_I \ = 11,2\, km/s \,. \tag{6.37}$$

Uvedená práca je konečná, a to napriek tomu, že dráha je "nekonečne" veľká. To súvisí, samozrejme s tým, že gravitačná sila klesá so štvorcom vzdialenosti.



Obrázok 6.6: I. a II. kozmická rýchlosť (súhrnne).

Dôležitými veličinami pre každé väčšie nebeské teleso (Slnko, planéty, mesiace) sú I. a II. kozmická rýchlosť. I. kozmická rýchlosť v_I je rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu v horizontálnom smere tesne nad povrchom planéty, aby obiehalo okolo nej po kruhovej dráhe ako umelá družica. II. kozmická rýchlosť v_{II} predstavuje tzv. únikovú rýchlosť z povrchu planéty. Je to minimálna rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu z povrchu planéty smerom zvislo nahor, aby natrvalo opustilo jej gravitačné pole planéty.