Tuesday 15^{th} January, 2013, 19:53

Základy tenzorového počtu

M.Gintner

Vektorový priestor V: Množina prvkov (*vektory*), na ktorej je definované ich sčítanie a ich násobenie reálnym číslom tak, že platí:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $\forall \vec{a}, \vec{b}\,\vec{c} \in V : (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\exists!\ \vec{o} \in V : \vec{a} + \vec{o} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V$,
4. $\forall \vec{a} \in V : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,
5. $\forall \vec{a} \in V, \alpha, \beta \in \mathcal{R} : \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$,
6. $\forall \vec{a} \in V, \alpha, \beta \in \mathcal{R} : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
7. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \alpha \in \mathcal{R} : \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

Lineárna kombinácia vektorov.

Lineárna (ne)závislosť vektorov.

Báza vektorového priestoru $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$:

- $\vec{e}_i$ — nezávislé vektory,
- $\forall \vec{x} \in V$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov bázy,

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i, \tag{1}$$

  x^i — súradnice vektora $\vec{x}$.
  Einsteinova sumačná konvencia:

$$\sum_{i=1}^{n} x^i\vec{e}_i \longrightarrow x^i\vec{e}_i \tag{2}$$

- všetky bázy priestoru V majú rovnaký počet prvkov ($n =$ *dimenzia* V).

Lineárna forma (kovektor): reálna funkcia f na V, pre ktorú platí

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V : f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$,
2. $\forall \vec{x} \in V, \alpha \in \mathcal{R} : f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$.

Duálny vektorový priestor:

- Množina všetkých lineárnych foriem na V tvorí vektorový priestor. Naozaj, ak priestor všetkých lineárnych foriem označíme $\widetilde{V}$, potom

    1. $\forall f, g \in \widetilde{V} : h = f + g \in \widetilde{V}$,
    2. $\forall f \in \widetilde{V}, \alpha \in \mathcal{R} : k = \alpha f \in \widetilde{V}$.

    Priestor $\widetilde{V}$ sa nazýva *duálnym* vektorovým priestorom k V.

- Priestor $\widetilde{V}$ má rovnakú dimenziu ako priestor V a môžeme na ňom zvoliť bázu $\{f^i\}_{i=1}^n$, takže každú lineárnu formu $f \in \widetilde{V}$ môžeme vyjadriť ako superpozíciu

$$f = \xi_i f^i, \quad \xi_i \in \mathcal{R}. \tag{3}$$

- Ak $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ je báza na V, potom

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f(x^1\vec{e}_1 + \ldots + x^n\vec{e}_n) \\ &= x^1 f(\vec{e}_1) + \ldots + x^n f(\vec{e}_n). \end{aligned} \tag{4}$$

    Takže v konkrétnej báze nám na výpočet $f(\vec{x})$ stačí poznať všetky hodnoty $f(\vec{e}_i)$. Nimi je lineárna forma jednoznačne zadaná. Čísla $f(\vec{e}_i)$ sa nazývajú *súradnicami lineárnej formy* vzhľadom na bázu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$.

- Ak zvolíme konkrétnu bázu na $\widetilde{V}$, potom

$$f(\vec{x}) = x^1\xi_j f^j(\vec{e}_1) + \ldots + x^n\xi_j f^j(\vec{e}_n) = x^i\xi_j f^j(\vec{e}_i). \tag{5}$$

- Lineárna forma je zobrazením $V \to \mathcal{R}$.

    Ak zvolíme pevný vektor $\vec{a}$ a každej lineárnej forme f priradíme reálne číslo $f(\vec{a})$, dostaneme lineárne zobrazenie $\widetilde{V} \to \mathcal{R}$. Fixovaný vektor $\vec{a}$ je lineárnou formou na kovektoroch. Takže duálnym priestorom k $\widetilde{V}$ je samotný V, $\widetilde{\widetilde{V}} = V$.

    Všetky možné vektory z V a všetky možné kovektory z $\widetilde{V}$ definujú bilineárne zobrazenie $V \times \widetilde{V} \to \mathcal{R}$, ktoré každej dvojici $(\vec{x}, f)$ priradí reálne číslo. $V \times \widetilde{V}$ označuje kartézsky súčin priestorov V a $\widetilde{V}$.

Duálna báza $\{f^i\}_{i=1}^n$ k báze $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$: f^i sú bázové kovektory z $\widetilde{V}$, pre ktoré platí

$$f^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

- Duálna báza $\{f^i\}_{i=1}^n$ priraďuje každému vektoru jeho súradnice v báze $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$:

$$f^i(\vec{x}) = f^i(x^j\vec{e}_j) = x^i, \tag{7}$$

- V duálnej báze sú koeficienty ξ_i totožné so súradnicami lineárnej formy:

$$f(\vec{e}_j) = \xi_i \underbrace{f^i(\vec{e}_j)}_{\delta^i_j} = \xi_j. \tag{8}$$

- Pôsobenie lineárnej formy na vektor môžeme vyjadriť pomocou súradníc vektora a duálnych súradníc kovektora (porovnaj s (5))

$$f(\vec{x}) = \xi_i x^i. \tag{9}$$

Skalárny súčin

- *Skalárny súčin* je zobrazenie $g : V \times V \to \mathcal{R}$ s nasledujúcimi vlastnosťami pre $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V, \alpha \in \mathcal{R}$:

  1. bilineárne

  $$\begin{aligned} g(\vec{a}, \vec{b} + \alpha\vec{c}) &= g(\vec{a}, \vec{b}) + \alpha g(\vec{a}, \vec{c}), & (10) \\ g(\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{c}) &= g(\vec{a}, \vec{c}) + \alpha g(\vec{b}, \vec{c}), & (11) \end{aligned}$$

  2. symetrické

  $$g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \vec{a}), \tag{12}$$

  3. pozitívne definitné

  $$g(\vec{a}, \vec{a}) > 0, \quad \forall \vec{a} \neq \vec{o}. \tag{13}$$

- Pre $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ platí

  $$g(\vec{a}, \vec{a}) g(\vec{b}, \vec{b}) \geq [g(\vec{a}, \vec{b})]^2, \tag{14}$$

  pričom znamienko rovnosti platí len keď $\vec{a}, \vec{b}$ sú lineárne závislé.

- Číslo $|\vec{a}| = \sqrt{g(\vec{a}, \vec{a})}$ sa nazýva *veľkosť vektora*.

- Kosínus uhla dvoch nenulových vektorov $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\cos\gamma = \frac{g(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \quad \gamma \in \langle 0, \pi \rangle. \tag{15}$$

- Nech $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ je báza vektorového priestoru V. Potom skalárny súčin dvoch vektorov $\vec{a}, \vec{b} \in V$ je

  $$g(\vec{a}, \vec{b}) = a^i b^j g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g_{ij} a^i b^j, \tag{16}$$

  kde $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ sa nazýva *Gramova matica* alebo častejšie *metrický tenzor*.

- Každému vektoru $\vec{a} \in V$ priraďuje skalárny súčin lineárnu formu $g_{\vec{a}} \in \widetilde{V}$ tak, že

$$\forall \vec{x} \in V : g_{\vec{a}}(\vec{x}) = g(\vec{a}, \vec{x}) \in \mathcal{R}. \tag{17}$$

  Toto zobrazenie $V \to \widetilde{V}$ je izomorfizmom[1].

  Súradnice lineárnej formy $g_{\vec{a}}$ v báze $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ sú

$$g_{\vec{a}}(\vec{e}_i) = g(\vec{a}, \vec{e}_i) = a^j g_{ji} \equiv a_i. \tag{18}$$

  Vidíme, že vzťah medzi súradnicami kovektora $g_{\vec{a}}$ a súradnicami vektora $\vec{a}$ je daný metrickým tenzorom. Prechodu od súradníc vektora k súradniciam formy pomocou metrického tenzora hovoríme, že metrický tenzor "spúšťa index".

- Označme maticu inverznú k metrickému tenzoru g_{ij} ako g^{ij}

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k. \tag{19}$$

  Potom vzťah (18) možno invertovať nasledovným spôsobom

$$a^i = a_j g^{ji}. \tag{20}$$

  Takto sme dostali prechod od súradníc kovektora $g_{\vec{a}}$ k súradniciam vektora $\vec{a}$, tzv. "dvíhanie indexu".

- Skalárny súčin dvoch vektorov je možné vyjadriť nasledovne

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = g_{ij} a^i b^j = a_j b^j. \tag{21}$$

<u>Ortonormálna báza:</u>

- môžeme ju definovať len na vektorovom priestore so skalárnym súčinom:

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

  To znamená, že pre vektory ortonormálnej bázy platí

$$|\vec{e}_i| = 1, \quad \forall i \tag{23}$$

$$i \neq j : \cos \gamma_{ij} = \frac{g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)}{|\vec{e}_i||\vec{e}_j|} = 0, \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} = \frac{\pi}{2}. \tag{24}$$

  Na každom konečnorozmernom vektorovom priestore existuje aspoň jedna ortonormálna báza.

[1] Izomorfizmus je vzájomne jednoznačné (bijektívne) zobrazenie, ktoré zachováva algebraickú štruktúru. To znamená, že bijektívne zobrazenie $F : X \to Y$ je izomorfné, ak pre $\forall a, b \in X : F(a \odot b) = F(a) \otimes F(b)$, kde $\odot, \otimes$ reprezentujú operácie na X a Y, voči ktorým sú tieto množiny uzavreté.

- V ortonormálnej báze majú vektor $\vec{a}$ aj kovektor $g_{\vec{a}}$ rovnaké súradnice:

$$a_i = g_{ij} a^j = \delta_{ij} a^j = a^i. \tag{25}$$

- Skalárny súčin dvoch vektorov cez ich súradnice v ortonormálnej báze:

$$g(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a^i b^i. \tag{26}$$

- Veľkosť vektora cez jeho súradnice v ortonormálnej báze:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a^i)^2}. \tag{27}$$

Pseudoskalárny súčin

- Pseudoskalárny súčin je zobrazenie $g : V \times V \to \mathcal{R}$, ktoré je
  1. bilineárne,
  2. symetrické,
  3. regulárne: $\forall \vec{x} \in V : g(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o} \in V$.
- Pre pseudoskalárny súčin neplatí vzťah (14). Nemôžeme preň definovať veľkosť vektora, ani uhol dvoch vektorov, ani ortonormálnu bázu.
- Existuje báza $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$, pre ktorú platí:

$$g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ +1, & i = j = 1, \ldots, m \\ -1, & i = j = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{28}$$

  Číslo m sa nazýva *signatúra pseudoskalárneho súčinu* a nemení sa pri prechode medzi bázami typu (28).
- Aj pseudoskalárny súčin definuje izomorfizmus medzi V a $\widetilde{V}$, ktorý každému vektoru $\vec{a}$ priradí lineárnu formu $g_{\vec{a}}$, pre ktorú platí:

$$g_{\vec{a}}(\vec{x}) = g(\vec{a}, \vec{x}). \tag{29}$$

- V báze (28) má pseudoskalárny súčin vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ tvar

$$\begin{aligned} g(\vec{a}, \vec{b}) &= a^1 b^1 + \ldots + a^m b^m - a^{m+1} b^{m+1} - \ldots - a^n b^n \\ &= a_1 b^1 + \ldots + a_m b^m + a_{m+1} b^{m+1} + \ldots + a_n b^n + a^n b^n \\ &= a_i b^i, \end{aligned} \tag{30}$$

  kde a_i sú súradnice kovektora $g_{\vec{a}}$.

Tenzory

- Nech F je zobrazenie $V \times \ldots \times V \times \widetilde{V} \times \ldots \times \widetilde{V} \to \mathcal{R}$, kde V je v kartézskom súčine r-krát a $\widetilde{V}$ s-krát. Nech F je v každom argumente lineárne zobrazenie. Potom F nazývame *r-krát kovariantným a s-krát kontravariantným tenzorom* na V alebo tiež *tenzorom typu (s,r)* na V.

- Reálne číslo budeme nazývať tenzorom typu (0,0). Lineárna forma (kovektor) je 1-krát kovariantným tenzorom, čiže tenzorom typu (0,1). Skalárny súčin je tenzorom typu (0,2). Vektor z V je 1-krát kontravariantným tenzorom, čiže typu (1,0).

- Majme na V bázu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ a na $\widetilde{V}$ k nej duálnu bázu $\{f^i\}_{i=1}^n$ a tenzor F typu (s,r). Majme r vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r \in V$ a s kovektorov $h^1, \ldots, h^s \in \widetilde{V}$, pričom

$$\vec{x}_i = x_i^p \vec{e}_p, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{31}$$

$$h^j = \xi_q^j f^q, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{32}$$

kde x_i^p je p-ta súradnica vektora $\vec{x}_i$ a ξ_q^j je q-ta súradnica kovektora h^j. Potom

$$F(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_r, h^1, \ldots, h^s) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_r^{p_r} \xi_{q_1}^1 \xi_{q_2}^2 \ldots \xi_{q_s}^s F(\vec{e}_{p_1}, \vec{e}_{p_2}, \ldots, \vec{e}_{p_r}, f^{q_1}, f^{q_2}, \ldots, f^{q_s}), \tag{33}$$

kde čísla

$$F_{p_1 \ldots p_r}^{q_1 \ldots q_s} = F(\vec{e}_{p_1}, \vec{e}_{p_2}, \ldots, \vec{e}_{p_r}, f^{q_1}, f^{q_2}, \ldots, f^{q_s}) \tag{34}$$

nazývame súradnicami tenzora F vzhľadom na bázu $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$.