

QM V KOCKE II

KKK seminár

Mikuláš Gintner

[http://fyzika.uniza.sk/~gintner
/MYNOTES/QM-LECTURE/qm_v_kocke-2_handout.pdf](http://fyzika.uniza.sk/~gintner/MYNOTES/QM-LECTURE/qm_v_kocke-2_handout.pdf)

jar 2010

OUTLINE

1 FORMALIZMUS QM

2 DVOJHODNOTOVÝ SYSTÉM

OUTLINE

1 FORMALIZMUS QM

2 DVOJHODNOTOVÝ SYSTÉM

STAVOVÝ PRIESTOR

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov* priestor.

STAVOVÝ PRIESTOR

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov* priestor.

- vektorový

... $|a\rangle \in \mathcal{H}$

Princíp superpozície: ak $|a\rangle, |b\rangle$ sú možné stavy, potom aj $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

STAVOVÝ PRIESTOR

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov priestor*.

- vektorový ... $|a\rangle \in \mathcal{H}$

Princíp superpozície: ak $|a\rangle, |b\rangle$ sú možné stavy, potom aj $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

- komplexný ... $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \alpha, \beta \in \mathcal{C}$

STAVOVÝ PRIESTOR

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov priestor*.

- vektorový ... $|a\rangle \in \mathcal{H}$

Princíp superpozície: ak $|a\rangle, |b\rangle$ sú možné stavy, potom aj $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

- komplexný ... $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \alpha, \beta \in \mathcal{C}$
- skalárny súčin \Rightarrow norma ... $(|a\rangle, |b\rangle) \in \mathcal{C}$

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{(|a\rangle, |a\rangle)}$$

STAVOVÝ PRIESTOR

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov* priestor.

- vektorový ... $|a\rangle \in \mathcal{H}$

Princíp superpozície: ak $|a\rangle, |b\rangle$ sú možné stavy, potom aj $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

- komplexný ... $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- skalárny súčin \Rightarrow norma ... $(|a\rangle, |b\rangle) \in \mathbb{C}$

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{(|a\rangle, |a\rangle)}$$

- úplný ... $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n\rangle \in \mathcal{H}$
... kde $\{|a_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ je \forall Cauchyho postupnosť v \mathcal{H}

DUÁLNY PRIESTOR — DIRACOVA SYMBOLIKA

- *duálny* Hilbertov priestor

... $\langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle a|b\rangle \in \mathcal{C}, \quad \forall \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

DUÁLNY PRIESTOR — DIRACOVA SYMBOLIKA

- *duálny* Hilbertov priestor

... $\langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle a|b\rangle \in \mathcal{C}, \quad \forall \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

- $|a\rangle \mapsto \langle a|$:

$$\forall |a\rangle \in \mathcal{H}, \quad \exists \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}} : \quad \langle a|b\rangle = (|a\rangle, |b\rangle), \quad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \mapsto \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b|$$

DUÁLNY PRIESTOR — DIRACOVA SYMBOLIKA

- *duálny* Hilbertov priestor

... $\langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle a|b\rangle \in \mathcal{C}, \quad \forall \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

- $|a\rangle \mapsto \langle a|$:

$$\forall |a\rangle \in \mathcal{H}, \quad \exists \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}} : \quad \langle a|b\rangle = (|a\rangle, |b\rangle), \quad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \mapsto \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b|$$

- *projekčný* operátor na jednotkový $|a\rangle$

... $\mathbf{P}_{|a\rangle} = |a\rangle\langle a|$

$$\mathbf{P}_{|a\rangle}|\psi\rangle = |a\rangle\langle a|\psi\rangle$$

$$\mathbf{P}_{|a\rangle}\mathbf{P}_{|a\rangle} = |a\rangle\langle a|a\rangle\langle a| = |a\rangle\langle a| = \mathbf{P}_{|a\rangle}$$

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$
- báza

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

$$\langle a_i | a_j \rangle = g_{ij}, \quad g_{ij} = g_{ji}^*, \quad \dots \text{hermitovská matica}$$

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$
- báza

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

$$\langle a_i | a_j \rangle = g_{ij}, \quad g_{ij} = g_{ji}^*, \quad \dots \text{hermitovská matica}$$

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

- úplnosť bázy

$$\sum_{\forall i} |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbf{I}$$

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$
- báza

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

$$\langle a_i | a_j \rangle = g_{ij}, \quad g_{ij} = g_{ji}^*, \quad \dots \text{hermitovská matica}$$

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

- úplnosť bázy

$$\sum_{\forall i} |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbf{I}$$

- súradnice vektora $|\psi\rangle$ v $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

... α_i

$$|\psi\rangle = \alpha_i |a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = g_{ji}^* \langle a_j | \psi \rangle$$

$$\alpha_i = \langle a_i | \psi \rangle, \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

ROZMERNOSŤ A BÁZA PRIESTORU STAVOV

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$
- báza

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

$$\langle a_i | a_j \rangle = g_{ij}, \quad g_{ij} = g_{ji}^*, \quad \dots \text{hermitovská matica}$$

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

- úplnosť bázy

$$\sum_{\forall i} |a_i\rangle \langle a_i| = \mathbf{I}$$

- súradnice vektora $|\psi\rangle$ v $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

... α_i

$$|\psi\rangle = \alpha_i |a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = g_{ji}^* \langle a_j | \psi \rangle$$

$$\alpha_i = \langle a_i | \psi \rangle, \quad \dots \text{ortonormálna báza}$$

- úplnosť ortonormálnej bázy

$$\sum_{\forall i} |\alpha_i|^2 = 1$$

PRECHODY MEDZI ORTONORMÁLNÝMI BÁZAMI

- ortonormálne bázy

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}, \{|b_n\rangle\}_{\forall n}$

$$|b_i\rangle = U_{ij}^* |a_j\rangle \quad \mapsto \quad \langle b_i| = U_{ij} \langle a_j|$$

$$\Downarrow$$

$$U_{kj}^* U_{ki} = \delta_{ji} \quad U^\dagger U = \mathbf{I}$$

$$U_{ij} = \langle b_i | a_j \rangle, \quad |a_i\rangle = U_{ji} |b_j\rangle$$

PRECHODY MEDZI ORTONORMÁLNÝMI BÁZAMI

- ortonormálne bázy

... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}, \{|b_n\rangle\}_{\forall n}$

$$|b_i\rangle = U_{ij}^* |a_j\rangle \quad \mapsto \quad \langle b_i| = U_{ij} \langle a_j|$$

$$\Downarrow$$

$$U_{kj}^* U_{ki} = \delta_{ji} \quad U^\dagger U = \mathbf{I}$$

$$U_{ij} = \langle b_i | a_j \rangle, \quad |a_i\rangle = U_{ji} |b_j\rangle$$

- transformácia súradníc

... $|\psi\rangle = \alpha_i |a_i\rangle = \beta_j |b_j\rangle$

$$\beta_i = U_{ij} \alpha_j, \quad \alpha_i = U_{ji}^* \beta_j$$

POZOROVATEĽNÉ

Fyzikálne veličiny sú reprezentované
lineárnymi *hermitovskými* operátormi na Hilbertovom priestore stavov

- *pozorovateľná*

... $A \mapsto A$

linearita: $\mathbf{A}(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\mathbf{A}|a\rangle + \beta\mathbf{A}|b\rangle$

POZOROVATEĽNÉ

Fyzikálne veličiny sú reprezentované
lineárnymi *hermitovskými* operátormi na Hilbertovom priestore stavov

- *pozorovateľná*

... $A \mapsto A$

linearita: $\mathbf{A}(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\mathbf{A}|a\rangle + \beta\mathbf{A}|b\rangle$

- *hermitovsky združený* operátor k \mathbf{A}

... \mathbf{A}^\dagger

$$\mathbf{A}|a\rangle \equiv |\mathbf{A}a\rangle \mapsto \langle \mathbf{A}a| = \langle a|\mathbf{A}^\dagger, \quad \forall |a\rangle$$

takže $\langle b|\mathbf{A}|a\rangle = \langle a|\mathbf{A}^\dagger|b\rangle^*, \quad \forall |b\rangle$

POZOROVATEĽNÉ

Fyzikálne veličiny sú reprezentované
lineárnymi *hermitovskými* operátormi na Hilbertovom priestore stavov

- *pozorovateľná*

$$\dots A \mapsto A$$

linearita: $A(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha A|a\rangle + \beta A|b\rangle$

- *hermitovsky združený* operátor k A

$$\dots A^\dagger$$

$$A|a\rangle \equiv |Aa\rangle \mapsto \langle Aa| = \langle a|A^\dagger, \quad \forall |a\rangle$$

takže $\langle b|A|a\rangle = \langle a|A^\dagger|b\rangle^*, \quad \forall |b\rangle$

- *hermitovské združenie súčiny operátorov*

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

POZOROVATEĽNÉ

Fyzikálne veličiny sú reprezentované
lineárnymi *hermitovskými* operátormi na Hilbertovom priestore stavov

- *pozorovateľná*

$$\dots A \mapsto A$$

linearita: $A(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha A|a\rangle + \beta A|b\rangle$

- *hermitovsky združený* operátor k A

$$\dots A^\dagger$$

$$A|a\rangle \equiv |Aa\rangle \mapsto \langle Aa| = \langle a|A^\dagger, \quad \forall |a\rangle$$

takže $\langle b|A|a\rangle = \langle a|A^\dagger|b\rangle^*, \quad \forall |b\rangle$

- *hermitovské združenie súčiny* operátorov

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

- *hermitovský* operátor

$$\dots A^\dagger = A$$

$$\langle b|A|a\rangle = \langle a|A|b\rangle^*, \quad \forall |a\rangle, |b\rangle$$

VLASTNOSTI HERMITOVSKÝCH OPERÁTOROV

- *vlastné hodnoty a vektory:*

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$$

VLASTNOSTI HERMITOVSKÝCH OPERÁTOROV

- *vlastné hodnoty a vektory:*

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$$

- *vlastné hodnoty hermitovského operátora sú reálne čísla*

$$a_n \in \mathcal{R}, \quad \forall n$$

VLASTNOSTI HERMITOVSKÝCH OPERÁTOROV

- *vlastné hodnoty a vektory:*

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$$

- *vlastné hodnoty hermitovského operátora sú reálne čísla*

$$a_n \in \mathcal{R}, \quad \forall n$$

- *vlastné vektory hermitovského operátora tvoria úplnú bázu*

$$|\psi\rangle = \alpha_n|a_n\rangle$$

VLASTNOSTI HERMITOVSKÝCH OPERÁTOROV

- *vlastné hodnoty a vektory:*

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$$

- *vlastné hodnoty hermitovského operátora sú reálne čísla*

$$a_n \in \mathcal{R}, \quad \forall n$$

- *vlastné vektory hermitovského operátora tvoria úplnú bázu*

$$|\psi\rangle = \alpha_n|a_n\rangle$$

- *ortogonalita vlastných vektorov:*

$$a_n \neq a_m \quad \Rightarrow \quad \langle a_n|a_m\rangle = 0$$

MERANIE

Výsledkom merania pozorovateľnej A je vždy jedna z vlastných hodnôt hermitovského operátora A .

MERANIE

Výsledkom merania pozorovateľnej A je vždy jedna z vlastných hodnôt hermitovského operátora A .

V okamihu, keď v stave $|\psi\rangle$ nameriame vlastnú hodnotu a_n operátora A , systém sa *skokom* ocitne vo vlastnom stave $|a_n\rangle$.

PRAVDEPODOBNOŠŤ VÝSLEDKU

Pravdepodobnosť, že v stave $|\psi\rangle$ nameriame hodnotu a_n pozorovateľnej A , je daná vzťahom

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ sú jednotkové vektory.

PRAVDEPODOBNOST' VÝSLEDKU

Pravdepodobnosť, že v stave $|\psi\rangle$ nameriame hodnotu a_n pozorovateľnej A , je daná vzťahom

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ sú jednotkové vektory.

$$\alpha_n = \langle a_n|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(a_n|\psi) = |\alpha_n|^2$$

PRAVDEPODOBNOŠŤ VÝSLEDKU

Pravdepodobnosť, že v stave $|\psi\rangle$ nameriame hodnotu a_n pozorovateľnej A , je daná vzťahom

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ sú jednotkové vektory.

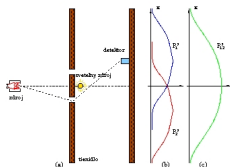
$$\alpha_n = \langle a_n|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(a_n|\psi) = |\alpha_n|^2$$

Ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ *nie* sú jednotkové vektory:

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = \frac{|\langle a_n|\psi\rangle|^2}{\| |a_n\rangle \| \| |\psi\rangle \|}$$

MERANIE NA DVOJŠTRBINE

$$\mathbf{X}|x\rangle = x|x\rangle$$



- štrbina 1 ... $|\psi_1\rangle$
štrbina 2 ... $|\psi_2\rangle$

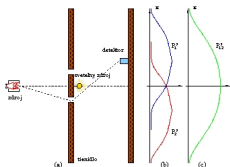
$$\mathcal{P}(x|\psi_i) = |\langle x|\psi_i\rangle|^2$$

- štrbina 1+2

$$\mathcal{P}(x|\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{P}(x|\psi_1) + \mathcal{P}(x|\psi_2)$$

MERANIE NA DVOJŠTRBINE

$$\mathbf{X}|x\rangle = x|x\rangle$$

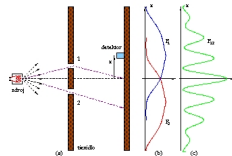


- štrbina 1 ... $|\psi_1\rangle$
štrbina 2 ... $|\psi_2\rangle$

$$\mathcal{P}(x|\psi_i) = |\langle x|\psi_i\rangle|^2$$

- štrbina 1+2

$$\mathcal{P}(x|\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{P}(x|\psi_1) + \mathcal{P}(x|\psi_2)$$



- výsledný stav:

$$|\psi_{12}\rangle \propto |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$$

- pravdepodobnosť:

$$\mathcal{P}(x|\psi_{12}) = |\langle x|\psi_{12}\rangle|^2$$

STREDNÉ HODNOTY POZOROVATEĽNÝCH

- *stredná hodnota pozorovateľnej A v stave $|\psi\rangle$*

... $\langle A \rangle_\psi$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle, \quad \text{ak } \|\psi\| = 1$$

STREDNÉ HODNOTY POZOROVATEĽNÝCH

- *stredná hodnota pozorovateľnej A v stave $|\psi\rangle$*

... $\langle A \rangle_\psi$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle, \quad \text{ak } \|\psi\| = 1$$

- *pravdepodobnosť namerania hodnoty a_n :*

$$\mathcal{P}(a_n | \psi) = \langle \psi | a_n \rangle \langle a_n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{P}_{|a_n} | \psi \rangle$$

STREDNÉ HODNOTY POZOROVATEĽNÝCH

- *stredná hodnota pozorovateľnej A v stave $|\psi\rangle$*

... $\langle A \rangle_\psi$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle, \quad \text{ak } \|\psi\| = 1$$

- *pravdepodobnosť namerania hodnoty a_n :*

$$\mathcal{P}(a_n | \psi) = \langle \psi | a_n \rangle \langle a_n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{P}_{|a_n\rangle} | \psi \rangle$$

- *Spektrálny teorém:*

$$\mathbf{A} = \sum_{\forall n} a_n \mathbf{P}_{|a_n\rangle}$$

STREDNÉ HODNOTY POZOROVATEĽNÝCH

- *stredná hodnota pozorovateľnej A v stave $|\psi\rangle$*

... $\langle A \rangle_\psi$

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle, \quad \text{ak } \|\psi\| = 1$$

- *pravdepodobnosť namerania hodnoty a_n :*

$$\mathcal{P}(a_n | \psi) = \langle \psi | a_n \rangle \langle a_n | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbf{P}_{|a_n\rangle} | \psi \rangle$$

- *Spektrálny teorém:*

$$\mathbf{A} = \sum_{\forall n} a_n \mathbf{P}_{|a_n\rangle}$$

potom

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_{\forall n} \langle \psi | a_n \mathbf{P}_{|a_n\rangle} | \psi \rangle = \sum_{\forall n} a_n \mathcal{P}(a_n | \psi) = \sum_{\forall n} a_n |\alpha_n|^2$$

HEISENBERGOV PRINCÍP NEURČITOSTI

- *středná kvadratická odchylka v stave $|\psi\rangle$:*

$$\delta A = \langle \psi | (\mathbf{A} - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}$$

HEISENBERGOV PRINCÍP NEURČITOSTI

- *středná kvadratická odchylka v stave $|\psi\rangle$:*

$$\delta A = \langle \psi | (\mathbf{A} - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}$$

- *vlastné stavy operátora \mathbf{A} :*

$$\delta A = 0$$

HEISENBERGOV PRINCÍP NEURČITOSTI

- *stredná kvadratická odchyľka v stave $|\psi\rangle$:*

$$\delta A = \langle \psi | (\mathbf{A} - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle^{1/2} = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2}$$

- *vlastné stavy operátora \mathbf{A} :*

$$\delta A = 0$$

- *žiadnen stav nemôže byť súčasne vlastným stavom dvoch nekomutujúcich operátorov*

$$\delta A \cdot \delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \rangle_\psi|$$

poznámka:

Komutátor dvoch hermitovských operátorov je *antihermitovský* operátor:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\dagger = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$$

NORMOVANOSŤ A FÁZA STAVOVÉHO VEKTORA

- pri popise fyzikálnych stavov sa stačí obmedziť na *jednotkové* (alebo inak *normované*) vektory z \mathcal{H}

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

NORMOVANOSŤ A FÁZA STAVOVÉHO VEKTORA

- pri popise fyzikálnych stavov sa stačí obmedziť na *jednotkové* (alebo inak *normované*) vektory z \mathcal{H}

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

- normovaný stavový vektor je daný jednoznačne až na *fázu* φ

$$|\psi\rangle \mapsto e^{i\varphi} |\psi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{R}$$

NORMOVANOSŤ A FÁZA STAVOVÉHO VEKTORA

- pri popise fyzikálnych stavov sa stačí obmedziť na *jednotkové* (alebo inak *normované*) vektory z \mathcal{H}

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1$$

- normovaný stavový vektor je daný jednoznačne až na *fázu* φ

$$|\psi\rangle \mapsto e^{i\varphi} |\psi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{R}$$

- fyzikálne merateľná je *relatívna fáza*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x|\psi_{12}) &\propto \left| |\langle x|\psi_1\rangle| e^{i\varphi_1(x)} + |\langle x|\psi_2\rangle| e^{i\varphi_2(x)} \right|^2 \\ &= |\langle x|\psi_1\rangle|^2 + |\langle x|\psi_2\rangle|^2 + 2|\langle x|\psi_1\rangle\langle x|\psi_2\rangle| \cos[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)] \end{aligned}$$

ČASOVÝ VÝVOJ

Časový vývoj stavového vektora je daný *Schrödingerovou rovnicou*

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \mathbf{H}|\psi\rangle$$

kde \mathbf{H} je tzv. *Hamiltonov operátor*, $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$.

- operátor \mathbf{H} charakterizuje daný fyzikálny systém
- tvar operátora \mathbf{H} treba uhádnuť

STACIONÁRNE STAVY

- vlastné stavy a hodnoty Hamiltonovho operátora:

$$\mathbf{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

STACIONÁRNE STAVY

- vlastné stavy a hodnoty Hamiltonovho operátora:

$$\mathbf{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- časový vývoj $|\psi_n\rangle$:

$$i\hbar \frac{d|\psi_n\rangle}{dt} = E_n|\psi_n\rangle$$

$$|\psi_n\rangle(t) = |\psi_n\rangle(0) \exp(-iE_n t/\hbar)$$

STACIONÁRNE STAVY

- vlastné stavy a hodnoty Hamiltonovho operátora:

$$\mathbf{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- časový vývoj $|\psi_n\rangle$:

$$i\hbar \frac{d|\psi_n\rangle}{dt} = E_n|\psi_n\rangle$$

$$|\psi_n\rangle(t) = |\psi_n\rangle(0) \exp(-iE_n t/\hbar)$$

- časový vývoj $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle(0) = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \quad \xrightarrow{t} \quad |\psi\rangle(t) = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \exp(-iE_n t/\hbar)$$

ZACHOVÁVAJÚCE SA POZOROVATEĽNÉ

- Časový vývoj strednej hodnoty:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle = i\hbar \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{A}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{d\mathbf{A}}{dt} | \psi \rangle$$

ZACHOVÁVAJÚCE SA POZOROVATEĽNÉ

- Časový vývoj strednej hodnoty:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle = i\hbar \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{A}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{d\mathbf{A}}{dt} | \psi \rangle$$

- \mathbf{A} sa zachováva v čase, ak \mathbf{A} nezávisí na čase a komutuje s \mathbf{H}

ZACHOVÁVAJÚCE SA POZOROVATEĽNÉ

- Časový vývoj strednej hodnoty:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle = i\hbar \langle \psi | [\mathbf{H}, \mathbf{A}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{d\mathbf{A}}{dt} | \psi \rangle$$

- \mathbf{A} sa zachováva v čase, ak \mathbf{A} nezávisí na čase a komutuje s \mathbf{H}
- $d\mathbf{H}/dt = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{H} \rangle$ sa nemení s časom

ÚPLNÝ SYSTÉM POZOROVATEĽNÝCH

Pre každý fyzikálny systém \exists *minimálna sada vzájomne komutujúcich* operátorov, ktorých vlastné hodnoty jednoznačne určujú stav tohoto systému.

ÚPLNÝ SYSTÉM POZOROVATEĽNÝCH

Pre každý fyzikálny systém \exists *minimálna sada vzájomne komutujúcich* operátorov, ktorých vlastné hodnoty jednoznačne určujú stav tohoto systému.

- komutujúce operátory majú spoločné vlastné vektory

$$\mathbf{A}|a\rangle = a|a\rangle \wedge [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}|a\rangle = b|a\rangle$$

▶ skip to proof

ÚPLNÝ SYSTÉM POZOROVATEĽNÝCH

Pre každý fyzikálny systém \exists *minimálna sada vzájomne komutujúcich* operátorov, ktorých vlastné hodnoty jednoznačne určujú stav tohoto systému.

- komutujúce operátory majú spoločné vlastné vektory

$$\mathbf{A}|a\rangle = a|a\rangle \wedge [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}|a\rangle = b|a\rangle$$

► skip to proof

- ak \mathbf{A} a \mathbf{B} majú spoločné \forall vlastné vektory a ak tieto tvoria *úplný* vlastný systém, potom \mathbf{A} a \mathbf{B} komutujú.

$$\left. \begin{aligned} \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}|a_n\rangle &= a_n|a_n\rangle, \forall n \\ \mathbf{B}|a_n\rangle &= b_n|a_n\rangle, \forall n \end{aligned} \right\} \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$$

► skip to proof

DEFINÍCIE OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE (I)

Majme lineárny hermitovský operátor \mathbf{A} na \mathcal{H}

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \mathbf{A} = \sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|$$

a komplexnú funkciu $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Potom *operátorovou funkciou* $f(\mathbf{A})$ nazveme výraz

$$f(\mathbf{A}) \equiv \sum_n f(a_n)|a_n\rangle\langle a_n|$$

DEFINÍCIE OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE (I)

Majme lineárny hermitovský operátor \mathbf{A} na \mathcal{H}

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \mathbf{A} = \sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|$$

a komplexnú funkciu $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$. Potom *operátorovou funkciou* $f(\mathbf{A})$ nazveme výraz

$$f(\mathbf{A}) \equiv \sum_n f(a_n)|a_n\rangle\langle a_n|$$

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE (II)

Majme lineárny hermitovský operátor \mathbf{A} na \mathcal{H} a komplexnú funkciu $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ s mocninným rozvojom v tvare

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

Potom *operátorovou funkciou* $f(\mathbf{A})$ nazveme výraz

$$f(\mathbf{A}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{A}^k$$

EKVIVALENTNOSŤ DEFINÍCIÍ I A II

LEMMA

Definície I a II operátorovej funkcie sú ekvivalentné.

EKVIVALENTNOST' DEFINÍCIÍ I A II

LEMMA

Definície I a II operátorovej funkcie sú ekvivalentné.

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n| \right)^k = \sum_n (a_n)^k |a_n\rangle \langle a_n|$$

EKVIVALENTNOSŤ DEFINÍCIÍ I A II

LEMMA

Definície I a II operátorovej funkcie sú ekvivalentné.

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n| \right)^k = \sum_n (a_n)^k |a_n\rangle \langle a_n|$$

Potom

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) &\stackrel{\text{def. II}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n| \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_n (a_n)^k |a_n\rangle \langle a_n| \\ &= \sum_n \underbrace{\left(\sum_k f_k a_n^k \right)}_{f(a_n)} |a_n\rangle \langle a_n| \stackrel{\text{def. I}}{=} f(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

EXPONENCIÁLNA OPERÁTOROVÁ FUNKCIA

- definícia exponenciálnej operátorovej funkcie

... $e^{\mathbf{A}}$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def.II}}{=} \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \stackrel{\text{def.I}}{=} \sum_n e^{a_n} |a_n\rangle\langle a_n|$$

EXPONENCIÁLNA OPERÁTOROVÁ FUNKCIA

- definícia exponenciálnej operátorovej funkcie

... $e^{\mathbf{A}}$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def.II}}{=} \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \stackrel{\text{def.I}}{=} \sum_n e^{a_n} |a_n\rangle \langle a_n|$$

- pre všetky operátory \mathbf{A} , \mathbf{B} platí

$$e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}e^{-\mathbf{B}} = \mathbf{A} + [\mathbf{B}, \mathbf{A}] + \frac{1}{2!}[\mathbf{B}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{B}_k\{\mathbf{A}\}$$

kde

$$\mathbf{B}_0\{\mathbf{A}\} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_1\{\mathbf{A}\} \equiv [\mathbf{B}, \mathbf{A}], \quad \mathbf{B}_2\{\mathbf{A}\} \equiv [\mathbf{B}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]], \quad \dots$$

UNITÁRNE vs. HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

LEMMA

Pre každý unitárny operátor U môžeme nájsť hermitovský operátor H taký, že

$$U = e^{iH}$$

UNITÁRNE vs. HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

LEMMA

Pre každý unitárny operátor U môžeme nájsť hermitovský operátor H taký, že

$$U = e^{iH}$$

- $U = e^{iH}$

$$\dots H^\dagger = H$$

$$e^{iH} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k = 1 + iH - \frac{1}{2!} H^2 + \dots$$

UNITÁRNE vs. HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

LEMMA

Pre každý unitárny operátor U môžeme nájsť hermitovský operátor H taký, že

$$U = e^{iH}$$

- $U = e^{iH}$

$$\dots H^\dagger = H$$

$$e^{iH} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k = 1 + iH - \frac{1}{2!} H^2 + \dots$$

- $U^\dagger = e^{-iH}$

$$(e^{iH})^\dagger = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k \right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-iH)^k = e^{-iH}$$

UNITÁRNE vs. HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

LEMMA

Pre každý unitárny operátor U môžeme nájsť hermitovský operátor H taký, že

$$U = e^{iH}$$

- $U = e^{iH}$

$$\dots H^\dagger = H$$

$$e^{iH} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k = 1 + iH - \frac{1}{2!} H^2 + \dots$$

- $U^\dagger = e^{-iH}$

$$(e^{iH})^\dagger = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (iH)^k \right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-iH)^k = e^{-iH}$$

- $U^\dagger U = 1$

$$U^\dagger U = (1 - iH - \frac{1}{2!} H^2 + \dots)(1 + iH - \frac{1}{2!} H^2 + \dots) = 1$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ DERIVÁCIE OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

Nech $f(z)$ a $g(z)$ sú komplexné funkcie komplexnej premennej také, že

$$g(z) = \frac{d f(z)}{d z}$$

Potom *operátorovou deriváciou* operátorovej funkcie $f(\mathbf{A})$ podľa operátora \mathbf{A} nazveme operátorovú funkciu $g(\mathbf{A})$, t.j.

$$\frac{d f(\mathbf{A})}{d \mathbf{A}} = g(\mathbf{A})$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ DERIVÁCIE OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

Nech $f(z)$ a $g(z)$ sú komplexné funkcie komplexnej premennej také, že

$$g(z) = \frac{d f(z)}{d z}$$

Potom *operátorovou deriváciou* operátorovej funkcie $f(\mathbf{A})$ podľa operátora \mathbf{A} nazveme operátorovú funkciu $g(\mathbf{A})$, t.j.

$$\frac{d f(\mathbf{A})}{d \mathbf{A}} = g(\mathbf{A})$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad \Rightarrow \quad \frac{d f(z)}{d z} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k = g(z), \quad g_k = (k+1)f_{k+1}$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

DEFINÍCIA OPERÁTOROVEJ DERIVÁCIE OPERÁTOROVEJ FUNKCIE

Nech $f(z)$ a $g(z)$ sú komplexné funkcie komplexnej premennej také, že

$$g(z) = \frac{d f(z)}{d z}$$

Potom *operátorovou deriváciou* operátorovej funkcie $f(\mathbf{A})$ podľa operátora \mathbf{A} nazveme operátorovú funkciu $g(\mathbf{A})$, t.j.

$$\frac{d f(\mathbf{A})}{d \mathbf{A}} = g(\mathbf{A})$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \Rightarrow \frac{d f(z)}{d z} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k = g(z), \quad g_k = (k+1)f_{k+1}$$

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{A}^k \Rightarrow \frac{d f(\mathbf{A})}{d \mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \mathbf{A}^k = g(\mathbf{A}), \quad g_k = (k+1)f_{k+1}$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA AKO KOMUTÁTOR

LEMMA

Nech $[A, B] = I$. Nech $f(A)$ je operátorová funkcia. Potom

$$\frac{d f(A)}{d A} = [B, f(A)]$$

Proof:

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA AKO KOMUTÁTOR

LEMMA

Nech $[A, B] = I$. Nech $f(A)$ je operátorová funkcia. Potom

$$\frac{d f(A)}{d A} = [B, f(A)]$$

Proof:

- ľavá strana:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k \Rightarrow \frac{d f(A)}{d A} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k A^{k-1}$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA AKO KOMUTÁTOR

LEMMA

Nech $[A, B] = I$. Nech $f(A)$ je operátorová funkcia. Potom

$$\frac{d f(A)}{d A} = [B, f(A)]$$

Proof:

- ľavá strana:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k \Rightarrow \frac{d f(A)}{d A} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k A^{k-1}$$

- pomocná identita ♠:

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z] \Rightarrow [B, A^k] = nA^{k-1} + A^n[B, A^{k-n}] = kA^{k-1}$$

OPERÁTOROVÁ DERIVÁCIA AKO KOMUTÁTOR

LEMMA

Nech $[A, B] = I$. Nech $f(A)$ je operátorová funkcia. Potom

$$\frac{d f(A)}{d A} = [B, f(A)]$$

Proof:

- ľavá strana:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k \Rightarrow \frac{d f(A)}{d A} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k A^{k-1}$$

- pomocná identita ♠:

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z] \Rightarrow [B, A^k] = n A^{k-1} + A^n [B, A^{k-n}] = k A^{k-1}$$

- pravá strana

$$[B, f(A)] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k [B, A^k] \stackrel{\spadesuit}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k f_k A^{k-1}$$

PARAMETRICKÁ DERIVÁCIA OPERÁTORA

DEFINÍCIA PARAMETRICKEJ DERIVÁCIE OPERÁTORA

Nech \mathbf{A} je operátor, ktorý závisí na reálnom parametri s . Potom *parametrická derivácia* operátora $\mathbf{A}(s)$ podľa parametra s je definovaná ako

$$\frac{d \mathbf{A}}{d s}(s) \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(s + \Delta s) - \mathbf{A}(s)}{\Delta s}$$

PARAMETRICKÁ DERIVÁCIA OPERÁTORA

DEFINÍCIA PARAMETRICKEJ DERIVÁCIE OPERÁTORA

Nech \mathbf{A} je operátor, ktorý závisí na reálnom parametri s . Potom *parametrická derivácia* operátora $\mathbf{A}(s)$ podľa parametra s je definovaná ako

$$\frac{d \mathbf{A}}{d s}(s) \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(s + \Delta s) - \mathbf{A}(s)}{\Delta s}$$

LEMMA

Nech operátory \mathbf{A} a \mathbf{B} závisia na parametri s . Potom

$$\frac{d \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{d s}(s) = \frac{d \mathbf{A}}{d s}(s) \mathbf{B}(s) + \mathbf{A}(s) \frac{d \mathbf{B}}{d s}(s)$$

OUTLINE

1 FORMALIZMUS QM

2 DVOJHODNOTOVÝ SYSTÉM

HILBERTOV PRIESTOR

- min. súbor: **jediná pozorovateľná** A ... hermitovský operátor A

- dve vlastné hodnoty:

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

- 2-dim Hilbertov priestor \mathcal{H}_2 ... ortonotmálna báza $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle$$

$$\alpha_i = \langle a_i|\psi\rangle$$

$$P_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i|$$

- relácia úplnosti:

$$I = P_{|a_1\rangle} + P_{|a_2\rangle} = |a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| = \sum_{i=1}^2 |a_i\rangle\langle a_i|$$

MERANIE

- systém v stave $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$

$$\dots \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |a_1\rangle + \alpha_2 |a_2\rangle$$

- výsledok merania A :

| hodnota | pravdepodobnosť | stav po meraní |
|---------|-----------------|----------------|
| a_1 | $ \alpha_1 ^2$ | $ a_1\rangle$ |
| a_2 | $ \alpha_2 ^2$ | $ a_2\rangle$ |

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle = |\alpha_1|^2 a_1 + |\alpha_2|^2 a_2$$

$$\delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2} = |\alpha_1| |\alpha_2| |a_1 - a_2|$$

ČASOVÝ VÝVOJ

- predpokladajme, že $H = H(A)$:
 ... $[H, A] = 0$
 ... spoločné vlastné vektory $|a_1\rangle, |a_2\rangle$
 ... A sa zachováva v čase

$$H|a_i\rangle = E_i|a_i\rangle, \quad E_i = E(a_i), \quad i = 1, 2$$

- časový vývoj stavu

$$t = 0: |\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle$$

$$|\psi\rangle(t) = \alpha_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |a_1\rangle + \alpha_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |a_2\rangle$$

- meranie A v čase t

| hodnota | pravdepodobnosť | stav po meraní |
|---------|-----------------|---|
| a_1 | $ \alpha_1 ^2$ | $ a_1\rangle$ alebo $ a_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar}$ |
| a_2 | $ \alpha_2 ^2$ | $ a_2\rangle$ alebo $ a_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}$ |

... pretože A sa zachováva

NEKOMUTUJÚCA POZOROVATEĽNÁ

- nech \exists veličina B :

$$\dots B^\dagger = B$$

$$[B, A] \neq 0$$

- dva vlastné vektory

... ortonormálna báza $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$B|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

LEMMA

$$[A, B] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{nemajú spoločné } \forall \text{ vlastné vektory}$$

... tvrdenie ekvivalentné k lemmám na slajde “Úplný systém pozorovateľných”

MUSÍ BYT' $b_1 \neq b_2$?

LEMMA

$$\mathbf{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle \wedge \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij} \wedge [\mathbf{B}, \mathbf{A}] \neq 0 \Rightarrow b_1 \neq b_2$$

PROOF.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \Rightarrow \langle b_\ell|\mathbf{A}|b_i\rangle\langle b_i|\mathbf{B}|b_k\rangle \neq \langle b_\ell|\mathbf{B}|b_j\rangle\langle b_j|\mathbf{A}|b_k\rangle$$

$$\Rightarrow \langle b_\ell|\mathbf{A}|b_k\rangle b_k \neq b_\ell \langle b_\ell|\mathbf{A}|b_k\rangle \stackrel{?}{\Rightarrow} b_k \neq b_\ell, \text{ if } k \neq \ell$$



PRECHOD MEDZI $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ A $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

- ortonormálne bázy $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\mathbf{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \quad \mathbf{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$$

- matica prechodu U

$$U = \begin{pmatrix} \langle b_1|a_1\rangle & \langle b_1|a_2\rangle \\ \langle b_2|a_1\rangle & \langle b_2|a_2\rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |b_1\rangle \\ |b_2\rangle \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} |a_1\rangle \\ |a_2\rangle \end{pmatrix}$$

- transformácia súradníc $\alpha_i \mapsto \beta_i$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle = \beta_1|b_1\rangle + \beta_2|b_2\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

MERANIE VELIČINY B

- systém v stave $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$

$$\dots \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$$|\psi\rangle = \beta_1 |b_1\rangle + \beta_2 |b_2\rangle$$

- výsledok merania B :

| hodnota | pravdepodobnosť | stav po meraní |
|---------|-----------------|----------------|
| b_1 | $ \beta_1 ^2$ | $ b_1\rangle$ |
| b_2 | $ \beta_2 ^2$ | $ b_2\rangle$ |

$$\langle B \rangle_\psi = |\beta_1|^2 b_1 + |\beta_2|^2 b_2, \quad \delta_\psi B = |\beta_1| |\beta_2| |b_1 - b_2|$$

$$\delta_\psi A \cdot \delta_\psi B = |\alpha_1| |\alpha_2| |\beta_1| |\beta_2| |a_1 - a_2| |b_1 - b_2|$$

MERANIE VELIČINY B V ČASE t

- stav systému v čase t

$$\begin{aligned} |\psi\rangle(t) &= \alpha_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |a_1\rangle + \alpha_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |a_2\rangle \\ &= \alpha_1 e^{-iE_1 t/\hbar} (U_{11}|b_1\rangle + U_{21}|b_2\rangle) \\ &\quad + \alpha_2 e^{-iE_2 t/\hbar} (U_{12}|b_1\rangle + U_{22}|b_2\rangle) \end{aligned}$$

- výsledok merania B v čase t :

| hodnota | pravdepodobnosť | stav po meraní |
|---------|----------------------------|----------------|
| b_1 | $\mathcal{P}(b_1 \psi(t))$ | $ b_1\rangle$ |
| b_2 | $\mathcal{P}(b_2 \psi(t))$ | $ b_2\rangle$ |

VYČÍSLENIE PRAVDEPODOBNOSTÍ

- stav systému v čase t

$$|\psi\rangle(t) = \alpha_1 e^{-iE_1 t/\hbar} (U_{11}|b_1\rangle + U_{21}|b_2\rangle) + \alpha_2 e^{-iE_2 t/\hbar} (U_{12}|b_1\rangle + U_{22}|b_2\rangle)$$

- pravdepodobnosť nameraní hodnoty b_1

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_1|\psi(t)) &= |\langle b_1|\psi\rangle(t)|^2 \\ &= |\alpha_1 U_{11}|^2 + |\alpha_2 U_{12}|^2 + 2 |\alpha_1 \alpha_2 U_{11} U_{12}| \cdot \cos \left[\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} + \varphi \right] \end{aligned}$$

... kde φ je fáza výrazu $\alpha_1^* \alpha_2 U_{11}^* U_{12}$

- pravdepodobnosť nameraní hodnoty b_2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_2|\psi(t)) &= |\langle b_2|\psi\rangle(t)|^2 \\ &= |\alpha_1 U_{21}|^2 + |\alpha_2 U_{22}|^2 - 2 |\alpha_1 \alpha_2 U_{11} U_{12}| \cdot \cos \left[\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} + \varphi \right] \end{aligned}$$

SKÚŠKA SPRÁVNOSTI

DOMÁCA ÚLOHA:

Ukážte, že

$$\mathcal{P}(b_1|\psi(t)) + \mathcal{P}(b_2|\psi(t)) = 1, \quad \forall t$$

MATICOVÁ REPREZENTÁCIA QM: STAVY

- súradnice $|\psi\rangle$ v *ortonormálnej* báze $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- súradnice $|a_1\rangle$ a $|a_2\rangle$ v *onbáze* $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|a_1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

MATICOVÁ REPREZENTÁCIA QM: STAVY

- súradnice $|\psi\rangle$ v *ortonormálnej* báze $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- súradnice $|a_1\rangle$ a $|a_2\rangle$ v *onbáze* $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|a_1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- súradnice $\langle\psi|$ v *onbáze* $\{\langle a_1|, \langle a_2|\}$

$$\langle\psi| = \sum_i \langle\psi|a_i\rangle \langle a_i| = \sum_i \alpha_i^* \langle a_i| \mapsto (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$$

- súradnice $\langle a_1|$ a $\langle a_2|$ v *onbáze* $\{\langle a_1|, \langle a_2|\}$

$$\langle a_1| \mapsto (1, 0), \quad \langle a_2| \mapsto (0, 1)$$

MATICOVÁ REPREZENTÁCIA QM: OPERÁTORY

- “súradnice” herm. operátora \mathbf{A} v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$|\psi'\rangle = \mathbf{A}|\psi\rangle = \mathbf{A}|b_j\rangle\langle b_j|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \underbrace{\langle b_i|\psi'\rangle}_{\beta'_i} = \underbrace{\langle b_i|\mathbf{A}|b_j\rangle}_{A_{ij}} \underbrace{\langle b_j|\psi\rangle}_{\beta_j}$$

$$|\psi'\rangle = \mathbf{A}|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

MATICOVÁ REPREZENTÁCIA QM: OPERÁTORY

- “súradnice” herm. operátora \mathbf{A} v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$|\psi'\rangle = \mathbf{A}|\psi\rangle = \mathbf{A}|b_j\rangle\langle b_j|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \underbrace{\langle b_i|\psi'\rangle}_{\beta'_i} = \underbrace{\langle b_i|\mathbf{A}|b_j\rangle}_{A_{ij}} \underbrace{\langle b_j|\psi\rangle}_{\beta_j}$$

$$|\psi'\rangle = \mathbf{A}|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

- nech $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ je onbáza eigenstavov \mathbf{A} ... $\mathbf{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$

$$\mathbf{A} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \langle a_1|\mathbf{A}|a_1\rangle & \langle a_1|\mathbf{A}|a_2\rangle \\ \langle a_2|\mathbf{A}|a_1\rangle & \langle a_2|\mathbf{A}|a_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

HERMITOVSKÉ MATICE

- hermitovské združenie

$$\mathbf{A} \mapsto A_{ij}, \quad \mathbf{A}^\dagger \mapsto A_{ji}^*$$

HERMITOVSKÉ MATICE

- hermitovské združenie

$$\mathbf{A} \mapsto A_{ij}, \quad \mathbf{A}^\dagger \mapsto A_{ji}^*$$

- hermitovská matica \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}^*$$

HERMITOVSKÉ MATICE

- hermitovské združenie

$$\mathbf{A} \mapsto A_{ij}, \quad \mathbf{A}^\dagger \mapsto A_{ji}^*$$

- hermitovská matica \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}^*$$

- $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\dagger} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$$

HERMITOVSKÉ MATICE

- hermitovské združenie

$$\mathbf{A} \mapsto A_{ij}, \quad \mathbf{A}^\dagger \mapsto A_{ji}^*$$

- hermitovská matica \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji}^*$$

- $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\dagger} \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A} \mapsto \begin{pmatrix} r_1 & z \\ z^* & r_2 \end{pmatrix}, \quad r_1, r_2 \in \mathcal{R}, \quad z \in \mathcal{C}$$

EIGENSYSTEM (EIGENVECTORS AND EIGENVALUES)

- eigensystem herm. operátora \mathbf{A}

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \det(\mathbf{A} - a_n\mathbf{I}) = 0, \quad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, a_i \in \mathcal{R}$$

EIGENSYSTEM (EIGENVECTORS AND EIGENVALUES)

- eigensystem herm. operátora \mathbf{A}

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \det(\mathbf{A} - a_n\mathbf{I}) = 0, \quad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, a_i \in \mathcal{R}$$

- v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\langle b_j|a_n\rangle \equiv \beta_j^{a_n} = U_{jn}, \quad \sum_j A_{ij}\beta_j^{a_n} = a_n\beta_i^{a_n}$$

EIGENSYSTEM (EIGENVECTORS AND EIGENVALUES)

- eigensystem herm. operátora \mathbf{A}

$$\mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \quad \det(\mathbf{A} - a_n\mathbf{I}) = 0, \quad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, a_i \in \mathcal{R}$$

- v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\langle b_j|a_n\rangle \equiv \beta_j^{a_n} = U_{jn}, \quad \sum_j A_{ij}\beta_j^{a_n} = a_n\beta_i^{a_n}$$

- $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{a_n} \\ \beta_2^{a_n} \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} \beta_1^{a_n} \\ \beta_2^{a_n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - a_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - a_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1, a_2$$

DIAGONALIZÁCIA

- $\mathbf{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \Rightarrow \langle a_i|\mathbf{A}|a_j\rangle$ je **diagonálna** matica

$$\langle a_i|\mathbf{A}|a_j\rangle = \sum_{k,\ell} \underbrace{\langle a_i|b_k\rangle}_{U_{ki}^*} \underbrace{\langle b_k|\mathbf{A}|b_\ell\rangle}_{A_{k\ell}} \underbrace{\langle b_\ell|a_j\rangle}_{U_{\ell j}}$$

DIAGONALIZÁCIA

- $\mathbf{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \Rightarrow \langle a_i|\mathbf{A}|a_j\rangle$ je **diagonálna** matica

$$\langle a_i|\mathbf{A}|a_j\rangle = \sum_{k,\ell} \underbrace{\langle a_i|b_k\rangle}_{U_{ki}^*} \underbrace{\langle b_k|\mathbf{A}|b_\ell\rangle}_{A_{k\ell}} \underbrace{\langle b_\ell|a_j\rangle}_{U_{\ell j}}$$

- $\dim = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} \text{ v báze } \{|a_i\rangle\}} = \begin{pmatrix} \beta_1^{a_1} & \beta_2^{a_1} \\ \beta_1^{a_2} & \beta_2^{a_2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} \text{ v báze } \{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} \beta_1^{a_1} & \beta_1^{a_2} \\ \beta_2^{a_1} & \beta_2^{a_2} \end{pmatrix}$$

PROJEKČNÉ MATICE NA BÁZOVÉ VEKTORY

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$P_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

PROJEKČNÉ MATICE NA BÁZOVÉ VEKTORY

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$\mathbf{P}_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|b_i\rangle\}$

$$\langle b_j | \mathbf{P}_{|a_i\rangle} | b_k \rangle = U_{ji} U_{ki}^* \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

PROJEKČNÉ MATICE NA BÁZOVÉ VEKTORY

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$\mathbf{P}_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|b_i\rangle\}$

$$\langle b_j | \mathbf{P}_{|a_i\rangle} | b_k \rangle = U_{ji} U_{ki}^* \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|a_i\rangle\}$

$$\langle a_j | \mathbf{P}_{|a_i\rangle} | a_k \rangle = \delta_{ji} \delta_{ki} \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

PROJEKČNÉ MATICE NA BÁZOVÉ VEKTORY

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$\mathbf{P}_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|b_i\rangle\}$

$$\langle b_j | \mathbf{P}_{|a_i\rangle} | b_k \rangle = U_{ji} U_{ki}^* \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|a_i\rangle\}$

$$\langle a_j | \mathbf{P}_{|a_i\rangle} | a_k \rangle = \delta_{ji} \delta_{ki} \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- $\dim = 2$

$$\mathbf{P}_{|a_1\rangle} \xrightarrow{\{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} |U_{11}|^2 & U_{11}U_{21}^* \\ U_{21}U_{11}^* & |U_{21}|^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_{|a_2\rangle} \xrightarrow{\{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} |U_{12}|^2 & U_{12}U_{22}^* \\ U_{22}U_{12}^* & |U_{22}|^2 \end{pmatrix}$$

PROJEKČNÉ MATICE NA BÁZOVÉ VEKTORY

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$P_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|b_i\rangle\}$

$$\langle b_j | P_{|a_i\rangle} | b_k \rangle = U_{ji} U_{ki}^* \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- v onbáze $\{|a_i\rangle\}$

$$\langle a_j | P_{|a_i\rangle} | a_k \rangle = \delta_{ji} \delta_{ki} \quad (\text{nesumovať cez } i)$$

- $\dim = 2$

$$P_{|a_1\rangle} \xrightarrow{\{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} |U_{11}|^2 & U_{11}U_{21}^* \\ U_{21}U_{11}^* & |U_{21}|^2 \end{pmatrix}, \quad P_{|a_2\rangle} \xrightarrow{\{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} |U_{12}|^2 & U_{12}U_{22}^* \\ U_{22}U_{12}^* & |U_{22}|^2 \end{pmatrix}$$

$$P_{|a_1\rangle} \xrightarrow{\{|a_i\rangle\}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{|a_2\rangle} \xrightarrow{\{|a_i\rangle\}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OUTLINE

3 APPENDIX

BINÁRNE OPERÁCIE NA OPERÁTOROCH

Nech \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} sú operátory definované na \mathcal{H} a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Potom

- súčet operátorov

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})|\psi\rangle = \mathbf{A}|\psi\rangle + \mathbf{B}|\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle$$

- násobenie komplexným číslom

$$(\alpha \mathbf{A})|\psi\rangle = \alpha(\mathbf{A}|\psi\rangle), \quad \forall |\psi\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- súčin operátorov

$$(\mathbf{BA})|\psi\rangle = \mathbf{B}(\mathbf{A}|\psi\rangle), \quad \forall |\psi\rangle$$

- komutátor

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$$

$$[\mathbf{AB}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B}, \quad [\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$$

- Jacobiho identita

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$$

PROOF

LEMMA

$$\mathbf{A}|a\rangle = a|a\rangle \wedge [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}|a\rangle = b|a\rangle$$

PROOF.

Nech $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Potom

$$\hat{A}\hat{B}|a_i\rangle = \hat{B}\hat{A}|a_i\rangle = a_i\hat{B}|a_i\rangle$$

To ale znamená, že vektor $\hat{B}|a_i\rangle$ je tiež vlastným vektorom operátora \hat{A} a prislúcha vlastnej hodnote a_i . Ak \hat{A} má nedegenerované spektrum, potom $\hat{B}|a_i\rangle$ musí byť násobkom vektora $|a_i\rangle$, čiže

$$\hat{B}|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle,$$

kde b_i je príslušný koeficient úmernosti. Z tejto rovnice je zrejmé, že b_i je súčasne vlastná hodnota operátora \hat{B} prislúchajúca jeho vlastnému vektoru $|a_i\rangle$. □

◀ skip back to “Úplný systém pozorovateľných”

PROOF

LEMMA

$$\sum_{\forall n} |a_n\rangle\langle a_n| = \mathbf{I} \wedge \mathbf{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \forall n \wedge \mathbf{B}|a_n\rangle = b_n|a_n\rangle, \forall n \Rightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$$

PROOF.

Nech $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ a $\hat{B}|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle$. Potom pre všetky $|a_i\rangle$ platí

$$\hat{A}\hat{B}|a_i\rangle = a_i b_i |a_i\rangle, \quad \hat{B}\hat{A}|a_i\rangle = a_i b_i |a_i\rangle$$

Odtiaľ vyplýva, že $[\hat{A}, \hat{B}]|a_i\rangle = |0\rangle$. Potom ale

$$[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = |0\rangle$$

pre všetky vektory $|\psi\rangle$, ktoré sú lineárnou kombináciou vektorov $|a_i\rangle$. Ak vektory $|a_i\rangle$ tvoria úplný systém, t.j. bázu daného vektorového priestoru, potom $[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = |0\rangle$ pre všetky vektory vektorového priestoru a teda $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. \square

◀ skip back to "Úplný systém pozorovateľných"