QM v kocke II

$\kappa\kappa\kappa$ seminár

Mikuláš Gintner

http://fyzika.uniza.sk/∼gintner
/MYNOTES/QM-LECTURE/qm_v_kocke-2_handout.pdf

jar 2010

Outline

Stavový priestor

Stavovým priestorom je *komplexný Hilbertov* priestor.

- vektorový ... $|a\rangle \in \mathcal{H}$

Princíp superpozície: ak $|a\rangle$, $|b\rangle$ sú možné stavy, potom aj $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

- komplexný ... $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle, \ \alpha, \beta \in \mathcal{C}$
- skalárny súčin $\Rightarrow$ norma ... $(|a\rangle, |b\rangle) \in \mathcal{C}$

$$\| |a\rangle \| = \sqrt{(|a\rangle, |a\rangle)}$$

- úplný ... $\lim_{n\to\infty} |a_n\rangle \in \mathcal{H}$

... kde $\{|a_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ je $\forall$ Cauchyho postupnosť v $\mathcal{H}$

Duálny priestor — Diracova symbolika

- *duálny* Hilbertov priestor ... $\langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}$

$$\langle a|b\rangle \in \mathcal{C}, \qquad \forall \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}},\ \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

- $|a\rangle \mapsto \langle a|$:

$$\forall |a\rangle \in \mathcal{H},\ \exists \langle a| \in \tilde{\mathcal{H}}: \qquad \langle a|b\rangle = (|a\rangle, |b\rangle)\,, \qquad \forall |b\rangle \in \mathcal{H}$$

$$\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle \ \mapsto \ \alpha^* \langle a| + \beta^* \langle b|$$

- *projekčný* operátor na jednotkový $|a\rangle$ ... $\boldsymbol{P}_{|a\rangle} = |a\rangle\langle a|$

$$\boldsymbol{P}_{|a\rangle}|\psi\rangle = |a\rangle\langle a|\psi\rangle$$

$$\boldsymbol{P}_{|a\rangle}\boldsymbol{P}_{|a\rangle} = |a\rangle\langle a|a\rangle\langle a| = |a\rangle\langle a| = \boldsymbol{P}_{|a\rangle}$$

Rozmernosť a báza priestoru stavov

- $\dim \mathcal{H}$ — konečná alebo nekonečná
- na úplný popis reálneho systému $\dim \mathcal{H} = \infty$
- báza ... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$

$$\langle a_i | a_j \rangle = g_{ij}, \qquad g_{ij} = g^*_{ji}, \qquad \text{...hermitovská matica}$$

$$\langle a_i | a_j \rangle = \delta_{ij},\ \forall i, j \qquad \text{...ortonormálna báza}$$

- úplnosť bázy

$$\sum_{\forall i} |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbf{I}$$

- súradnice vektora $|\psi\rangle$ v $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$ ...α_i

$$|\psi\rangle = \alpha_i |a_i\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i = g^*_{ji} \langle a_j | \psi \rangle$$

$$\alpha_i = \langle a_i | \psi \rangle, \qquad \text{...ortonormálna báza}$$

- úplnosť *ortonormálnej* bázy

$$\sum_{\forall i} |\alpha_i|^2 = 1$$

Prechody medzi ortonormálnymi bázami

- ortonormálne bázy ... $\{|a_n\rangle\}_{\forall n}$, $\{|b_n\rangle\}_{\forall n}$

$$|b_i\rangle = U^*_{ij}|a_j\rangle \quad \mapsto \quad \langle b_i| = U_{ij}\langle a_j|$$

$$\Downarrow$$

$$U^*_{kj}U_{ki} = \delta_{ji} \quad U^\dagger U = \mathbf{I}$$

$$U_{ij} = \langle b_i|a_j\rangle, \qquad |a_i\rangle = U_{ji}|b_j\rangle$$

- transformácia súradníc ... $|\psi\rangle = \alpha_i|a_i\rangle = \beta_j|b_j\rangle$

$$\beta_i = U_{ij}\alpha_j, \qquad \alpha_i = U^*_{ji}\beta_j$$

Pozorovateľné

Fyzikálne veličiny sú reprezentované
lineárnymi *hermitovskými* operátormi na Hilbertovom priestore stavov

- *pozorovateľná* ... $A \mapsto \boldsymbol{A}$

$$\text{linearita:} \qquad \boldsymbol{A}(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha\boldsymbol{A}|a\rangle + \beta\boldsymbol{A}|b\rangle$$

- *hermitovsky združený* operátor k $\boldsymbol{A}$ ... $\boldsymbol{A}^\dagger$

$$\boldsymbol{A}|a\rangle \equiv |\boldsymbol{A}a\rangle \quad \mapsto \quad \langle\boldsymbol{A}a| = \langle a|\boldsymbol{A}^\dagger, \qquad \forall|a\rangle$$

$$\text{takže} \qquad \langle b|\boldsymbol{A}|a\rangle = \langle a|\boldsymbol{A}^\dagger|b\rangle^*, \quad \forall|b\rangle$$

- hermitovské združenie súčinu operátorov

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\dagger = \boldsymbol{B}^\dagger\boldsymbol{A}^\dagger$$

- *hermitovský* operátor ... $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}$

$$\langle b|\boldsymbol{A}|a\rangle = \langle a|\boldsymbol{A}|b\rangle^*, \quad \forall|a\rangle, |b\rangle$$

Vlastnosti hermitovských operátorov

- *vlastné* hodnoty a vektory:

$$\boldsymbol{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle$$

- *vlastné hodnoty* hermitovského operátora sú reálne čísla

$$a_n \in \mathcal{R}, \quad \forall n$$

- *vlastné vektory* hermitovského operátora tvoria úplnú bázu

$$|\psi\rangle = \alpha_n|a_n\rangle$$

- *ortogonalita* vlastných vektorov:

$$a_n \neq a_m \qquad \Rightarrow \qquad \langle a_n|a_m\rangle = 0$$

Meranie

Výsledkom merania pozorovateľnej A je vždy jedna z vlastných hodnôt hermitovského operátora $\boldsymbol{A}$.

V okamihu, keď v stave $|\psi\rangle$ nameriame vlastnú hodnotu a_n operátora $\boldsymbol{A}$, systém sa *skokom* ocitne vo vlastnom stave $|a_n\rangle$.

Pravdepodobnosť výsledku

Pravdepodobnosť, že v stave $|\psi\rangle$ nameriame hodnotu a_n pozorovateľnej A, je daná vzťahom

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2$$

ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ sú jednotkové vektory.

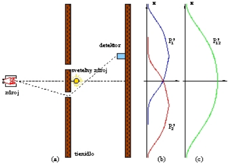
$$\alpha_n = \langle a_n|\psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{P}(a_n|\psi) = |\alpha_n|^2$$

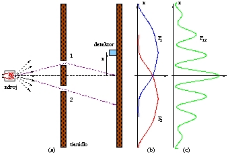
Ak $|\psi\rangle$ a $|a_n\rangle$ *nie sú* jednotkové vektory:

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = \frac{|\langle a_n|\psi\rangle|^2}{\||a_n\rangle\|\||\psi\rangle\|}$$

Meranie na dvojštrbine

$$\boldsymbol{X}|x\rangle = x|x\rangle$$





- štrbina 1 ... $|\psi_1\rangle$
  štrbina 2 ... $|\psi_2\rangle$

$$\mathcal{P}(x|\psi_i) = |\langle x|\psi_i\rangle|^2$$

- štrbina 1+2

$$\mathcal{P}(x|\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{P}(x|\psi_1) + \mathcal{P}(x|\psi_2)$$

- výsledný stav:

$$|\psi_{12}\rangle \propto |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$$

- pravdepodobnosť:

$$\mathcal{P}(x|\psi_{12}) = |\langle x|\psi_{12}\rangle|^2$$

Stredné hodnoty pozorovateľných

- *stredná hodnota* pozorovateľnej A v stave $|\psi\rangle$ ... $\langle A\rangle_\psi$

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|\boldsymbol{A}|\psi\rangle, \quad \text{ak } \||\psi\rangle\| = 1$$

- pravdepodobnosť namerania hodnoty a_n:

$$\mathcal{P}(a_n|\psi) = \langle\psi|a_n\rangle\langle a_n|\psi\rangle = \langle\psi|\boldsymbol{P}_{|a_n\rangle}|\psi\rangle$$

- *Spektrálny teorém*:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\forall n} a_n \boldsymbol{P}_{|a_n\rangle}$$

potom

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_{\forall n}\langle\psi|a_n\boldsymbol{P}_{|a_n\rangle}|\psi\rangle = \sum_{\forall n} a_n\mathcal{P}(a_n|\psi) = \sum_{\forall n} a_n|\alpha_n|^2$$

Heisenbergov princíp neurčitosti

- *stredná kvadratická odchylka* v stave $|\psi\rangle$:

$$\delta A = \langle\psi|(\boldsymbol{A} - \langle A\rangle_\psi)^2|\psi\rangle^{1/2} = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2}$$

- vlastné stavy operátora $\boldsymbol{A}$:

$$\delta A = 0$$

- žiaden stav nemôže byť súčasne vlastným stavom dvoch nekomutujúcich operátorov

$$\delta A \cdot \delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]\rangle_\psi|$$

poznámka:
Komutátor dvoch hermitovských operátorov je *anti*hermitovský operátor:

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]^\dagger = -[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$$

Normovanosť a fáza stavového vektora

- pri popise fyzikálnych stavov sa stačí obmedziť na *jednotkové* (alebo inak *normované*) vektory z $\mathcal{H}$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

- normovaný stavový vektor je daný jednoznačne až na *fázu* φ

$$|\psi\rangle \quad \mapsto \quad e^{i\varphi}|\psi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{R}$$

- fyzikálne merateľná je *relatívna* fáza

$$\mathcal{P}(x|\psi_{12}) \propto \left| |\langle x|\psi_1\rangle| \, e^{i\varphi_1(x)} + |\langle x|\psi_2\rangle| \, e^{i\varphi_2(x)} \right|^2$$

$$= |\langle x|\psi_1\rangle|^2 + |\langle x|\psi_2\rangle|^2 + 2|\langle x|\psi_1\rangle\langle x|\psi_2\rangle| \cos[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]$$

Časový vývoj

Časový vývoj stavového vektora je daný *Schrödingerovou rovnicou*

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \boldsymbol{H}|\psi\rangle$$

kde $\boldsymbol{H}$ je tzv. *Hamiltonov* operátor, $\boldsymbol{H}^\dagger = \boldsymbol{H}$.

- operátor $\boldsymbol{H}$ charakterizuje daný fyzikálny systém
- tvar operátora $\boldsymbol{H}$ treba uhádnuť

Stacionárne stavy

- vlastné stavy a hodnoty Hamiltonovho operátora:

$$\boldsymbol{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- časový vývoj $|\psi_n\rangle$:

$$i\hbar\frac{d|\psi_n\rangle}{dt} = E_n|\psi_n\rangle$$

$$|\psi_n\rangle(t) = |\psi_n\rangle(0)\ \exp(-iE_n t/\hbar)$$

- časový vývoj $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle(0) = \sum_n c_n|\psi_n\rangle \quad \xrightarrow{t} \quad |\psi\rangle(t) = \sum_n c_n|\psi_n\rangle \exp(-iE_n t/\hbar)$$

ZACHOVÁVAJÚCE SA POZOROVATEĽNÉ

- Časový vývoj strednej hodnoty:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|\boldsymbol{A}|\psi\rangle = i\hbar\langle\psi|[\boldsymbol{H},\boldsymbol{A}]|\psi\rangle + \langle\psi|\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}|\psi\rangle$$

- A sa *zachováva* v čase, ak $\boldsymbol{A}$ nezávisí na čase a komutuje s $\boldsymbol{H}$
- $d\boldsymbol{H}/dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\boldsymbol{H}\rangle$ sa nemení s časom

Úplný systém pozorovateľných

Pre každý fyzikálny systém $\exists$ *minimálna sada* vzájomne *komutujúcich* operátorov, ktorých vlastné hodnoty jednoznačne určujú stav tohoto systému.

- komutujúce operátory majú spoločné vlastné vektory

$$\boldsymbol{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad \wedge \quad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B}|a\rangle = b|a\rangle$$

skip to proof

- ak $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ majú spoločné $\forall$ vlastné vektory a ak tieto tvoria *úplný* vlastný systém, potom $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ komutujú.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| = \mathbf{I} \\ \boldsymbol{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \ \forall n \\ \boldsymbol{B}|a_n\rangle = b_n|a_n\rangle, \ \forall n \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$$

skip to proof

Definície operátorovej funkcie

Definícia operátorovej funkcie (I)

Majme lineárny hermitovský operátor $\boldsymbol{A}$ na $\mathcal{H}$

$$\boldsymbol{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \qquad \boldsymbol{A} = \sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|$$

a komplexnú funkciu $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Potom *operátorovou funkciou* $f(\boldsymbol{A})$ nazveme výraz

$$f(\boldsymbol{A}) \equiv \sum_n f(a_n)|a_n\rangle\langle a_n|$$

Definícia operátorovej funkcie (II)

Majme lineárny hermitovský operátor $\boldsymbol{A}$ na $\mathcal{H}$ a komplexnú funkciu $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ s mocninným rozvojom v tvare

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

Potom *operátorovou funkciou* $f(\boldsymbol{A})$ nazveme výraz

$$f(\boldsymbol{A}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k \boldsymbol{A}^k$$

Ekvivalentnosť definícií I a II

Lemma

Definície I a II operátorovej funkcie sú ekvivalentné.

$$\boldsymbol{A}^{\dagger}=\boldsymbol{A} \quad\Rightarrow\quad \langle a_i|a_j\rangle=\delta_{ij} \quad\Rightarrow\quad \left(\sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|\right)^k=\sum_n (a_n)^k|a_n\rangle\langle a_n|$$

Potom

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A}) &\overset{def.II}{=} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k \boldsymbol{A}^k=\sum_{k=0}^{\infty} f_k \left(\sum_n a_n|a_n\rangle\langle a_n|\right)^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_n (a_n)^k|a_n\rangle\langle a_n| \\ &= \textstyle\sum_n \underbrace{\left(\displaystyle\sum_k f_k a_n^k\right)}_{f(a_n)} |a_n\rangle\langle a_n| \overset{def.I}{=} f(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

Exponenciálna operátorová funkcia

- definícia exponenciálnej operátorovej funkcie ... $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad z \in \mathcal{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} \overset{def.II}{=} \mathbf{I} + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2!} \boldsymbol{A}^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k \overset{def.I}{=} \sum_n \mathrm{e}^{a_n} |a_n\rangle\langle a_n|$$

- pre všetky operátory $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A}\, \mathrm{e}^{-\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A} + [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}] + \frac{1}{2!} [\boldsymbol{B}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}]] + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{B}_k\{\boldsymbol{A}\}$$

kde

$$\boldsymbol{B}_0\{\boldsymbol{A}\} \equiv \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{B}_1\{\boldsymbol{A}\} \equiv [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}], \quad \boldsymbol{B}_2\{\boldsymbol{A}\} \equiv [\boldsymbol{B}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}]], \quad \ldots$$

UNITÁRNE *vs.* HERMITOVSKÉ OPERÁTORY

LEMMA

Pre každý unitárny operátor $\boldsymbol{U}$ môžeme nájsť hermitovský operátor $\boldsymbol{H}$ taký, že

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{H}}$$

- $\boldsymbol{U} = \mathrm{e}^{i\boldsymbol{H}}$ … $\boldsymbol{H}^\dagger = \boldsymbol{H}$

$$\mathrm{e}^{i\boldsymbol{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\boldsymbol{H})^k = \mathbf{I} + i\boldsymbol{H} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{H}^2 + \dots$$

- $\boldsymbol{U}^\dagger = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{H}}$

$$\left(\mathrm{e}^{i\boldsymbol{H}}\right)^\dagger = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(i\boldsymbol{H})^k\right)^\dagger = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-i\boldsymbol{H})^k = \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{H}}$$

- $\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{U} = \mathbf{I}$

$$\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{U} = (\mathbf{I} - i\boldsymbol{H} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{H}^2 + \dots)(\mathbf{I} + i\boldsymbol{H} - \frac{1}{2!}\boldsymbol{H}^2 + \dots) = \mathbf{I}$$

Operátorová derivácia operátorovej funkcie

Definícia operátorovej derivácie operátorovej funkcie

Nech $f(z)$ a $g(z)$ sú komplexné funkcie komplexnej premennej také, že

$$g(z) = \frac{d\, f(z)}{d\, z}$$

Potom *operátorovou deriváciou* operátorovej funkcie $f(\boldsymbol{A})$ podľa operátora $\boldsymbol{A}$ nazveme operátorovú funkciu $g(\boldsymbol{A})$, t.j.

$$\frac{d\, f(\boldsymbol{A})}{d\, \boldsymbol{A}} = g(\boldsymbol{A})$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\, f(z)}{d\, z} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k = g(z), \quad g_k = (k+1) f_{k+1}$$

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \boldsymbol{A}^k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\, f(\boldsymbol{A})}{d\, \boldsymbol{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \boldsymbol{A}^k = g(\boldsymbol{A}), \quad g_k = (k+1) f_{k+1}$$

Operátorová derivácia ako komutátor

Lemma

Nech $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = \mathbf{I}$. *Nech* $f(\boldsymbol{A})$ *je operátorová funkcia. Potom*

$$\frac{d\ f(\boldsymbol{A})}{d\ \boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{B}, f(\boldsymbol{A})]$$

Proof:

- ľavá strana:

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \boldsymbol{A}^k \quad \Rightarrow \quad \frac{d\ f(\boldsymbol{A})}{d\ \boldsymbol{A}} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k \boldsymbol{A}^{k-1}$$

- pomocná identita ♠:

$$[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\boldsymbol{Z}] = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}]\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Y}[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}] \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^k] = n\boldsymbol{A}^{k-1} + \boldsymbol{A}^n[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^{k-n}] = k\boldsymbol{A}^{k-1}$$

- pravá strana

$$[\boldsymbol{B}, f(\boldsymbol{A})] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\ [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}^k] \ \overset{\spadesuit}{=}\ \sum_{k=1}^{\infty} k f_k \boldsymbol{A}^{k-1}$$

Parametrická derivácia operátora

Definícia parametrickej derivácie operátora

Nech $\boldsymbol{A}$ je operátor, ktorý závisí na reálnom parametri s. Potom *parametrická derivácia* operátora $\boldsymbol{A}(s)$ podľa parametra s je definovaná ako

$$\frac{d\,\boldsymbol{A}}{d\,s}(s) \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(s+\Delta s) - \boldsymbol{A}(s)}{\Delta s}$$

Lemma

Nech operátory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ závisia na parametri s. Potom

$$\frac{d\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{d\,s}(s) = \frac{d\,\boldsymbol{A}}{d\,s}(s)\;\boldsymbol{B}(s) + \boldsymbol{A}(s)\;\frac{d\,\boldsymbol{B}}{d\,s}(s)$$

Hilbertov priestor

- min. súbor: jediná pozorovateľná A ... hermitovský operátor $\boldsymbol{A}$
- dve vlastné hodnoty:

$$\boldsymbol{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

- 2-dim Hilbertov priestor $\mathcal{H}_2$ ... ortonotmálna báza $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle$$

$$\alpha_i = \langle a_i|\psi\rangle$$

$$\boldsymbol{P}_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i|$$

- relácia úplnosti:

$$\mathsf{I} = \boldsymbol{P}_{|a_1\rangle} + \boldsymbol{P}_{|a_2\rangle} = |a_1\rangle\langle a_1| + |a_2\rangle\langle a_2| = \sum_{i=1}^{2} |a_i\rangle\langle a_i|$$

Meranie

- systém v stave $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ ... $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle$$

- výsledok merania A:

hodnota	pravdepodobnosť	stav po meraní
a_1	$\|\alpha_1\|^2$	$\|a_1\rangle$
a_2	$\|\alpha_2\|^2$	$\|a_2\rangle$

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|\boldsymbol{A}|\psi\rangle = |\alpha_1|^2 a_1 + |\alpha_2|^2 a_2$$

$$\delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} = |\alpha_1||\alpha_2||a_1 - a_2|$$

Časový vývoj

- predpokladajme, že $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{A})$:

... $[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}] = 0$
... spoločné vlastné vektory $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$
... A sa zachováva v čase

$$\boldsymbol{H}|a_i\rangle = E_i|a_i\rangle, \qquad E_i = E(a_i), \quad i = 1, 2$$

- časový vývoj stavu

$$t = 0: \quad |\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle$$

$$\boxed{|\psi\rangle(t) = \alpha_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|a_1\rangle + \alpha_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|a_2\rangle}$$

- meranie A v čase t

hodnota	pravdepodobnosť	stav po meraní
a_1	$\|\alpha_1\|^2$	$\|a_1\rangle$ alebo $\|a_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar}$
a_2	$\|\alpha_2\|^2$	$\|a_2\rangle$ alebo $\|a_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}$

... pretože A sa zachováva

Nekomutujúca pozorovateľná

- nech $\exists$ veličina B: ... $\boldsymbol{B}^\dagger = \boldsymbol{B}$

$$[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}] \neq 0$$

- dva vlastné vektory ... ortonormálna báza $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\boldsymbol{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

Lemma

$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \neq 0 \quad \Leftrightarrow$ *nemajú spoločné* $\forall$ *vlastné vektory*

... tvrdenie ekvivalentné k lemmám na slajde “Úplný systém pozorovateľných”

Musí byť $b_1 \neq b_2$?

Lemma

$$\boldsymbol{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle \quad \wedge \quad \langle b_i|b_j\rangle = \delta_{ij} \quad \wedge \quad [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}] \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 \neq b_2$$

Proof.

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \quad \Rightarrow \quad \langle b_\ell|\boldsymbol{A}|b_i\rangle\langle b_i|\boldsymbol{B}|b_k\rangle \neq \langle b_\ell|\boldsymbol{B}|b_j\rangle\langle b_j|\boldsymbol{A}|b_k\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle b_\ell|\boldsymbol{A}|b_k\rangle b_k \neq b_\ell\langle b_\ell|\boldsymbol{A}|b_k\rangle \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad b_k \neq b_\ell, \text{ if } k \neq \ell$$

$\square$

Prechod medzi $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ a $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

- ortonormálne bázy $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$, $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\boldsymbol{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle, \qquad \boldsymbol{B}|b_i\rangle = b_i|b_i\rangle, \qquad i = 1, 2$$

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \neq 0$$

- matica prechodu U

$$U = \begin{pmatrix} \langle b_1|a_1\rangle & \langle b_1|a_2\rangle \\ \langle b_2|a_1\rangle & \langle b_2|a_2\rangle \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} |b_1\rangle \\ |b_2\rangle \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} |a_1\rangle \\ |a_2\rangle \end{pmatrix}$$

- transformácia súradníc $\alpha_i \mapsto \beta_i$

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle = \beta_1|b_1\rangle + \beta_2|b_2\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Meranie veličiny B

- systém v stave $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$ ... $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$|\psi\rangle = \beta_1|b_1\rangle + \beta_2|b_2\rangle$$

- výsledok merania B:

hodnota	pravdepodobnosť	stav po meraní
b_1	$\|\beta_1\|^2$	$\|b_1\rangle$
b_2	$\|\beta_2\|^2$	$\|b_2\rangle$

$$\langle B\rangle_\psi = |\beta_1|^2 b_1 + |\beta_2|^2 b_2, \qquad \delta_\psi B = |\beta_1||\beta_2||b_1 - b_2|$$

$$\delta_\psi A \cdot \delta_\psi B = |\alpha_1|\;|\alpha_2|\;|\beta_1|\;|\beta_2|\;|a_1 - a_2|\;|b_1 - b_2|$$

Meranie veličiny B v čase t

- stav systému v čase t

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle(t) &= \alpha_1\, e^{-iE_1 t/\hbar}|a_1\rangle + \alpha_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}|a_2\rangle \\
&= \alpha_1\, e^{-iE_1 t/\hbar}\left(U_{11}|b_1\rangle + U_{21}|b_2\rangle\right) \\
&\quad +\alpha_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}\left(U_{12}|b_1\rangle + U_{22}|b_2\rangle\right)
\end{aligned}
$$

- výsledok merania B v čase t:

hodnota	**pravdepodobnosť**	**stav po meraní**
b_1	$\mathcal{P}(b_1\|\psi(t))$	$\|b_1\rangle$
b_2	$\mathcal{P}(b_2\|\psi(t))$	$\|b_2\rangle$

Vyčíslenie pravdepodobností

- stav systému v čase t

$$|\psi\rangle(t) = \alpha_1\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, (U_{11}|b_1\rangle + U_{21}|b_2\rangle) + \alpha_2\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, (U_{12}|b_1\rangle + U_{22}|b_2\rangle)$$

- pravdepodobnosť namerania hodnoty b_1

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_1|\psi(t)) &= |\langle b_1|\psi\rangle(t)|^2 \\ &= |\alpha_1 U_{11}|^2 + |\alpha_2 U_{12}|^2 + 2\,|\alpha_1\alpha_2 U_{11} U_{12}| \cdot \cos\left[\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar} + \varphi\right] \end{aligned}$$

... kde φ je fáza výrazu $\alpha_1^*\alpha_2 U_{11}^* U_{12}$

- pravdepodobnosť namerania hodnoty b_2

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_1|\psi(t)) &= |\langle b_2|\psi\rangle(t)|^2 \\ &= |\alpha_1 U_{21}|^2 + |\alpha_2 U_{22}|^2 - 2\,|\alpha_1\alpha_2 U_{11} U_{12}| \cdot \cos\left[\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar} + \varphi\right] \end{aligned}$$

Skúška správnosti

Domáca úloha:

Ukážte, že

$$\mathcal{P}(b_1|\psi(t)) + \mathcal{P}(b_2|\psi(t)) = 1, \quad \forall t$$

Maticová reprezentácia QM: stavy

- súradnice $|\psi\rangle$ v *ortonormálnej* báze $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

- súradnice $|a_1\rangle$ a $|a_2\rangle$ v *onbáze* $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$

$$|a_1\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |a_2\rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- súradnice $\langle\psi|$ v *onbáze* $\{\langle a_1|, \langle a_2|\}$

$$\langle\psi| = \sum_i \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i| = \sum_i \alpha_i^* \langle a_i| \mapsto (\ \alpha_1^*,\ \alpha_2^*\ )$$

- súradnice $\langle a_1|$ a $\langle a_2|$ v *onbáze* $\{\langle a_1|, \langle a_2|\}$

$$\langle a_1| \mapsto (\ 1,\ 0\ ), \qquad \langle a_2| \mapsto (\ 0,\ 1\ )$$

Maticová reprezentácia QM: operátory

- "súradnice" herm. operátora $\boldsymbol{A}$ v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$|\psi'\rangle = \boldsymbol{A}|\psi\rangle = \boldsymbol{A}|b_j\rangle\langle b_j|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \underbrace{\langle b_i|\psi'\rangle}_{\beta'_i} = \underbrace{\langle b_i|\boldsymbol{A}|b_j\rangle}_{A_{ij}} \underbrace{\langle b_j|\psi\rangle}_{\beta_j}$$

$$|\psi'\rangle = \boldsymbol{A}|\psi\rangle \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

- nech $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ je onbáza eigenstavov $\boldsymbol{A}$ ... $\boldsymbol{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$

$$\boldsymbol{A} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \langle a_1|\boldsymbol{A}|a_1\rangle & \langle a_1|\boldsymbol{A}|a_2\rangle \\ \langle a_2|\boldsymbol{A}|a_1\rangle & \langle a_2|\boldsymbol{A}|a_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

Hermitovské matice

- hermitovské združenie

$$\boldsymbol{A} \;\mapsto\; A_{ij}, \qquad \boldsymbol{A}^\dagger \;\mapsto\; A^*_{ji}$$

- hermitovská matica $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{ij} = A^*_{ji}$$

- $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \overset{\dagger}{\mapsto} \quad \begin{pmatrix} A^*_{11} & A^*_{21} \\ A^*_{12} & A^*_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} r_1 & z \\ z^* & r_2 \end{pmatrix}, \quad r_1, r_2 \in \mathcal{R},\; z \in \mathcal{C}$$

Eigensystem (eigenvectors and eigenvalues)

- eigensystem herm. operátora $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \qquad \det(\boldsymbol{A} - a_n\mathbf{I}) = 0, \qquad \langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}, a_i \in \mathcal{R}$$

- v onbáze $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle\}$

$$\langle b_j|a_n\rangle \equiv \beta_j^{|a_n\rangle} \;=\; U_{jn}, \qquad \sum_j A_{ij}\beta_j^{|a_n\rangle} = a_n\beta_i^{|a_n\rangle}$$

- $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{|a_n\rangle} \\ \beta_2^{|a_n\rangle} \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} \beta_1^{|a_n\rangle} \\ \beta_2^{|a_n\rangle} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - a_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - a_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_1,\ a_2$$

DIAGONALIZÁCIA

- $\boldsymbol{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a_i|\boldsymbol{A}|a_j\rangle$ je diagonálna matica

$$\langle a_i|\boldsymbol{A}|a_j\rangle = \sum_{k,\ell} \underbrace{\langle a_i|b_k\rangle}_{U^*_{ki}} \underbrace{\langle b_k|\boldsymbol{A}|b_\ell\rangle}_{A_{k\ell}} \underbrace{\langle b_\ell|a_j\rangle}_{U_{\ell j}}$$

- $\dim = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A} \text{ v báze } \{|a_i\rangle\}} = \begin{pmatrix} \beta_1^{|a_1\rangle *} & \beta_2^{|a_1\rangle *} \\ \beta_1^{|a_2\rangle *} & \beta_2^{|a_2\rangle *} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A} \text{ v báze } \{|b_i\rangle\}} \begin{pmatrix} \beta_1^{|a_1\rangle} & \beta_1^{|a_2\rangle} \\ \beta_2^{|a_1\rangle} & \beta_2^{|a_2\rangle} \end{pmatrix}$$

Projekčné matice na bázové vektory

- projekčná matica na $|a_i\rangle$

$$\boldsymbol{P}_{|a_i\rangle} = |a_i\rangle\langle a_i| \qquad \text{(nesumovať cez } i\text{)}$$

- v onbáze $\{|b_i\rangle\}$

$$\langle b_j|\boldsymbol{P}_{|a_i\rangle}|b_k\rangle = U_{ji}U^*_{ki} \qquad \text{(nesumovať cez } i\text{)}$$

- v onbáze $\{|a_i\rangle\}$

$$\langle a_j|\boldsymbol{P}_{|a_i\rangle}|a_k\rangle = \delta_{ji}\delta_{ki} \qquad \text{(nesumovať cez } i\text{)}$$

- $\dim = 2$

$$\boldsymbol{P}_{|a_1\rangle} \overset{\{|b_i\rangle\}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} |U_{11}|^2 & U_{11}U^*_{21} \\ U_{21}U^*_{11} & |U_{21}|^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_{|a_2\rangle} \overset{\{|b_i\rangle\}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} |U_{12}|^2 & U_{12}U^*_{22} \\ U_{22}U^*_{12} & |U_{22}|^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{|a_1\rangle} \overset{\{|a_i\rangle\}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_{|a_2\rangle} \overset{\{|a_i\rangle\}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Binárne operácie na operátoroch

Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ sú operátory definované na $\mathcal{H}$ a $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$. Potom

- súčet operátorov
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|\psi\rangle = \boldsymbol{A}|\psi\rangle + \boldsymbol{B}|\psi\rangle, \ \ \forall|\psi\rangle$$
- násobenie komplexným číslom
$$(\alpha \boldsymbol{A})|\psi\rangle = \alpha(\boldsymbol{A}|\psi\rangle), \ \ \forall|\psi\rangle, \ \alpha \in \mathcal{C}$$
- súčin operátorov
$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})|\psi\rangle = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}|\psi\rangle), \ \ \forall|\psi\rangle$$
- komutátor
$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$
$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}] + [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}]\boldsymbol{B}, \qquad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}]$$
- Jacobiho identita
$$[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]] + [\boldsymbol{B}, [\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}]] + [\boldsymbol{C}, [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]] = 0$$

Proof

Lemma

$$\boldsymbol{A}|a\rangle = a|a\rangle \quad \wedge \quad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B}|a\rangle = b|a\rangle$$

Proof.

Nech $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$. Potom

$$\hat{A}\hat{B}|a_i\rangle = \hat{B}\hat{A}|a_i\rangle = a_i\hat{B}|a_i\rangle$$

To ale znamená, že vektor $\hat{B}|a_i\rangle$ je tiež vlastným vektorom operátora $\hat{A}$ a prislúcha vlastnej hodnote a_i. Ak $\hat{A}$ má nedegenerované spektrum, potom $\hat{B}|a_i\rangle$ musí byť násobkom vektora $|a_i\rangle$, čiže

$$\hat{B}|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle,$$

kde b_i je príslušný koeficient úmernosti. Z tejto rovnice je zrejmé, že b_i je súčasne vlastná hodnota operátora $\hat{B}$ prislúchajúca jeho vlastnému vektoru $|a_i\rangle$. □

◂ skip back to "Úplný systém pozorovateľných"

Proof

Lemma

$$\sum_{\forall n} |a_n\rangle\langle a_n| = \mathbf{I} \quad \wedge \quad \boldsymbol{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle, \forall n \quad \wedge \quad \boldsymbol{B}|a_n\rangle = b_n|a_n\rangle, \forall n \quad \Rightarrow \quad [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$$

Proof.

Nech $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ a $\hat{B}|a_i\rangle = b_i|a_i\rangle$. Potom pre všetky $|a_i\rangle$ platí

$$\hat{A}\hat{B}|a_i\rangle = a_i b_i|a_i\rangle, \qquad \hat{B}\hat{A}|a_i\rangle = a_i b_i|a_i\rangle$$

Odtiaľ vyplýva, že $[\hat{A}, \hat{B}]|a_i\rangle = |0\rangle$. Potom ale

$$[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = |0\rangle$$

pre všetky vektory $|\psi\rangle$, ktoré sú lineárnou kombináciou vektorov $|a_i\rangle$. Ak vektory $|a_i\rangle$ tvoria úplný systém, t.j. bázu daného vektorového priestoru, potom $[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle = |0\rangle$ pre všetky vektory vektorového priestoru a teda $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. □

skip back to "Úplný systém pozorovateľných"