Monday 25th February, 2013, 11:50

Kvantové vlastnosti častíc

M. Gintner

1 Kvantové (časticové) vlastnosti svetla

1.1 Hybnosť fotónu

Experimenty a zistenia, ktoré sme opísali vyššie, sú dostatočnou motiváciou, aby sme sa začali vážne zaoberať predstavou, že svetlo[1] sa skladá z fotónov s energiou

$$E = \hbar\omega. \tag{1}$$

Tento vzťah zväzuje dva v klasickej fyzike nezlúčiteľné pojmy: energiu častice a frekvenciu vlnenia. Alternatívnym parametrom k frekvencii, ktorý tiež charakterizuje vlnové procesy, je vlnová dĺžka λ. V prípade svetla je $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$, takže pre energiu fotónu máme

$$E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}. \tag{2}$$

Viditeľné svetlo má vlnové dĺžky v intervale 400 nm $< \lambda <$ 700 nm. Tomu zodpovedajú energie fotónov 1,8 eV pre červené svetlo až 3,1 eV pre fialové svetlo.

Keďže sa fotóny pohybujú rýchlosťou svetla[2], sú to relativistické častice a pre ich popis je nevyhnutné použiť Špeciálnu teóriu relativity. Podľa nej sa rýchlosťou svetla môžu pohybovať len častice s nulovou hmotnosťou. Hmotnosť fotónu by teda mala byť nulová.

Koncom 19. storočia ruský fyzik Lebedev zmeral tlak svetla. Tlak je sila pôsobiaca na jednotku plochy a sila, podľa Newtona, vzniká pri odovzdávaní hybnosti. To znamená, že svetlo musí mať okrem energie aj hybnosť. Ak sa svetlo skladá z fotónov, prirodzene vzniká otázka, akú veľkú hybnosť prenáša jeden fotón. Relativistický vzťah medzi energiou a hybnosťou častice je

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2. \tag{3}$$

Keďže pre fotón je $m = 0$, potom hybnosť fotónu je

$$|\vec{p}\,| = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{4}$$

Pri opise šírenia vlnenia sa zavádza veličina, ktorá obsahuje nielen informáciu o vlnovej dĺžke, ale aj o smere šírenia. Je to *vlnový vektor*

$$\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}, \tag{5}$$

[1]Pojem *svetlo* budeme v tomto texte používať ako synonymum pre elektromagnetické žiarenie.

[2]Zrejme v tomto ohľade nemajú veľmi na výber. Ako "reprezentantom svetla" im povinnosť pohybovať sa rýchlosťou c vyplýva takpovediac "zo zákona".

kde $\vec{n}$ je jednotková normála k vlnoploche definujúca smer šírenia vlnenia v danom mieste. Ak súčasne $\vec{n}$ označíme jednotkový vektor v smere pohybu fotónu, $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}\,|$, potom skombinovaním vzťahov (4) a (5) dostaneme pre hybnosť jedného fotónu

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \tag{6}$$

1.2 Dvojštrbinový experiment s fotónmi

Od Newtona sa v klasickej fyzike vinie spor o tom, či svetlo má povahu časticovú alebo vlnovú. Od polovice 19. storočia sa zdalo, že spor bol definívne vyriešený v prospech vlnenia. Vlnovú podstatu nezvratne potvrdzovali javy ako difrakcia a interferencia. Vyvrcholením bolo, keď Maxwell riešením svojich rovníc ukázal, že svetlo je elektromagnetické vlnenie.

Uvažujme klasický experiment s monochromatickým svetlom na dvojštrbine. Zdroj Z monochromatického svetla s vlnovou dĺžkou λ svieti na nepriehľadné rovinné tienidlo S s dvoma úzkymi štrbinami 1 a 2, ktorých vzdialenosť je porovnateľná s vlnovou dĺžkou svetla. V istej vzdialenosti za týmto tienidlom je ďalšie rovinné tienidlo T, na ktoré dopadá svetlo, ktoré prešlo cez štrbiny. Dôkazom vlnovej podstaty svetla z pohľadu klasickej fyziky je fakt, že svetlo, ktoré prejde cez štrbinu 1, interferuje so svetlom, ktoré prešlo cez štrbinu 2. To sa prejaví na tienidle T vznikom interferenčných prúžkov: svetlých a tmavých miest, ktoré predstavujú miesta s rôznou intenzitou dopadajúceho svetla.

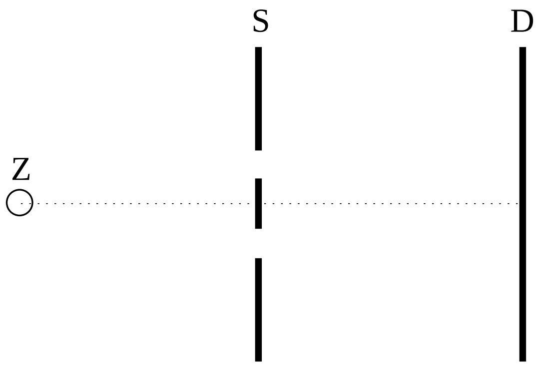

Figure 1: Schéma usporiadania štrbinového experimentu.

Tento efekt nezávisí od podstaty vlnenia — rovnako by sme ho pozorovali pri zvukových vlnách alebo vlnách na vodnej hladine — a je notoricky známy z vlnovej mechaniky ako interferencia vlnenia. Interferencia vlnenia je dôsledkom princípu superpozície: ak na jedno miesto dorazia dve vlnenia, potom výsledkom je ich súčet. Aby platil princíp superpozície, musí byť pohybová rovnica vlnenia lineárnou diferenciálnou rovnicou.

Pripomeňme si v stručnosti, ako v dôsledku skladania vlnení vzniká interferenčný obrazec, ktorý pozorujeme na tienidle. Vieme, že intenzita vlnenia je priamo úmerná jeho amplitúde. Pre zjednodušenie života budeme predpokladať, že konštanta úmernosti je rozná jednej. To znamená, že ak amplitúda vlny prichádzajúcej z otvoru 1 je v mieste x tienidla T rovná komplexnému číslu $a_1 e^{i\varphi_1}$ a amplitúda vlny prichádzajúcej z otvoru 2 je v tomto istom mieste komplexné žíslo $a_2 e^{i\varphi_2}$, pozorované intenzity od každej vlny samostatne (keď by sme zakryli jeden z otvorov) sú

$$I_1 = a_1^2, \qquad I_2 = a_2^2. \tag{7}$$

Keď sú obidve štrbiny otvorené, dostaneme na tienidle T v danom mieste intenzitu

$$I_{12} = |a_1 e^{i\varphi_1} + a_2 e^{i\varphi_2}|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{8}$$

ktorá, ako vidíme, nie je obyčajným súčtom intenzít od jednotlivých otvorov.

Ak pripustíme, že sa svetlo skladá z fotónov, vzniká prirodzená otázka, ako interpretovať toto pozorovanie na fotónovej úrovni. Z pohľadu klasickej fyziky nemá zmysel hovoriť o interferencii častíc. Predstavme, si, že fotón je časticou klasickej fyziky (napr. hmotný bod), ktorú vystreľujeme zo zdroja Z smerom na tienidlo T s náhodným rozptylom, ktorý je v mieste T väčší ako vzdialenosť oboch štrbín. Časť fotónov vyslaných zdrojom by bola zachytených už tienidlom S. Fotón, ktorý by prenikol niektorou zo štrbín, dopadne na tienidlo T. Pri klasickej častici by sme očakávali, že rozloženie bodov dopadu na T bude sústredené v oblastiach, ktoré sú priamkovými projekciami zdroja cez štrbiny na tienidlo T. Ak ešte zvážime, že niektoré častice mohli naraziť na okraje štrbín a tak zmeniť pôvodný smer svojho pohybu, tak môžeme očakávať malé percento bodov dopadu aj za hranicami týchto oblastí.

Na opis rozloženia bodov dopadu môžeme zaviesť pravdepodobnosť dopadu v danom mieste nasledovným spôsobom. Rozdeľme si tienidlo T na veľké množstvo malých plôšok rovnakej veľkosti. Potom pravdepodobnosť, že vyžiarený fotón dopadne do danej plôšky definujeme ako $P = n/N_Z$, kde N_Z je počet všetkých fotónov, ktoré boli vyžiarené zo zdroja Z a n je počet fotónov, ktoré dopadli do danej plôšky. V prípade, že by fotón bola klasická častica, očakávame, že pravdepodobnosť pri obidvoch otvorených štrbinách je

$$P_{12} = P_1 + P_2, \tag{9}$$

kde P_1 a P_2 sú pravdepodobnosti, ktoré dostaneme, keď jedna zo štrbín je zatvorená. Keďže každý fotón nesie rovnaké kvantum energie, intenzita svetla na danom mieste je úmerná hustote fotónov, $I_{12} \sim P_{12}$. Rovnica (9) je ale v rozpore s pozorovanou závislosťou (8) a teda fotóny nie je možné popisovať ako častice klasickej fyziky.

2 Kvantové (vlnové) vlastnosti elektrónu

2.1 Dvojštrbinový experiment s elektrónmi

V roku 1927 Davisson a Germer ostreľovali monokryštál prúdom monoenergetických elektrónov. Podľa klasických predstáv by sme očakávali, že jednotlivé elektróny budú interagovať s atómami v kryštále v závislosti od ich individuálnych relatívnych polôh. Výsledkom by mal byť viac-menej chaotický rozptyl elektrónov. Davisson s Germerom však pozorovali, že miesta dopadu rozptýlených elektrónov vytvárajú na tienidle interferenčné obrazce. Pritom interferencia je jav, ktorý je vyhradený výlučne pre vlnové procesy.

Davissonov-Germerov experiment naznačuje, že sa elektrón, podobne ako fotón, nespráva podľa zákonov klasickej fyziky. Podobne ako pri fotóne, i tu pozorujeme v jeho správaní vlnové aspekty. Preto bude zaujímavé uskutočniť aj s elektrónom experiment na dvojštrbine, pri ktorom tienidlo S s dvoma štrbinami[3] umiestnime medzi zdroj elektrónov Z a detektorovú stenu T . Elektróny na tienidle môžeme detekovať napríklad pomocou malého GM počítača. Počas experimentu budeme zaznamenávať polohy detekovaných elektrónov, keď jedna alebo druhá zo štrbín bude zatvorená a vyniesieme závislosť P_1 a P_2 na x. Keď obidve štrbiny otvoríme, budeme svedkami úplne rovnakého správania sa elektrónov, ako sme pozorovali pri fotónoch. Ukáže sa, že P_{12} nie je rovné $P_1 + P_2$, ale dostaneme rozloženie bodov korešpondujúce interferenčnému obrazcu (8). V analógii s inteferenciou svetla by sme tento jav vedeli opísať keby sa pohyb elektrónov riadil nasledovnými dvoma princípmi

1. **Pravdepodobnosť detekcie elektrónu v danom bode tienidla je úmerná druhej mocnine absolútnej hodnoty komplexného čísla, ktoré budeme nazývať** *amplitúdou pravdepodobnosti.* Označme amplitúdu pravdepodobnosti, že elektrón vyžiarený zdrojom Z detekujeme v bode x tienidla T ako[4] $\langle x|Z\rangle$. Symbol v pravej časti tejto "amplitúdovej zátvorky" označuje *meraný stav*, v ktorom sa fyzikálny systém nachádza. Symbol v ľavej časti označuje *nameraný výsledok*. Pravdepodobnosť detekcie elektrónu v bode x na tienidle T sa dá pomocou amplitúdy $\langle x|Z\rangle$ napísať ako
$$P = |\langle x|Z\rangle|^2 \tag{10}$$

2. **Nech sa elektrón môže dostať do bodu x tienidla T N nezávislými spôsobmi. Nech každému spôsobu zodpovedá amplitúda pravdepodobnosti $\langle x|Z\rangle_i$, $i = 1, \ldots, N$. Potom výsledná amplitúda pre detekciu elektrónu v bode x je daná súčtom týchto amplitúd**
$$\langle x|Z\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x|Z\rangle_i. \tag{11}$$

V našom dvojštrbinovom experimente môžeme identifikovať dva zásadné spôsoby, ako sa elektrón dostane zo zdroja Z do bodu x: cez štrbinu 1 a cez štrbinu 2. Nech tomu zodpovedajú amplitúdy $\langle x|Z\rangle_1 = a_1 \exp(i\varphi_1)$ a $\langle x|Z\rangle_2 = a_2 \exp(i\varphi_2)$. Pomocou týchto amplitúd vieme spočítať pravdepodobnosti detekcie elektrónu v bode x ak je jedna zo štrbín zatvorená ako
$$P_1 = |\langle x|Z\rangle_1|^2 = a_1^2, \qquad P_2 = |\langle x|Z\rangle_2|^2 = a_2^2. \tag{12}$$

[3] Budeme predpokladať, že vzdialenosť a rozmery štrbín sú zvolené tak, aby sa mohla prejaviť vlnová stránka pohybu elektrónu.

[4] Táto symbolika môže teraz pôsobiť trochu zvláštne, ale neskôr sa ukáže ako veľmi praktická.

Ak obidve štrbiny necháme otvorené, potom nevieme povedať, ktorou z nich detekovaný elektrón prešiel a teda podľa druhého princípu je pravdepodobnosť jeho detekovania v bode x rovná

$$P_{12} = |\langle x|Z\rangle_1 + \langle x|Z\rangle_2|^2 = P_1 + P_2 + \underbrace{2\sqrt{P_1 P_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\text{interferenčný člen}}. \tag{13}$$

Vidíme, že aj pri distribúcii elektrónov dostávame interferenčný obrazec analogický s (8).

Ako sme diskutovali už pri fotónoch, keď elektróny chápeme ako klasické guličky, potom je veľmi ťažké vysvetliť takéto správanie. Naviac rovnaký interferenčný obrazec dostaneme aj vtedy, keď je zväzok elektrónov emitovaných zo zdroja Z taký riedky, že na dráhe medzi Z a T sa v každom okamihu nachádza najviac jeden elektrón. To vylučuje možnosť, že pozorované správanie elektrónov je dôsledkom ich vzájomného ovplyvňovania sa počas letu.

V snahe pochopiť zvláštne správanie sa elektrónov pokúsime sa dozvedieť viac o tom, čo sa deje s elektrónom, keď letí medzi zdrojom a tienidlom. Za týmto účelom upravíme náš dvojštrbinový experiment. Ku každej štrbine postavíme zdroj svetla a detektor fotónov. Ak bude cez niektorú štrbinu prelietať elektrón a zrazí sa s fotónom, fotón zmení smer svojho letu a dopadne do fotónového detektora pri danej štrbine. Tak sa dozvieme, cez ktorú štrbinu elektrón preletel.

Takto modifikovaný experiment spustíme najskôr len s jednou otvorenou štrbinou, napr. štrbinou 1. Budeme na ňu svietiť takým silným[5] svetlom, aby sa žiaden prelietavajúci elektrón nevyhol zrážke s fotónom. Po mnohonásobnom opakovaní experimentu (registrácii veľkého množstva elektrónov na T) môžeme spočítať pravdepodobnosť, že elektrón preletí otvorenou štrbinou ako $P_{Z\to 1} = n_1/N_Z$, kde N_Z je počet elektrónov vyžiarených zdrojom a n_1 je počet fotónov detekovaných fotónovým detektorom pri danej štrbine. Ak by sme poznali zodpovedajúcu amplitúdu pravdepodobnosti $\langle 1|Z\rangle$, potom by sme túto pravdepodobnosť mohli vyjadriť ako

$$P_{Z\to 1} = |\langle 1|Z\rangle|^2. \tag{14}$$

Keď elektrón preletí štrbinou 1, dopadne na tienidlo T. Pravdepodobnosť, že elektrón detekovaný v štrbine nájdeme v bode x dostaneme z nášho experimentu ako $P_{1\to x} = n/n_1$, kde n je počet elektrónov detekovaných v malom okolí bodu x. Túto pravdepodobnosť by sme mohli vyjadriť pomocou amplitúdy $\langle x|1\rangle$ ako

$$P_{1\to x} = |\langle x|1\rangle|^2. \tag{15}$$

To, že sa elektrón zo zdroja dostane do štrbiny 1 a odtiaľ do bodu x, sú na seba nadväzujúce udalosti, kde prvá podmieňuje druhú. Výslednú pravdepodobnosť $P_1 = |\langle x|Z\rangle_1|^2$, že elektrón zo Z nájdeme v x, môžeme teda vyjadriť pomocou (14) a (15) nsledovným spôsobom

$$P_1 = P_{1\to x} P_{Z\to 1} = |\langle x|1\rangle\langle 1|Z\rangle|^2. \tag{16}$$

Na základe tohoto pozorovania môžeme sformulovať tretie pravidlo pre amplitúdy pravdepodobnosti:

3. **Nech amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón zo zdroja Z detekujeme v štrbine 1 je $\langle 1|Z\rangle$. Nech amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón zo štrbiny 1 bude detekovaný v bode x tienidla T je $\langle x|1\rangle$. Potom amplitúdu pravdepodobnosti, že elektrón zo zdroja Z bude detekovaný v bode x (štrbina 2 je zatvorená), môžeme vyjadriť ako**

$$\langle x|Z\rangle_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|Z\rangle. \tag{17}$$

[5] Ako sme už diskutovali, intenzita svetla podľa fotónovej hypotézy súvisí s veľkosťou toku fotónov.

Analogicky, ak je zatvorená štrbina 1 a otvorená štrbina 2, potom

$$\langle x|Z\rangle_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|Z\rangle. \tag{18}$$

Pozrime sa teraz na situáciu, keď sú otvorené obidve štrbiny a fotónmi detekujeme každý prechod elektrónu štrbinou. Zo zdroja budeme opäť vystreľovať po jednom elektróne a do našich záznamov o mieste detekcie na tienidle T pridáme aj číslo štrbiny, cez ktorú príslušný elektrón preletel. Očakávame, že tento pokus by mohol vniesť viac svetla do pochopenia zvláštneho správania elektrónov! Avšak vyhodnotenie výsledkov tohoto merania nás značne sklame: interferenčný obrazec zmizol a výsledná distribúcia elektrónov na tienidle zodpovedá súčtu distribúcií z každej štrbiny

$$P_{12} = P_1 + P_2. \tag{19}$$

Teraz síce vieme o každom elektróne povedať, ktorou štrbinou preletel, ale stratili sme samotný jav, ktorý nám mala táto dodatočná informácia pomôcť pochopiť. Avšak po krátkom zamyslení prídeme na to, že výsledok (19) je len priamym dôsledkom elementárnej logiky. Ak o každom elektróne vieme povedať, ktorou štrbinou preletel, potom $P_{12} = (n_1 + n_2)/N_Z$ musí byť súčtom $P_1 = n_1/N_Z$ a $P_2 = n_2/N_Z$.

Dokážeme pochopiť, prečo sa pozorovaním prechodu elektrónov cez štrbiny stratil interferenčný obrazec? Asi nás rýchlo napadne, že elektrón pri zrážke s fotónom tiež zmení smer svojho letu a preto sa zmení aj miesto jeho dopadu[6]. Hľadajme teda spôsob ako minimalizovať toto narušenie dráhy elektrónu. Môžeme svietiť slabším svetlom. To ale znamená menej fotónov. Nastane situácia, že nie každý elektrón prelietavajúci cez štrbinu sa zrazí s fotónom. Na tienidle budeme mať bodky po elektrónoch, ktoré preleteli štrbinou 1, po elektrónoch, ktoré preleteli štrbinou 2 a tiež po takých, o ktorých nevieme povedať, ktorou štrbinou leteli. Zistíme, že elektróny, ktoré sa zrazili s fotónom, stále vytvárajú obrazec $P_1 + P_2$, zatiaľčo elektróny bez zrážky s fotónom vytvárajú interferenčný obrazec. To by bolo pochopiteľné: fotónov je síce menej, ale ich energia neklesla znížením intenzity svetla. Ak sa teda fotón zrazí s elektrónom, uštedrí mu stále rovnako silný "kopanec" a rovnako naruší pôvodný obrazec na tienidle.

Silu "kopanca" od fotónu môžeme znížiť tak, že zväčšíme vlnovú dĺžku použitého svetla. Čím väčšia vlnová dĺžka, tým slabší "kopanec", tým menej by mal byť narušený pozorovaný interferenčný obrazec na tienidle. Je toto cesta ako sa dozvedieť viac o "interferenčnom" správaní elektrónu? Nuž, musíme čitateľa sklamať. I v tomto prípade narazíme na problém. So zväčšovaním vlnovej dĺžky síce zmenšujeme veľkosť odovzdanej hybnosti, ale tiež znižujeme aj rozlišovaciu schopnosť svetla. O detekovaných fotónoch, ktorých vlnová dĺžka sa priblíži svojou hodnotou vzdialenosti medzi oboma štrbinami, nebudeme vedieť povedať, od ktorej štrbiny prišli a teda stratíme informáciu o tom, ktorou štrbinou dotyčný elektrón naozaj preletel.

Vyzerá to tak, akoby sa v tomto prípade proti nám príroda spikla. A naozaj je to tak, avšak nie len v tomto prípade. Ukazuje sa, že v prírode existuje principiálne obmedzenie na našu schopnosť súčasne merať s ľubovoľnou presnosťou hodnoty niektorých veličín. A tiež, že meranie zásadne ovplyvňuje meraný systém. Tieto obmedzenia sú veľmi malé a preto ich nepozorujeme v každodennom živote a neobjavujú sa ani v zákonoch klasickej fyziky. Keď však začneme študovať svet na atómových rozmeroch, musíme ho zobrať na vedomie. Tieto obmedzenia sa podľa nášho súčasného chápania nedajú obísť[7], čo bolo potvrdené aj vo všetkých doterajších experimentoch.

[6] To je samozrejme klasická úvaha, ale nie je neprirodzené očakávať, že interakcia elektrónov s fotónmi bude mať vplyv aj na amplitúdu pravdepodobnosti.

[7] Mohlo by sa zdať, že to nie je nič nové, že aj v klasickej fyzike malo každé meranie nejaký vplyv na meraný

Ukazuje sa teda, že získanie informácie o tom, ktorou štrbinou elektrón preletel, zásadne zmenilo výsledok dvojštrbinového experimentu. Na základe tejto skúsenosti je preto vhodné doplniť **2. pravidlo** o amplitúdach pravdepodobnosti: **Amplitúdy sa budú sčitovať len vtedy, ak na základe nášho merania nebudeme vedieť rozlíšiť, ktorou štrbinou elektrón preletel.** V takom prípade je výsledná amplitúda pravdepodobnosti detekcie elektrónu na T v bode x rovná

$$\langle x|Z\rangle = \langle x|Z\rangle_1 + \langle x|Z\rangle_2 = \langle x|1\rangle\langle 1|Z\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|Z\rangle = \sum_{i=1,2} \langle x|i\rangle\langle i|Z\rangle. \tag{20}$$

Tento výsledok sa dá zovšeobecniť na prípad, keď medzi zdroj Z a tienidlo T vložíme viacero dosiek s rôznymi počtami štrbín. Pridajme napríklad k pôvodnej doske s dvoma štrbinami 1 a 2 ešte jednu dosku s troma štrbinami A, B, C. Potom amplitúdu pravdepodobnosti, že elektrón nájdeme v bode x môžeme poskladať z nasledovných častí

$$\langle x|Z\rangle = \sum_{j=A,B,C} \sum_{i=1,2} \langle x|j\rangle\langle j|i\rangle\langle i|Z\rangle. \tag{21}$$

Takto by sme mohli pokračovať, pričom vloženie každej ďalšej dosky by bolo reprezentované vložením člena typu $\sum_k |k\rangle\langle k|$, kde sčitovanie prebieha cez všetky štrbiny v danej doske.

Nesmieme stratiť zo zreteľa, že všetky uvedené vzťahy vyjadrujú len pravidlá skladania amplitúd pravdepodobnosti, ale nehovoria nič o tom, ako tieto amplitúdy vypočítať. Tieto formálne vzťahy nás však môžu navigovať k nájdeniu správneho matematického jazyka, ktorý by mohol umožniť sformulovanie teórie mikrosveta.

Predpokladáme, a ďalšie experimenty to potvrdzujú, že naše tri pravidlá o amplitúdach pravdepodobnosti sa neobmedzujú len na správanie sa elektrónov a fotónov v dvojštrbinovom experimente. Pokúsime sa teda našu skúsenosť z tohoto experimentu zovšeobecniť a preformulovať tieto tri pravidlá v obecnejšej podobe:

1. **Nech je fyzikálny systém v stave** S. **Pravdepodobnosť namerania výsledku** V **v tomto fyzikálnom systéme je rovná** $|\langle V|S\rangle|^2$, **kde** $\langle V|S\rangle$ **je komplexné číslo nazývané amplitúda pravdepodobnosti.**

2. **Ak časový vývoj systému z daných počiatočných podmienok** Z **formálne rozčleníme na** m **nezávislých paralelných spôsobov, pre ktoré amplitúdy pravdepodobnosti namerania výsledku** V **sú** $\langle V|Z\rangle_i$, $i = 1, \ldots, m$, **potom celková amplitúda pravdepodobnosti namerania výsledku** V **je**

   $$\langle V|Z\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle V|Z\rangle_i.$$

   Ak do experimentu zahrnieme merania, ktoré nám umožnia rozlíšiť, ktorým z týchto spôsobov sa systém z počiatočných podmienok Z **naozaj vyvíjal (a ponecháme všetky možnosti otvorené), potom pravdepodobnosť namerania výsledku** V **je**

   $$P(V|Z) = \sum_{i=1}^{m} |\langle V|Z\rangle_i|^2.$$

---

fyzikálny systém. Zásadný rozdiel ale spočíva v tom, že podľa klasickej fyziky sme verili, že nám nič nebráni tento vplyv ľubovoľne minimalizovať. QM však tvrdí, že v prírode existujú objektívne hranice zväčšovania presnosti a že meranie vo všeobecnosti zásadne mení meraný systém.

3. **Nazvime "udalosť'ou" nameranie výsledku V na systéme, ktorého stav sa vyvíjal z počiatočných podmienok Z. Ak nejakú udalosť rozčleníme na postupnosť na seba nadväzujúcich podudalostí, potom výsledná amplitúda tejto udalosti sa dá napísať ako súčin amplitúd jednotlivých podudalostí**

$$\langle V|Z\rangle = \langle V|A_m\rangle\langle A_m|A_{m-1}\rangle \dots \langle A_3|A_2\rangle\langle A_2|A_1\rangle\langle A_1|Z\rangle,$$

kde $A_1, A_2, \dots, A_m$ zohrávajú striedavo úlohu meraných výsledkov aj počiatočných podmienok pre jednotlivé podudalosti.

2.2 Vlnová dĺžka elektrónu

V roku 1924 francúzsky fyzik Louis de Broglie vyslovil hypotézu, podľa ktorej **je každému voľnému elektrónu s hybnosťou $\vec{p}$ priradená rovinná vlna** $\exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]$. Vzhľadom na opísané podobnosti v správaní sa fotónov a elektrónov nás neprekvapí, že de Broglie zvolil

$$\vec{k} = \frac{1}{\hbar}\vec{p}, \qquad \omega = \frac{1}{\hbar}E. \tag{22}$$

Vlnová dĺžka elektrónu s hybnosťou $\vec{p}$ teda je

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}\,|}. \tag{23}$$

Tu je dobré si uvedomiť, že z de Broglieho hypotézy nie je vôbec jasné, čo si pod de Broglieho vlnou predstaviť. Aká je jej fyzikálna podstata. Len predpokladáme, že táto vlna akýmsi spôsobom riadi pohyb elektrónu.

Prirodzene vzniká otázka, čo dosadiť za E v (22). Je to celková relativistická energia elektrónu $E = mc^2$ (a $\vec{p}$ relativistická hybnosť)? Alebo sa táto de Broglieho hypotéza vzťahuje len na klasické ($v \ll c$) elektróny, takže E je povedzme kinetická energia $E = p^2/2m$? Je fakt, že všetky naše pozorovania, ktoré viedli k hypotéze (22), sa týkali nerelativistických elektrónov. V atóme vodíka, pri Davisson-Germerovom experimente, pri interferencii na dvojštrbine, tam všade mali elektróny rýchlosti omnoho menšie ako rýchlosť svetla. Na základe týchto pokusov nevieme nič o tom, ako by sa správali relativistické elektróny a teda nemáme ani priamu podporu pre de Broglieho hypotézu. Na strane druhej však (22) je súčasťou hypotézy o symetrii medzi elektrónmi a fotónmi. Hypotézy, ktorá navrhuje, že fotóny aj elektróny majú spoločnú podstatu a podliehajú rovnakému opisu. Lenže fotóny sú čisto relativistické častice a teda E v ich opise musí byť relativistická. V záujme uvedenej analógie je preto prirodzené predpokladať, že aj v prípade elektrónov rovnice (22) sú relativistické.

Napriek tomu sa v QM budeme zaoberať len časticami pri nerelativistických rýchlostiach (energiách) a samotná QM, ktorú tu sformulujeme, bude nerelativistickou teóriou. To znamená, že oblasť jej platnosti bude ohraničená len na rýchlosti malé v porovnaní s rýchlosťami svetla. Je preto užitočné pozrieť sa na to, aká je súvislosť parametrov $\vec{k}$ a ω de Broglieho vlny s veličinami, ktoré charakterizujú pohyb elektrónu v nerelativistickom režime. Pre hybnosť v limite $v \ll c$ platí

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \xrightarrow{v \ll c} \quad mv, \tag{24}$$

takže správnu vlnovú dĺžku elektrónu pri malých rýchlostiach dostaneme, keď v (22) dosadíme aj nerelativistickú hybnosť. Trochu zložitejšia je situácia s energiou. Tam pre voľný elektrón platí

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \quad \xrightarrow{v \ll c} \quad mc^2 + \frac{p^2}{2m} = mc^2 + E_{kin}, \tag{25}$$

kde E_{kin} je klasická kinetická energia elektrónu. To znamená, že frekvencia elektrónu je

$$\omega = \frac{mc^2}{\hbar} + \frac{p^2}{2m\hbar}. \tag{26}$$

Očividne teda ani pri malých rýchlostiach nemôžeme pri výpočte frekvencie de Broglieho vlny ignorovať relativistický príspevok $mc^2/\hbar$, ktorý ja oveľa väčší ako druhý člen v (26). Ako však neskôr uvidíme, prítomnosť prvého člena v (26) nemá vplyv na fyzikálne merateľné výsledky v QM.

Aby sme získali predstavu o konkrétnych číslach, skúsme spočítať vlnovú dĺžku elektrónov v televíznej obrazovke. Tieto elektróny sú urýchľované typickým napätím okolo 10 kV. Pri tom jeden elektrón nadobudne kinetickú energiu $\mathrm{E}_{kin} = 10$ keV, čo je $1,6 \times 10^{-15}$ J. Keďže ide o nerelativistickú energiu, hybnosť elektrónu je

$$p = \sqrt{2m_e E_{kin}} = \sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31}\text{kg} \times 1,6 \times 10^{-15}\text{J}} \approx 5,4 \times 10^{-23}\text{kg m s}^{-1}. \tag{27}$$

Tomu zodpovedá vlnová dĺžka

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \times 10^{-34}\text{J s}}{5,4 \times 10^{-23}\text{kg m s}^{-1}} \approx 1,2 \times 10^{-11}\text{m} = 1,2 \times 10^{-2}\text{nm}. \tag{28}$$

Vidíme, že vlnová dĺžka elektrónov v TV obrazovke je omnoho menšia ako vlnová dĺžka viditeľného svetla. Očakávame, že vlnové vlastnosti elektrónov sa prejavia pri interakcii so štruktúrami, ktorých rozmer bude porovnateľný s vlnovou dĺžkou uvažovaných elektrónov. Keďže sa v televíznej obrazovke takéto malé štruktúry nenachádzajú, neprejavujú sa ani vlnové vlastnosti elektrónov. Iná však bola situácia pri rozptyle elektrónov na monokryštale, kde typické rozmery atómov, ako aj ich vzdialenosti, sú rádove 10^{-10} m.

Ak je de Broglieho hypotéza krok správnym smerom k opisu tohoto sveta, potom by mala platiť nielen pre elektróny, ale pre akékoľvek objekty nezávisle na ich hmotnostiach a rozmeroch. Takže v princípe by sa vlnové vlastnosti mali prejaviť aj keby sme strieľali na dvojštrbinu napríklad brokmi. Ako je teda možné, že v tomto prípade nevidíme interferenčný obrazec? Nuž ak urobíme zodpovedajúce výpočty pre broky, zistíme, že vzhľadom na extrémne malú vlnovú dĺžku "brokových vĺn" sa maximá a minimá interferenčného obrazca striedajú na veľmi malých vzdialenostiach. Oveľa menších ako je naša schopnosť rozlíšiť polohu broku. Takže rozloženie hustoty brokov na tienidle, ktoré by sme namerali, kopíruje len "obálku" jednotlivých maxím interferenčného obrazca.

Rozmerové škály objektov a javov, s ktorými máme osobnú skúsenosť prostredníctvom našich zmyslov a ktoré viac-menej zamestnávali fyzikov do konca 19. storočia, boli oveľa väčšie ako de Broglieho vlnové dĺžky. Podčiarknime, že faktorom, ktorý rozhoduje o veľkosti týchto vlnových dĺžok, je hodnota Planckovej konštanty. Jej malosť odsúva pozorovateľné kvantové efekty do oblasti mikrosveta.

2.3 Bohrova interpretácia de Broglieho vlny

De Broglieho vlny sú súčasťou snáh o vysvetlenie podivného "vlnového" správania sa elektrónov, ktoré sme rozoberali v dvojštrbinovom experimente. Videli sme, že podobné správanie vykazujú aj fotóny a ako sa ukazuje, ide o univerzálnu vlastnosť všetkých hmotných objektov. Hypotéza Louis de Broglieho nám síce umožnila robiť kvantitatívne odhady vlnovo-časticových efektov, ale nevysvetľuje pôvod ani podstatu de Broglieho vlny. Nepodáva ani systematický výklad jej vlastností: nevieme, ako sa bude táto vlna správať, keď na elektrón bude pôsobiť nejaká sila.

Schrödinger vyslovil hypotézu, že de Broglieho vlna predstavuje rozloženie hmotnosti častice v priestore. Že totiž elektrón nie je malá tuhá gulička, ale "hmotná vlna". Slabinou tejto predstavy je, že každý priestorovo lokalizovaný vlnový rozruch sa v neohraničenom priestore a ponechaný sám na seba s časom rozplýva do šírky. Takže to, čo by spočiatku vyzeralo ako hmotný bod, by postupom času mohlo narásť do ľubovoľných rozmerov, či dokonca stratiť svoju priestorovú integritu vytvorením viacerých oddelených lokálnych maxím.

Fungujúce vysvetlenie podstaty de Broglieho vlny, ktoré je akceptované podnes, sformuloval dánsky fyzik Niels Bohr. Podľa Bohra, **na úplné zadanie stavu elektrónu potrebujeme poznať amplitúdu pravdepodobnosti lokalizácie elektrónu pre každý bod priestoru.** To znamená, že potrebujeme poznať akúsi komplexnú funkciu polohy $\psi(\vec{r})$. V našej špeciálnej symbolike by sme mohli túto amplitúdu označiť ako $\langle\vec{r}|\psi\rangle$. Je to amplitúda pravdepodobnosti, že elektrón, ktorý sa nachádza v stave označenom písmenom ψ, bude nájdený na mieste $\vec{r}$. Jedna technická poznámka: vzhľadom na spojitý charakter množiny možných polôh lokalizácie elektrónu v priestore je $|\psi(\vec{r})|^2$ hustotou pravdepodobnosti. Pravdepodobnosť lokalizácie elektrónu v nejakom konečnom priestorovom objeme by sme dostali integrovaním tohoto výrazu cez uvedený objem. Pre infinitezimálny objem $d^3\vec{r} = dxdydz$ je daná výrazom

$$dP = |\psi(\vec{r})|^2 \, d^3\vec{r}. \tag{29}$$

Funkcia $\psi(\vec{r})$ sa zvykne nazývať *vlnovou funkciou.*

Pre elektrón v ľubovoľnom stave musí platiť, že ak ho budeme hľadať v každom bode priestoru, potom ho určite nájdeme. Matematicky túto podmienku vyjadruje tzv. *normalizačná podmienka*, ktorú musí vlnová funkcia spĺňať

$$\int |\psi(x,y,z)|^2 \, dx \, dy \, dz = 1, \tag{30}$$

kde integrujeme cez celý trojrozmerný priestor. Táto podmienka znamená, že pravdepodobnosť nájdenia daného elektrónu niekde vo vesmíre je rovná jednej.

Podľa Bohra vlnová funkcia nesie najúplnejšiu možnú informáciu o stave elektrónu. Nemôžeme o stave elektrónu vedieť viac, než čo nám o ňom hovorí vlnová funkcia. Vo všeobecnosti je teda principiálne vylúčené, aby sme vedeli povedať, kde elektrón nájdeme. Pre dané miesto (oblasť) dokážeme predpovedať iba pravdepodobnosť, s ktorou tam elektrón bude lokalizovaný.

Nemusíme azda diskutovať o tom, že stav elektrónu sa môže s časom meniť (ak by to tak nebolo, nemali by sme sa vo fyzike prakticky čím zaoberať). To ale znamená, že sa s časom môže meniť vlnová funkcia, ktorá tento stav opisuje. Zo skúsenosti vieme, že časový vývoj fyzikálnych systémov závisí od vonkajších podmienok (napr. pôsobiacich síl), v ktorých sa systém nachádza. Principiálnou otázkou každej fyzikálnej teórie je nájdenie pohybovej rovnice, ktorej riešením je časový vývoj fyzikálnych systémov opísaných touto teóriou. V klasickej mechanike je časový vývoj polohy a rýchlosti hmotného bodu riešením Newtonovej pohybovej rovnice $d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}/m$. V QM potrebujeme nájsť pohybovú rovnicu, ktorej riešením by bol časový vývoj vlnovej funkcie. de Broglieho rovinná vlna popisujúca pohyb voľného elektrónu s danou hybnosťou v sebe obsahuje aj informáciu o jej časovom vývoji. Ak by ale na takýto elektrón, ktorý by bol v nejakom okamihu popísaný vlnovou funkciou $\exp(i\vec{k}\vec{r})$, začali pôsobiť nejaké sily, potom sa dá očakávať, že by sa zmenil práve časový vývoj tohoto stavu. Akým spôsobom, to budeme vedieť, keď budeme poznať pohybovú rovnicu.

Keďže vlnová funkcia je amplitúdou pravdepodobnosti, mali by pre ňu platiť naše tri pravidlá, ktoré sme sformulovali pri dvojštrbinovom experimente. Nech je stav elektrónu prechádzajúceho cez štrbinu 1 opísaný vlnovou funkciou ψ_1 a stav elektrónu prechádzajúceho cez štrbinu 2 opísaný vlnovou funkciou ψ_2. Ak nevieme v našom experimente rozlíšiť, ktorou štrbinou elektrón naozaj prešiel, potom je pravdepodobnosť jeho nájdenia v bode $\vec{r}$ daná vlnovou funkciou

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{N}[\psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})], \tag{31}$$

kde N je tzv. *normalizačná konštanta*, ktorú určíme z normalizačnej podmienky pre $\psi(\vec{r})$. Vzťah (31) by mal byť splnený v každom časovom okamihu. Ak sú teda $\psi_1(\vec{r}, t)$ a $\psi_2(\vec{r}, t)$ časové vývoje stavov elektrónu prechádzajúceho štrbinami 1 alebo 2, potom musí byť možným časovým vývojom aj ich súčet alebo obecnejšie lineárna kombinácia. Hovoríme, že vlnové funkcie spĺňajú *princíp lineárnej superpozície*. Takúto vlastnosť majú riešenia lineárnej diferenciálnej rovnice: ak je riešením ψ_1 aj ψ_2, potom je riešením aj ich lineárna kombinácia. Tak dostávame dôležité obmedzenie na vlastnosti hľadanej pohybovej rovnice.

Na základe týchto skutočností je zrejmé, že vlnové funkcie sa skutočne správajú ako vlny: šíria sa priestorom a lineárne sa skladajú. Z pohľadu Bohrovej interpretácie však nejde o šírenie rozruchov materiálnej povahy, ale o **matematické objekty charakterizujúce stav elektrónu**.

Čo sa však stane, ak elektrón, ktorý sa nachádzal v stave $\psi(\vec{r})$ nájdeme pomocou detektora elektrónov na nejakom konkrétnom mieste $\vec{r}_0$? Detektor mohol lokalizovať elektrón vtedy, ak ψ mala v $\vec{r}_0$ nenulovú hodnotu. Ak teda existovala nenulová, nie nevyhnutne 100%-ná, pravdepodobnosť jeho výskytu v $\vec{r}_0$. Avšak v okamihu, keď detektor "cvakol", vieme naisto, že elektrón sa nachádza práve tam. To ale znamená, že sa od toho okamihu musí nachádzať v úplne inom stave popísanom úplne inou vlnovou funkciou. Funkciou, ktorá je nenulová len vo vnútri objemu detektora. Táto úvaha ilustruje ďalšie pravidlo Bohrovej interpretácie QM: **Meraním konkrétnej fyzikálnej veličiny sa skokom zmení stav fyzikálneho systému tak, že v novom stave bude meraná fyzikálna veličina nadobúdať nameranú hodnotu so 100%-nou istotou**.

Spočiatku fyzici akceptovali Bohrovu predstavu len veľmi ťažko. Newtonovská mechanika dávala jednoznačnú predpoveď polohy a rýchlosti telesa pri známych počiatočných podmienkach[8] a pôsobiacich silách. V klasickej fyzike vystupovala náhoda len ako dôsledok nedostatku informácií. Bohrova interpretácia však zavádza do opisu prírody náhodu ako fundamentálny, neodstrániteľný efekt.

[8]V klasickej mechanike je stav hmotného bodu úplne zadaný, ak je daná jeho poloha $\vec{r}$ a rýchlosť $\vec{v}$. Ak poznáme stav hmotného bodu v nejakom okamihu a ak poznáme sily naň pôsobiace, potom vieme jednoznačne predpovedať jeho stav v ľubovoľnom inom čase.