VLADIMÍR HAJKO, JURAJ DANIEL-SZABÓ
MATEJ RÁKOŠ, VINCENT KAVEČANSKÝ
EDITA TARABČÁKOVÁ, ZOLTÁN VARGA

FYZIKA V PRÍKLADOCH

alfa
VYDAVATEĽSTVO TECHNICKEJ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY
BRATISLAVA

OBSAH

C ELEKTRICKÉ A MAGNETICKÉ JAVY

prof. Ing. M. Rákoš, DrSc., akademik V. Hajko, doc. Ing. Z. Varga, CSc.

D ELEKTROMAGNETICKÉ ŽIARENIE

prof. RNDr. J. Daniel-Szabó, CSc., RNDr. E. Tarabčáková

E MIKROČASTICE. ATÓMY. MOLEKULY

akademik V. Hajko, prof. RNDr. J. Daniel-Szabó, CSc.

A MECHANIKA

1 MECHANICKÝ POHYB HMOTNÉHO BODU

Úvod

Pod *mechanickým pohybom* telesa rozumieme proces, pri ktorom sa mení poloha jedného telesa vzhľadom na iné teleso. Pri teoretickom štúdiu mechanického pohybu si často zjednodušujeme charakter pohybujúceho sa telesa a zavádzame pojem *hmotný bod.* Rozumieme pod ním teleso, ktorého rozmery možno vzhľadom na ostatné rozmery pri študovanom pohybe zanedbať. Podobne namiesto vzťažného telesa, na ktoré istý mechanický pohyb vzťahujeme, zavádzame abstrakciou pojem *vzťažný bod.* Polohu hmotného bodu vzhľadom na vzťažný bod určujeme v teoretických úvahách pomocou *polohového vektora.* Pri kinematike hmotného bodu sa treba oboznámiť s týmito pojmami, veličinami a faktmi:

a) *Polohový vektor* $\boldsymbol{r}$ bodu v priestore vzhľadom na začiatočný bod pravouhlej súradnicovej sústavy možno pomocou pravouhlých súradníc uvedeného bodu v priestore vyjadriť vzťahom

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \text{ pričom } |\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sú jednotkové vektory v smere príslušných súradnicových osí.

b) *Rýchlosť* pohybujúceho sa bodu je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

Vzhľadom na vyjadrenie (1) polohového vektora možno písať:

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

t. j.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}; \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}; \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Ak sú dané súradnice rýchlosti v_x, v_y, v_z, absolútnu hodnotu rýchlosti určíme zo vzťahu

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{2}$$

Smer rýchlosti určujeme pomocou uhlov α, β, γ, ktoré zviera smer rýchlosti so smermi jednotlivých súradnicových osí x, y, z.

Preto α, β, γ platia vzťahy

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}; \quad \cos\beta=\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \tag{3}$$

Ak sa pri istom pohybe s premenlivou rýchlosťou realizuje za čas t dráha dĺžky s, potom výraz $v_p=\frac{s}{t}$ predstavuje priemernú rýchlosť pohybu. Pri pohybe, ktorý by prebiehal rýchlosťou konštantnej hodnoty v_p (ale za inak rovnakých podmienok), by sa za čas t realizovala dráha tej istej dĺžky s ako predtým.

c) *Zrýchlenie* pohybujúceho sa bodu je definované vzťahom

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

Ďalej platia vzťahy

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

t. j.

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}; \quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}; \quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

Pre súvis medzi súradnicami zrýchlenia a_x, a_y, a_z a absolútnou hodnotou zrýchlenia, ako aj pre uhly, ktoré zviera smer zrýchlenia so smermi súradnicových osí, platia analogické vzťahy ako (2) a (3).

d) Pri *priamočiarom pohybe* možno pre hodnotu rýchlosti a zrýchlenia písať:

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$$

kde s označuje dĺžku dráhy pohybu.

Rovnomerný priamočiary pohyb sa vyznačuje konštantnou rýchlosťou. Preto

$$v = \text{konšt}; \quad a = \frac{dv}{dt} = 0; \quad s = \int v \, dt = vt + s_0$$

kde s_0 je dĺžka dráhy v čase $t = 0$. Obvykle volíme začiatok merania dráhy v mieste, v ktorom sa bod nachádzal v čase $t = 0$. Potom $s_0 = 0$.

e) *Rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb* sa vyznačuje konštantným zrýchlením. Preto

$$a = \text{konšt}; \quad v = \int a \, dt = at + v_0$$

$$s = \int v \, dt = \int (at + v_0) \, dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0$$

kde s_0 má ten istý význam ako predtým a v_0 je začiatočná rýchlosť, t. j. hodnota rýchlosti bodu v čase $t = 0$.

Ak $a = \text{konšt}$, ale $a < 0$, tak ide o *rovnomerne spomalený priamočiary pohyb.* V takomto prípade zvykneme a nazývať aj *spomalením.*

Špeciálnym prípadom rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu je *voľný pád, zvislý vrh nadol* a *zvislý vrh nahor.* Platí:

pre voľný pád

$$a = g; \quad v_0 = 0; \quad v = gt; \quad s = \frac{1}{2} gt^2$$

pre zvislý vrh nadol

$$a = g; \quad v_0 \neq 0; \quad v = v_0 + gt; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

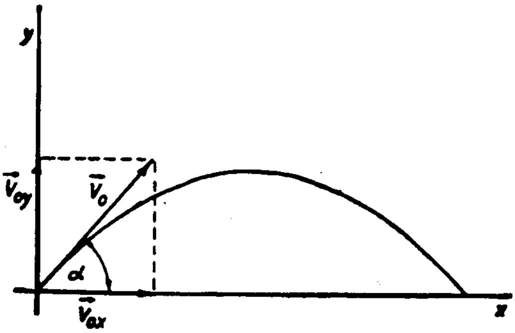
zvislý vrh nahor

$$a = -g; \quad v_0 \neq 0; \quad v = v_0 - gt; \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

f) Pri *všeobecnom priamočiarom pohybe* nie je zrýchlenie konštantné, ale je funkciou času. Teda

$$a = a(t); \quad v = \int a(t) \, dt; \quad s = \int \left(\int a(t) \, dt \right) dt$$

g) Pohyb hmotného bodu, ktorý označujeme ako *šikmý vrh,* sa vyznačuje tiež konštantným zrýchlením $a = g$, ale zrýchlenie g a začiatočná rýchlosť v_0 na rozdiel od rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu nepatria do tej istej priamky. Ak šikmý vrh prebieha v rovine (x, y) tak, že začiatočná rýchlosť v_0 zviera s osou x



Obr. 1

uhol α *(obr. 1)*[1], tak platia vzťahy

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} gt^2$$

h) Pri *krivočiarom pohybe* je zvykom rozkladať zrýchlenie na zložku *tangenciálnu (dotyčnicovú)* a zložku *normálovú (dostredivú)*. Pritom platí:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} - \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\varrho}$$

kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor v smere dotyčnice a $\boldsymbol{\varrho}$ jednotkový vektor spadajúci do smeru normály k dráhe pohybu v danom mieste a smerujúci od stredu krivosti k danému miestu; R je polomer krivosti krivky — dráhy pohybu v danom mieste. Pre hodnoty jednotlivých zložiek zrýchlení a celkového zrýchlenia teda platí:

$$a_t = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{R}; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

i) *Uhlová rýchlosť* a *uhlové zrýchlenie* pohybujúceho sa bodu sú definované vzťahmi

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\alpha}}{dt^2}$$

kde $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor, ktorého hodnota je daná veľkosťou uhla opísaného príslušným polohovým vektorom pohybujúceho sa bodu. Smer vektora $\boldsymbol{\alpha}$ je kolmý na rovinu uhla a smeruje na tú stranu, z ktorej sa vytváranie uhla javí proti pohybu

[1] Na jednotlivých obrázkoch sú vektorové veličiny označené šípkou nad písmenom označujúcim príslušnú veličinu.

hodinových ručičiek. Ak ide o rovinný krivočiary pohyb, možno písať:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

V takomto prípade vektory $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ spadajú do tej istej priamky, kolmej na rovinu pohybu.

Uhlová rýchlosť súvisí s obvodovou rýchlosťou pohybujúceho sa bodu vzťahom

$$v = R\omega$$

kde R je príslušný *polomer krivosti.* Z uvedeného vzťahu pre rovinný krivočiary pohyb ďalej vyplýva

$$a_t = R\varepsilon$$

Pre hodnotu obvodovej rýchlosti možno aj pri krivočiarom pohybe písať vzťah $v = \frac{ds}{dt}$, kde s je dĺžka dráhy pohybu.

j) Špeciálnym prípadom krivočiareho pohybu je *pohyb po kružnici.* Rovnomerný pohyb po kružnici sa vyznačuje konštantnou uhlovou rýchlosťou. Preto

$$\omega = \text{konšt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad \alpha = \int \omega \, dt = \omega t + \alpha_0$$

kde α_0 je uhol, ktorý zviera polohový vektor pohybujúceho sa bodu vzhľadom na stred kružnice v čase $t = 0$ s určitým, za základ zvoleným smerom polohového vektora. Obvykle volíme $\alpha_0 = 0$.

Periódou T rovnomerného pohybu po kružnici nazývame čas, za ktorý bod raz obehne kružnicu. Platí:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frekvenciou f pohybu nazývame počet obehov za jednotku času, teda

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

k) *Rovnomerne zrýchlený pohyb po kružnici* sa vyznačuje konštantným uhlovým zrýchlením. Platí teda

$$\varepsilon = \text{konšt}; \quad \omega = \int \varepsilon \, dt = \varepsilon t + \omega_0$$

$$\alpha = \int \omega \, dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) \, dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \alpha_0$$

kde α_0 má analogický význam ako predtým a ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$.

Keď $\varepsilon =$ konšt, ale $\varepsilon < 0$, potom ide o *rovnomerne spomalený pohyb po kružnici.*

1) Uvažujme pohyb bodu vzhľadom na dve vzťažné sústavy S a S', pričom sústava S' koná vzhľadom na sústavu S postupný pohyb rýchlosťou $\mathbf{v}^*$, so zrýchlením $\mathbf{a}^*$ a otáčavý pohyb uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ a uhlovým zrýchlením $\boldsymbol{\varepsilon}$. Potom vzájomný súvis medzi rýchlosťou $\mathbf{v}$, resp. zrýchlením $\mathbf{a}$ bodu vzhľadom na sústavu S a rýchlosťou $\mathbf{v}'$, resp. zrýchlením $\mathbf{a}'$ bodu vzhľadom na sústavu S' je daný vzťahmi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \mathbf{a}'$$

kde $\mathbf{r}'$ je polohový vektor pohybujúceho sa bodu vzhľadom na vzťažný bod sústavy S'. Rýchlosť $\mathbf{v}$, resp. zrýchlenie $\mathbf{a}$ nazývame *absolútnym*, rýchlosť $\mathbf{v}'$, resp. zrýchlenie $\mathbf{a}'$ nazývame *relatívnym.*

m) Pod *plošnou rýchlosťou* pohybu rozumieme vektor

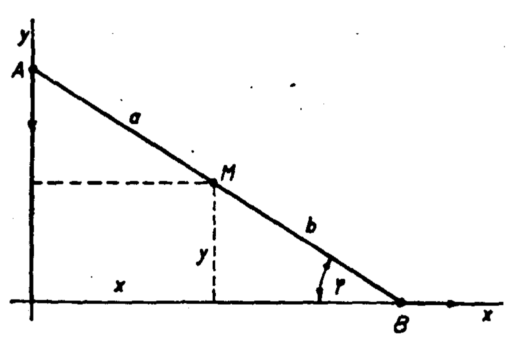
$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

ktorého absolútna hodnota sa číselne rovná ploche, ktorú vytvorí polohový vektor $\mathbf{r}$ bodu za jednotku času. Ak $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ a začiatok vektora $\mathbf{r}$ leží v strede krivosti krivky v danom mieste, tak

$$|\mathbf{p}| = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

Príklady[2]

1. Úsečka AB konštantnej dĺžky sa pohybuje tak, že sa jej koncové body A, resp. B kĺžu pozdĺž osi y, resp. osi x určitej pravouhlej súradnicovej sústavy



Obr. 2

(obr. 2). Treba určiť, akú dráhu bude pri tomto pohybe opisovať ľubovoľne zvolený bod M na uvedenej úsečke AB.

---

[2] Numerické výpočty, keď to bolo potrebné, boli v jednotlivých príkladoch vykonané pomocou päťmiestnych logaritmických tabuliek.

Riešenie:

Pri označení podľa *obr. 2* možno zrejme písať:

$$x = a \cos \varphi; \qquad y = b \sin \varphi$$

alebo

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi; \qquad \frac{y}{b} = \sin \varphi$$

Umocnením obidvoch rovníc a ich sčítaním dostaneme:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bod M sa pohybuje po elipse s polosami a a b.

2. Pohyb bodu je určený rovnicami $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$, $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$, kde a a k sú konštanty. Treba určiť rovnicu dráhy pohybu a vyjadriť hodnotu rýchlosti a zrýchlenia bodu ako funkciu absolútnej hodnoty polohového vektora bodu.

Riešenie

Rovnice určujúce pohyb bodu možno písať v tvare

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}) = 2a \cosh kt$$

$$y = a(e^{kt} - e^{-kt}) = 2a \sinh kt$$

Umocnením obidvoch rovníc a ich odčítaním dostaneme:

$$x^2 - y^2 = 4a^2 \tag{1}$$

lebo $\cosh^2 kt - \sinh^2 kt = 1$. Zo vzťahu (1) vyplýva, že dráha pohybu je hyperbola.

Pre hodnotu rýchlosti a zrýchlenia platí:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2k^2(e^{kt} - e^{-kt})^2 + a^2k^2(e^{kt} + e^{-kt})^2} \doteq$$

$$\doteq k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = k^2 r$$

3. Pohyb bodu je daný v polárnych súradniciach rovnicami $r = Ae^{kt}$ a $\varphi = kt$, kde A a k sú konštanty. Treba nájsť rovnicu dráhy pohybu a vyjadriť rýchlosť, zrýchlenie a polomer dráhy krivosti ako funkciu polárnej súradnice r.

Riešenie:

Rovnica dráhy v polárnych súradniciach je $r = Ae^{\varphi}$, čo je rovnica logaritmickej špirály.

Pre rýchlosť a zrýchlenie platí:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}; \quad a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

Keďže $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kde r a φ závisia od času podľa uvedených vzťahov, potom

$$v = \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \sin^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{A^2k^2e^{2kt} + r^2k^2} = kr\sqrt{2}$$

$$a = \left(\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2 + 4\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^4 + r^2\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 4r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{A^2k^4e^{2kt} + 4A^2k^4e^{2kt} + r^2k^4 - 2rAk^4e^{kt}} = \sqrt{4k^4r^2} = 2k^2r$$

Polomer krivosti R možno určiť zo vzťahu $v = R\,\dfrac{d\varphi}{dt}$, takže

$$R = \frac{kr\sqrt{2}}{k} = r\sqrt{2}$$

4. Vlak má rýchlosť $72\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Použitím bŕzd možno vlak zastaviť za 2 minúty. Za predpokladu, že počas brzdenia možno pohyb vlaku považovať za rovnomerne spomalený, treba vypočítať vzdialenosť miesta od stanice, v ktorom treba začať brzdiť.

Riešenie:

Pre rýchlosť a dráhu pri rovnomerne zrýchlenom pohybe platia vzťahy

$$v = v_0 + at; \quad s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Keď $t=2$ min, potom $v=0$, a teda

$$a=-\frac{v_0}{t}=-\frac{72\ \mathrm{km.h^{-1}}}{2\ \mathrm{min}}=-\frac{1}{6}\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Počas brzdenia až do zastavenia prejde vlak dráhu

$$s=72\ \mathrm{km.h^{-1}}.2\ \mathrm{min}-\frac{1}{2}\frac{1}{6}\ \mathrm{m.s^{-2}}.2^2\ \mathrm{min}^2=1200\ \mathrm{m}=1{,}2\ \mathrm{km}.$$

Brzdiť treba začať vo vzdialenosti 1,2 km od stanice.

5. Električka sa dáva do pohybu so zrýchlením $a=0{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Za aký čas prejde prvý meter svojej dráhy? Za aký čas prejde desiaty meter svojej dráhy a aká je jej rýchlosť na konci desiateho metra dráhy?

Riešenie:

Pre rýchlosť a dráhu, ktorú električka prejde, platia vzťahy

$$v=at;\quad s=\frac{1}{2}at^2$$

Pre čas, za ktorý električka prejde prvý meter svojej dráhy, zrejme platí:

$$t_1=\sqrt{\frac{2s_1}{a}}=\sqrt{\frac{2\ \mathrm{m}}{0{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}}}=2{,}58\ \mathrm{s}$$

Čas t^*, za ktorý električka prejde desiaty meter svojej dráhy, určíme zo vzťahov

$$s_9=\frac{1}{2}at_9^2;\quad s_{10}=\frac{1}{2}at_{10}^2$$

$$t^*=t_{10}-t_9=\sqrt{\frac{2s_{10}}{a}}-\sqrt{\frac{2s_9}{a}}=\sqrt{\frac{20\ \mathrm{m}}{0{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}}}-\sqrt{\frac{18\ \mathrm{m}}{0{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}}}=$$

$$=(8{,}15-7{,}75)\ \mathrm{s}=0{,}4\ \mathrm{s}$$

Na konci 10. metra svojej dráhy má električka rýchlosť

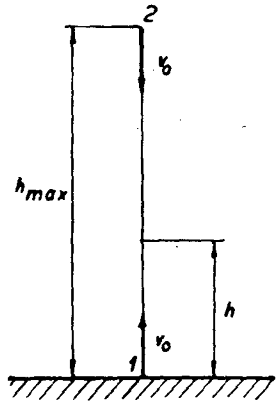
$$v_{10}=at_{10}=0{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}.8{,}15\ \mathrm{s}=2{,}45\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

6. Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor rýchlosťou $v_0=4{,}9\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Súčasne z maximálnej výšky, ktorú toto teleso dosiahne, je vrhnuté zvisle nadol druhé teleso tou istou začiatočnou rýchlosťou v_0. Treba určiť čas t^*, v ktorom sa obidve telesá stretnú, vzdialenosť h od zemského povrchu, v ktorej sa stretnú, a rýchlosti obidvoch telies v_1^* a v_2^* v okamihu stretnutia. Odpor vzduchu zanedbajte!

Riešenie:

Pre teleso *1* (*obr. 3*) vrhnuté nahor platia vzťahy

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2; \qquad v_1 = v_0 - g t$$



Obr. 3

Maximálnu výšku dosiahne prvé teleso v čase t_m, pre ktorý $v_1 = 0$, t. j. $t_m = v_0/g$. Maximálna výška, ktorú dosiahne prvé teleso, je:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$$

Pre teleso *2*, vrhnuté zvisle nadol, platia vzťahy

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2; \qquad v_2 = v_0 + g t$$

V okamihu stretnutia

$$s_1 + s_2 = h_{max}, \quad \text{t. j.} \quad v_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} + v_0 t^* + \frac{1}{2} g t^{*2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

takže pre čas t^*, v ktorom sa telesá stretnú, dostaneme:

$$t^* = \frac{v_0}{4g} = \frac{4{,}9 \text{ m.s}^{-1}}{4.9{,}81 \text{ m.s}^{-2}} = 0{,}125 \text{ s}$$

Pre vzdialenosť h od zemského povrchu, v ktorej sa telesá stretnú, a pre rýchlosti v_1^* a v_2^* v okamihu stretnutia dosadením hodnoty t^* do príslušných vzťahov dostaneme:

$$h = \frac{v_0^2}{4g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{16 g^2} = \frac{7 v_0^2}{32 g} = \frac{7.4{,}9^2 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}}{32.9{,}81 \text{ m.s}^{-2}} = 0{,}53 \text{ m}$$

$$v_1^* = v_0 - \frac{v_0}{4} = \frac{3 v_0}{4} = 3{,}67 \text{ m.s}^{-1}; \quad v_2^* = v_0 + \frac{v_0}{4} = \frac{5 v_0}{4} = 6{,}12 \text{ m.s}^{-1}$$

7. Teleso voľne padá vo vzduchoprázdnom priestore z výšky h. Rozdeľte túto výšku na n častí tak, aby čas pádu telesa v každej časti bol rovnaký, keď $h = 245$ m a $n = 5$.

Riešenie:

Položme $h = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Ak označíme čas pádu, rovnaký pre všetky časti, znakom t_0, zrejme bude platiť:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2; \quad x_1 + x_2 = \frac{1}{2} g (2t_0)^2; \ \dots$$

$$h = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{2} g (n t_0)^2$$

Pre t_0 potom platí:

$$t_0^2 = \frac{2h}{g} \frac{1}{n^2}$$

takže

$$x_1 = \frac{1}{2} g t_0^2 = \frac{h}{n^2}; \quad x_2 = \frac{1}{2} g (2t_0)^2 - x_1 = h\left(\frac{2}{n}\right)^2 - h\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{3h}{n^2}$$

$$x_n = \frac{2n-1}{n^2} h$$

Pre $h = 245$ a $n = 5$ dostaneme:

$$x_1 = \frac{245 \text{ m}}{25} = 9{,}8 \text{ m}; \quad x_2 = \frac{3\,.\,245 \text{ m}}{25} = 29{,}4 \text{ m}$$

$$x_3 = 49{,}0 \text{ m}; \quad x_4 = 68{,}6 \text{ m}; \quad x_5 = 88{,}2 \text{ m}$$

8. Hmotný bod koná priamočiary pohyb tak, že jeho zrýchlenie s časom rovnomerne rastie a za prvých 10 s pohybu narastie z nulovej hodnoty na 5 m$\,.\,$s^{-2}. Aká je rýchlosť pohybu hmotného bodu v čase $t = 10$ s a akú dráhu hmotný bod za tento čas vykonal, keď v čase $t = 0$ bol v pokoji?

Riešenie:

Pre závislosť zrýchlenia od času možno písať

$$a = kt, \quad \text{kde } k = \frac{a_{10}}{t_{10}} = \frac{5 \text{ m}\,.\,\text{s}^{-2}}{10 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ m}\,.\,\text{s}^{-3}$$

Pre rýchlosť a dráhu pohybu potom dostávame

$$v = \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,kt^2$$

$$v_{10} = \frac{1}{2}\,.\,0{,}5\ \mathrm{m\,.\,s^{-3}}\,.\,10^2\ \mathrm{s^2} = 25\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

$$s = \int v\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\,kt^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\,kt^3$$

$$s_{10} = \frac{1}{6}\cdot 0{,}5\ \mathrm{m\,.\,s^{-3}}\,.\,10^3\ \mathrm{s^3} = 83{,}33\ \mathrm{m}$$

9. Cyklista sa pohybuje smerom do kopca konštantnou rýchlosťou $v_1 = 10\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$. Keď dosiahne vrchol kopca, obráti sa a absolvuje tú istú trať z kopca dolu rýchlosťou $v_2 = 40\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$. Aká je priemerná rýchlosť pohybu cyklistu?

Riešenie:

Ak označíme dĺžku dráhy, po ktorej sa cyklista pohyboval smerom nahor, prípadne nadol, symbolom s, tak celkove vykonal dráhu $2s$. Ak ďalej čas pohybu cyklistu do kopca označíme symbolom t_1 a čas pohybu cyklistu z kopca symbolom t_2, tak pre čas t, za ktorý trval celý pohyb cyklistu, zrejme platí $t = t_1 + t_2$. Priemerná rýchlosť cyklistu potom bude

$$v_p = \frac{2s}{t} = \frac{2s}{t_1 + t_2} \qquad (1)$$

Platí však

$$s = v_1 t_1; \quad s = v_2 t_2$$

takže

$$t_1 = \frac{s}{v_1}; \quad t_2 = \frac{s}{v_2}$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostávame

$$v_p = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2\,.\,10\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}\,.\,40\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}}{10\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}} + 40\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}} = 16\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$$

10. Delová guľa opúšťa hlaveň dela rýchlosťou $v_0 = 1000\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$ pod výškovým uhlom $\alpha_0 = 55°$. Treba určiť teoretickú dĺžku dostrelu a teoretickú maximálnu výšku, ktorú by guľa dosiahla, keby odpor vzduchu neexistoval.

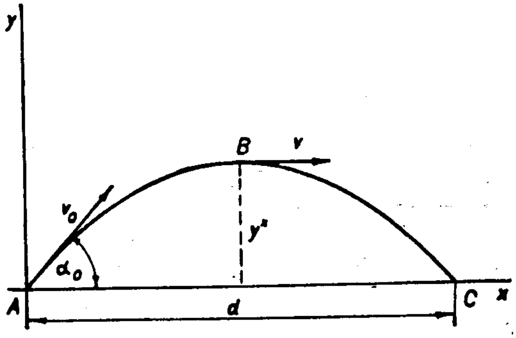
Riešenie:

Pre súradnice určitého bodu delovej gule platia, ako pri šikmom vrhu, vzťahy

$$x = v_0 t \cos \alpha_0; \quad y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

V mieste B *(obr. 4)* je súradnica rýchlosti v_y nulová, takže

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha_0 - gt = 0$$



Obr. 4

Pre čas t, v ktorom guľa dosiahne miesto B, platí:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

takže

$$y^* = v_0 \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} = 34{,}1 \text{ km}$$

čo predstavuje teoreticky maximálnu výšku, ktorú guľa dosiahne.

V mieste C sa $y = 0$. Toto miesto dosiahne delová guľa v čase, pre ktorý platí

$$v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad (1)$$

$$t = \frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

Druhý koreň kvadratickej rovnice (1) $t = 0$ platí pre miesto A, kde sa tiež $y = 0$.

Pre dĺžku dostrelu d potom dostaneme:

$$d = v_0 \frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g} \cos \alpha_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} = 95{,}7 \text{ km}$$

11. Objekt A v priamej vzdušnej vzdialenosti d pozorujeme pod zorným uhlom $\varphi = 60°$. Aký má byť výškový uhol výstrelu α pri začiatočnej rýchlosti strely v_0, aby sme objekt zasiahli, keď začne padať súčasne s výstrelom? Odpor vzduchu zanedbajte!

Riešenie:

Úlohu ľahko vyriešime, keď si uvedomíme, že v okamihu zásahu musia byť súradnice strely a objektu rovnaké *(obr. 5)*. Pre súradnice strely platia vzťahy

$$x = v_0 t \cos\alpha; \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Súradnice objektu spĺňajú zase tieto vzťahy:

$$x' = d \cos\varphi; \quad y' = d \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

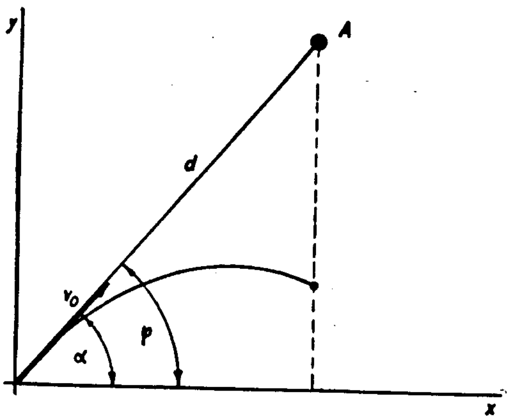
V okamihu zásahu musí platiť:

$$v_0 t \cos\alpha = d \cos\varphi; \quad v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = d \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

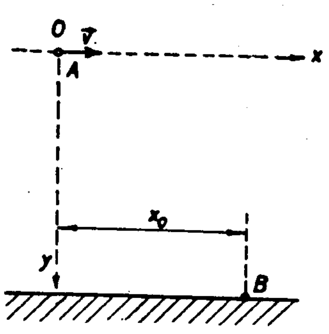
Delením druhej rovnice prvou dostaneme:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi, \quad \text{čiže} \quad \alpha = \varphi = 60°$$

Výškový uhol výstrelu má teda byť tiež 60°.



Obr. 5



Obr. 6

12. Lietadlo A letí vo výške $h = 4000$ m nad zemou rýchlosťou $v = 500$ km.h^{-1}. V akej vodorovnej vzdialenosti x_0 *(obr. 6)* od miesta B treba voľne pustiť z lietadla ľubovoľné teleso, aby dopadlo na miesto B? Odpor vzduchu zanedbajte!

Riešenie:

Teleso voľne pustené z letiaceho lietadla bude vzhľadom na zemský povrch konať pohyb typu vodorovného vrhu s takou začiatočnou rýchlosťou, akú malo lietadlo v okamihu vypustenia telesa. Pre polohu telesa v ľubovoľnom okamihu bude potom platiť:

$$x = vt\,; \quad y = \frac{1}{2}\,gt^2$$

Podmienku, aby teleso dopadlo na miesto B, možno vyjadriť rovnicami

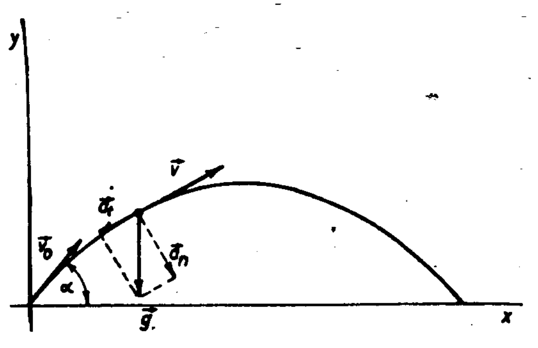
$$x_0 = vt_0\,; \quad h = \frac{1}{2}\,gt_0^2$$

takže pre hľadané x_0 dostávame:

$$x_0 = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{5.10^5\ \text{m}}{3{,}6.10^3\ \text{s}}\sqrt{\frac{8000\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m.s}^{-2}}} = 3958\ \text{m}$$

13. Hmotný bod vrhnutý začiatočnou rýchlosťou v_0 pod výškovým uhlom α vzhľadom na vodorovný zemský povrch koná vo vzduchoprázdnom priestore pohyb po parabole *(obr. 7)*, ktorej parametrické vyjadrenie je dané rovnicami

$$x = v_0 t \cos\alpha\,; \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}\,gt^2$$



Obr. 7

Treba určiť rýchlosť, ako aj tangenciálne a normálové zrýchlenie, ktoré má hmotný bod v ľubovoľnom mieste dráhy.

Riešenie:

Pre súradnice a hodnotu rýchlosti platia vzťahy

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha\,; \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2-2g\left(v_0 t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2\right)}=\sqrt{v_0^2-2gy}$$

So súradnicovými osami zviera rýchlosť uhly, pre ktoré platí:

$$\cos(v,x)=\frac{v_x}{\sqrt{v_0^2-2gy}}=\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2-2gy}}$$

$$\cos(v,y)=\frac{v_y}{\sqrt{v_0^2-2gy}}=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{\sqrt{v_0^2-2gy}}$$

Pre tangenciálne a normálové zrýchlenie dostaneme:

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{v_0^2-2gy}}=\frac{g(v_0\sin\alpha-gt)}{v}$$

$$a_n^2=a^2-a_t^2=g^2-\frac{g^2(v_0\sin\alpha-gt)^2}{v^2}=g^2\left(1-\frac{v_y^2}{v^2}\right)=$$

$$=\frac{g^2}{v^2}(v^2-v_y^2)=\frac{g^2}{v^2}v_x^2=\frac{g^2v_0^2\cos^2\alpha}{v^2}$$

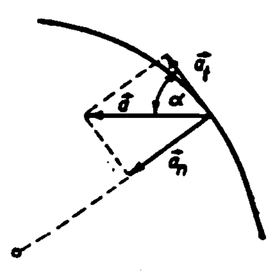
$$a_n=\frac{gv_0\cos\alpha}{v}$$

14. Teleso sa začína otáčať okolo pevnej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon=0{,}04\ \mathrm{s}^{-2}$. V akom čase od začiatku otáčania bude celkové zrýchlenie ľubovoľného bodu telesa zvierať uhol $\alpha=76°$ s rýchlosťou toho istého bodu?

Riešenie:

Pre uhol, ktorý zviera celkové zrýchlenie určitého bodu otáčajúceho sa telesa so smerom rýchlosti *(obr. 8)*, platí:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a_n}{a_t}=\frac{R\omega^2}{R\varepsilon}=\frac{\omega^2}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2t^2}{\varepsilon}=\varepsilon t^2$$

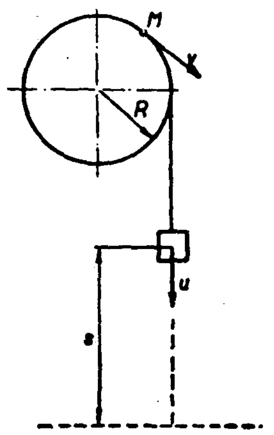


Obr. 8

takže pre čas t^*, v ktorom je splnená uvedená podmienka, vyplýva:

$$t^* = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} 76°}{0{,}04\ \mathrm{s}^{-2}}} = \sqrt{\frac{4{,}01}{0{,}04}}\ \mathrm{s} = 10\ \mathrm{s}$$

15. Na obvode kladky s polomerom R, otáčajúcej sa okolo vodorovnej osi, je položené lanko, na ktorom je zavesené závažie *(obr. 9)*. Pohyb závažia je určený



Obr. 9

rovnicou $s = \frac{1}{2} at^2$. Nájdite časovú závislosť zrýchlenia bodu M, ležiaceho na obvode kladky!

Riešenie:

Hodnota rýchlosti závažia je daná vzťahom $u = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at$. Rýchlosť v bodu M má tiež hodnotu $v = at$. Pre tangenciálne a normálové zrýchlenie bodu M potom platí:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\,; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R}$$

Hodnota celkového zrýchlenia bodu M sa potom mení s časom podľa vzťahu

$$a^* = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^4t^4}{R^2}} = \frac{a}{R}\sqrt{R^2 + a^2t^4}$$

16. Vlak sa pohybuje rovnomerne spomalene po dráhe tvaru kružnice s polomerom $R = 800$ m dĺžky $s = 800$ m. Určte hodnotu celkového zrýchlenia ľubovoľného bodu vlaku na začiatku a na konci zakrivenej časti trate, ako aj čas, za ktorý prejde vlak túto časť trate, keď rýchlosť vlaku na začiatku zakrivenej časti trate $v_0 = 54\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a na konci tohto úseku trate $v = 18\ \mathrm{km.h^{-1}}$!

Riešenie:

Pre pohyb ľubovoľného bodu vlaku platia vzťahy

$$v = v_0 + a_t t\,; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

Ak do týchto rovníc dosadíme za v, v_0, s v úlohe dané hodnoty, môžeme z nich vypočítať čas t^*, za ktorý prejde vlak zakrivenú časť trate, ako aj tangenciálne zrýchlenie a_t. Totiž

$$\frac{v - v_0}{t^*} = a_t\,; \quad s = v_0 t^* + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t^*} t^{*2} = \frac{1}{2}(v_0 + v)t^*$$

takže

$$t^* = \frac{2s}{v_0 + v} = \frac{1600\ \mathrm{m}}{\dfrac{72.10^3}{3{,}6.10^3}\ \mathrm{m.s^{-1}}} = 80\ \mathrm{s}$$

$$a_t = \frac{v - v_0}{t^*} = -0{,}125\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

Pre hodnotu celkového zrýchlenia platí vzťah $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$, pričom normálové zrýchlenie a_n možno na začiatku a na konci zakrivenej časti trate určiť zo vzťahov $a_{n_0} = \dfrac{v_0^2}{R}$, resp. $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Po dosadení hodnôt vypočítaných z týchto vzťahov do výrazu pre celkové zrýchlenie dostávame preň na začiatku a na konci zakrivenej časti trate hodnoty

$$a_0 = 0{,}308\ \mathrm{m.s^{-2}}; \quad a = 0{,}129\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

17. Koleso sa otáča frekvenciou $f = 25\ \mathrm{s^{-1}}$. Brzdením možno dosiahnuť, že jeho otáčanie bude rovnomerne spomalené a koleso sa zastaví po čase $t_0 = 30$ s od začiatku brzdenia. Vypočítajte uhlové zrýchlenie ε a počet otáčok, ktoré koleso vykoná od začiatku brzdenia až do zastavenia!

Riešenie:

Pre okamžitú hodnotu uhlovej rýchlosti platí vzťah

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

kde $\omega_0 = 2\pi f = 50\pi\ \mathrm{s^{-1}}$. V čase $t = t_0$ sa zrejme $\omega = 0$, takže

$$\omega_0 + \varepsilon t_0 = 0$$

a teda

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{50}{30}\pi\ \mathrm{s}^{-2} = -5{,}24\ \mathrm{s}^{-2}$$

Polohový vektor ľubovoľného bodu kolesa vzhľadom na stred opíše za čas t_0 uhol

$$\alpha_0 = \omega_0 t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon t_0^2 = 1500\pi - \frac{5}{6}\pi\,.\,900 = 750\pi$$

Počet otáčok za čas t_0

$$N = \frac{\alpha_0}{2\pi} = \frac{750\pi}{2\pi} = 375$$

18. Preskúmajte pohyb hmotného bodu, ktorého polohový vektor závisí od času podľa vzťahu $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}A\cos bt + \boldsymbol{j}A\sin bt$, kde $A = 6$ m a $b = \frac{\pi}{4}\ \mathrm{s}^{-1}$!

Riešenie:

Pre rýchlosť platí vzťah

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{3\pi}{2}\left(-\boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4}t + \boldsymbol{j}\cos\frac{\pi}{4}t\right)\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

takže absolútna hodnota rýchlosti

$$|\boldsymbol{v}| = v = \sqrt{\frac{9\pi^2}{4}} = \frac{3\pi}{2}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Hodnota rýchlosti je teda konštantná.

Smer rýchlosti v každom okamihu možno určiť napr. jednotkovým vektorom v smere rýchlosti

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = -\boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4}t + \boldsymbol{j}\cos\frac{\pi}{4}t$$

Pre zrýchlenie analogicky dostaneme:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{3\pi^2}{8}\left(-\boldsymbol{i}\cos\frac{\pi}{4}t - \boldsymbol{j}\sin\frac{\pi}{4}t\right)\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$$

Absolútna hodnota celkového zrýchlenia

$$|\boldsymbol{a}| = a = \frac{3\pi^2}{8}\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$$

je teda tiež konštantná. Pre tangenciálne a normálové zrýchlenie ďalej vyplýva:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ m.s}^{-2}; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{3\pi^2}{8} \text{ m.s}^{-2}$$

Polomer krivosti $R = v^2/a_n = 6$ m je teda konštantný. Pretože zložka polohového vektora do osi z je nulová, ide o pohyb v rovine (x, y) so stálym polomerom krivosti $R = 6$ m, čiže je to pohyb po kružnici. Uhol, ktorý zviera polohový vektor $\boldsymbol{r}$ s vektorom rýchlosti $\boldsymbol{v}$, možno určiť zo vzťahu

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}}{rv} = \frac{A(\boldsymbol{i}\cos bt + \boldsymbol{j}\sin bt).Ab(-\boldsymbol{i}\sin bt + \boldsymbol{j}\cos bt)}{A.Ab} =$$

$$= -\cos bt \sin bt + \cos bt \sin bt = 0$$

Teda $\varphi = 90°$, t. j. vektor rýchlosti je stále kolmý na polohový vektor. Pretože $v = \omega R$, pre uhlovú rýchlosť ω dostaneme:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{6} \text{ s}^{-1} = \frac{\pi}{4} \text{ s}^{-1}$$

Pre periódu obiehania T bude platiť:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}\text{ s}^{-1}} = 8 \text{ s}$$

Vektor $\boldsymbol{\omega}$ uhlovej rýchlosti je kolmý na rovinu kružnice, po ktorej sa koná uvedený pohyb bodu. Teda $\boldsymbol{\omega} = \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k} \text{ s}^{-1}$. Pre rýchlosť platí aj vzťah $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, čiže

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k} \times \left(6\boldsymbol{i}\cos\frac{\pi}{4}t + 6\boldsymbol{j}\sin\frac{\pi}{4}t\right) \text{ m.s}^{-1} =$$

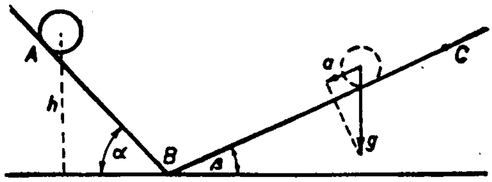
$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{4} \\ 6\cos\frac{\pi}{4}t & 6\sin\frac{\pi}{4}t & 0 \end{vmatrix} \text{ m.s}^{-1} =$$

$$= \left(\boldsymbol{j}\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4}t - \boldsymbol{i}\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}t\right) \text{ m.s}^{-1}$$

Dostali sme zrejme ten istý výraz ako predtým.

19. Určite periódu periodického pohybu telesa, ktoré sa kĺže dolu a hore po dvoch naklonených rovinách zvierajúcich s vodorovnou rovinou uhly α a β

(obr. 10), keď v čase $t = 0$ je voľne pustené z polohy A a keď zanedbávame trenie ako aj straty kinetickej energie telesa pri jeho dopade z jednej roviny na druhú.



Obr. 10

Riešenie:

Predpokladajme, že na začiatku je teleso v mieste A vo výške h nad vodorovnou rovinou, spoločnou obidvom nakloneným rovinám. Do miesta B príde teleso rýchlosťou

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

a ďalej po dráhe BC sa pohybuje rýchlosťou, ktorá sa s časom mení podľa vzťahu

$$v = v_0 - at = v_0 - gt \sin \beta$$

Maximálnu výšku v mieste C dosiahne teleso v čase t_1, pre ktorý platí

$$t = \frac{v_0}{g \sin \beta}$$

Čas, za ktorý sa vráti teleso z bodu C do bodu B, bude tiež t_1, takže celkový čas, za ktorý sa bude pohybovať po úseku BC tam aj späť, bude

$$T_1 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g \sin \beta}$$

Analogicky celkový čas pohybu telesa po úseku BA a späť je

$$T_2 = \frac{2v_0}{g \sin \alpha}$$

takže perióda pohybu telesa po uvedených naklonených rovinách

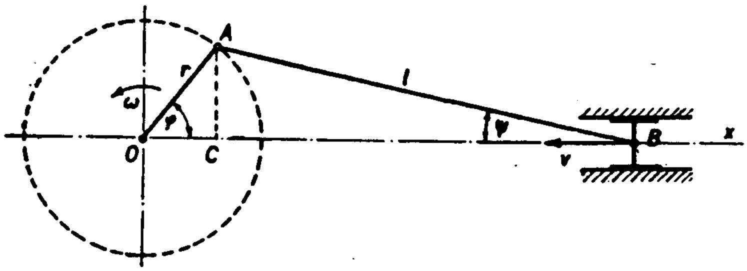
$$T = T_1 + T_2 = \frac{2v_0}{g}\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right)$$

20. Kľuka $OA = r$ *(obr. 11)* sa otáča okolo pevnej osi o konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. V bode A je kľuka skĺbená s ojnicou dĺžky $AB = l$, ktorá uvádza do pohybu křižiak B, pohybujúci sa medzi dvoma rovnobežnými rovinami. Určite rýchlosť a zrýchlenie križiaka B!

Riešenie:

Pre súradnicu x bodu B vzhľadom na bod O *(obr. 11)* platí:

$$x = OC + CB = r \cos \varphi + l \cos \psi$$



Obr. 11

Použitím sínusovej vety možno vyjadriť súvis medzi uhlami φ a ψ v tvare

$$\sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi \tag{1}$$

Pre hodnotu rýchlosti bodu B možno potom písať:

$$v = \frac{dx}{dt} = -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} - l \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \tag{2}$$

Derivovaním rovnice (1) podľa času dostávame:

$$\cos \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \cos \varphi \,.\, \omega, \quad \text{t. j.} \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{r}{l} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \omega$$

kde $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ predstavuje uhlovú rýchlosť otáčania kľuky. Výraz (2) možno potom písať v tvare

$$v = -r\omega\left(\sin \varphi + \sin \psi \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}\right) = -r\omega \frac{\sin (\omega + \psi)}{\cos \psi}$$

Tento vzťah umožňuje určiť rýchlosť bodu B pri ľubovoľných hodnotách uhla φ. Napr. pri $\varphi = 0$ sa $\psi = 0$, a teda $v = 0$. Pri $\varphi = 90°$ platí $\sin (\varphi + \psi) = \sin (90° + \psi) = \cos \psi$, takže $v = -r\omega$.

Pre zrýchlenie bodu B platí:

$$a = \frac{dv}{dt} = -r\omega^2 \left[\cos \varphi - \frac{r}{l} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^3 \psi} - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \psi}\right)\right]$$

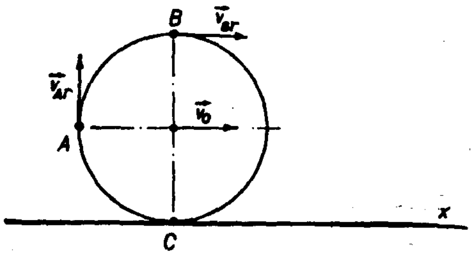
(sin ψ sme vyjadrili podľa vzťahu (1)).

Ak je l dostatočne veľké vzhľadom na r, možno písať $\cos\psi \doteq 1$ a pre rýchlosť a zrýchlenie dostaneme vzťahy

$$v = -r\omega\left(\sin\varphi + \frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right)$$

$$a = -r\omega^2\left(\cos\varphi - \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right)$$

21. Koleso železničného vozňa sa valí bez kĺzania po priamej koľajnici tak, že rýchlosť jeho stredu je v_0. Treba určiť rýchlosti bodu A a B kolesa v okamihu zachytenom na *obr. 12.*



Obr. 12

Riešenie:

Vyjdeme zo vzťahov udávajúcich súvis medzi absolútnou a relatívnou rýchlosťou, keď je absolútna vzťažná sústava pevne spojená s koľajnicou a relatívna vzťažná sústava je pevne spojená s osou kolesa. Pre absolútne rýchlosti bodu A a B, ktoré máme určiť, potom platí:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}'_A = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{Ar}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}'_B = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{Br}$$

Keďže vzhľadom na relatívnu vzťažnú sústavu sa koleso rovnomerne otáča, relatívna rýchlosť ktoréhokoľvek bodu na obvode kolesa má tú istú hodnotu. Teda $v_{Ar} = v_{Br} = v_{Cr}$. Pre bod C sa v danom okamihu absolútna rýchlosť rovná nule, t. j.

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_{Cr} = 0$$

z čoho zrejme vyplýva, že $v_{Cr} = v_{Ar} = v_{Br} = v_0$. Vzhľadom na smer rýchlosti $\boldsymbol{v}_{Ar}$ a $\boldsymbol{v}_{Br}$ možno potom pre hodnotu absolútnej rýchlosti bodu A a B písať:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = v_0\sqrt{2}$$

$$v_B = v_0 + v_0 = 2v_0$$

Smer rýchlosti $\boldsymbol{v}_A$ je daný vzťahom $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0}{v_0} = 1$, t. j. $\alpha = 45°$, kde α je uhol, ktorý zviera rýchlosť $\boldsymbol{v}_A$ s osou x. Rýchlosť $\boldsymbol{v}_B$ je zrejme rovnobežná s osou x.

22. Vodorovná kruhová doska sa otáča okolo zvislej osi tak, že za minútu vykoná 120 otáčok. Pozdĺž jej polomeru sa pohybuje bod vzhľadom na dosku rovnomerne rýchlosťou $v' = 5\ \mathrm{cm\,.\,s^{-1}}$. Treba nájsť hodnotu rýchlosti a zrýchlenia bodu vzhľadom na okolie v čase $t = 20\ \mathrm{s}$, keď v čase $t = 0$ sa pohybujúci bod nachádzal v strede dosky.

Riešenie:

Použijeme opäť vzťahy vyjadrujúce súvis medzi absolútnou a relatívnou rýchlosťou, resp. absolútnym a relatívnym zrýchlením. Pre absolútnu rýchlosť platí:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}'$$

V našom prípade $\mathbf{v}' = \text{konšt}$ a $\mathbf{r}' = \mathbf{v}'t$, kým $\mathbf{v}^* = 0$.
Teda

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'t + \mathbf{v}'$$

Keďže vektory $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'t$ a $\mathbf{v}'$ sú navzájom kolmé, platí:

$$v = \sqrt{v'^2 + \omega^2 v'^2 t^2} = v'\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = 12{,}57\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

pričom ω sme určili zo vzťahu $\omega = 2\pi f = 2\pi \dfrac{120}{60\ \mathrm{s}} = 4\pi\ \mathrm{s^{-1}}$.

Pre absolútne zrýchlenie platí:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \mathbf{a}'$$

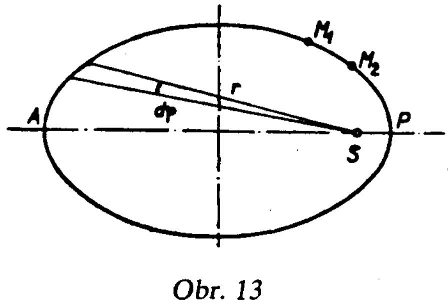
V našom prípade $\mathbf{a}' = 0$, $\mathbf{a}^* = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, takže

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

Keďže vektory $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ a $(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}')$ sú navzájom kolmé, platí:

$$a = \sqrt{(\omega^2 v' t)^2 + 4\omega^2 v'^2} = \omega v'\sqrt{4 + \omega^2 t^2} = 158{,}0\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}$$

23. Dva meteority M_1 a M_2 sa pohybujú po tej istej elipse, v ktorej ohnisku S sa nachádza Slnko *(obr. 13)*. Vzdialenosť medzi meteoritmi je taká malá, že oblúk elipsy M_1M_2 možno považovať za úsečku. Pri prechode meteoritov cez perihélium



Obr. 13

P sa ich vzájomná vzdialenosť rovná d. Aká bude ich vzájomná vzdialenosť pri prechode cez afélium A, ak vieme, že sa meteority pohybujú konštantnou plošnou rýchlosťou a ak poznáme vzdialenosti $SP = R_1$ a $SA = R_2$?

Riešenie:

Pre plošnú rýchlosť platí

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{1}{2} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = k$$

kde k je konštanta. V mieste P, resp. A možno hodnotu plošných rýchlostí jednotlivých meteoritov vyjadriť takto:

$$p_P = \frac{1}{2} R_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_P = k$$

$$p_A = \frac{1}{2} R_2^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_A = k$$

z čoho vyplýva

$$R_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_P = R_2^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_A \,.$$

Táto rovnica však udáva súvis

$$R_1 (a_t)_P = R_2 (a_t)_A$$

kde $(a_t)_P$ a $(a_t)_A$ sú tengenciálne zrýchlenia meteoritov v mieste P a A. Keďže vzájomná vzdialenosť medzi meteoritmi je veľmi malá, možno pre ňu v mieste P a A písať:

$$d_P = \frac{1}{2} (a_t)_P \, \Delta t^2 ; \quad d_A = \frac{1}{2} (a_t)_A \, \Delta t^2$$

takže

$$\frac{d_A}{d_P} = \frac{(a_t)_A}{(a_t)_P} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \text{t. j.} \quad d_A = \frac{R_1}{R_2} d_P = \frac{R_1}{R_2} d$$

keďže $d_P = d$. Situácia je totiž taká, akoby obidva meteority boli uvedené do pohybu po elipse za rovnakých podmienok, pravda, s časovým odstupom Δt.

24. Nájdite rovnice pohybu hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po elipse konštantnou plošnou rýchlosťou hodnoty p_0!

Riešenie:

Rovnicu dráhy pohybu vyjadríme v tvare

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

kde a, b sú polosi elipsy. Pre plošnú rýchlosť platí

$$p_0=|\boldsymbol{p}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{2}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \tag{2}$$

t. j.

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2p_0$$

lebo $v_z=0$. Derivovaním rovnice (1) podľa času dostaneme

$$\frac{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{a^2}+\frac{y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{b^2}=0 \tag{3}$$

Z rovníc (2) a (3) vyplýva

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{2p_0}{b^2}y\,;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2p_0}{a^2}x \tag{4}$$

Derivovaním rovníc (4) podľa času dostaneme rovnice pohybu hmotného bodu v tvare

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}&=-\frac{2p_0}{b^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{4p_0^2}{a^2b^2}x \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{2p_0}{a^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{4p_0^2}{a^2b^2}y \end{aligned} \tag{5}$$

Riešenie diferenciálnych rovníc (5) poskytuje pre časovú závislosť súradníc hmotného bodu vzťahy

$$x=A\cos\left(\frac{2p_0}{ab}t+\alpha_1\right)$$

$$y=B\cos\left(\frac{2p_0}{ab}t+\alpha_2\right)$$

kde A, B, α_1, α_2 sú integračné konštanty, ktorých hodnoty závisia od začiatočných podmienok pohybu.

Úlohy

25. Pohyb bodu je určený rovnicami $x=A_1t^2+B_1$, $y=A_2t^2+B_2$, kde $A_1=$

$=20\ \mathrm{cm.s^{-2}}$, $B_1=5$ cm, $A_2=15\ \mathrm{cm.s^{-2}}$, $B_2=-3$ cm. Nájdite veľkosť aj smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t=2$ s!

[$v=100\ \mathrm{cm.s^{-1}}$; $a=50\ \mathrm{cm.s^{-2}}$; $\cos\alpha=\cos(v, x)=\cos(a, x)=0{,}8$; $\alpha=36{,}8°$]

26. Bod sa pohybuje po osi x tak, že závislosť jeho dráhy od času je daná rovnicou $x=\frac{k}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$, kde k a ω sú konštanty. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie ako funkcie x!

[$v=\omega\sqrt{x^2-k^2}$; $a=\omega^2 x$]

27. Pohyb bodu je daný v polárnych súradniciach rovnicami $r=nt$, $\varphi=bt$, kde n a b sú konštanty. Nájdite rovnicu dráhy pohybu a vyjadrite závislosť rýchlosti a zrýchlenia od času!

[Dráha je Archimedova špirála s rovnicou $r=\frac{n}{b}\varphi$; $v=n\sqrt{1+b^2t^2}$; $a=nb\sqrt{4+b^2t^2}$]

X **28.** Aká je rýchlosť bodu konajúceho rovnomerne zrýchlený pohyb v čase $t=10$ s, keď v čase $t=0$ bola jeho rýchlosť nulová a keď za čas $t_1=25$ s prešiel dráhu 110 m?

[$v_{10}=3{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

29. Auto má v určitom mieste svojej dráhy rýchlosť $v_0=60\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a o 100 m ďalej rýchlosť $v=40\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Aké je zrýchlenie auta, ak predpokladáme, že jeho pohyb je rovnomerne spomalený?

[$a=-0{,}78\ \mathrm{m.s^{-2}}$]

X **30.** Dve telesá sa pohybujú proti sebe so zrýchleniami $a_1=6\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $a_2=4\ \mathrm{m.s^{-2}}$ a začiatočnými rýchlosťami $v_{01}=10\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $v_{02}=15\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Začiatočná vzdialenosť medzi obidvoma telesami $l=750$ m. Nájdite čas, v ktorom sa obidve telesá stretnú!

[$t=10$ s]

X **31.** Dve telesá, ktoré sú vzdialené od seba na začiatku 100 m, sa pohybujú proti sebe: prvé rovnomerne, rýchlosťou $v_1=3\ \mathrm{m.s^{-1}}$, druhé rovnomerne zrýchlene so začiatočnou rýchlosťou $v_0=7\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a zrýchlením $a=4\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Nájdite miesto a čas ich stretnutia!

[$t=5$ s; stretnú sa vo vzdialenosti 15 m od začiatočnej polohy prvého telesa]

32. Strela opúšťa hlaveň dlhú 10 m okamžitou rýchlosťou $v_0=500\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

Aké je zrýchlenie pohybu strely v hlavni a za aký čas prebehne strela hlavňou, ak predpokladáme, že pohyb v hlavni bol rovnomerne zrýchlený?

[$a = 12\,500$ m.s^{-2}; $t = 0{,}04$ s]

33. Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas $t_1 = 4$ s. Ako dlho bude popri ňom prechádzať n-tý vagón (napr. $n = 7$), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé? Považujte pohyb vlaku za priamočiary, rovnomerne zrýchlený.

[$t^* = t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = t_1(\sqrt{7} - \sqrt{6}) = 0{,}8$ s]

34. Akou rýchlosťou sa pohybovalo auto do okamihu, kým vodič začal brzdiť, keď sa počas brzdenia až do zastavenia pohybovalo s konštantným zrýchlením $a = -1{,}2$ m.s^{-2} a prešlo pritom dráhu 135 m?

[$v_0 = 18$ m.s^{-1}]

35. Z výšky 195 m nad zemským povrchom voľne padá určité teleso. V okamihu, keď toto teleso začne padať, vyhodíme zo zemského povrchu zvisle nahor druhé teleso rýchlosťou $v_0 = 65$ m.s^{-1}. Kedy a v akej výške sa tieto telesá stretnú?

[$t = 3$ s; $h = 150{,}9$ m]

36. Z určitej výšky sme súčasne tou istou začiatočnou rýchlosťou v_0 hodili dve telesá; prvé zvisle nahor, druhé zvisle nadol. Ako závisí vzájomná vzdialenosť d týchto dvoch telies od času?

[$d = 2v_0t$]

37. Do priepasti pustíme olovenú guľôčku. Jej dopad na dno priepasti počuť o 10 sekúnd. Aká je hĺbka priepasti, ak uvažujeme rýchlosť zvuku vo vzduchu $v = 340$ m.s^{-1}?

[$h = 385{,}8$ m]

38. Určite začiatočnú rýchlosť v_0, ktorou bola guľa vystrelená smerom zvislým nahor, a výšku h, ktorú guľa pri pohybe dosiahla, keď spadla späť na zem za 20 sekúnd od vystrelenia!

[$v_0 = 98{,}1$ m.s^{-1}; $h = 490{,}5$ m]

39. Voľne padajúce teleso má v mieste A rýchlosť $v_A = 50$ cm.s^{-1}. Nájdite čas, za ktorý teleso prejde vzdialenosť AB, keď v mieste B má rýchlosť $v_B = 250$ cm.s^{-1}! Aká veľká je vzdialenosť AB?

[$t = 0{,}204$ s; $AB = 29{,}8$ cm]

40. Oceľová guľôčka odskakuje od oceľovej podložky v 1-sekundových intervaloch. Ako vysoko sa guľôčka odráža?

[$h = 1{,}23$ m]

41. Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty $a_0 = 10$ m . s^{-2} v čase $t = 0$ na nulovú hodnotu počas 20 s. Aká je rýchlosť hmotného bodu v čase $t = 20$ s a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase $t = 0$ bol v pokoji?

[$v_{20} = 100$ m.s^{-1}; $s_{20} = 1333{,}33$ m]

42. Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie, a to tak, že v čase $t_1 = 100$ s má zrýchlenie hodnotu $a_1 = 0{,}5$ m.s^{-2}. Vypočítajte rýchlosť rušňa v čase t_1, ako aj dráhu, ktorú rušeň za ten čas prešiel!

[$v_1 = 25$ m.s^{-1}; $s_1 = 833{,}3$ m]

43. Zrýchlenie hmotného bodu, ktorý sa pohybuje po priamke, je dané vzťahom $a = k_1 - k_2 v$, kde v je rýchlosť hmotného bodu a k_1, k_2 sú konštanty. Nájdite závislosť zrýchlenia, rýchlosti a dráhy pohybu od času, keď v čase $t = 0$ bol hmotný bod v pokoji!

$$\left[a = k_1 e^{-k_2 t};\ v = \frac{k_1}{k_2}(1 - e^{-k_2 t});\ s = \frac{k_1}{k_2}\left(t + \frac{1}{k_2}e^{-k_2 t} - \frac{1}{k_2}\right)\right]$$

44. Teleso voľne padá z výšky $h = 78{,}5$ m. Za aký čas prejde prvý meter a za aký čas posledný meter svojej dráhy? Akú dráhu vykoná za poslednú sekundu svojho pohybu? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

[$t_1 = 0{,}451$ s; $t^* = 0{,}025$ s; $s = 34{,}36$ m]

45. Aká má byť začiatočná rýchlosť, ktorou vrháme zvisle nadol teleso z výšky $h = 122{,}63$ m, ak za poslednú sekundu svojho pohybu má teleso prejsť polovicu svojej celkovej dráhy? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

[$v_0 = 17{,}17$ m.s^{-1}]

46. Aká je začiatočná rýchlosť, ktorou kameň vrháme v horizontálnom smere, keď po 2 s trvania pohybu má kameň rýchlosť rovnajúcu sa dvojnásobku hodnoty začiatočnej rýchlosti?

[$v_{0x} \doteq 11{,}3$ m.s^{-1}]

47. Aká je priemerná rýchlosť pohybu automobilu v prípade, že:

a) prvú polovicu času svojho pohybu sa pohybuje rýchlosťou $v_1 = 100$ km.h^{-1} a druhú polovicu času sa pohybuje rýchlosťou $v_2 = 60$ km.h^{-1};

b) polovicu z celkovej svojej dráhy prejde rýchlosťou $v_1 = 100\ \mathrm{km.h^{-1}}$ a druhú polovicu dráhy rýchlosťou $v_2 = 60\ \mathrm{km.h^{-1}}$?

[a) $v_p = 80\ \mathrm{km.h^{-1}}$; b) $v_p = 75\ \mathrm{km.h^{-1}}$]

48. Bod sa pohybuje priamočiaro tak, že prejdená dráha závisí od času podľa vzťahu $x = At + Bt^2$, kde $A = 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $B = 6\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Aká je priemerná rýchlosť v_p bodu za čas medzi začiatkom desiatej a koncom dvanástej sekundy a aké sú okamžité rýchlosti v týchto dvoch okamihoch?

[$v_p = 131\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $v_1 = 113\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $v_2 = 149\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

49. Z dela pobrežného delostrelectva, umiestneného vo výške $h = 30$ m nad hladinou mora, je vypálená strela pod uhlom $\alpha = 45°$ vzhľadom na horizontálnu rovinu so začiatočnou rýchlosťou $v_0 = 1000\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Aká je vodorovná odľahlosť miesta, v ktorom strela zasiahne cieľ ležiaci na hladine mora, od dela? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

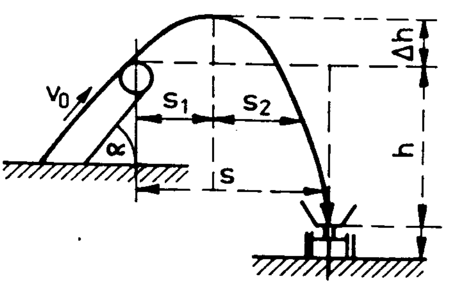
[$s = 102$ km]

50. Objekt v priamej vzdušnej vzdialenosti $d = 6000$ m pozorujeme pod uhlom $\varphi = 30°$. Aká musí byť minimálna začiatočná rýchlosť výstrelu v_0, aby sa objekt (nehybný) dal ešte zasiahnuť? Aký je príslušný výškový uhol výstrelu α?

[$v_0 = 300\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $\alpha = 60°$]

51. Vypočítajte vzdialenosť s, do ktorej treba umiestniť vozík, aby materiál dopravovaný dopravným pásom dopadol do stredu vozíka! Sklon dopravníka je $\alpha = 20°$, rýchlosť prepravy $v_0 = 2{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a výškový rozdiel $h = 4$ m *(obr. 14).*

[$s = 2{,}02$ m]



Obr. 14

52. Hmotný bod sa pohybuje rovnomerne po kružnici s polomerom $R = 2$ m uhlovou rýchlosťou $\omega = 10\ \mathrm{s^{-1}}$. Vypočítajte periódu, frekvenciu a dostredivé zrýchlenie tohto pohybu!

[$T = 0{,}63$ s; $f = 1{,}59\ \mathrm{s^{-1}}$; $a_n = 200\ \mathrm{m.s^{-2}}$]

53. Hmotný bod koná pohyb po kružnici s polomerom $R = 20$ cm so stálym uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Vypočítajte hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia na konci 4. sekundy od začiatku pohybu, keď v čase $t = 0$ bol hmotný bod v pokoji!

[$a_t = 40\ cm.s^{-2}$; $a_n = 1280\ cm.s^{-2}$; $a = 1280{,}6\ cm.s^{-2}$]

54. Po opustení stanice rýchlosť vlaku rovnomerne vzrastá a po troch minútach od opustenia stanice dosahuje na dráhe zakrivenej do tvaru kružnice s polomerom $R = 800$ m hodnotu 72 $km.h^{-1}$. Treba určiť hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia po dvoch minútach od okamihu opustenia stanice.

[$a_t = 0{,}111\ m.s^{-2}$; $a_n = 0{,}222\ m.s^{-2}$; $a = 0{,}248\ m.s^{-2}$]

55. Aký je polomer kolesa, ak pri jeho otáčavom pohybe má bod na obvode kolesa 3-krát väčšiu rýchlosť ako bod, ktorý je o 10 cm bližšie k osi otáčania?

[$R = 15$ cm]

56. Koleso sa z pokojového stavu dáva do otáčavého pohybu so stálym uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Koľkokrát sa koleso otočí za prvých 15 sekúnd svojho otáčania?

[$N = 35{,}8$]

57. Koleso sa začína z pokojového stavu roztáčať rovnomerne zrýchlene tak, že za prvých 5 sekúnd vykoná 12,5 otáčok. Aká je hodnota jeho uhlovej rýchlosti na konci piatej sekundy?

[$\omega = 10\pi\ s^{-1}$]

58. Remeňom sa prenáša otáčavý pohyb z kolesa A s priemerom $d_1 = 50$ cm, konajúceho 30 otáčok za minútu, na koleso B s priemerom $d_2 = 25$ cm. Koľko otáčok za minútu urobí koleso B?

[$N = 60$]

59. V rieke širokej 300 m tečie voda rýchlosťou 1,2 $m.s^{-1}$. Loď sa pohybuje vzhľadom na vodu rýchlosťou 5 $m.s^{-1}$. V akom smere sa má pohybovať loď, keď sa má dostať na druhý breh za najkratší čas, a aký je tento čas?

[Smer pohybu lode má byť kolmý na smer toku rieky; $t = 60$ s]

60. Vlak sa pohybuje rýchlosťou 60 $km.h^{-1}$. Dažďové kvapky padajúce za bezvetria zvisle (rovnomerným pohybom v dôsledku pôsobenia odporu vzduchu) zanechávajú na oknách vlaku stopy, odklonené od zvislého smeru o 30°. Akou rýchlosťou padajú kvapky?

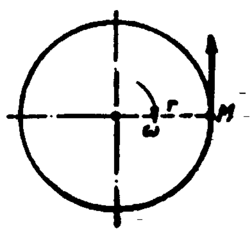
$[v = 29\ \mathrm{m.s^{-1}}]$

61. Bod M sa pohybuje z vrcholu kužeľa rovnomerne rýchlosťou c po jeho povrchovej priamke. Kužeľ sa otáča okolo osi stálou uhlovou rýchlosťou ω. Vypočítajte absolútne zrýchlenie bodu M v čase t od začiatku pohybu, keď uhol medzi povrchovou priamkou a osou kužeľa je α!

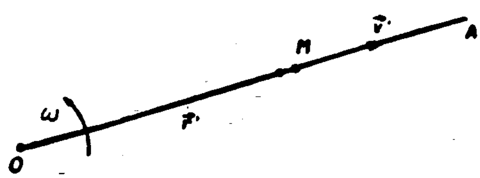
$[a = \omega c \sin \alpha \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}]$

62. Koleso s polomerom r sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou okolo osi kolmej na rovinu kolesa a prechádzajúcej jeho stredom v smere pohybu hodinových ručičiek tak, že vykoná f_1 otáčok za minútu. Súčasne sa bod M *(obr. 15)* pohybuje rovnomerne po obvode kolesa v opačnom smere tak, že vykoná za minútu f_2 obehov po obvode kolesa. Určite absolútne zrýchlenie bodu M!

$$\left[a = \frac{\pi^2}{900} r(f_1 - f_2)^2\right]$$



Obr. 15



Obr. 16

63. Tyč OA sa otáča okolo osi kolmej na tyč a prechádzajúcej bodom O tyče konštantnou uhlovou rýchlosťou ω. Bod M *(obr. 16)* sa pohybuje v smere tejto tyče konštantnou relatívnou rýchlosťou v'. Vypočítajte absolútne zrýchlenie bodu M!

$[a = \omega \sqrt{r'^2 \omega^2 + 4v'^2}]$

2 DYNAMICKÝ ÚČINOK SÍL GRAVITAČNÉ POLE

Úvod

a) Materiálne objekty na seba pôsobia rozličným spôsobom. Ich vzájomnú interakciu kvantitatívne hodnotíme fyzikálnou veličinou nazvanou *sila*. Pri interakcii makroskopických objektov sa stretávame s *gravitačnými* a *elektromagnetickými silami*. Vzájomná interakcia sa pri látkových objektoch veľmi často prejaví zmenou mechanického pohybového stavu telesa, vtedy hovoríme o *dynamickom účinku* pôsobiacej sily. Riadi sa — v rámci klasickej fyziky — tromi základnými zákonmi — *Newtonovými pohybovými zákonmi*.

Prvý Newtonov pohybový zákon (princíp zotrvačnosti): Teleso, ktoré je v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, zotrváva vo svojom pohybovom stave, kým nie je prinútené vplyvom nejakých interakcií (síl) svoj pohybový stav zmeniť.

Pohybový stav hmotného bodu, konajúceho mechanický pohyb, hodnotíme veličinou nazvanou *hybnosť hmotného bodu*. Definovaná je vzťahom

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{1}$$

kde m je hmotnosť a $\mathbf{v}$ rýchlosť hmotného bodu.

Druhý Newtonov pohybový zákon (princíp sily): Sila pôsobiaca na hmotný bod sa rovná časovej zmene hybnosti hmotného bodu, ktorú vyvolala. Matematicky tento zákon vyjadruje rovnica

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) \tag{2}$$

V špeciálnom prípade, keď $m = \text{konšt}$, čo je v klasickej fyzike bežné, možno rovnicu (2) upraviť na tvar

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{v}) = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\mathbf{a} \tag{3}$$

V takomto prípade sa sila pôsobiaca na hmotný bod rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia, ktoré hmotnému bodu udeľuje.

Špeciálnym prípadom sily je tiaž telesa $\mathbf{G}$. Platí pre ňu vzťah $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, kde $\mathbf{g}$ je zrýchlenie voľného pádu.

Tretí pohybový zákon (princíp akcie a reakcie): Sily, ktorými dve telesá navzájom na seba pôsobia, sú rovnako veľké, ale opačného smeru.

b) Ak na hmotný bod pôsobí viac síl $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, ich účinok na hmotný bod je taký istý, akoby na hmotný bod pôsobila jediná sila (výslednica) $\mathbf{F}_r$, daná súčtom pôsobiacich síl ako vektorov, t. j. $\mathbf{F}_r = \sum_i \mathbf{F}_i$.

Ak $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$, hovoríme, že hmotný bod je v rovnováhe.

c) Newtonove pohybové zákony platia len v *inerciálnych* vzťažných sústavách. Takou je napr. sústava viazaná na stálice, ako aj každá iná sústava, ktorá vzhľadom na sústavu viazanú na stálice koná rovnomerný priamočiary pohyb.

Ak vzťahujeme pohyb hmotného bodu na *neinerciálnu* vzťažnú sústavu, potom okrem síl, s ktorými sa stretávame v inerciálnych sústavách a ktorými hodnotíme vzájomné pôsobenie telies, treba brať do úvahy aj *zotrvačné sily* a namiesto rovnice (3) treba potom písať:

$$\boldsymbol{ma} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_g \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{F}_g$ je výslednica zotrvačných síl. Ak ide o takú neinerciálnu sústavu, ktorá vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu koná rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb so zrýchlením $\boldsymbol{a}^*$, tak sa $\boldsymbol{F}_g = -m\boldsymbol{a}^*$. V prípade neinerciálnej sústavy, ktorá sa vzhľadom na nejakú inerciálnu sústavu otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ (za takú možno považovať aj sústavu pevne spojenú s našou Zemou), platí

$$\boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_C$$

kde

$$\boldsymbol{F}_0 = m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}') \tag{5}$$

pričom silu $\boldsymbol{F}_0$ nazývame *odstredivou silou* a silu $\boldsymbol{F}_C$ *Coriolisovou silou*. Význam symbolov vo vzťahoch (5) je tento: Vektor $\boldsymbol{r}'$ je polohový vektor hmotného bodu s hmotnosťou m vzhľadom na vzťažný bod na osi otáčania, vektor $\boldsymbol{v}'$ je relatívna rýchlosť hmotného bodu vzhľadom na uvedenú neinerciálnu sústavu.

d) *Impulz sily* $\boldsymbol{F}$, pôsobiacej na hmotný bod za čas t, je daný výrazom

$$\boldsymbol{I} = \int_0^t \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$$

Pre konštantnú silu sa zrejme $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}t$.

Medzi impulzom sily a hybnosťou hmotného bodu, na ktorý sila pôsobí, platí vzťah

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0$$

t. j. impulz sily pôsobiacej na voľný hmotný bod sa rovná zväčšeniu jeho hybnosti.

e) *Prácu* ako dráhový účinok sily definujeme vo fyzike vzťahom

$$A = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{r}_1$ je polohový vektor začiatočného bodu a $\boldsymbol{r}_2$ je polohový vektor koncového bodu dráhy, po ktorej sa pohybuje pôsobisko sily $\boldsymbol{F}$.

V špeciálnom prípade, keď je sila konštantná, a dráha, po ktorej sa pôsobisko sily pohybuje, je priama a má smer sily, možno prácu vyjadriť jednoducho súčinom hodnoty sily a dĺžky dráhy.

f) *Kinetická energia* pohybujúceho sa hmotného bodu je daná vzťahom $W_k = \frac{1}{2}mv^2$. *Veta o kinetickej energii* hovorí: Práca, ktorú vykoná na určitej dráhe sila pôsobiaca na hmotný bod, sa rovná zvýšeniu kinetickej energie hmotného bodu, t. j.

$$A = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

kde v je rýchlosť hmotného bodu na konci príslušnej dráhy a v_0 rýchlosť na začiatku tejto dráhy.

g) *Výkon* P určuje výraz

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$$

Keď práca rastie rovnomerne s časom, možno výkon vyjadriť vzťahom $P = \frac{A}{t}$, kde A je práca vykonaná za čas t.

h) Podľa všeobecného *gravitačného Newtonovho zákona* pôsobia na seba dva hmotné body s hmotnosťami m_1 a m_2 navzájom silou hodnoty

$$F = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

kde r je vzájomná vzdialenosť hmotných bodov a $\varkappa$ je *všeobecná gravitačná konštanta.*

Sila, ktorou pôsobí hmotný bod s hmotnosťou m_1 na hmotný bod s hmotnosťou m_2, sa dá vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \cdot \boldsymbol{r}_{12}$$

kde $\boldsymbol{r}_{12}$ je polohový vektor druhého hmotného bodu vzhľadom na prvý bod a $r = |\boldsymbol{r}_{12}|$.

i) *Intenzita* $\boldsymbol{K}$ v určitom mieste gravitačného poľa je podiel sily $\boldsymbol{F}$, ktorá v danom mieste poľa pôsobí na ľubovoľný hmotný bod s hmotnosťou m, a hmotnosti m, t. j.

$$\boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$$

V okolí jediného hmotného bodu s hmotnosťou M pre intenzitu gravitačného poľa platí:

$$\boldsymbol{K} = -\varkappa \frac{M}{r^3} \boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom intenzitu poľa hľadáme, vzhľadom na hmotný bod s hmotnosťou M.

V okolí viacerých hmotných bodov s hmotnosťami $M_1, M_2, \ldots, M_n$ počítame intenzitu gravitačného poľa v určitom mieste ako vektorový súčet intenzít poľa v danom mieste od jednotlivých hmotných bodov, t. j.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 + \ldots + \boldsymbol{K}_n = -\varkappa \frac{M_1}{r_1^3} \boldsymbol{r}_1 - \varkappa \frac{M_2}{r_2^3} \boldsymbol{r}_2 - \cdots - \varkappa \frac{M_n}{r_n^3} \boldsymbol{r}_n = -\varkappa \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{r_i^3} \boldsymbol{r}_i$$

Uvedená sumácia sa zmení na integráciu, ak ide o gravitačné pole v okolí telesa, ktoré je spojite vyplnené hmotou.

j) *Potenciálna energia* hmotného bodu s hmotnosťou m v určitom mieste gravitačného poľa vzhľadom na nejaký vzťažný bod je daná prácou, ktorú vykonajú sily poľa pri prechode tohoto hmotného bodu z miesta, v ktorom sa na potenciálnu energiu pýtame, na miesto vzťažné. Podobne je definovaná potenciálna energia hmotného bodu nachádzajúceho sa v inom silovom poli (napr. hmotný bod zavesený na špirále vychýlenej z rovnovážnej polohy podlieha účinku pružných síl špirály).

V gravitačnom poli jediného hmotného bodu s hmotnosťou M je potenciálna energia hmotného bodu s hmotnosťou m daná vzťahom

$$W_p = -\varkappa m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \tag{6}$$

kde r je vzdialenosť miesta, v ktorom hľadáme potenciálnu energiu hmotného bodu m, od hmotného bodu M a r_0 je vzdialenosť vzťažného bodu od hmotného bodu M. Potenciálnu energiu najčastejšie vzťahujeme na vzťažný bod nekonečne vzdialený, takže $r_0 = \infty$ a vzťah (6) bude mať tvar

$$W_p = -\varkappa m M \frac{1}{r} \tag{7}$$

Potenciálna energia hmotného bodu (špirály) pri výchylke x z rovnovážnej polohy má vzhľadom na rovnovážnu polohu hodnotu

$$W_p = A = \int_x^0 -kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} kx^2$$

pričom predpokladáme, že sila, ktorou špirála pôsobí na hmotný bod, je $F = -kx$.

Potenciál v určitom mieste gravitačného poľa je podiel potenciálnej energie W_p ľubovoľného hmotného bodu s hmotnosťou m v danom mieste a hmotnosti m, t. j.

$$\varphi = \frac{W_p}{m}$$

Vzhľadom na vzťah (7) je gravitačný potenciál v okolí jediného hmotného bodu M vzhľadom na nekonečno daný vzťahom

$$\varphi = -\varkappa \frac{M}{r}$$

V okolí viacerých hmotných bodov M_1, M_2, ..., M_n počítame gravitačný potenciál v určitom mieste ako súčet potenciálov od jednotlivých hmotných bodov, t. j.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = -\varkappa \frac{M_1}{r_1} - \varkappa \frac{M_2}{r_2} - \cdots - \varkappa \frac{M_n}{r_n} =$$

$$= -\varkappa \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{r_i}$$

kde r_1, r_2, ..., r_n sú vzdialenosti miesta, v ktorom potenciál hľadáme, od bodov M_1, M_2, ..., M_n. Táto sumácia prechádza na integráciu, ak ide o gravitačné pole v okolí telesa, ktoré je spojite vyplnené hmotou.

k) Medzi intenzitou $\boldsymbol{K}$ a potenciálom φ v ľubovoľnom mieste gravitačného poľa platí vzťah

$$\boldsymbol{K} = -\text{grad}\ \varphi$$

kde

$$\text{grad}\ \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

l) *Zákon o zachovaní mechanickej energie* hovorí, že *pri mechanickom pohybe hmotného bodu je súčet potenciálnej a kinetickej energie konštantný.*

Ak ide o pohyb hmotného bodu v zemskom gravitačnom poli v blízkosti zemského povrchu, potom možno uvedený zákon vyjadriť vzťahom

$$mgh + \frac{1}{2} mv^2 = \text{konšt}$$

kde h je výška hmotného bodu nad vodorovnou rovinou, vzhľadom na ktorú vzťahujeme potenciálnu energiu hmotného bodu.

Platnosť zákona o zachovaní mechanickej energie je obmedzená na prípad, keď pri pohybe ide výlučne o premeny jednej formy mechanickej energie na inú formu mechanickej energie (potenciálnej energie na kinetickú a naopak) a nevznikajú iné formy energie. Všeobecný zákon zachovania a premeny energie hovorí:

V izolovanej sústave je súčet všetkých foriem energie vždy konštantný. Jednotlivé procesy v tejto sústave sú spojené so zmenami jedných foriem energie na ekvivalentné množstvá iných foriem energie tak, že celková energia sústavy sa vždy zachováva.

Pod izolovanou sústavou rozumieme pritom takú sústavu, v ktorej sa všetky procesy realizujú iba vplyvom vnútorných síl.

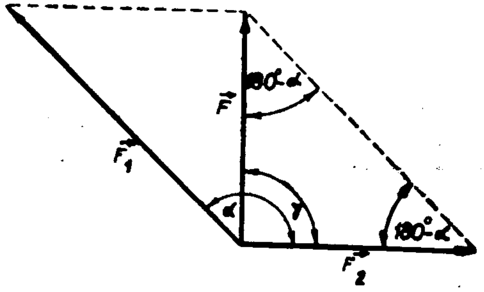
Príklady

64. Nájdite, v akom pomere sú veľkosti síl $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, ak sily zvierajú navzájom uhol $\alpha = 135°$ a ak sa veľkosť ich výslednice rovná veľkosti menšej sily $\boldsymbol{F}_2$!

Riešenie:

Vzhľadom na znenie úlohy a označenie na *obr. 17* možno písať:

$$180° - \alpha = 45°; \quad \gamma = 90°$$



Obr. 17

Teda

$$F_1 : F_2 = \sin 90° : \sin 45°$$

takže

$$\frac{F_1}{F_2} = \sqrt{2}$$

65. Silu $\boldsymbol{R}$ treba rozložiť na dve zložky $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{Q}$ tak, aby boli na seba kolmé a aby platila úmera $P : Q = m : n$. Nájdite veľkosti týchto zložiek!

Riešenie:

Vzhľadom na znenie úlohy možno písať:

$$P^2 + Q^2 = R^2$$

Ale $P = \frac{m}{n} Q$, takže

$$\left(\frac{m^2}{n^2} + 1\right) Q^2 = R^2, \quad \text{t. j.} \quad Q = \frac{nR}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Podobne, keďže $Q = \frac{n}{m} P$, možno písať:

$$\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right) P^2 = R^2, \quad \text{t. j.} \quad P = \frac{mR}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

66. Teleso hmotnosti 5 kg sa pohybuje v zvislom smere nadol so zrýchlením $a = 12\ \text{m.s}^{-2}$. Aká sila okrem jeho tiaže naň pôsobí?

Riešenie:

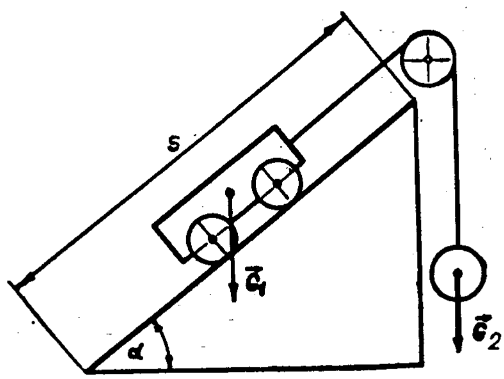
Podľa druhého Newtonovho zákona možno pre celkovú veľkosť sily, ktorá na teleso pôsobí, písať

$$F = ma = 5\ \text{kg}.12\ \text{m.s}^{-2} = 60\ \text{N}$$

Keďže tiaž telesa $G = mg = 5\ \text{kg}.9{,}81\ \text{m.s}^{-2} = 49{,}05\ \text{N}$, potom hodnota sily, ktorá pôsobí na teleso v zvislom smere nadol okrem jeho tiaže, je daná vzťahom

$$F^* = F - G = 60\ \text{N} - 49{,}05\ \text{N} = 10{,}95\ \text{N}$$

67. Za aký čas prejde vozík tiaže $\boldsymbol{G}_1$ dĺžku s naklonenej roviny s uhlom sklonu α, keď je spojený so závažím tiaže $\boldsymbol{G}_2$ spôsobom vyznačeným na *obr. 18* a keď



Obr. 18

vzájomný pomer $\boldsymbol{G}_1$ a $\boldsymbol{G}_2$ je taký, že pohyb prebieha v smere sily $\boldsymbol{G}_2$? Momenty zotrvačnosti kolies zanedbajte!

Riešenie:

Na pohyb vozíka v smere naklonenej roviny má vplyv sila $\boldsymbol{G}_2$ a zložka tiaže vozíka spadajúca do smeru naklonenej roviny, takže výsledná sila v smere pohybu má hodnotu

$$F = G_2 - G_1 \sin\alpha$$

Pre zrýchlenie vozíka potom platí:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G_2 - G_1 \sin\alpha}{\dfrac{G_1 + G_2}{g}} = \frac{(G_2 - G_1 \sin\alpha)g}{G_1 + G_2}$$

keďže výsledná sila vyvoláva pohyb s uvedeným zrýchlením nielen vozíka, ale aj závažia tiaže G_2. Pre dráhu platí vzťah $s=\frac{1}{2}at^2$, takže hľadaný čas je daný vzťahom

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2s(G_1+G_2)}{g(G_2-G_1\sin\alpha)}}$$

68. Teleso hmotnosti $m=10$ kg sa pohybuje účinkom premennej sily $F=p(q-t)$, kde $p=98{,}1$ N.s^{-1} a $q=1$ s. Za koľko sekúnd sa teleso zastaví, ak v čase $t=0$ bola rýchlosť $v_0=0{,}2$ m.s^{-1} a sila mala smer rýchlosti? Akú dráhu prejde teleso od tohoto okamihu do zastavenia?

Riešenie:

Pohybová rovnica telesa má tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=p(q-t)$$

Jej integrovaním dostávame:

$$v=\frac{p}{m}\left(qt-\frac{t^2}{2}\right)+v_0$$

V okamihu, keď sa teleso zastaví, $v=0$, takže

$$\frac{p}{m}\left(qt-\frac{t^2}{2}\right)+v_0=0$$

Po úprave dostávame pre hľadaný čas rovnicu

$$t^2-2qt-\frac{2mv_0}{p}=0$$

Pri uvedených číselných hodnotách jednotlivých veličín poskytuje táto rovnica korene

$$t_{1,2}=\begin{cases}2{,}02\text{ s}\\-0{,}02\text{ s}\end{cases}$$

Záporný koreň nemá fyzikálny zmysel, a preto čas, v ktorom má teleso nulovú rýchlosť, je $t=2{,}02$ s.

Pre dráhu telesa platí:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{p}{m}\left(gt-\frac{t^2}{2}\right)+v_0$$

Integrovaním tejto rovnice dostávame:

$$s = \frac{p}{m}\left(q\,\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) + v_0 t$$

Po dosadení $t = 2{,}02$ s a číselných hodnôt ostatných veličín dostávame pre dráhu, ktorú teleso prejde do zastavenia, hodnotu

$$s = 7{,}07 \text{ m}$$

69. Treba určiť maximálnu rýchlosť, ktorú dosiahne voľne pustené teleso guľovitého tvaru polomeru $r = 8$ cm a hmotnosti $m = 10$ kg pri svojom páde, ak predpokladáme, že pre odpor vzduchu, pôsobiaci proti pohybu telesa, platí vzťah $R = k\sigma v^2$; pritom v je rýchlosť telesa, σ je plošný obsah priemetu telesa na rovinu kolmú na smer pohybu, k je číselný koeficient závislý od tvaru telesa, ktorý má pre guľu hodnotu $k = 0{,}235 \text{ N.s}^2.\text{m}^{-4}$.

Riešenie:

Pre hodnotu výslednej sily, ktorá pôsobí na guľu pri pohybe, platí vzťah

$$F = G - R = G - k\sigma v^2$$

kde G je tiaž gule.

Teleso sa bude pohybovať zo začiatku pohybom zrýchleným, ale len dovtedy, kým bude mať pomerne malú rýchlosť, takže $F > 0$. Maximálnu rýchlosť dosiahne teleso v okamihu, keď $F = 0$ a touto maximálnou rýchlosťou sa bude teleso ďalej pohybovať rovnomerne priamočiaro. Platí teda:

$$G - k\sigma v_{\text{max}}^2 = 0$$

Keďže v zmysle znenia úlohy $\sigma = \pi r^2$, platí

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{G}{k\sigma}} = \sqrt{\frac{10 \text{ kg}.0{,}81 \text{ m.s}^{-2}}{0{,}235 \text{ N.s}^2.\text{m}^{-4}.3{,}14.0{,}08^2 \text{ m}^2}} \doteq 144 \text{ m.s}^{-2}$$

70. V železničnom vozni idúceho vlaku je na vodorovnej podložke voľne uložená guľôčka s hmotnosťou $m = 0{,}02$ kg. Kým sa vlak pohybuje rovnomerne priamočiaro, guľôčka je v pokoji. V určitom okamihu začína vlak brzdiť s konštantným spomalením $a = -2 \text{ m.s}^{-2}$. Vypočítajte silu, ktorá na guľôčku pôsobí a preskúmajte pohyb guľôčky vzhľadom na podložku, na ktorej je uložená. (Trenie zanedbajte!)

Riešenie:

V okamihu, keď vlak začína brzdiť, stáva sa neinerciálnou sústavou, v ktorej okrem tiaže guľôčky $G = mg$ treba uvažovať aj zotrvačnú silu F, ktorá na guľôčku pôsobí. V prípade tejto neinerciálnej sústavy platí $F=-ma$, kde m je hmotnosť guľôčky a a je spomalenie vlaku. Táto sila má vodorovný smer opačný ako spomalenie vlaku a. Výsledná sila, ktorá na guľôčku pôsobí, je potom F, lebo účinok tiaže guľôčky je kompenzovaný reakciou podložky. Teda

$$F=-ma=0{,}02\ \mathrm{kg}.2\ \mathrm{m.s^{-2}}=0{,}04\ \mathrm{N}$$

Guľôčka sa dá do pohybu v smere pohybu vlaku s konštantným zrýchlením $a=2\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Koná teda rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb v smere pohybu vlaku.

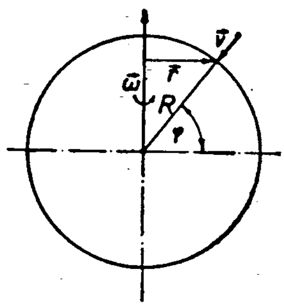
71. Na 45° zemepisnej šírky dopadá na zemský povrch rýchlosťou $v=$ $=100\ \mathrm{m.s^{-1}}$ teleso hmotnosti $m=10$ kg. Aká je hodnota zotrvačnej odstredivej a Coriolisovej sily, ktoré na toto teleso pôsobia, pri dopade na zemský povrch?

Riešenie:

Pre hodnotu zotrvačnej odstredivej a Coriolisovej sily platia vzťahy *(obr. 19)*

$$F_0=mr\omega^2=mR\cos\varphi\,.\,\omega^2$$

$$F_C=2m\,|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}|=2m\omega v\sin(90+\varphi)=2m\omega v\sin\varphi$$



Obr. 19

Keďže

$$\omega=\frac{2\pi}{86\,400\ \mathrm{s}};\quad R\doteq6370\ \mathrm{km}$$

možno písať

$$F_0=mR\cos\varphi\,.\,\omega^2=10\ \mathrm{kg}.6370.10^3\ \mathrm{m}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{4\pi^2}{86\,400^2\ \mathrm{s}^2}=$$

$$=0{,}238\ \mathrm{N}$$

$$F_C=2.10\ \mathrm{kg}\cdot\frac{2\pi}{86\,400\ \mathrm{s}}\cdot10^2\ \mathrm{m.s^{-1}}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=0{,}104\ \mathrm{N}$$

Vidno, že v danom prípade odstredivá sila je o niečo viac ako 2 ‰ a Coriolisova sila asi 1 ‰ tiaže telesa. Pritom treba poznamenať, že túto rýchlosť na zemskom povrchu dosahujú telesá pri voľnom páde z výšky asi 500 m. Z uvedeného je zrejmé, že chyby, ktorých sa dopúšťame, keď pri skúmaní pohybu telies na zemskom povrchu zanedbávame zotrvačné sily, sú vo väčšine prípadov celkom nepatrné.

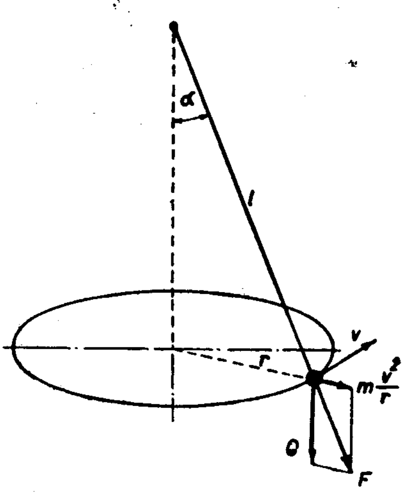
72. Automobil hmotnosti $m = 1000$ kg sa pohybuje po vydutom moste rýchlosťou $v = 36$ km.h^{-1}. Polomer krivosti v strede mosta $r = 50$ m. Akou silou tlačí automobil na most v okamihu prechodu stredom mosta?

Riešenie:

Pri riešení úlohy uvažujme vzťažnú sústavu, ktorá je pevne spojená s autom. Výsledná sila, ktorou auto pôsobí na most, je potom daná rozdielom tiaže auta a zotrvačnej sily, t. j.

$$F = G - F_0 = mg - m\,\frac{v^2}{r} = 9810\ \mathrm{N} - \frac{10^3\ \mathrm{kg}\cdot\left(\dfrac{36.10^3}{3600}\right)^2\ \mathrm{m^2.s^{-2}}}{50\ \mathrm{m}} = 7810\ \mathrm{N}$$

73. Teleso s hmotnosťou $m = 1$ kg (uvažujte ho ako hmotný bod) je zavesené na niti dĺžky $l = 30$ cm, ktorej druhý koniec je upevnený *(obr. 20)*. Hmotný bod sa pohybuje tak, že konštantnou rýchlosťou v opisuje kružnicu vo vodorovnej rovine,



Obr. 20

pričom niť zviera so zvislým smerom uhol $\alpha = 60°$. Nájdite hodnotu rýchlosti v, periódu obiehania hmotného bodu po uvedenej kružnici, ako aj silu, ktorá pri tomto pohybe napína niť!

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy uvažujme vzťažnú sústavu pevne spojenú s hmotným bodom. Z hľadiska tejto vzťažnej sústavy je hmotný bod v pokoji, a to preto, lebo výslednica tiaže hmotného bodu a zotrvačnej odstredivej sily pôsobiacej na hmotný bod spadá do smeru nite a je pevnosťou nite kompenzovaná v účinku. Z *obr. 20* je zrejmé, že platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\dfrac{v^2}{r}}{G} = \frac{mv^2}{Gl\sin\alpha}$$

keďže $r = l\sin\alpha$. Teda

$$v = \sqrt{\frac{Gl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{m}} = \sqrt{gl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha} = 2{,}1\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Pre periódu obiehania hmotného bodu po uvedenej kružnici vyplýva:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l\sin\alpha}{v} = 0{,}78\ \mathrm{s}$$

Pre silu F, ktorá napína niť, z *obr. 20* vyplýva

$$F\cos\alpha = G$$

t. j.

$$F = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{G}{0{,}5} = 19{,}6\ \mathrm{N}$$

74. Teleso hmotnosti m koná rovnomerný priamočiary pohyb rýchlosťou v_0. Treba ho priviesť do pokoja brzdením na dráhe s_0. Brzdiaca sila F postupne klesá lineárne s rýchlosťou, a to tak, že na konci pôsobenia, keď sa už teleso zastavilo, klesla hodnota sily na polovicu svojej pôvodnej hodnoty F_0, ktorou sa vyznačovala na začiatku brzdenia. Určite hodnotu brzdiacej sily na začiatku brzdenia!

Riešenie:

Pre vyjadrenie závislosti $F = F(v)$ si treba uvedomiť, že pri $v = v_0$ sa $F = F_0$ a pri $v = 0$ sa $F = \frac{F_0}{2}$. Týmto podmienkam aj vzhľadom na znenie úlohy vyhovuje vzťah

$$F = \frac{F_0}{2}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right)$$

Keďže rýchlosť v telesa a brzdiaca sila F spadajú do tej istej priamky, ale majú opačný smer, pohybová rovnica telesa bude mať tvar

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{F_0}{2}\left(1+\frac{v}{v_0}\right) \tag{1}$$

Keďže $\mathrm{d}s=v\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v}$, možno rovnicu (1) upraviť na tvar

$$\frac{mv\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=-\frac{F_0}{2}\left(1+\frac{v}{v_0}\right)$$

t. j.

$$-\frac{2m}{F_0}\frac{v\,\mathrm{d}v}{1+\frac{v}{v_0}}=\mathrm{d}s$$

Predcházdajúcu rovnicu integrujeme od začiatku brzdenia až do zastavenia telesa. Dostaneme:

$$\frac{2mv_0}{F_0}\left[v-v_0\ln\left(v+v_0\right)\right]_0^{v_0}=s_0$$

t. j.

$$\frac{2mv_0^2}{F_0}(1-\ln 2)=s_0$$

Pre hľadanú hodnotu F_0 brzdiacej sily na začiatku brzdenia potom dostávame:

$$F_0=\frac{2mv_0^2}{s_0}(1-\ln 2)$$

75. Stála sila F pôsobí na teleso tiaže G. Za aký čas sa pritom zväčší rýchlosť telesa na n-násobok pôvodnej rýchlosti v_0, ktorú malo teleso v okamihu, keď naň sila začala pôsobiť?

Riešenie:

Veta o vzájomnom vzťahu medzi impulzom sily a zmenou hybnosti telesa umožňuje písať

$$Ft=mnv_0-mv_0$$

odkiaľ pre hľadaný čas vyplýva:

$$t=\frac{mv_0(n-1)}{F}=\frac{Gv_0(n-1)}{Fg}$$

76. Aký impulz udelí stena pružnej guli hmotnosti $m = 200$ g, ktorá na ňu narazí v smere zvierajúcom s normálou k stene uhol $\alpha = 60°$, keď rýchlosť gule má hodnotu $v_0 = 20\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

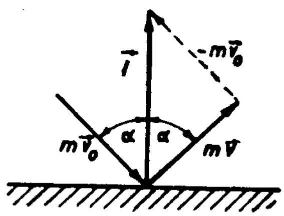
Riešenie:

Impulz sily, ktorou stena pri zrážke pôsobí na guľu, sa rovná zmene hybnosti gule pred a po náraze na stenu:

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0$$

Predpokladajme, že sa guľa odrazí od steny pod tým istým uhlom a s tou istou rýchlosťou, ako dopadla. Potom je z *obr. 21* zrejmé, že pre hľadanú hodnotu hybnosti možno písať:

$$|\boldsymbol{p}| = 2mv\cos\alpha = 2 . 0{,}2\ \mathrm{kg} . 20\ \mathrm{m.s^{-1}} . \cos 60° = 4\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$$



Obr. 21

77. Akú prácu treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o $x_0 = 5$ cm, keď na jej stlačenie o $x_1 = 1$ cm treba silu 30 000 N a keď platí, že sila je priamo úmerná skráteniu pružiny?

Riešenie:

Keď sila a dráha pôsobiska sily majú rovnaký smer, možno pre prácu písať

$$A = \int_0^{x_0} F\,\mathrm{d}x$$

pričom symbolom x sme označili skrátenie pružiny. Avšak

$$F = kx \quad \text{a} \quad k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{30\,000\ \mathrm{N}}{0{,}01\ \mathrm{m}}$$

takže

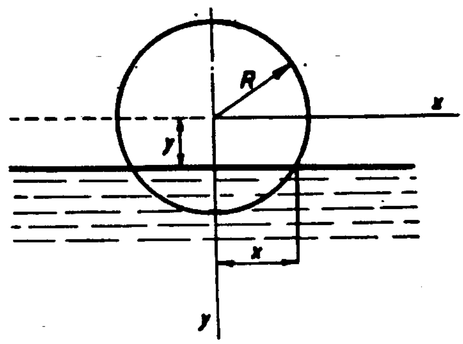
$$A = \int_0^{x_0} kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{kx^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{30\,000\ \mathrm{N} . 0{,}0025\ \mathrm{m}^2}{0{,}01\ \mathrm{m}} = 3750\ \mathrm{J}$$

78. Guľa pláva v kvapaline hustoty ϱ tak, že je do nej ponorená polovicou svojho objemu. Aká práca sa vykoná pri vytiahnutí gule nad hladinu kvapaliny, keď polomer gule je R?

Riešenie:

Vzhľadom na označenie na *obr. 22*, rešpektujúc Archimedov zákon, možno pre hľadanú prácu písať:

$$A=\int_0^R F\,\mathrm{d}y=\int_0^R (G-V\varrho g)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$



Obr. 22

kde V je ponorená časť objemu telesa v kvapaline. Možno ju vypočítať zo vzťahu

$$V=\pi\int_{R-y}^{R} x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_{R-y}^{R}(R^2-y^2)\,\mathrm{d}y=\left[\pi\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\right]_{R-y}^{R}=\pi Ry^2-\frac{1}{3}\pi y^3$$

kde sme na vyjadrenie x^2 použili rovnicu kružnice $x^2+y^2=R^2$. Vzťah (1) možno potom upraviť takto:

$$A=\int_0^R\left[G-\left(\pi Ry^2-\frac{1}{3}\pi y^3\right)\varrho g\right]\mathrm{d}y=\left[Gy-\left(\pi R\frac{y^3}{3}-\frac{1}{12}\pi y^4\right)\varrho g\right]_0^R=$$

$$=GR-\left(\frac{1}{3}\pi R^4-\frac{1}{12}\pi R^4\right)\varrho g=GR-\frac{1}{4}\pi R^4\varrho g$$

Keďže však (vzhľadom na znenie úlohy) $G=\frac{2}{3}\pi R^3\varrho g$, pre hľadanú prácu platí:

$$A=\frac{2}{3}\pi R^3\varrho gR-\frac{1}{4}\pi R^4\varrho g=\frac{5}{12}\pi R^4\varrho g$$

79. Zdvihák výťahu naloženého materiálom celkovej hmotnosti $m=1000$ kg sa dvíha s konštantným zrýchlením $a=2\mathrm{m.s^{-2}}$. Vypočítajte prácu, ktorá sa vykoná za prvých 5 sekúnd zdvihu!

Riešenie:

Sila, ktorá koná prácu, premáha tiaž naloženého výťahu a navyše mu udeľuje ešte zrýchlenie a, takže má hodnotu $F = mg + ma = m(g + a) = 1000\ \text{kg} \,.\, 11{,}81\ \text{m.s}^{-2} = 11\ 810\ \text{N}$.

Pre dráhu, ktorú pôsobisko tejto sily za čas $t = 5$ s vykoná, dostaneme:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\, 2\ \text{m.s}^{-2}.25\ \text{s}^2 = 25\ \text{m}$$

Pre hľadanú prácu potom dostaneme:

$$A = F.s = 11\ 810\ \text{N}.25\ \text{m} = 295{,}25\ \text{kJ}$$

80. Akú ťažnú silu môže teoreticky maximálne vyvinúť rušeň s výkonom $P = 2500$ kW pri pohybe rýchlosťou $v = 60\ \text{km.h}^{-1}$?

Riešenie:

Vzhľadom na definíciu výkonu možno písať:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}.d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}$$

Keďže $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{v}$ majú rovnaký smer, $\boldsymbol{F}.\boldsymbol{v} = Fv$, takže pre hľadanú silu dostaneme:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{2500\ \text{kW}}{\dfrac{60\ 000\ \text{m}}{3600\ \text{s}}} = \frac{2500.10^3\ \text{N.m.s}^{-1}}{16{,}66\ \text{m.s}^{-1}} \doteq 1{,}5.10^5\ \text{N}$$

81. Aký je výkon motora automobilu hmotnosti $m = 750$ kg, keď sa pohybuje po vodorovnej ceste rýchlosťou $v = 60\ \text{km.h}^{-1}$ a keď koeficient trenia $\mu = 0{,}07$?

Riešenie:

Výkon motora možno vyjadriť vzťahom

$$P = F_t v$$

kde F_t je sila, ktorou motor prekonáva trenie vozidla o povrch cesty. Pre hodnotu tejto sily platí

$$F_t = \mu G = \mu mg$$

kde G je tiaž a m hmotnosť automobilu. Pre hľadaný výkon potom dostaneme

$$P = \mu mgv = 0{,}07.750\ \text{kg}.9{,}81\ \text{m.s}^{-2} \cdot \frac{60.10^3\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 8583{,}75\ \text{W} \doteq 8{,}6\ \text{kW}$$

82. Na akej dráhe s zväčší stála sila F, pôsobiaca na teleso hmotnosti m, rýchlosť telesa na n-násobok začiatočnej hodnoty rýchlosti v_0, ktorú teleso malo na začiatku dráhy s?

Riešenie:

Vyjdeme z vety, ktorá hovorí, že práca, ktorú vykoná sila pôsobiaca na hmotný bod na určitej dráhe, sa rovná prírastku kinetickej energie hmotného bodu. Teda

$$Fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mn^2v_0^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_0^2(n^2-1)$$

Pre hľadanú dráhu potom dostaneme:

$$s=\frac{mv_0^2(n^2-1)}{2F}$$

83. Na tyči dĺžky $l=1$ m, zanedbateľnej hmotnosti, je zavesená guľa. Akú minimálnu horizontálnu rýchlosť jej treba udeliť, aby sa vychýlila až do najvyššej polohy? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

Riešenie:

Použijeme zákon o zachovaní mechanickej energie. Potenciálnu energiu vzťahujeme na vodorovnú rovinu, prechádzajúcu začiatočnou polohou gule. V začiatočnej polohe je potom potenciálna energia nulová a celková energia je daná veľkosťou kinetickej energie. Hľadaná rýchlosť v_0 má byť taká, že guľa ešte dosiahne najvyššiu polohu. V tejto polohe bude mať nulovú rýchlosť aj kinetickú energiu a celková energia bude daná hodnotou potenciálnej energie. Možno teda písať:

$$\frac{1}{2}mv_0^2=2mgl$$

a pre hľadanú rýchlosť v_0 vyplýva:

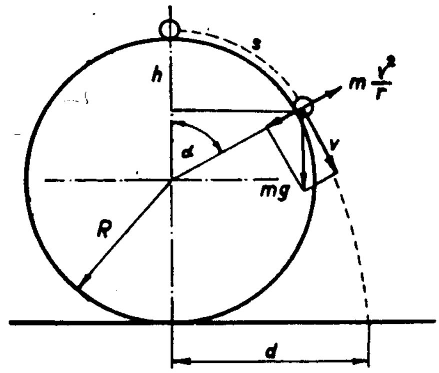
$$v_0=2\sqrt{gl}=2\sqrt{9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}.1\ m}}=6{,}26\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

84. Na vrchole dokonale hladkej gule je hmotný bod v metastabilnej polohe. Keď ho vychýlime z rovnovážnej polohy, bude sa pohybovať najprv po povrchu gule. V akej vzdialenosti od vrcholu gule opustí hmotný bod jej povrch a v akej vzdialenosti od zvislého priemeru gule dopadne na vodorovnú podložku, keď polomer gule $r=1{,}5$ m?

Riešenie:

Pri štúdiu pohybu hmotného bodu po povrchu gule bude výhodné uvažovať vzťažnú sústavu, pevne spojenú s pohybujúcim sa hmotným bodom. Hmotný bod ostáva pri svojom pohybe na povrchu gule dovtedy, kým je zložka tiaže hmotného bodu v smere polomeru spojeného s hmotným bodom väčšia ako zotrvačná odstredivá sila. Pre miesto, v ktorom hmotný bod opúšťa povrch gule, možno vzhľadom na označenie na *obr. 23* písať:

$$mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$



Obr. 23

Keďže $\cos \alpha = \frac{R-h}{R}$, predchádzajúcu rovnicu upravíme na tvar

$$g \frac{R-h}{R} = \frac{v^2}{R}; \quad \text{t. j.} \quad g(R-h) = v^2 \qquad (1)$$

V rovnici (1) máme dve neznáme: h a v. Ďalšiu rovnicu pre tieto dve neznáme nám poskytne zákon o zachovaní mechanickej energie. Po vykonaní dráhy s poklesne potenciálna energia hmotného bodu o mgh a kinetická energia na tej istej dráhe vzrastie o $\frac{1}{2} mv^2$, takže

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2, \quad \text{t. j.} \quad 2gh = v^2 \qquad (2)$$

Z rovníc (1) a (2) vyplýva:

$$g(R-h) = 2gh, \quad \text{t. j.} \quad h = \frac{R}{3} = 0{,}5 \text{ m}$$

Po povrchu gule vykoná hmotný bod dráhu $s = R\alpha$. Keďže $\cos \alpha = \frac{R-h}{R} = \frac{2}{3}$, $\alpha = 42°$ a v oblúkovej miere $\alpha = 0{,}733$. Pre dráhu s potom dostaneme:

$$s = R\alpha = 1{,}5 \text{ m} . 0{,}733 \doteq 1{,}1 \text{ m}$$

Zo vzťahu (2) pre v vyplýva:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 . 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} . 0{,}5 \text{ m}} = 3{,}13 \text{ m.s}^{-1}$$

Čas t, za ktorý hmotný bod dosiahne vodorovnú rovinu, na ktorej guľa stojí, dostaneme zo vzťahu

$$2R - h = vt \sin \alpha + \frac{1}{2} gt^2$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice pre t dostaneme:

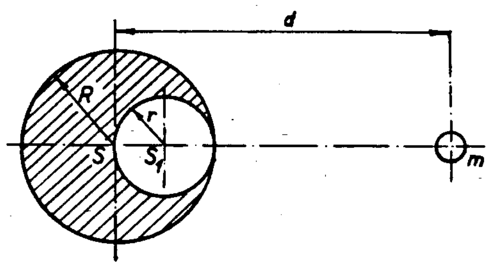
$$t_{1,2} = \begin{cases} 0{,}51 \text{ s} \\ -0{,}99 \text{ s} \end{cases}$$

Záporný koreň zrejme nemá fyzikálny zmysel.
Pre vzdialenosť d platí:

$$d = vt \cos \alpha + R \sin \alpha =$$

$$= 3{,}13 \text{ m.s}^{-1} . 0{,}51 \text{ s}.\frac{2}{3} + 1{,}5 \text{ m}. 0{,}757 = 2{,}20 \text{ m}$$

85. V kovovej guli s polomerom R je vytvorená dutina guľového tvaru s polomerom $r = \dfrac{R}{2}$ spôsobom znázorneným na *obr. 24.* Treba zistiť, akou silou



Obr. 24

bude pôsobiť takto vzniknutý hmotný útvar na guľôčku hmotnosti m nachádzajúcu sa vo vzdialenosti d od stredu pôvodnej kovovej gule, keď hmotnosť pôvodnej kovovej gule bola M.

Riešenie:

Pôvodná kovová guľa hmotnosti M by pôsobila na hmotný bod silou veľkosti

$$F_0 = \varkappa \frac{mM}{d^2}$$

Dá sa totiž dokázať, že gravitačné pole v okolí homogénneho telesa guľovitého tvaru je také isté ako gravitačné pole hmotného bodu s hmotnosťou rovnajúcou sa hmotnosti guľovitého telesa umiestneného v strede gule. Silu F_0 môžeme považovať za súčet hľadanej sily F_x, ktorou pôsobí na hmotný bod m hmotný útvar vzniknutý vyrazením uvedenej dutiny, a sily F_1, ktorou pôsobí časť kovu s hmotnosťou m', uložená v guli so stredom v S_1 a s polomerom $r = \frac{R}{2}$. Teda

$$F_0 = F_x + F_1$$

Pre F_1 podľa gravitačného zákona zrejme platí:

$$F_1 = \varkappa \frac{mm'}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \varkappa \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}$$

Keďže

$$m' = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{8} = \frac{M}{8}$$

pre hľadanú silu F_x vyplýva:

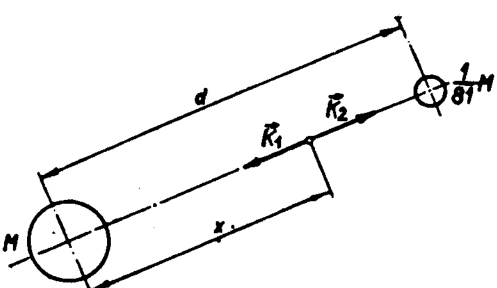
$$F_x = F_0 - F_1 = \varkappa \frac{mM}{d^2} - \varkappa \frac{mM}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} = \varkappa mM \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right]$$

86. V ktorom mieste na priamej spojnici medzi Zemou a Mesiacom sa intenzita spoločného gravitačného poľa rovná nule, keď hmotnosť Mesiaca je 1/81 hmotnosti Zeme?

Riešenie:

Podmienka uvedená v príklade bude vzhľadom na označenie na *obr. 25* splnená, ak

$$\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 = 0, \quad \text{t. j.} \quad |\boldsymbol{K}_1| = |\boldsymbol{K}_2| \tag{1}$$



Obr. 25

Ak označíme vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca d a vzdialenosť miesta, v ktorom je splnená podmienka (1), od stredu Zeme x, tak zrejme platí:

$$\varkappa \frac{M}{x^2} = \varkappa \frac{\frac{1}{81} M}{(d - x)^2}$$

z čoho vyplýva:

$$x = 9(d - x)$$

takže

$$x = \frac{9}{10}\, d = 0{,}9\, d$$

Nulová intenzita spoločného gravitačného poľa Zeme a Mesiaca na spojnici ich stredov je vo vzdialenosti $x = 0{,}9d$ od stredu Zeme.

87. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa hmotnej úsečky dĺžky l a hmotnosti m v mieste P, ležiacom v predĺžení úsečky vo vzdialenosti a od jej konca!

Riešenie:

Príspevok hmotného elementu dm tyče *(obr. 26)* k celkovému potenciálu v mieste P

$$\mathrm{d}\varphi = -\varkappa \frac{\mathrm{d}m}{x+a} = -\varkappa \frac{m}{l} \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$$

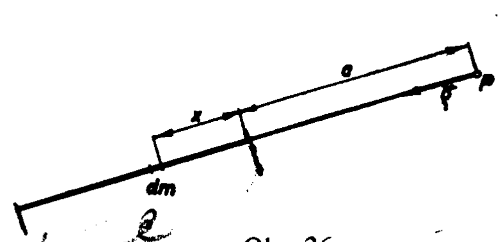
kde $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\,\mathrm{d}x$. Pre potenciál φ integráciou cez celú tyč dostaneme:

$$\varphi = -\varkappa \frac{m}{l} \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = -\varkappa \frac{m}{l} [\ln(x+a)]_0^l = -\varkappa \frac{m}{l} \ln \frac{l+a}{a}$$

Intenzitu gravitačného poľa určíme zo súvisu potenciálu a intenzity, vyjadreného vzťahom $\boldsymbol{K} = -\mathrm{grad}\, \varphi$. V našom prípade možno túto rovnicu písať v tvare

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a} \boldsymbol{\varrho} = -\varkappa \frac{m}{l} \cdot \frac{a}{l+a} \cdot \frac{a-l-a}{a^2} \boldsymbol{\varrho} = \varkappa \frac{m}{a(l+a)} \boldsymbol{\varrho}$$

kde $\boldsymbol{\varrho}$ je jednotkový vektor v smere vyznačenom na *obr. 26.*



Obr. 26

88. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa kruhovej dosky (zanedbateľnej hrúbky) hmotnosti m a polomeru R v bode P na osi kolmej na dosku a prechádzajúcej jej stredom vo vzdialenosti a od stredu dosky.

Riešenie:

Príspevok elementu dm dosky, vybraného v podobe medzikružia šírky dx *(obr. 27)*, k celkovému potenciálu v mieste P je:

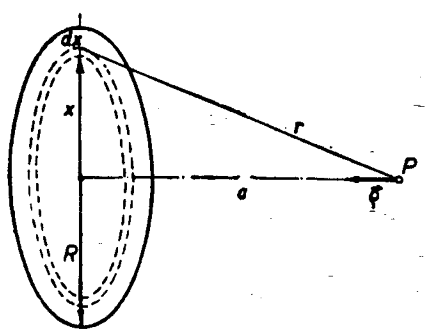
$$d\varphi = -\varkappa \frac{dm}{r} = -\varkappa \frac{\frac{m}{\pi R^2} 2\pi x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Pre celkový potenciál integráciou cez celú dosku dostaneme:

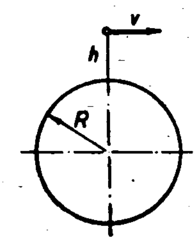
$$\varphi = -\varkappa \frac{2m}{R^2} \int_0^R \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\varkappa \frac{2m}{R^2} [\sqrt{x^2 + a^2}]_0^R = -\varkappa \frac{2m}{R^2} [\sqrt{R^2 + a^2} - a]$$

Pre intenzitu gravitačného poľa v mieste P možno písať:

$$\boldsymbol{K} = -\text{grad}\,\varphi = \frac{d\varphi}{da} \boldsymbol{\varrho} = -\varkappa \frac{2m}{R^2} \left[\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - 1\right] \boldsymbol{\varrho} = \varkappa \frac{2m}{R^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right] \boldsymbol{\varrho}$$



Obr. 27



Obr. 28

89. Akú vodorovnú rýchlosť v treba udeliť nejakému telesu vo výške $h = 500$ km nad zemským povrchom *(obr. 28)*, aby sa pohybovalo ako umelá družica Zeme po kruhovej dráhe, keď zemský polomer má hodnotu $R = 6372$ km?

Riešenie:

Rýchlosť v musí spĺňať podmienku, že dostredivá sila pôsobiaca na teleso konajúce pohyb po kružnici sa rovná gravitačnej sile, ktorou Zem pôsobí na dané teleso v príslušnej výške, t. j.

$$m \frac{v^2}{R + h} = \varkappa \frac{mM}{(R + h)^2} \tag{1}$$

kde $\varkappa$ je gravitačná konštanta a M je hmotnosť Zeme. Medzi gravitačnou silou F_0, ktorá by pôsobila na dané teleso na zemskom povrchu, a gravitačnou silou F, ktorá na to isté teleso pôsobí vo výške h nad zemským povrchom, platí vzťah

$$F = F_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

lebo

$$F = \varkappa \frac{mM}{(R+h)^2}; \quad F_0 = \varkappa \frac{mM}{R^2}$$

Keďže $F_0 = mg$, kde $g = 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}$, zo vzťahu (1) vyplýva:

$$\frac{v^2}{R+h} = g \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

takže pre hľadanú rýchlosť v dostaneme:

$$v = \sqrt{g \frac{R^2}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} = 6372.10^3 \text{ m} \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ m.s}^{-2}}{6872.10^3 \text{ m}}} = 7600 \text{ m.s}^{-1}$$

90. Vypočítajte kinetickú energiu W_k telesa hmotnosti m, voľne padajúceho z veľkej výšky H, pri jeho dopade na zemský povrch, keď polomer Zeme je R! Aká by bola táto energia, keby $H \gg R$? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

Riešenie:

Použijeme zákon o zachovaní mechanickej energie. Vo výške H nad zemským povrchom, odkiaľ teleso začína voľne padať, sa teleso vyznačuje len potenciálnou energiou, ktorej hodnota je vzhľadom na zemský povrch daná vzťahom

$$W_p = -\varkappa mM\left(\frac{1}{H+R} - \frac{1}{R}\right) = \frac{\varkappa mM}{R(H+R)}H \doteq mgR \frac{H}{R+H}$$

lebo $g \doteq \varkappa M/R^2$.

Pri dopade telesa na zemský povrch má teleso len kinetickú energiu, pre ktorú zo zákona o zachovaní mechanickej energie (pri zanedbaní vplyvu odporu vzduchu) vyplýva:

$$W_k = mgR \frac{H}{R+H}$$

Keď $H \gg R$, platí

$$W_k = mgR$$

91. Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor rýchlosťou v_0. Do akej výšky vystúpi a aká by musela byť minimálna začiatočná rýchlosť v_0, aby teleso nespadlo späť na Zem? (Odpor vzduchu zanedbajte!)

Riešenie:

Použijeme zákon o zachovaní mechanickej energie. Celková energia telesa v mieste vrhu je daná kinetickou energiou telesa. V maximálnej výške h, ktorú teleso dosiahne, je zase celková energia daná potenciálnou energiou telesa. Ak uvažujeme potenciálnu energiu telesa vzhľadom na zemský povrch, možno písať:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -\varkappa m M \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right)$$

Keďže $g \doteq \varkappa M / R^2$, možno predchádzajúcu rovnicu upraviť na tvar

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgR \frac{h}{R+h}$$

Odtiaľ pre hľadané h vyplýva:

$$h = \frac{v_0^2}{2gR - v_0^2} R$$

Podmienkou pre to, aby sa teleso nevrátilo späť na Zem, je, aby sa $h = \infty$ (rešpektujeme len vplyv zemského gravitačného poľa), t. j.

$$2gR - v_0^2 = 0$$

takže začiatočná rýchlosť musí mať hodnotu minimálne

$$v_0 = \sqrt{2gR} \doteq 11\ 200\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

čo je *druhá kozmická rýchlosť.*

92. Akou minimálnou rýchlosťou treba vystreliť raketu zo Zeme, aby dopadla na Mesiac? Aká je pritom rýchlosť dopadu rakety na povrch Mesiaca? (Vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca je $d \doteq 380\ 000$ km. Polomer Zeme $R_Z \doteq 6370$ km, polomer Mesiaca $R_M = \frac{1}{4} R_Z$. Hmotnosť Mesiaca je 1/81 hmotnosti Zeme. Pri riešení tejto úlohy zanedbajte pohyb Mesiaca okolo Zeme!)

Riešenie:

Pri riešení tohto problému použijeme opäť zákon o zachovaní mechanickej energie, lebo zanedbávame odpor vzduchu v zemskej atmosfére. Pretože možno s dobrou presnosťou považovať Mesiac a Zem za telesá guľovitého tvaru, sú ich gravitačné polia také isté ako gravitačné polia hmotných bodov s hmotnosťou Zeme, resp. s hmotnosťou Mesiaca, uložených v strede Zeme, resp. v strede Mesiaca. Pri pohybe rakety od Zeme k Mesiacu bude mať zemské gravitačné pole brzdiaci účinok, no gravitačné pole Mesiaca urýchľujúci účinok. Podľa výsledku príkladu 86 *(obr. 25)* bude až do miesta, vzdialeného od stredu Zeme $x = \frac{9}{10} d$, prevládať zemské gravitačné pole, za touto vzdialenosťou gravitačné pole Mesiaca. Stačí teda udeliť rakete takú rýchlosť, aby sa dostala do miesta vzdialeného od stredu Zeme x, lebo potom už vplyvom prevládajúceho gravitačného poľa Mesiaca bude zrýchleným pohybom padať na Mesiac. Možno preto písať

$$\frac{1}{2} mv^2 - \varkappa \frac{mM_Z}{R_Z} - \varkappa \frac{mM_M}{d - R_Z} = -\varkappa \frac{mM_Z}{0{,}9d} - \varkappa \frac{mM_M}{0{,}1d}$$

kde na ľavej strane máme súčet kinetickej a potenciálnej energie rakety na zemskom povrchu a na pravej strane celkovú energiu rakety v mieste $x = 0{,}9d$ od stredu Zeme. Táto celková energia je daná len potenciálnou energiou, lebo kinetická energia rakety je v tomto mieste nulová. Pre hľadanú minimálnu rýchlosť výstrelu rakety zo zemského povrchu, potrebnú na to, aby raketa dopadla na Mesiac, možno písať

$$v^2 = 2\left[\varkappa M_Z\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{0{,}9d} + \frac{1}{81(d-R_Z)} - \frac{1}{81 . 0{,}1d}\right)\right] \doteq$$

$$\doteq 2gR_Z\left(1 - \frac{R_Z}{0{,}9d} + \frac{R_Z}{81(d-R_Z)} - \frac{R_Z}{81 . 0{,}1d}\right)$$

takže

$$v \doteq \sqrt{2gR_Z . 0{,}98} = 11{,}2 \text{ km.s}^{-1} . 0{,}99 = 11{,}09 \text{ km.s}^{-1}$$

Pre rýchlosť v^+, ktorou raketa dopadne na Mesiac, možno analogicky písať

$$-\varkappa \frac{mM_Z}{0{,}9d} - \varkappa \frac{mM_M}{0{,}1d} = \frac{1}{2} mv^{*2} - \varkappa \frac{mM_M}{R_M} - \varkappa \frac{mM_Z}{d - R_M}$$

kde sme na ľavej strane rovnice písali hodnotu celkovej energie rakety v mieste vzdialenom $x = 0{,}9$d od stredu Zeme a na pravej strane rovnice zase celkovú energiu rakety pri dopade na povrch Mesiaca. Po úprave možno písať

$$v^{*2} = 2\left[\varkappa \frac{M_M}{R_M}\left(1 - \frac{81R_M}{0{,}9d} - \frac{R_M}{0{,}1d} + \frac{81R_M}{d - R_M}\right)\right]$$

Keďže platí

$$M_M = \frac{1}{81} M_Z; \quad R_M = \frac{1}{4} R_Z$$

možno ďalej písať

$$v^{*2}=2\left[\frac{1}{4.81}\varkappa\frac{M_Z}{R_Z}\left(1-\frac{81R_Z}{4.0,9d}-\frac{R_Z}{4.0,1d}+\frac{81R_Z}{4\left(d-\frac{1}{4}R_Z\right)}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4.81}2gR_Z\left[1-\frac{81R_Z}{4.0,9d}-\frac{R_Z}{4.0,1d}+\frac{81R_Z}{4\left(d-\frac{1}{4}R_Z\right)}\right]$$

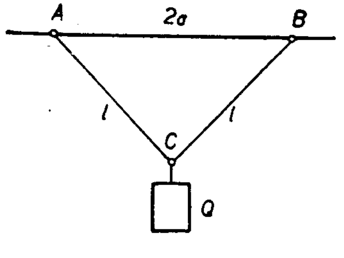
takže

$$v^{+}=\frac{1}{18}\sqrt{2gR_Z.0,91}=\frac{1}{18}\cdot 11,2\ \mathrm{km.s^{-1}}.0,95=0,591\ \mathrm{km.s^{-1}}$$

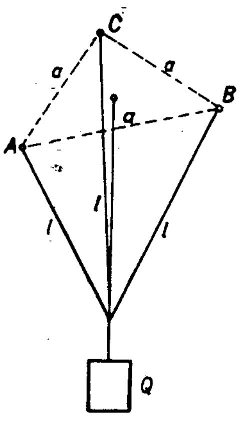
Úlohy

93. Na dvoch rovnakých retiazkach AC a BC *(obr. 29),* upevnených v bodoch A a B, visí závažie tiaže G. Aká musí byť dĺžka retiazok l, ak sila, ktorou možno retiazku maximálne napínať, je F_0 a vzdialenosť $AB=2a$?

$$\left[l\geqq\frac{2F_0a}{\sqrt{4F_0^2-G^2}}\right]$$



Obr. 29



Obr. 30

94. Závažie G je zavesené na troch symetricky uložených lanách *(obr. 30).* Aká je tiaž závažia, keď dĺžka každého lana $l=1$ m a body upevnenia lán A, B, C tvoria rovnostranný trojuholník so stranou $a=1$ m a keď jednotlivé laná sú napínané silou $F=250$ N?

$[G=F\sqrt{6}=612,4\ \mathrm{N}]$

95. Teleso sa dáva do pohybu pôsobením sily $F = 0{,}02$ N a za prvé štyri sekundy svojho pohybu prejde dráhu 3,2 m. Aká veľká je jeho hmotnosť a akú rýchlosť má na konci piatej sekundy svojho pohybu?

[$m = 0{,}05$ kg; $v = 2$ m.s^{-1}]

96. Delová guľa hmotnosti $m = 5$ kg opúšťa hlaveň rýchlosťou $v = 1200$ m.s^{-1}. Aká veľká sila pôsobila na guľu, keď predpokladáme, že pohyb v hlavni bol rovnomerne zrýchlený a trval 0,01 s? Akú prácu pritom táto sila vykonala?

[$F = 6.10^5$ N; $A = 36.10^5$ J]

97. Delová guľa hmotnosti $m = 24$ kg opúšťa hlaveň dela rýchlosťou $v_0 = 500$ m . s^{-1}. Aká je priemerná hodnota sily, ktorá pôsobila na guľu v hlavni, keď je hlaveň dlhá 2 m?

[$F \doteq 1{,}5.10^6$ N]

98. Nájdite, na ktorých miestach zemského povrchu má maximálnu a minimálnu hodnotu inak pri rovnakých podmienkach zotrvačná odstredivá a Coriolisova sila!

[Na póloch sa $F_0 = 0$ i $F_C = 0$; na rovníku sú F_0 aj F_C maximálne]

99. Železničný vozeň sa pohybuje po vodorovnej priamej trati a brzdíme ho silou, ktorá sa rovná 0,1 tiaže vozňa. Vypočítajte čas meraný od začiatku brzdenia, za ktorý sa vozeň zastaví, ako aj dráhu, ktorú od začiatku brzdenia až do zastavenia prejde, ak v okamihu, keď sa začalo brzdiť, mal vozeň rýchlosť $v_0 = 72$ km.h^{-1}!

[$t = 20{,}4$ s; $s = 204$ m]

100. Aká je zdanlivá tiaž osoby hmotnosti $m = 75$ kg vo výťahu, ktorý sa pohybuje

a) nahor spomalením 0,2 m.s^{-2} a dolu so zrýchlením 0,2 m.s^{-2}, b) nahor so zrýchlením 0,15 m.s^{-2} a dolu spomalením 0,15 m.s^{-2}?

[a) $G_1 = 720{,}75$ N v oboch prípadoch; b) $G_2 = 746{,}0$ N v oboch prípadoch]

101. Dve geometricky rovnaké telesá tvaru gule sú zhotovené z rôznych materiálov s hustotami ϱ_1, resp. ϱ_2. Obidve gule padajú vo vzduchu. Ak predpokladáme, že odpor vzduchu je úmerný druhej mocnine rýchlosti, treba určiť, v akom pomere sú maximálne rýchlosti, ktoré gule dosiahnu pri svojom pohybe.

$$\left[\frac{v_{1\,\max}}{v_{2\,\max}} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}\right]$$

102. Guľôčka s hmotnosťou m, ktorej bola udelená začiatočná rýchlosť v_0 pohybuje v prostredí, ktorého odpor F proti pohybu rastie lineárne s rýchlos hmotného bodu, t. j. $F=-kv$. Akú dráhu až do zastavenia guľôčka prejde, okrem odporu prostredia nepôsobí na ňu žiadna sila?

$$\left[s=\frac{mv_0}{k}\right]$$

103. Kameň hmotnosti $m=3$ kg, priviazaný na niti dĺžky $l=1$ m, koná po po kružnici vo vertikálnej rovine. Treba určiť najmenšiu uhlovú rýchlosť obieh kameňa po kružnici, pri ktorej by sa niť roztrhla, keď sme experimentálne zistil je na to potrebná minimálna sila $F=90$ N.

$$\left[\omega=\sqrt{\frac{F-G}{ml}}\doteq 4{,}5\ \mathrm{s}^{-1}\right]$$

104. Vedro (prázdne hmotnosti M) je naplnené vodou a ťahané zo stu zvisle nahor konštantnou silou F. Voda, ktorej začiatočná hmotnosť bola vyteká z vedra konštantnou rýchlosťou tak, že za čas t_0, ktorý je menší ako celk čas, za ktorý sa vedro zo studne vytiahne, všetka voda z vedra vytečie. Ak rýchlosť pohybu vedra v čase t_0, keď v čase $t=0$ bola nulová?

$$\left[v=\left(\frac{F}{m_0}\ln\frac{M+m_0}{M}-g\right)t_0\right]$$

105. Loptu hmotnosti $m=100$ g sme nárazom uviedli do pohybu s rýchlos $v=10\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Akou veľkou silou sme do nej udreli, keď náraz trval $t=0{,}01$

$[F=100\ \mathrm{N}]$

106. Motor auta celkovej hmotnosti 960 kg má ťažnú silu 1600 N. Za ko sekúnd môže auto dosiahnuť rýchlosť $v_1=54\ \mathrm{km.h^{-1}}$?

$[t_1=9\ \mathrm{s}]$

107. Akú prácu vykoná kôň pretiahnutím vozíka hmotnosti 1500 kg stál rýchlosťou do vzdialenosti 600 m, keď trenie je 0,8 % tiaže vozíka?

$[A=70{,}6\ \mathrm{kJ}]$

108. Voz hmotnosti 16 000 kg sa pohybuje priamočiaro rýchlosťou v_0 $=5\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Aká je priemerná hodnota sily trenia, ktorá na voz pôsobila, keď zastavila za 1 minútu?

$[F\doteq 1330\ \mathrm{N}$; pôsobí proti smeru pohybu$]$

109. Oceľová špirála dĺžky $l_0=80$ cm sa predĺži silou $F_1=20$ N o dĺž

$x_1 = 5$ cm. Aká práca sa vykoná pri predĺžení špirály na dvojnásobok jej pôvodnej dĺžky, keď sila konajúca prácu je úmerná predĺženiu špirály?

[$A = 128$ J]

110. Drevený valec je ponorený vo vode do 2/3 svojej výšky. Akú prácu treba vykonať na vytiahnutie valca z vody, keď polomer valca $r = 10$ cm a jeho výška $h = 60$ cm?

[$A = 24{,}1$ J]

111. Strela hmotnosti $m = 20$ g zasiahne rýchlosťou $v_0 = 400$ m.s^{-1} strom. Do akej hĺbky prenikne, ak sa priemerný odpor dreva rovná $F = 9810$ N?

[$s = 16$ cm]

112. Teleso hmotnosti $m = 100$ kg sa pohybuje rýchlosťou $v_0 = 20$ km.h^{-1}. Chceme ho zastaviť na dráhe dlhej 20 m. Akou konštantnou silou musíme pohyb telesa brzdiť?

[$F = 77{,}16$ N]

113. Vlak idúci rýchlosťou $v_1 = 60$ km.h^{-1} dokážeme použitím bŕzd zastaviť na dráhe $s_1 = 400$ m. Akú rýchlosť má mať vlak, ak ho rovnakým brzdením chceme zastaviť na dráhe $s_2 = 100$ m?

[$v_2 = 30$ km.h^{-1}]

114. Teleso hmotnosti $m = 0{,}8$ kg je vymrštené smerom zvisle nahor. Pri svojom pohybe má vo výške $h = 10$ m kinetickú energiu $W_k = 196{,}2$ J. Akú maximálnu výšku teleso pri tomto pohybe dosiahne?

[$h_{max} = 35$ m]

115. Ak na pružinu, ktorá sa nachádza v zvislom púzdre, položíme guľôčku hmotnosti $m = 0{,}1$ kg, stlačí sa pružina o $\Delta s = 2$ mm. Do akej výšky vyletí guľôčka, keď pružinu ďalej stlačíme o $s_1 = 15$ cm a náhle uvoľníme?

$$\left[h = \frac{s_1^2}{2\,\Delta s} = 5{,}62 \text{ m}\right]$$

116. Aký je najväčší možný pracovný výkon vodného kolesa poháňaného vodou padajúcou z výšky $h = 10$ m, keď za jednu sekundu dopadne na vodné koleso 150 litrov vody?

[$P = 14{,}7$ kW]

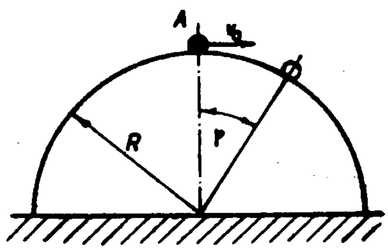
117. Vypočítajte výkon motora nákladného auta, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou $v = 30$ km.h^{-1} po ceste s 5-%-ným stúpaním, keď hmotnosť auta s nákladom $m = 5000$ kg! (Trenie zanedbajte!)

[$P \doteq 20{,}5$ kW]

118. Aká je hmotnosť automobilu, keď sa pohybuje po vodorovnej ceste rýchlosťou $v = 50$ km.h^{-1} pri výkone motora $P = 7$ kW? Koeficient trenia $\mu = 0{,}07$.

[$m = 733{,}9$ kg]

119. Kameň A je na vrchole hladkého telesa polguľového tvaru s polomerom R *(obr. 31).* Udelíme mu začiatočnú rýchlosť hodnoty v_0 vo vodorovnom smere.



Obr. 31

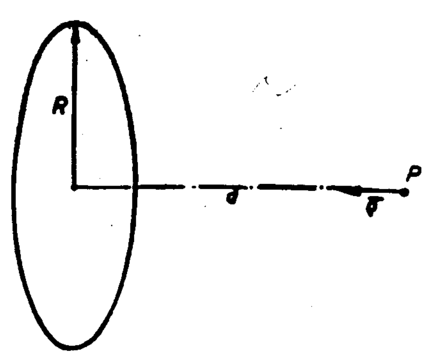
Treba určiť, v ktorom mieste opustí kameň povrch polguľovitého telesa. Pri akých hodnotách v_0 opustí kameň povrch polgule v začiatočnom okamihu? (Trenie zanedbajte!)

$$\left[\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3Rg}; \quad v_0^2 \geqq Rg\right]$$

120. Ako sa líši gravitačná sila, ktorou pôsobí Zem na telesá na zemskom povrchu v nadmorskej výške $h = 6400$ m a pri hladine mora (polomer Zeme $R = 6370$ km)?

[$F_H = 0{,}998 F_0$]

121. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa drôtu hmotnosti m,



Obr. 32

ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu *(obr. 32)*!

$$\left[\varphi = -\varkappa \frac{m}{\sqrt{a^2+R^2}}; \quad \boldsymbol{K} = \varkappa \frac{ma}{(a^2+R^2)^{3/2}} \boldsymbol{\varrho}\right]$$

122. Nájdite zrýchlenie, ktorým by telesá padali na povrchu Mesiaca, ak predpokladáme, že na telesá pôsobí len gravitačné pole Mesiaca a keď vieme, že hmotnosť a polomer Mesiaca sú $M_M = \frac{1}{81} M_Z$, $R_M \doteq \frac{1}{4} R_Z$, kde M_Z je hmotnosť a R_Z je polomer Zeme.

$[g_m \doteq 0{,}2 g_Z = 0{,}2 \,.\, 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} = 1{,}962 \text{ m.s}^{-2}]$

123. Nájdite hodnotu rýchlosti v_0, ktorú treba udeliť v smere zvislom nahor telesu nachádzajúcemu sa na povrchu Zeme, aby sa dostalo do výšky rovnajúcej sa zemskému polomeru, ktorý má hodnotu $R = 6370$ km! (Odpor vzduchu zanedbajte!)

$[v_0 = 7{,}9 \text{ km.s}^{-1}]$

3 MECHANIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV A TELESA

Úvod

a) Pod *ťažiskom* sústavy dvoch hmotných bodov rozumieme taký bod na ich vzájomnej spojnici, ktorý túto spojnicu rozdeľuje v prevrátenom pomere hmotností týchto hmotných bodov. Spoločné ťažisko troch hmotných bodov definujeme ako bod na spojnici ťažiska prvých dvoch hmotných bodov a bodu tretieho, ktorý túto spojnicu rozdeľuje v prevrátenom pomere súčtu hmotností prvých dvoch bodov a hmotnosti bodu tretieho. Podobne môžeme rozšíriť definíciu ťažiska na sústavu n hmotných bodov.

Polohový vektor ťažiska $\boldsymbol{r}^*$ sústavy hmotných bodov vzhľadom na určitý vzťažný bod je daný vzťahom

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}$$

kde $\boldsymbol{r}_i$ je polohový vektor i-teho bodu sústavy vzhľadom na ten istý vzťažný bod a m_i je hmotnosť i-teho bodu. Súvis medzi súradnicami ťažiska sústavy hmotných bodov a príslušnými súradnicami hmotných bodov sústavy je analogicky daný vzťahmi

$$x^* = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}; \quad y^* = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}; \quad z^* = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Polohový vektor, resp. súradnice ťažiska telesa spojite vyplneného hmotou určujeme objemovou integráciou podľa vzťahov

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\int \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \varrho \boldsymbol{r}\, \mathrm{d}V}{\int \varrho\, \mathrm{d}V}$$

resp.

$$x^* = \frac{\int \varrho x\, \mathrm{d}V}{\int \varrho\, \mathrm{d}V}; \quad y^* = \frac{\int \varrho y\, \mathrm{d}V}{\int \varrho\, \mathrm{d}V}; \quad z^* = \frac{\int \varrho z\, \mathrm{d}V}{\int \varrho\, \mathrm{d}V}$$

kde ϱ je hustota telesa, ktorá môže byť vo všeobecnosti v rôznych bodoch telesa rôzna, a $\mathrm{d}V$ je objemový element.

b) *Moment sily* $\boldsymbol{F}$ vzhľadom na určitý vzťažný bod O definujeme vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily vzhľadom na bod O.

Podobne definujeme *moment hybnosti* hmotného bodu vzhľadom na vzťažný bod O vzťahom

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na bod O.

Medzi momentom sily pôsobiacej na hmotný bod vzhľadom na určitý vzťažný bod a momentom hybnosti hmotného bodu vzhľadom na ten istý vzťažný bod je súvis daný vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

Možno dokázať, že priemet momentu sily vzhľadom na bod určitej priamky do jej smeru nezávisí od polohy bodu zvoleného na priamke. Takýto priemet momentu sily do smeru určitej priamky nazývame *momentom sily vzhľadom na priamku* (os).

Dvojicou síl nazývame dve rovnako veľké sily opačného smeru pôsobiace v dvoch rôznych bodoch telesa, ktorých spojnica nespadá do silovej priamky síl tvoriacich dvojicu. *Moment dvojice* má hodnotu danú súčinom hodnoty sily tvoriacej dvojicu a vzájomnej vzdialenosti (rameno dvojice) silových priamok síl tvoriacich dvojicu.

c) Pohyb sústavy hmotných bodov, resp. telesa opisujú dve impulzové vety.

1. veta impulzová hovorí: *Súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé body sústavy sa rovná derivácii celkovej hybnosti sústavy podľa času.* Matematicky ju možno vyjadriť rovnicou

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$$

kde $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ a $\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$.

S prvou vetou impulzovou je rovnocenná *veta o pohybe ťažiska*, ktorá hovorí: *Účinkom vonkajších síl sa ťažisko sústavy hmotných bodov, resp. telesa pohybuje tak, ako keby celá hmotnosť sústavy, resp. telesa bola sústredená v ťažisku a všetky sily pôsobili v ťažisku.*

Matematicky možno túto vetu vyjadriť rovnicou

$$M\mathbf{a}^* = \mathbf{F}$$

kde M je celková hmotnosť sústavy hmotných bodov, resp. telesa, $\mathbf{a}^*$ je zrýchlenie ťažiska a $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ je vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov, resp. na teleso.

Ak sa súčet vonkajších síl rovná nule, alebo ak niet vonkajších síl (izolovaná sústava), poloha ťažiska sa nemení (*zákon o zachovaní ťažiska* izolovanej sústavy).

2. veta impulzová hovorí: *Súčet momentov vonkajších síl pôsobiacich na jednotlivé hmotné body sústavy vzhľadom na určitý vzťažný bod sa rovná derivácii celkového momentu hybnosti sústavy vzhľadom na ten istý vzťažný bod podľa času.* Matematicky ju možno vyjadriť rovnicou

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

kde $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ a $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$.

d) Pre izolovanú sústavu hmotných bodov, t. j. sústavu hmotných bodov, na ktorú pôsobia len vnútorné sily (vonkajších síl niet), vyplývajú z 1. a 2. vety impulzovej dva zákony zachovania: zákon o zachovaní hybnosti a zákon o zachovaní momentu hybnosti.

Zákon o zachovaní hybnosti hovorí: *Celková hybnosť izolovanej sústavy je konštantná*, t. j. $\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \textbf{konšt}$.

Zákon o zachovaní momentu hybnosti hovorí: *Celkový moment hybnosti izolovanej sústavy je konštantný,* t. j. $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{konšt}.$

e) Určité teleso je v *rovnováhe*, keď sú splnené tieto podmienky:

1. *Súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso sa rovná nule,* t. j. $\sum_i \mathbf{F}_i = 0.$

2. *Súčet momentov všetkých vonkajších síl vzhľadom na ľubovoľný bod sa rovná nule,* t. j. $\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0.$

f) Ak sa nejaké teleso otáča okolo pevnej osi, jeho pohybová rovnica má tvar

$$M = I\varepsilon$$

kde ε je uhlové zrýchlenie, M je veľkosť priemetu celkového momentu vonkajších síl do smeru osi otáčania, t. j. hodnota celkového momentu vonkajších síl vzhľadom na os otáčania a I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, definovaný vzťahom

$$I = \sum_i m_i a_i^2$$

kde a_i je vzdialenosť hmotného bodu m_i od osi. Pri telesách spojite vyplnených hmotou platí:

$$I = \int a^2 \, \mathrm{d}m = \int \varrho a^2 \, \mathrm{d}V$$

Integráciu treba vykonať cez celý objem telesa.

g) Výpočet momentov zotrvačnosti telies vzhľadom na ľubovoľné osi uľahčujú niektoré vety, predovšetkým *Steinerova veta*, ktorá hovorí: *Moment zotrvačnosti telesa I vzhľadom na ľubovoľnú priamku sa rovná momentu zotrvačnosti I^* vzhľadom na priamku prechádzajúcu ťažiskom telesa a s danou rovnobežnú, zväčšenému o príspevok ťažiska s celou hmotnosťou telesa v ňom sústredenou.* Matematicky ju možno vyjadriť vzťahom

$$I = I^* + ma^2$$

kde m je celková hmotnosť telesa a a vzdialenosť ťažiska od osi.

Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na nejakú priamku možno všeobecne vyjadriť vzťahom

$$I = (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varrho}) \cdot \boldsymbol{\varrho}$$

kde $\mathbf{T}$ je *tenzor hybnosti* telesa v určitom bode priamky a $\boldsymbol{\varrho}$ jednotkový vektor v smere priamky, vzhľadom na ktorú hľadáme moment zotrvačnosti.

Pri špeciálnej voľbe súradnicovej sústavy, keď súradnicové osi majú smer osí tzv. elipsoidu zotrvačnosti *(hlavné osi zotrvačnosti)*, možno tenzor hybnosti telesa, napr. v ťažisku, vyjadriť jednoduchým vzťahom

$$\mathbf{T}^* = I_1^* \boldsymbol{ii} + I_2^* \boldsymbol{jj} + I_3^* \boldsymbol{kk} \tag{1}$$

kde I_1^*, I_2^*, I_3^* sú momenty zotrvačnosti telesa vzhľadom na hlavné osi zotrvačnosti (hlavné momenty zotrvačnosti). Hlavné osi zotrvačnosti sa vyznačujú tým, že vzhľadom na jednu z nich je moment zotrvačnosti maximálny, vzhľadom na inú z nich zase minimálny a všetky tri osi sú navzájom kolmé.

So zreteľom na vzťah (1) možno moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a zvierajúcu s hlavnými osami zotrvačnosti uhly α, β, γ vyjadriť vzťahom

$$I = (\mathbf{T}^* . \boldsymbol{\varrho}) . \boldsymbol{\varrho} = I_1^* \cos^2 \alpha + I_2^* \cos^2 \beta + I_3^* \cos^2 \gamma$$

h) Všeobecný pohyb telesa možno považovať za súčet postupného pohybu ťažiska telesa a otáčavého pohybu telesa okolo osi prechádzajúcej ťažiskom.

i) Kinetickú energiu telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi uhlovou rýchlosťou ω možno vyjadriť vzťahom

$$W_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania.

Práca, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri otočení telesa o určitý uhol φ, je daná vzťahom

$$A = M\varphi$$

kde hodnota momentu síl M je vzhľadom na os otáčania konštantná. Táto práca sa rovná zvýšeniu kinetickej energie otáčavého pohybu telesa na tomto úseku otočenia.

Vo všeobecnom prípade pohybu telesa je kinetická energia telesa daná súčtom kinetickej energie postupného pohybu ťažiska s hmotnosťou m, rovnajúcou sa celkovej hmotnosti telesa, a kinetickej energie otáčavého pohybu telesa okolo priamky prechádzajúcej ťažiskom. Teda

$$W_k = \frac{1}{2} mv^{*2} + \frac{1}{2} I^* \omega^2$$

Aj pri všeobecnom pohybe telesa platí zákon o zachovaní mechanickej energie, ak, pravda, okrem vzájomnej premeny jednej formy mechanickej energie na druhú nedochádza k premene mechanickej energie na iné druhy energie (vnútornú, elektrickú a pod.).

j) *Fyzikálne kyvadlo* je každé teleso upevnené tak, že sa môže vplyvom vlastnej tiaže otáčať okolo vodorovnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla, keď ide o dostatočne malé výchylky φ

z rovnovážnej polohy, je daná vzťahom

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mga}{I}\varphi$$

kde m je celková hmotnosť kyvadla, a vzdialenosť ťažiska od osi otáčania a I moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os otáčania.

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je výraz vyjadrujúci závislosť výchylky φ od času, ktorý má tvar

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$ je kruhová frekvencia, φ_0 je amplitúda a α je fázová konštanta. Pre *periódu* fyzikálneho kyvadla platí vzťah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$$

Redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla je daná vzťahom

$$l = \frac{I}{ma}$$

a vyjadruje vzájomnú vzdialenosť takých dvoch osí nesymetricky uložených vzhľadom na ťažisko kyvadla, okolo ktorých sa kýva kyvadlo s rovnakou periódou.

k) Keď sa teleso otáča okolo osi ľubovoľne uloženej v telese, zotrvačnosť jeho hmotných elementov sa prejavuje odstredivými silami. Keď sa teleso otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom, celkový moment odstredivých síl má vzhľadom na všetky body osi, teda aj na ťažisko, rovnakú hodnotu, danú vzťahom

$$M_0^* = \omega^2 U^*$$

kde U^* je hodnota deviačného momentu telesa vzhľadom na danú os. Všeobecne je deviačný moment vzhľadom na os určený vzťahom

$$\boldsymbol{U} = (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varrho}) \times \boldsymbol{\varrho}$$

kde $\mathbf{T}$ je tenzor hybnosti telesa v príslušnom bode osi a $\boldsymbol{\varrho}$ je jednotkový vektor spadajúci do smeru osi.

V dôsledku toho sa účinok odstredivých síl podobá účinku dvojice síl, ktorá sa snaží vychýliť os telesa z jej okamžitej polohy. Ak je teleso uložené na mechanickej osi, ktorá je vedená ložiskami, vznikajú tým v ložiskách tlaky, ktorými sú ložiská namáhané. Iba keď je osou otáčania niektorá hlavná os zotrvačnosti v ťažisku, odstredivé sily sú vo vzájomnej rovnováhe a ich vplyv na os, prípadne na ložiská je nulový.

l) Symetrické teleso, ktoré má vzhľadom na svoju os symetrie pomerne veľký moment zotrvačnosti a môže sa okolo tejto osi otáčať tak, že jeden bod osi je upevnený, sa volá zotrvačník. Zotrvačník je bezsilový, ak je upevnený v ťažisku, a ťažký, ak je upevnený v niektorom inom bode svojej osi symetrie.

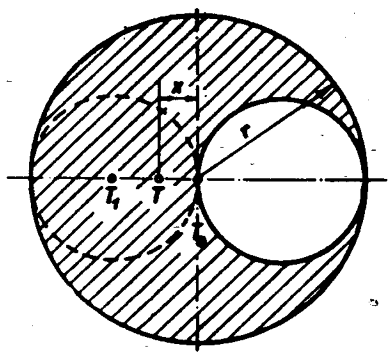
Ak sa *ťažký zotrvačník* otáča okolo svojej osi symetrie veľmi veľkou uhlovou rýchlosťou ω, tak pre uhlovú rýchlosť Ω precesného pohybu *(precesie)*, ktorý koná os otáčania zotrvačníka, možno písať

$$\Omega = \frac{mga}{I\omega}$$

kde m je hmotnosť zotrvačníka, a vzdialenosť bodu upevnenia osi od ťažiska, I moment zotrvačnosti zotrvačníka vzhľadom na os otáčania, g zrýchlenie voľného pádu.

Príklady

124. Z homogénnej kruhovej dosky s polomerom r vyrežeme kruh s polomerom rovnajúcim sa polovici polomeru kruhovej dosky tak, ako je to naznačené na *obr. 33.* Nájdite polohu ťažiska takto vzniknutého útvaru!



Obr. 33

Riešenie:

Polohu ťažiska uvedeného útvaru ľahko nájdeme, keď celý útvar rozdelíme na dve časti, a to na kruh s polomerom $\frac{r}{2}$ so stredom v T_1, kde sa nachádza aj ťažisko tejto časti, a na zostávajúcu časť, ktorá má kvôli symetrii svoje ťažisko v mieste T_0, t. j. v strede pôvodného kruhu. Pre polohu výsledného ťažiska T bude potom platiť:

$$\left(\frac{r}{2} - x\right) : x = \left(\pi r^2 - 2\pi \frac{r^2}{4}\right) : \pi \frac{r^2}{4}$$

odkiaľ pre hľadané x vyplýva $x = \frac{r}{6}$.

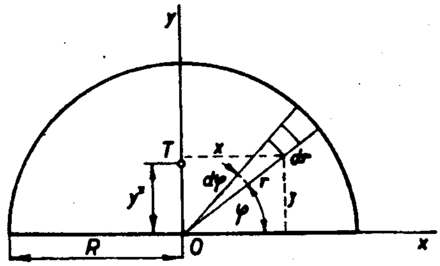
125. Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa, ktoré má tvar polkruhovej dosky zanedbateľnej hrúbky s polomerom R!

Riešenie:

Pri voľbe súradnicovej sústavy podľa *obr. 34* sa kvôli symetrii $x^*=0$. Pre y^* platí

$$y^*=\frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int_0^R\int_0^\pi r\sin\varphi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\dfrac{2m}{\pi R^2}}{M}=$$

$$=\frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R[-\cos\varphi]_0^\pi=\frac{4R}{3\pi}$$



Obr. 34

Z *obr. 34* vyplýva $y=r\sin\varphi$ a $\mathrm{d}m=\dfrac{m}{\dfrac{\pi R^2}{2}}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$.

126. Nájdite polohu ťažiska rovnorodého kužeľa výšky v!

Riešenie:

Ak položíme začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy do vrcholu kužeľa a os y do smeru výšky kužeľa, ako je to na *obr. 35*, tak vzhľadom na symetriu je zrejmé, že $x^*=z^*=0$, a pre y^* platí:

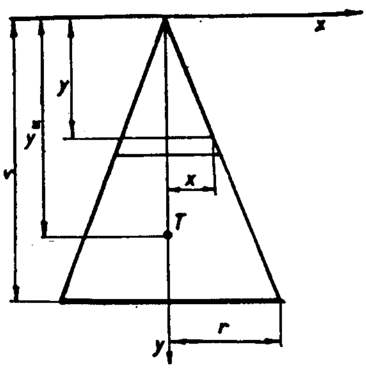
$$y^*=\frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\dfrac{3M}{v^3}\int_0^v y^3\,\mathrm{d}y}{M}=\frac{3}{v^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^v=\frac{3}{4}v$$

kde

$$\mathrm{d}m=\pi x^2\,\mathrm{d}y\,\frac{M}{\dfrac{\pi r^2 v}{3}}=\frac{3M}{r^2 v}\cdot\frac{r^2}{v^2}y^2\,\mathrm{d}y=\frac{3M}{v^3}y^2\,\mathrm{d}y$$

pretože $x:y=r:v$, a preto $x=\dfrac{r}{v}y$.

Ťažisko sa teda nachádza v $\frac{3}{4}$ výšky od vrcholu kužeľa.



Obr. 35

127. Daná je sústava troch hmotných bodov s hmotnosťami $m_1 = 5$ g, $m_2 = 10$ g, $m_3 = 15$ g. V čase $t = 0$ sú v pokoji v polohách $A_1(3, 4, 5)$, $A_2(-2, 4, -6)$, $A_3(0, 0, 0)$, kde súradnice v zátvorkách sú udané v cm. Účinkom vonkajších síl, ktorých vektorový súčet je vektor hodnoty $F = 0{,}05$ N v smere osi x, sa dajú hmotné body do pohybu. Nájdite polohu ťažiska sústavy v čase $t = 2$ s!

Riešenie:

Pre polohu ťažiska sústavy v čase $t = 0$ vyplýva:

$$x_0^* = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{1}{6}\text{ cm} \doteq -0{,}17\text{ cm}$$

$$y_0^* = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 2\text{ cm}$$

$$z_0^* = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{35}{30}\text{ cm} \doteq -1{,}17\text{ cm}$$

Použitím vety o pohybe ťažiska pre zrýchlenie ťažiska dostaneme:

$$a^* = \frac{F}{\sum_i m_i} = \frac{0{,}05\text{ N}}{0{,}03\text{ kg}} \doteq 1{,}67\text{ m.s}^{-2}$$

Vzhľadom na obsah úlohy má zrýchlenie smer osi x, takže pre súradnicu x ťažiska možno písať:

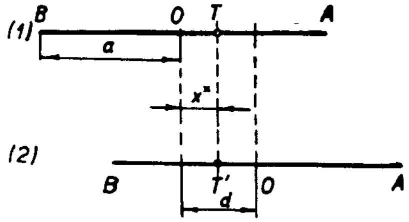
$$x^* = x_0^* + \frac{1}{2}a^*t^2 = -0{,}17\text{ cm} + \frac{1}{2}\,167\text{ cm.s}^{-2}.4\text{ s}^2 = 333{,}8\text{ cm}$$

Pre súradnice y^*, z^* zrejme platí: $y^* = y_0^*$, $z^* = z_0^*$.

128. Na jednom konci loďky, ktorá pokojne stojí na vode, je človek. O koľko sa posunie loďka, ak človek prejde na jej druhý koniec, keď tiaž človeka je G, tiaž loďky P a dĺžka loďky $2a$. (Odpor vody pri pohybe loďky zanedbajte!)

Riešenie:

Loďku s človekom možno považovať za izolovanú sústavu, pre ktorú platí zákon o zachovaní polohy ťažiska. Na *obr. 36* je znázornená poloha lodiek



Obr. 36

v obidvoch prípadoch; v prípade (1) je človek na konci A loďky, v prípade (2) na konci B. V prvom prípade je ťažisko celej sústavy vo vzdialenosti x^*smerom ku koncu A od stredu loďky O, t. j. od ťažiska loďky. V súhlase s definíciou ťažiska možno pre x^* písať:

$$x^* = \frac{a\dfrac{G}{g}}{\dfrac{G}{g}+\dfrac{P}{g}} = \frac{aG}{G+P}$$

Po prechode človeka z konca A na koniec B sa loďka posunie o vzdialenosť d tak, aby poloha nového ťažiska T' bola totožná s polohou pôvodného ťažiska T. Z *obr. 36* je zrejmé, že

$$d = 2x^* = 2a\frac{G}{G+P}$$

129. Do akej výšky sa vychýli z rovnovážnej polohy balistické kyvadlo hmotnosti $M = 10$ kg, keď v ňom uviazne strela hmotnosti $m = 100$ g letiaca rýchlosťou $v = 200 \text{ m.s}^{-1}$?

Riešenie:

Keď strela zasiahne balistické kyvadlo, uviazne v ňom a spolu s kyvadlom sa začne pohybovať určitou rýchlosťou v'. Zákon o zachovaní hybnosti izolovanej sústavy, ktorú tvorí kyvadlo so strelou, vyjadruje rovnica

$$mv = (m+M)v'$$

t. j.

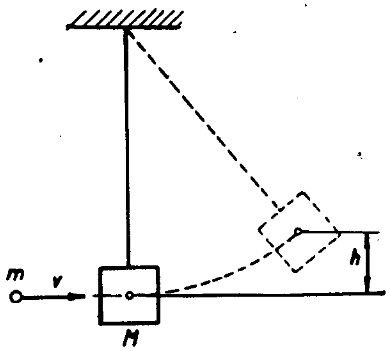
$$v' = \frac{mv}{m+M}$$

Výšku h *(obr. 37)* nám umožní vypočítať zákon o zachovaní mechanickej energie, ktorý poskytuje rovnicu

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2=(m+M)gh$$

t. j.

$$h=\frac{v'^2}{2g}=\frac{m^2v^2}{2g(m+M)^2}=\frac{10^{-2}\ \mathrm{kg}^2.4.10^4\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{2.9{,}81\ \mathrm{m.s}^{-2}.10^2\ \mathrm{kg}^2}=0{,}2\ \mathrm{m}$$



Obr. 37

130. Aké množstvo paliva musí obsahovať jednoduchá jednostupňová raketa, aby mohla dosiahnuť po spálení všetkého paliva prvú kozmickú rýchlosť, keď hmotnosť rakety bez paliva je $m_k = 100$ kg a keď relatívna výtoková rýchlosť plynov vznikajúcich pri spaľovaní paliva je $v_r = 3000\ \mathrm{m.s}^{-1}$?

Riešenie:

Príklad budeme riešiť použitím zákona o zachovaní hybnosti izolovanej sústavy. Raketa spolu s palivom predstavuje takúto izolovanú sústavu. Označme symbolom m hmotnosť rakety spolu s palivom v určitom časovom okamihu t, v ktorom má raketa vzhľadom na zvolenú vzťažnú sústavu rýchlosť $\boldsymbol{v}$. Hybnosť rakety v tomto okamihu bude daná vzťahom

$$\boldsymbol{p}_t = m\boldsymbol{v}$$

Nech teraz za čas $\mathrm{d}t$ uniknú z rakety plyny hmotnosti $\mathrm{d}m'$, a to rýchlosťou $\boldsymbol{u}$, meranou vzhľadom na tú istú vzťažnú sústavu, na ktorú meriame rýchlosť rakety. Za čas $\mathrm{d}t$ sa potom zvýši rýchlosť rakety z $\boldsymbol{v}$ na $\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Hybnosť celej sústavy v čase $t+dt$ bude

$$\boldsymbol{p}_{t+\mathrm{d}t} = (m-\mathrm{d}m')(\boldsymbol{v}+\mathrm{d}\boldsymbol{v})+\mathrm{d}m'\boldsymbol{u}$$

Podľa zákona o zachovaní hybnosti izolovanej sústavy však platí

$$\boldsymbol{p}_{t+\mathrm{d}t} = \boldsymbol{p}_t$$

t. j.

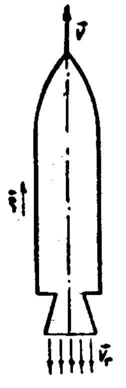
$$(m - \mathrm{d}m')(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) + \mathrm{d}m'\boldsymbol{u} = m\boldsymbol{v} \tag{1}$$

Keď si uvedomíme, že $\mathrm{d}m' = -\mathrm{d}m$, lebo hmotnosť unikajúcich plynov predstavuje úbytok hmotnosti rakety s palivom, potom možno rovnicu (1) upraviť na tvar

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}m}{m}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}m}{m}\boldsymbol{v}_r \tag{2}$$

Vo vzťahu (2) sme zanedbali výraz $\mathrm{d}m.\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ ako malú veličinu vyššieho rádu a $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ sme označili $\boldsymbol{v}_r$, kde $\boldsymbol{v}_r$ predstavuje relatívnu rýchlosť vytekajúcich plynov vzhľadom na raketu. Ak označíme jednotkový vektor v smere rýchlosti $\boldsymbol{v}$ symbolom $\boldsymbol{\varrho}$ *(obr. 38)*, dostaneme

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\varrho}\,; \quad \boldsymbol{v}_r = -v_r\boldsymbol{\varrho}$$



Obr. 38

a rovnicu (2) možno upraviť na skalárnu rovnicu tvaru

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{m}v_r \tag{3}$$

Jej integrovaním dostávame

$$v = -v_r \ln m + C$$

Hodnotu integračnej konštanty C určíme zo začiatočných podmienok. V čase $t = 0$ bola rýchlosť rakety nulová, t. j. $v = 0$ a hmotnosť rakety bola $m = m_0$. Po dosadení do výrazu (3) dostávame

$$0 = -v_r \ln m_0 + C\,; \quad C = v_r \ln m_0$$

takže vzťah (3) možno upraviť na

$$v = v_r \ln \frac{m_0}{m}$$

Pre konečnú hodnotu rýchlosti v_k rakety po spotrebovaní všetkých palív bude potom platiť

$$v_k = v_r \ln \frac{m_0}{m_k} \tag{4}$$

kde m_k je hmotnosť rakety bez paliva. Pre hľadanú hmotnosť všetkého spotrebovaného paliva zrejme platí $m_p = m_0 - m_k$. Hmotnosť m_0 možno určiť z rovnice (4)

$$m_0 = m_k e^{v_k/v_r}$$

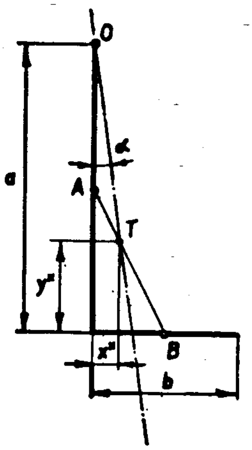
takže

$$m_p = m_k(e^{v_k/v_r} - 1)$$

Po dosadení daných číselných hodnôt bude

$$m_p = 100 \text{ kg}(e^{7,9/3} - 1) = 100 \text{ kg} \,.\, 12,92 = 1292 \text{ kg}$$

131. Zalomená tyč tvaru písmena *L* *(obr. 39)* s ramenami z rovnakého materiálu dĺžky $a = 30$ cm, $b = 15$ cm je upevnená v koncovom bode ramena tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi, prechádzajúcej bodom upevnenia kolmo na rovinu určenú ramenami tyče. Aký uhol zviera rameno a zalomenej tyče so zvislým smerom k rovnovážnej polohe?



Obr. 39

Riešenie:

Podmienky rovnováhy vyžadujú, aby sa

a) vektorový súčet všetkých síl pôsobiacich na teleso rovnal nule,

b) vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na ľubovoľný bod rovnal nule.

Podmienka a) je splnená tým, že tiaž tyče je kompenzovaná upevnením tyče v bode *O*. Podmienka b) bude splnená, keď ťažisko, pôsobisko tiaže telesa, bude ležať na zvislej priamke prechádzajúcej bodom upevnenia. Potom sa totiž bude aj vektorový súčet momentov všetkých síl (tiaže tyče a reakcie upevnenia) napr. k bodu O rovnať nule. Ak označíme súradnice ťažiska vzhľadom na súradnicovú sústavu vytvorenú ramenami tyče symbolmi x^*, y^*, tak

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x^*}{a - y^*}$$

Avšak

$$AT : TB = b : a$$

ďalej

$$AT \sin \alpha : TB \sin \alpha = b : a$$

čiže

$$x^* : \left(\frac{b}{2} - x^*\right) = b : a$$

z čoho

$$x^* = \frac{b^2}{2(a+b)}$$

Analogicky

$$AT \cos \alpha : TB \cos \alpha = b : a$$

čiže

$$\left(\frac{a}{2} - y^*\right) : y^* = b : a$$

z čoho

$$y^* = \frac{a^2}{2(a+b)}$$

Máme teda

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{b^2}{2(a+b)}}{a - \dfrac{a^2}{2(a+b)}} = \frac{b^2}{a^2 + 2ab} = 0{,}125$$

takže

$$\alpha \doteq 7^\circ\, 10'$$

132. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej tyče dĺžky l a hmotnosti m vzhľadom na os kolmú na smer dĺžky tyče

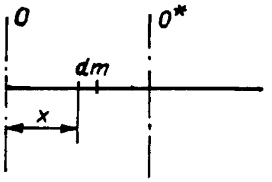
a) prechádzajúcu koncovým bodom tyče,

b) prechádzajúcu stredom tyče.

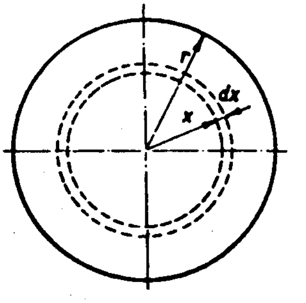
Riešenie:

a) Pre moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os O *(obr. 40)* možno písať:

$$I=\int x^2\,\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\int_0^l x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{1}{3}\,ml^2$$



Obr. 40



Obr. 41

b) Keďže podľa Steinerovej vety

$$I=I^*+m\,\frac{l^2}{4}$$

kde I^* je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os O^*, možno I^* vyjadriť vzťahom

$$I^*=I-m\,\frac{l^2}{4}=\frac{1}{3}\,ml^2-\frac{1}{4}\,ml^2=\frac{1}{12}\,ml^2$$

133. Určite moment zotrvačnosti homogénnej kruhovej dosky hmotnosti $m=2$ kg a polomeru $r=10$ cm vzhľadom na os prechádzajúcu stredom dosky kolmo na rovinu dosky!

Riešenie:

Ak si zvolíme hmotný element dosky v tvare medzikružia šírky dx, tak vzhľadom na označenie na *obr. 41* možno pre hľadaný moment zotrvačnosti písať:

$$I=\int x^2\,\mathrm{d}m=\int_0^r x^2\,\frac{m}{\pi r^2}\,2\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2m}{r^2}\int_0^r x^3\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2m}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r=\frac{1}{2}\,mr^2=\frac{1}{2}\,2\ \mathrm{kg}\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}^2=0{,}01\ \mathrm{kg}\,.\,\mathrm{m}^2$$

134. Nájdite momenty zotrvačnosti rovnorodého hranola hmotnosti M s hranami a, b, c vzhľadom na osi kolmé na jednotlivé steny a prechádzajúce stredmi príslušných stien!

Riešenie:

Pri označení a voľbe vzťažnej sústavy podľa *obr. 42* je moment zotrvačnosti hranola vzhľadom na os x daný vzťahom

$$I=\int u^2\,\mathrm{d}m=\frac{m}{bc}\int_{-c/2}^{+c/2}\int_{-b/2}^{+b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\frac{m}{bc}\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$$

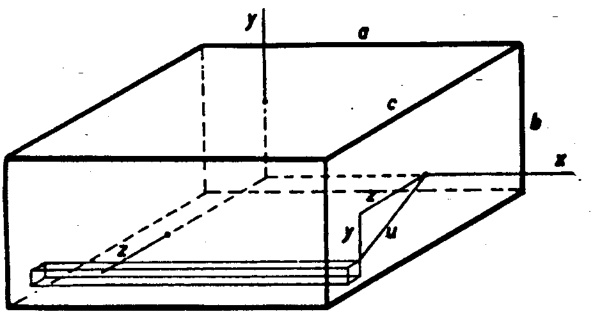
$$=4\frac{m}{bc}\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)\mathrm{d}z=4\frac{m}{bc}\left[\frac{b^3c}{48}+\frac{bc^3}{48}\right]=\frac{1}{12}m(b^2+c^2)$$

kde

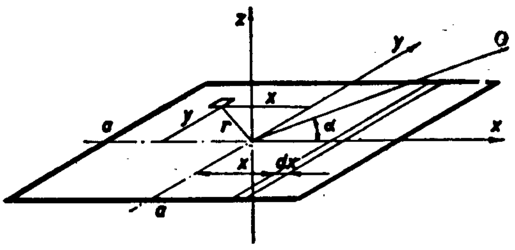
$$\mathrm{d}m=\frac{m}{abc}a\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,;\quad u^2=y^2+z^2$$

Je zrejmé, že celkom analogicky by sme pre momenty zotrvačnosti hranola vzhľadom na os y, resp. os z dostali vzťahy

$$I_y=\frac{1}{12}m(a^2+c^2)\,;\quad I_z=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$$



Obr. 42



Obr. 43

135. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej dosky tvaru štvorca s hmotnosťou $m=2$ kg a stranou $a=10$ cm vzhľadom na os o prechádzajúcu stredom dosky a zvierajúcu so svojím kolmým priemetom na rovinu dosky uhol $\alpha=45°$, pričom kolmý priemet osi na rovinu dosky je rovnobežný s príslušnými dvoma stranami štvorca *(obr. 43)*.

Riešenie:

Pre hľadaný moment zotrvačnosti platí:

$$I=I_1^*\cos^2\alpha+I_2^*\cos^2\beta+I_3^*\cos^2\gamma$$

kde I_1^*, I_2^*, I_3^* sú hlavné momenty zotrvačnosti a uhly α, β, γ sú uhly, ktoré zviera os o s hlavnými osami zotrvačnosti. V našom prípade sú tieto osi osami x, y, z. Z *obr. 43* a zo znenia úlohy je zrejmé, že $\alpha = 45°$, $\beta = 90°$ a $\gamma = 45°$. Vypočítame najprv hlavné momenty zotrvačnosti I_1^*, I_2^*, I_3^*. Je zrejmé, že

$$I_1^* = I_2^* = \int x^2\, dm = \frac{m}{a^2} \int_{-a/2}^{+a/2} x^2 a\, dx = \frac{m}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{+a/2} = \frac{1}{12}\, ma^2$$

Pre I_3^* platí:

$$I_3^* = \int r^2\, dm = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} (x^2 + y^2) \frac{m}{a^2}\, dx\, dy = \frac{4m}{a^2} \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{4m}{a^2} \int_0^{a/2} \left(\frac{a^3}{24} + \frac{ay^2}{2}\right) dy = \frac{4m}{a^2} \left[\frac{a^3 y}{24} + \frac{ay^3}{6}\right]_0^{a/2} = \frac{1}{6}\, ma^2$$

Pre hľadaný moment zotrvačnosti I potom dostaneme:

$$I = \frac{1}{12}\, ma^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\, ma^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{8}\, ma^2 = \frac{1}{8}\, 2\ \mathrm{kg} . 10^{-2}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}0025\ \mathrm{kg} . \mathrm{m}^2$$

136. Zotrvačník sa účinkom síl, ktorých moment vzhľadom na os otáčania má hodnotu $M = 200\ \mathrm{N.m}$, dáva do otáčavého pohybu okolo pevnej osi. Po uplynutí jednej minúty dosahuje počet otáčok $120\ \mathrm{min}^{-1}$. Aký je moment zotrvačnosti zotrvačníka?

Riešenie:

Pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb je $M = I\varepsilon$, takže

$$I = \frac{M}{\varepsilon}$$

Keďže M je konštantné, je konštantné aj ε, takže

$$\omega = \varepsilon t, \quad \text{t. j.} \quad \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi f}{t}$$

Po dosadení pre moment zotrvačnosti dostaneme:

$$I = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{Mt}{2\pi f} = \frac{200\ \mathrm{N.m.60\ s}}{2\pi \dfrac{120}{60\ \mathrm{s}}} = 955\ \mathrm{kg.m}^2$$

137. Homogénna valcová kovová tyč hustoty $\varrho = 8\ \mathrm{g.cm}^{-3}$ a dĺžky $l = 30\ \mathrm{cm}$ sa otáča okolo pevnej osi prechádzajúcej ťažiskom telesa kolmo na smer dĺžky uhlovou rýchlosťou ω. Aká najväčšia môže byť uhlová rýchlosť otáčania, keď najväčšie dovolené napätie, ktorému môžeme tyč v smere dĺžky vystaviť, je 60 MPa?

Riešenie:

Celková sila, ktorá pôsobí v smere dĺžky tyče, sa rovná súčtu odstredivých síl, ktorými vzdialenejšie časti tyče pôsobia na tie časti tyče, ktoré sa nachádzajú bližšie k osi otáčania. Príspevok elementu tyče, vyznačeného na *obr. 44*, k celkovej sile bude:

$$\mathrm{d}F = x\omega^2\,\mathrm{d}m = \varrho S\omega^2 x\,\mathrm{d}x$$

kde sme prierez tyče označili S. Celková sila potom zrejme bude:

$$F = \varrho S\omega^2 \int_0^{l/2} x\,\mathrm{d}x = \varrho S\omega^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{l/2} = \frac{\varrho S\omega^2 l^2}{8}$$

Keďže maximálne dovolené napätie

$$\frac{F}{S} = 60\ \mathrm{MPa}$$

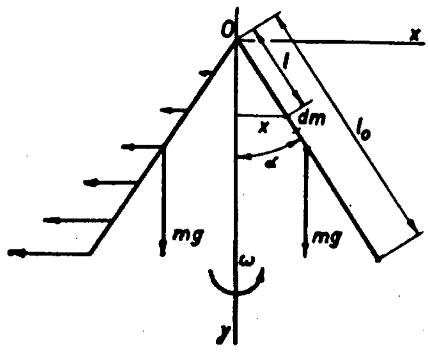
zrejme

$$\frac{\varrho S\omega^2 l^2}{8} = S\,.\,60\ \mathrm{MPa}$$

z čoho pre hľadanú uhlovú rýchlosť vyplýva

$$\omega = \sqrt{\frac{8\,.\,60\,.\,10^6\ \mathrm{kg}\,.\,\mathrm{m}^{-1}\,.\,\mathrm{s}^{-2}}{8\,.\,10^3\ \mathrm{kg}\,.\,\mathrm{m}^{-3}\,.\,9\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}^2}} \doteq 832\ \mathrm{s}^{-1}$$

Obr. 44



Obr. 45

138. Aká veľká má byť uhlová rýchlosť otáčania ω okolo osi y zariadenia znázorneného na *obr. 45*, aby uhol odklonu α tyčí dĺžky $l_0 = 1$ m od osi otáčania bol 45°?

Riešenie:

Pri riešení tejto úlohy je výhodné sa postaviť na stanovište spolurotujúcej vzťažnej sústavy. Z hľadiska tejto sústavy sú obe tyče v rovnovážnom stave. Potom sa celkový moment síl pôsobiacich na tyč, t. j. tiaže tyče a odstredivých síl (napr. vzhľadom na bod O) musí rovnať nule. Pre hodnotu momentu tiaže tyče vzhľadom na bod O platí:

$$M_1 = mg \frac{l_0}{2} \sin \alpha$$

Hodnotu momentu odstredivých síl vzhľadom na bod O vypočítame takto:

$$M_2 = \int x\omega^2 \,\mathrm{d}m \; l \cos \alpha = \int_0^{l_0} l \sin \alpha \,.\, \omega^2 \frac{m}{l_0} \,\mathrm{d}l \; l \cos \alpha =$$

$$= \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^{l_0} l^2 \,\mathrm{d}l = \frac{m}{l_0} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \left[\frac{l^3}{3}\right]_0^{l_0} =$$

$$= \frac{1}{3} m l_0^2 \, \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Keďže moment tiaže a moment odstredivých síl vzhľadom na bod O (ako to vidieť z *obr. 45*) majú opačný smer, podmienka rovnováhy je daná vzťahom

$$mg \frac{l_0}{2} \sin \alpha = \frac{1}{3} m l_0^2 \, \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Pre hľadanú uhlovú rýchlosť otáčania ω potom dostávame:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l_0 \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{3g\sqrt{2}}{2l_0}} = 4{,}56 \text{ s}^{-1}$$

139. Teleso valcovitého tvaru hmotnosti $m = 10$ kg a polomeru $R = 20$ cm sa otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ okolo svojej geometrickej osi. Vypočítajte moment hybnosti telesa vzhľadom na ľubovoľný bod osi otáčania!

Riešenie:

Pre moment hybnosti telesa vzhľadom na bod O na osi otáčania možno písať:

$$\boldsymbol{L} = \int (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}m$$

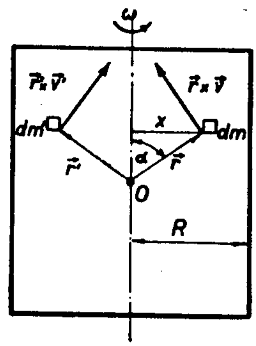
Dva symetricky položené hmotné elementy dm a dm' *(obr. 46)* prispievajú k celkovému momentu hybnosti len zložkami svojich momentov hybnosti, spadajúcimi do smeru osi otáčania, lebo súčet zložiek kolmých na os otáčania je nula.

Keďže $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$, pre hodnotu momentu hybnosti, ktorý bude mať zrejme smer osi otáčania, bude platiť:

$$L = \int rv \sin \alpha \, \mathrm{d}m = \int xv \, \mathrm{d}m = \int x^2 \omega \, \mathrm{d}m = \omega \int x^2 \, \mathrm{d}m = I\omega$$

lebo

$$r \sin \alpha = x\,; \quad v = x\omega$$



Obr. 46

Keďže moment zotrvačnosti valca vzhľadom na svoju geometrickú os $I = \frac{1}{2} mR^2$, platí:

$$L = I\omega = \frac{1}{2} mR^2\omega = \frac{1}{2} 10 \text{ kg} \cdot 0{,}04 \text{ m}^2 \cdot \pi \text{ s}^{-1} = 0{,}628 \text{ kg m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

140. Drevená tyč dĺžky $l = 40$ cm a hmotnosti $m = 1$ kg sa môže otáčať okolo osi, ktorá je na tyč kolmá a prechádza jej stredom. Na koniec tyče narazí strela hmotnosti $m_1 = 10$ g, ktorá letí rýchlosťou $v_1 = 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ v smere kolmom na os i na tyč. Vypočítajte uhlovú rýchlosť, ktorou sa tyč uvedie do otáčavého pohybu, keď v nej strela uviazne!

Riešenie:

Použijeme tu zákon o zachovaní momentu hybnosti izolovanej sústavy, ktorú teraz tvorí tyč spolu so strelou. Pred zasiahnutím tyče strelou je celkový moment hybnosti sústavy vzhľadom na stred tyče daný momentom hybnosti strely vzhľadom na stred tyče, takže má hodnotu

$$L_1 = m_1 v_1 \frac{l}{2}$$

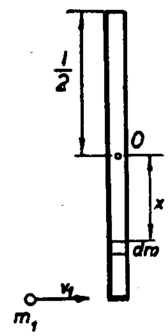
Moment hybnosti tyče, ktorá sa otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi prechádzajúcej stredom tyče *(obr. 47)*, vzhľadom na stred tyče má smer spadajúci do smeru osi tyče a hodnotu

$$L_2 = \int xv \, dm = \int x \, . \, x\omega \, dm = \omega \int x^2 \, dm = \omega I$$

kde I je moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os otáčania. Zákon o zachovaní momentu hybnosti izolovanej sústavy poskytuje potom pre náš prípad rovnicu

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \omega I + m_1 \frac{l}{2} v$$

kde v je rýchlosť, ktorou sa pohybuje strela spolu s tyčou tesne po uviaznutí v tyči.



Obr. 47

Keďže sa $v = \frac{1}{2} \omega$ a $I = \frac{1}{12} ml^2$, platí

$$m_1 v_1 \frac{l}{2} = \frac{1}{12} ml^2 \omega + m_1 \frac{l^2}{4} \omega$$

Pre hľadané ω dostaneme:

$$\omega = \frac{m_1 v_1 l}{2\left(\frac{1}{12} ml^2 + m_1 \frac{l^2}{4}\right)} = \frac{0{,}01 \text{ kg} . 200 \text{ m} . \text{s}^{-1} . 0{,}4 \text{ m}}{2\left(\frac{1}{12} 1 \text{ kg} . 0{,}16 \text{ m}^2 + 0{,}01 \text{ kg} \frac{0{,}16 \text{ m}^2}{4}\right)} = 29{,}1 \text{ s}^{-1}$$

141. Vypočítajte kinetickú energiu dutej gule s vonkajším priemerom $d_1 = 20$ cm, vnútorným priemerom $d_2 = 18$ cm a hmotnosťou $m = 250$ g, keď sa táto guľa otáča okolo svojho priemeru frekvenciou $f = 1500 \text{ min}^{-1}$!

Riešenie:

Pre kinetickú energiu telesa otáčajúceho sa okolo pevnej osi platí vzťah

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Moment zotrvačnosti plnej gule s polomerom r vzhľadom na jej priemer je daný vzťahom $I_p = \frac{2}{5} m^* r^2$, kde m^* je hmotnosť plnej gule. Na dutú guľu sa môžeme pozerať ako na rozdiel dvoch plných homogénnych gúľ, jednej s polomerom r_1 a druhej s polomerom r_2. Pre moment zotrvačnosti dutej gule bude potom platiť:

$$I_d = \frac{2}{5} m_1 r_1^2 - \frac{2}{5} m_2 r_2^2$$

pričom hmotnosti plných gúľ s polomermi r_1, r_2 sú m_1, m_2. Je zrejmé, že $m_1 - m_2 = m$, kde m je hmotnosť dutej gule. Hmotnosti m_1, m_2 a polomery r_1, r_2 súvisia navzájom vzťahom

$$m_1 : m_2 = r_1^3 : r_2^3$$

alebo

$$m_1 : m = r_1^3 : (r_1^3 - r_2^3)$$

$$m_2 : m = r_2^3 : (r_1^3 - r_2^3)$$

Použitím týchto vzťahov dostaneme pre moment zotrvačnosti dutej gule vzhľadom na jej priemer vzťah

$$I_d = \frac{2}{5} m \left(\frac{r_1^5}{r_1^3 - r_2^3} - \frac{r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \right) = \frac{2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}$$

Kinetická energia otáčajúcej sa dutej gule potom bude

$$W_k = \frac{1}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} \omega^2 = \frac{4\pi^2 f^2}{5} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} =$$

$$= \frac{4 . 3{,}14 \left(\frac{1500}{60\ \mathrm{s}} \right)^2}{5} \cdot 250\ \mathrm{g} \frac{10^5 - 9^5}{10^3 - 9^3}\ \mathrm{cm}^2 = 18{,}6\ \mathrm{J}$$

142. Zotrvačníkové koleso, ktoré má spolu s hriadeľom moment zotrvačnosti $I = 200\ \mathrm{kg.m^2}$ vzhľadom na os otáčania, sa otáča tak, že koná 180 otáčok za minútu. Vplyvom trenia v ložiskách sa koleso zastaví dve minúty od okamihu, ako prestali pôsobiť vonkajšie sily svojím otáčavým momentom. Aký je moment síl trenia za predpokladu, že je konštantný?

Riešenie:

Vyjdime z vety, ktorá hovorí, že práca vonkajších síl pri otočení telesa o určitý uhol sa rovná prírastku kinetickej energie telesa, ktorý teleso pri tomto otočení získa, t. j.

$$A = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

Keďže teraz sily trenia pôsobia proti pohybu, platí

$$A = -M\varphi$$

pričom M je hľadaný moment síl trenia a φ uhol, ktorý opíše teleso pri svojom otáčavom pohybe za uvedené dve minúty, kým sa zastaví. Keď ďalej označíme uhlovú rýchlosť otáčania v okamihu, v ktorom prestali pôsobiť vonkajšie sily, symbolom ω_0, dostávame

$$-M\varphi = -\frac{1}{2} I\omega_0^2$$

takže pre hľadaný moment síl trenia dostaneme:

$$M = \frac{1}{2}\frac{I\omega_0^2}{\varphi}$$

Keďže však $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$ a pre $t_0 = 2$ min sa $\omega_0 - \varepsilon t_0 = 0$, takže

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_0}$$

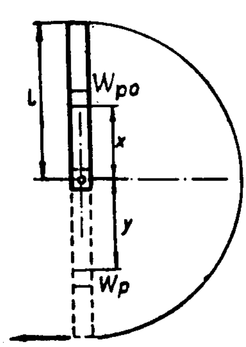
dostávame

$$\varphi = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2}\varepsilon t_0^2 = \omega_0 t_0 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_0} t_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0 t_0$$

Pre M možno potom ďalej písať:

$$M = \frac{1}{2}\frac{I\omega_0^2}{\frac{1}{2}\omega_0 t_0} = \frac{I\omega_0}{t_0} = \frac{I\,.\,2\pi f_0}{t_0} = \frac{200\ \text{kg}\,.\,\text{m}^2\,.\,2\,.\,3{,}14\,\frac{180}{60}\ \text{s}^{-1}}{120\ \text{s}} = 31{,}4\ \text{N}\,.\,\text{m}$$

143. Tyč hmotnosti 2 kg a dĺžky $l = 1$ m je uložená na vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Akou rýchlosťou prejde druhý koncový bod tyče svojou najnižšou polohou, keď tyč pustíme z najvyššej polohy *(obr. 48)* ?



Obr. 48

Akou silou je namáhaná os tyče v okamihu prechodu tyče najnižšou polohou?

Riešenie:

Použijeme zákon o zachovaní mechanickej energie. Ak uvažujeme potenciálnu energiu tyče vzhľadom na vodorovnú rovinu prechádzajúcu osou otáčania, pre potenciálnu energiu tyče v najvyššej polohe možno písať:

$$W_{po} = \int gx \, \mathrm{d}m = \frac{mg}{l} \int_0^l x \, \mathrm{d}x = \frac{mg}{l} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2} mgl$$

a v najnižšej polohe zase

$$W_p = -\frac{1}{2} mgl$$

Podľa zákona o zachovaní mechanickej energie musí byť súčet celkovej energie v najvyššej a najnižšej polohe rovnaký, takže možno písať:

$$\frac{1}{2} mgl = -\frac{1}{2} mgl + \frac{1}{2} I\omega^2$$

t. j.

$$mgl = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Keďže $\omega = \frac{v}{l}$ a $I = \frac{1}{3} ml^2$,

$$mgl = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \cdot \frac{v^2}{l^2}$$

takže

$$v = \sqrt{6gl} \doteq 7{,}7 \text{ m.s}^{-1}$$

Sila, ktorou je namáhaná os otáčania pri prechode najnižšou polohou, je daná súčtom tiaže tyče a odstredivej sily F_0, pre ktorú platí:

$$F_0 = \int y\omega^2 \, \mathrm{d}m = \frac{m}{l} \omega^2 \int_0^l y \, \mathrm{d}y = \frac{m}{l} \omega^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2} ml\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} ml \frac{v^2}{l^2} = \frac{1}{2} \frac{m}{l} 6gl = 3mg$$

Celková sila, ktorou je namáhaná os otáčania, je:

$$F = mg + F_0 = mg + 3mg = 4mg \doteq 78{,}5 \text{ N}$$

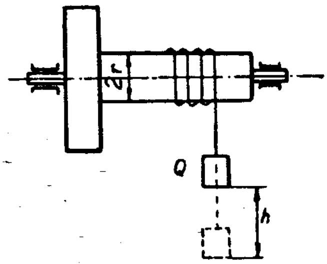
144. Koleso na hriadeli má moment zotrvačnosti I vzhľadom na os otáčania. Na hriadeli s polomerom r je navinuté lano, na ktorom je zavesené závažie tiaže G. V určitom okamihu sa dá závažie do pohybu vplyvom vlastnej tiaže. O akú dráhu klesne závažie za čas t_0?

Riešenie:

Na riešenie použijeme opäť zákon o zachovaní mechanickej energie, ktorý pre všeobecný okamih pohybu závažia poskytuje rovnicu

$$mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

keďže úbytok potenciálnej energie závažia *(obr. 49)* sa spotrebuje jednak na prírastok kinetickej energie závažia $\frac{1}{2} mv^2$, ako aj na prírastok kinetickej energie otáčajúceho sa kolesa na hriadeli $\frac{1}{2} I\omega^2$.



Obr. 49

Keďže $v = r\omega$, rovnicu možno upraviť na tvar

$$mgh = \frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{r^2} + m\right)$$

Derivovaním celej rovnice podľa času dostávame:

$$mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I}{r^2} + m\right)$$

Keďže $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = v$, pre zrýchlenie závažia $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ vyplýva:

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{r^2} + m} = \frac{G}{\frac{I}{r^2} + \frac{G}{g}}$$

Ako vidieť, zrýchlenie je konštantné, pohyb závažia bude teda priamočiary, rovnomerne zrýchlený. Pre hľadanú dráhu h_0, o ktorú závažie poklesne za čas t_0, možno potom písať:

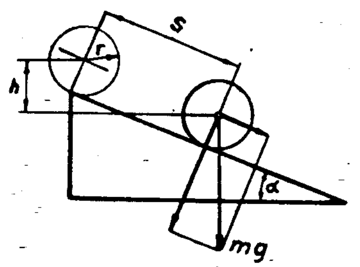
$$h_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{\frac{I}{r^2} + \frac{G}{g}} t_0^2$$

145. Homogénne teleso guľovitého tvaru s polomerom r a hmotnosťou m sa valí vplyvom svojej tiaže po naklonenej rovine, zvierajúcej s vodorovnou rovinou uhol α. Akú rýchlosť má ťažisko gule po prebehnutí dráhy s a v akom vzťahu je táto rýchlosť k rýchlosti, ktorú by malo ťažisko gule pri čistom šmýkaní bez trenia po uvedenej naklonenej rovine?

Riešenie:

Podľa zákona o zachovaní mechanickej energie sa celková kinetická energia gule vo všeobecnom okamihu rovná úbytku jej potenciálnej energie na prejdenom úseku dráhy *(obr. 50).* Teda

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$



Obr. 50

lebo výsledný pohyb gule môžeme považovať za súčet postupného pohybu a otáčavého pohybu okolo osi prechádzajúcej jej ťažiskom. Keďže moment zotrvačnosti gule vzhľadom na jej priemer $I = \frac{2}{5} mr^2$ a keďže $\omega = \frac{v}{r}$ a $h = s \sin \alpha$, možno uvedenú rovnicu upraviť na tvar

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mr^2 \frac{v^2}{r^2}$$

z čoho ďalej vyplýva:

$$\frac{7}{10} v^2 = gs \sin \alpha$$

t. j.

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gs \sin \alpha}$$

Pri čistom šmýkaní bez trenia odpadá otáčavý pohyb gule, takže

$$\frac{1}{2}mv^{*2} = mgs \sin \alpha$$

z čoho

$$v^* = \sqrt{2gs \sin \alpha}$$

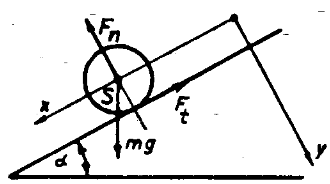
Súvis v a v^* je potom daný výrazom

$$v = \sqrt{\frac{5}{7}}\, v^* \doteq 0{,}84v^*$$

146. Homogénny rotačný valec s polomerom r a hmotnosťou m sa valí bez šmýkania vplyvom svojej tiaže po naklonenej rovine, ktorá s vodorovnou rovinou zviera uhol α. Treba určiť zrýchlenie ťažiska valca a^* a rýchlosť v^*, ktorou sa vyznačuje ťažisko po prejdení dráhy s, keď v čase $t = 0$ bol valec v pokoji.

Riešenie:

Na valec pôsobia tieto sily: tiaž valca mg, reakcia naklonenej roviny F_n, ktorá je rovnako veľká ako normálová sila, ktorou valec tlačí na naklonenú rovinu,



Obr. 51

a trenie F_t na styku valca s naklonenou rovinou *(obr. 51)*. Pohyb valca môžeme vyjadriť pohybom ťažiska S a otáčaním valca okolo osi prechádzajúcej ťažiskom a kolmej na roviny základní valca. Pohybové rovnice valca potom budú:

$$m \frac{d^2x^*}{dt^2} = mg \sin \alpha - F_t$$

$$m \frac{d^2y^*}{dt^2} = mg \cos \alpha - F_n$$

$$I^* \frac{d\omega}{dt} = F_t r$$

pričom súradnice ťažiska valca sme označili x^*, y^*.

Je zrejmé, že v každom okamihu $\frac{d^2y^*}{dt^2}=0$, takže

$$mg\cos\alpha - F_n = 0$$

čiže

$$F_n = mg\cos\alpha$$

Keďže sa valec pohybuje bez šmýkania, rýchlosť ťažiska v každom okamihu bude:

$$v^* = \frac{dx^*}{dt} = r\omega$$

Pre zrýchlenie ťažiska potom dostaneme:

$$a^* = \frac{d^2x^*}{dt^2} = \frac{dv^*}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

Po dosadení tohto výrazu do prvej pohybovej rovnice dostaneme:

$$mr\frac{d\omega}{dt} = mg\sin\alpha - F_t$$

Ak vyjadríme F_t z tretej pohybovej rovnice, po úprave dostaneme:

$$(mr^2 + I^*)\frac{d\omega}{dt} = mgr\sin\alpha$$

Keďže $I^* = \frac{1}{2}mr^2$, platí

$$\frac{3}{2}mr^2\frac{d\omega}{dt} = mgr\sin\alpha$$

odkiaľ pre $a^* = r\frac{d\omega}{dt}$ vyplýva:

$$a^* = \frac{dv^*}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

Pre hľadanú rýchlosť možno písať:

$$v^* = a^*t$$

Keďže $s = \frac{1}{2}a^*t^2$, platí $t = \sqrt{\frac{2s}{a^*}}$, takže

$$v^* = a^* \sqrt{\frac{2s}{a^*}} = \sqrt{2a^*s} = \sqrt{\frac{4}{3}\, gs \sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{gs \sin\alpha}{3}}$$

147. Homogénna kruhová doska s hmotnosťou $m = 2$ kg a polomerom $r = 10$ cm sa kýve ako fyzikálne kyvadlo okolo vodorovnej osi, prechádzajúcej obvodom dosky. Nájdite periódu tohto fyzikálneho kyvadla a jeho redukovanú dĺžku!

Riešenie:

Pre periódu fyzikálneho kyvadla platí:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}}$$

Podľa Steinerovej vety pre moment zotrvačnosti dosky vzhľadom na os otáčania vyplýva:

$$I = \frac{1}{2}\, mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}\, mr^2$$

Pre periódu T potom dostaneme:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{3r}{2g}} = 2\,.\,3{,}14 \sqrt{\frac{3\,.\,0{,}10\ \text{m}}{2\,.\,9{,}81\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-2}}} = 0{,}77\ \text{s}$$

Pre redukovanú dĺžku tohto fyzikálneho kyvadla platí:

$$l = \frac{I}{mr} = \frac{\frac{3}{2}\, mr^2}{mr} = \frac{3}{2}\, r = 15\ \text{cm}$$

148. Daná je priama homogénna tyč dĺžky $l = 1$ m. Treba nájsť vzdialenosť od stredu tyče, v ktorej treba tyč upevniť, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou.

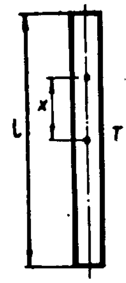
Riešenie:

Perióda fyzikálneho kyvadla je daná vzťahom

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgx}}$$

Použitím Steinerovej vety možno pre moment zotrvačnosti tyče vzhľadom na os kývania *(obr. 52)* písať:

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + mx^2$$



Obr. 52

Aby perióda fyzikálneho kyvadla bola minimálna, musí byť minimálny výraz

$$y = \frac{I}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} ml^2 + mx^2}{mgx} = \frac{\frac{1}{12} l^2 + x^2}{gx}$$

Tento výraz je minimálny, keď

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2gx^2 - g\left(\frac{1}{12} l^2 + x^2\right)}{g^2 x^2} = 0$$

Táto podmienka je splnená pre x dané vzťahom

$$x = \frac{l}{2\sqrt{3}} = \frac{1\ m}{3{,}464} \doteq 0{,}29\ m$$

Zistením hodnoty druhej derivácie uvedeného výrazu pre y sa možno presvedčiť, že je to skutočne minimálna perióda. Možno to však vidieť aj priamo z tvaru výrazu pre periódu fyzikálneho kyvadla, keďže pre $x \to 0$ platí $T \to \infty$.

149. Homogénne teleso tvaru hranola s hmotnosťou $m = 10$ kg a rozmermi $a = 20$ cm, $b = 5$ cm, $c = 10$ cm sa otáča okolo mechanickej osi spadajúcej do smeru telesovej uhlopriečky uhlovou rýchlosťou $\omega = 2\pi\ s^{-1}$. Os otáčania je uložená v ložiskách nachádzajúcich sa vo vzdialenosti $l = 50$ cm od seba *(obr. 53)*. Nájdite moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania, ako aj tlakové sily, ktoré počas otáčania telesa pôsobia od odstredivých síl na ložiská!

Riešenie:

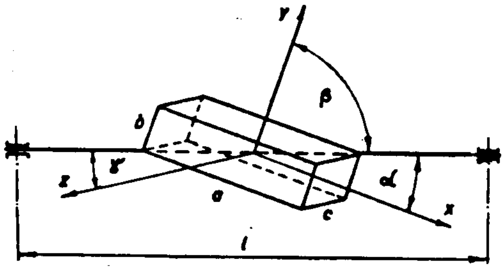
Pre hľadaný moment zotrvačnosti telesa platí:

$$I = I_1^* \cos^2 \alpha + I_2^* \cos^2 \beta + I_3^* \cos^2 \gamma$$

kde I_1^*, I_2^*, I_3^* sú hlavné momenty zotrvačnosti. Hlavné osi zotrvačnosti spadajú do smeru osí x, y, z. Z *obr. 53* vidieť, že

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Obr. 53

Z príkladu 134 vieme, že

$$I_1^* = \frac{1}{12}\,m(b^2+c^2); \quad I_2^* = \frac{1}{12}\,m(a^2+c^2); \quad I_3^* = \frac{1}{12}\,m(a^2+b^2)$$

Potom možno písať

$$I = \frac{1}{12}\,m\left[\frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\,m\,\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2+c^2} \doteq 0{,}0167\ \mathrm{kg.m^2}$$

Tlaková sila F, pôsobiaca na každé ložisko od odstredivých síl, súvisí s hodnotou momentu odstredivých síl vzhľadom na niektorý bod osi otáčania podľa vzťahu

$$Fl = M$$

Moment odstredivých síl je daný vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{U}\omega^2$$

kde $\boldsymbol{U}$ je deviačný moment dosky vzhľadom na os otáčania, pre ktorý platí vzťah

$$\boldsymbol{U} = (\mathsf{T}^* \,.\, \boldsymbol{\varrho}) \times \boldsymbol{\varrho}$$

kde $\boldsymbol{\varrho}$ je jednotkový vektor v smere osi otáčania. Keďže

$$\mathsf{T}^* = I_1^*\boldsymbol{ii} + I_2^*\boldsymbol{jj} + I_3^*\boldsymbol{kk}$$

a

$$\boldsymbol{\varrho} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

platí

$$\mathsf{T}^*.\boldsymbol{\varrho} = I_1^* \cos\alpha\boldsymbol{i} + I_2^* \cos\beta\boldsymbol{j} + I_3^* \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

Pre deviačný moment $\boldsymbol{U}$ možno teda písať:

$$\boldsymbol{U} = (\mathsf{T}^*.\boldsymbol{\varrho}) \times \boldsymbol{\varrho} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}, & \boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k} \\ I_1^* \cos\alpha, & I_2^* \cos\beta, & I_3^* \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}(I_2^* \cos\beta\cos\gamma - I_3^* \cos\beta\cos\gamma) - \boldsymbol{j}(I_1^* \cos\alpha\cos\gamma -$$

$$- I_3^* \cos\alpha\cos\gamma) + \boldsymbol{k}(I_1^* \cos\alpha\cos\beta - I_2^* \cos\alpha\cos\beta) =$$

$$= \boldsymbol{i}(I_2^* - I_3^*)\cos\beta\cos\gamma - \boldsymbol{j}(I_1^* - I_3^*)\cos\alpha\cos\gamma +$$

$$+ \boldsymbol{k}(I_1^* - I_2^*)\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= \frac{m}{12(a^2+b^2+c^2)}[bc(c^2-b^2)\boldsymbol{i} + ac(a^2-c^2)\boldsymbol{j} + ab(b^2-a^2)\boldsymbol{k}]$$

Pre absolútnu hodnotu deviačného momentu dostaneme:

$$U = \frac{m}{12(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{b^2c^2(c^2-b^2)^2 + a^2c^2(a^2-c^2)^2 + a^2b^2(b^2-a^2)^2} =$$

$$= \frac{10\ \text{kg}}{12.5{,}25.10^{-2}\ \text{m}^{-2}} \cdot 7.10^{-4}\ \text{m}^4 = 0{,}011\ \text{kg.m}^2$$

Hodnota momentu odstredivých síl

$$M = U\omega^2 = 0{,}011\ \text{kg.m}^2.4\pi^2\ \text{s}^{-2} = 0{,}4343\ \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}$$

Napokon pre tlakovú silu F dostávame:

$$F = \frac{M}{l} = \frac{0{,}4343\ \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}}{0{,}5\ \text{m}} = 0{,}8686\ \text{N}$$

150. Homogénny kruhový disk s polomerom $r = 0{,}2$ m sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = 300\ \text{s}^{-1}$ okolo osi kolmej na rovinu disku a prechádzajúcej jeho stredom, ktorá je upevnená v jednom bode. Nájdite hodnotu uhlovej rýchlosti precesie osi, keď bod upevnenia osi je vzdialený od ťažiska disku $a = 0{,}15$ m!

Riešenie:

Pre uhlovú rýchlosť Ω precesie osi platí vzťah

$$\Omega = \frac{mg\ a}{I\omega}$$

Keďže sa $I = \frac{1}{2}\ mr^2$, možno písať

$$\Omega = \frac{mga}{\frac{1}{2}\ mr^2\omega} = \frac{2ga}{r^2\omega} = \frac{2\,.\,9{,}81\,.\,0{,}15}{0{,}04\,.\,300}\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}245\ \mathrm{s}^{-1}$$

Vidieť, že $\Omega \ll \omega$.

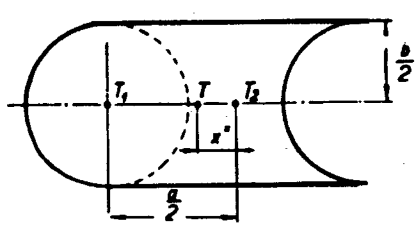
Úlohy

151. Štyri hmotné body s hmotnosťami $m_1 = 2$ g, $m_2 = 5$ g, $m_3 = 10$ g, $m_4 = 7$ g sú rozložené v priestore postupne tak, že zaujímajú polohy $A_1(3, 4, 5)$, $A_2(-2, -3, -4)$, $A_3(-4, 2, 7)$, $A_4(1, -4, -6)$, kde súradnice v zátvorkách sú udané v cm. Nájdite polohu ťažiska tejto sústavy hmotných bodov!

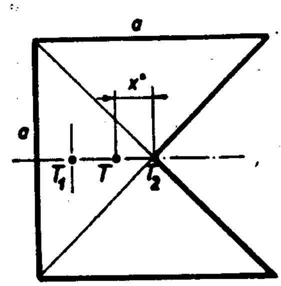
[$x^* = -1{,}54$ cm; $y^* = -0{,}62$ cm; $z^* = 0{,}75$ cm]

152. Nájdite polohu ťažiska útvaru znázorneného na *obr. 54*, ktorý vznikol tak, že sa z obdĺžnika so stranami a, b vyrezal na jednej jeho strane polkruh polomeru $\frac{b}{2}$ a priložil sa na druhú stranu obdĺžnika!

$\left[x^* = \frac{\pi b}{8}\right]$



Obr. 54



Obr. 55

153. Nájdite polohu ťažiska útvaru, ktorý vznikne, keď zo štvorca so stranou a vystrihneme trojuholník podľa *obr. 55*!

$\left[x^* = \frac{a}{9}\right]$

154. Nájdite polohu ťažiska drôtu ohnutého do tvaru štvrťkružnice s polomerom $R = 10$ cm!

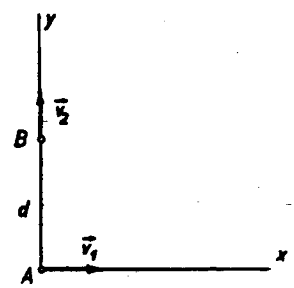
$\left[x^* = y^* = \dfrac{2R}{\pi} = 6{,}3 \text{ cm},\right.$ pričom začiatok súradnicovej sústavy je v strede kružnice a súradnicové osi sú polomery ohraničujúce štvrťkružnicu$\left.\right]$

155. Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru polgule s polomerom R!

$$\left[x^* = 0;\ y^* = \frac{3}{8}R;\ z^* = 0\right]$$

156. Dva voľné hmotné body A a B s hmotnosťami m_1 a m_2 sa rovnomerne pohybujú. V čase $t = 0$ vzdialenosť bodov $|AB| = d$, rýchlosť v_2 bodu B má smer spojnice AB a rýchlosť v_1 bodu je na spojnicu kolmá *(obr. 56)*. Nájdite rovnicu dráhy a rýchlosť ťažiska tejto sústavy hmotných bodov!

$$\left[y^* = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} x^* + \frac{m_2 d}{m_1 + m_2};\ v^* = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}\right]$$



Obr. 56

157. Akou rýchlosťou sa dá do pohybu strelec stojaci na dokonale hladkom ľade po výstrele z pušky, keď hmotnosť strelca s puškou a výstrojou $M = 70$ kg, hmotnosť strely $m = 10$ g a rýchlosť strely, ktorou opúšťa hlaveň, $v_0 = 700 \text{ m.s}^{-1}$?

$$\left[v = \frac{m v_0}{M} = 0{,}1 \text{ m.s}^{-1}\right]$$

158. Vozík s pieskom má hmotnosť $m_1 = 100$ kg a pohybuje sa priamočiaro po vodorovnej rovine stálou rýchlosťou $v_1 = 1 \text{ m.s}^{-1}$. Oproti vozíku letí guľa hmotnosti $m_2 = 2$ kg rýchlosťou $v_2 = 70 \text{ m.s}^{-1}$, narazí na vozík a zaryje sa do piesku. Na ktorú stranu a akou rýchlosťou sa bude pohybovať vozík po dopade gule?

$\left[v = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}392 \text{ m.s}^{-1};\right.$ záporné znamienko vyjadruje, že po dopade gule vozík zmení smer pohybu$\left.\right]$

159. Do telesa tvaru gule, zaveseného zvisle na vlákne, narazí vodorovne letiaci náboj, ktorého hmotnosť je 1000-krát menšia ako hmotnosť telesa, a uviazne v tomto telese. Aká bola rýchlosť náboja pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol 10°? Dĺžka závesu od miesta upevnenia do stredu gule je $l = 1$ m.

[$v \doteq 550$ m.s^{-1}]

160. Aká reaktívna sila ženie dopredu raketu, z ktorej za každú sekundu uniká 100 kg plynov, vzniknutých spálením paliva, relatívnou rýchlosťou $v_r =$ $= 3000$ m.s^{-1}?

$$\left[F_r = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\, v_r = 3 \,.\, 10^5 \ \mathrm{N}\right]$$

161. O koľko treba predĺžiť homogénnu tyč dĺžky $l = 0{,}75$ m, aby sa jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom tyče zdvojnásobil?

[$\Delta l = 0{,}26 l = 0{,}195$ m]

162. Nájdite moment zotrvačnosti rovnorodej kruhovej dosky hmotnosti m a polomeru R vzhľadom na os spadajúcu do smeru priemeru!

$$\left[I = \frac{1}{4}\, mR^2\right]$$

163. Nájdite moment zotrvačnosti rovnorodej dosky tvaru rovnoramenného trojuholníka s ramenami b a základňou $2a$ vzhľadom na os kolmú na základňu a prechádzajúcu protiľahlým vrcholom, keď hmotnosť dosky je m!

$$\left[I = \frac{1}{6}\, ma^2\right]$$

164. Určite moment zotrvačnosti homogénnej plnej gule hmotnosti m a polomeru R vzhľadom na os prechádzajúcu stredom gule!

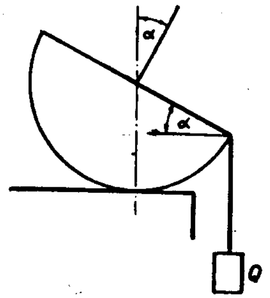
$$\left[I = \frac{2}{5}\, mR^2\right]$$

165. Nájdite moment zotrvačnosti homogénnej dosky tvaru štvorca so stranou $a = 10$ cm a hmotnosťou $m = 2$ kg vzhľadom na svoju uhlopriečku ako os!

$$\left[I = \frac{1}{12}\, ma^2 \doteq 0{,}0017\ \mathrm{kg.m^2}\right]$$

166. Závažie Q tiaže $G = 50$ N je zavesené na okraji homogénnej polgule tiaže $G_0 = 100$ N *(obr. 57)*, ktorá leží svojou vypuklou plochou na vodorovnej rovine. Aký musí byť uhol odklonu α, aby nastala rovnováha?

$$\left[\operatorname{tg}\alpha \doteq \frac{8G}{2G_0};\ \alpha \doteq 53°\,10'\right]$$



Obr. 57

167. Na šikmej rovine sklonenej pod uhlom $\alpha = 10°$ stojí rotačný valec s polomerom $r = 5$ cm. Aká môže byť maximálna výška valca, aby sa neprevrátil?

$$\left[h = \frac{2r}{\operatorname{tg}\alpha} = 56{,}7\ \text{cm}\right]$$

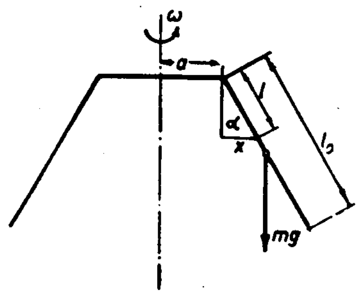
168. O stenu je opretý rebrík. Koeficient trenia rebríka o stenu $\mu_1 = 0{,}4$, koeficient trenia rebríka o vodorovnú podlahu $\mu_2 = 0{,}5$. Aký najmenší uhol môže zvierať rebrík s vodorovnou podlahou, aby sa neskĺzol, keď predpokladáme, že ťažisko rebríka je v jeho strede?

$$\left[\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = 0{,}8;\ \varphi = 38°\,40'\right]$$

169. Homogénna kruhová doska s polomerom $r = 0{,}3$ m a hmotnosťou 60 kg sa pri svojom otáčavom pohybe okolo osi kolmej na rovinu dosky a prechádzajúcej stredom dosky podrobuje účinku vonkajších síl, ktorých moment má konštantnú zložku do smeru osi otáčania hodnoty $m = 0{,}1$ N.m. Vypočítajte uhlové zrýchlenie otáčavého pohybu dosky, ako aj prácu, ktorú vykonajú vonkajšie sily za prvé tri minúty otáčania dosky, keď v čase $t = 0$ bola doska v pokoji!

[$\varepsilon \doteq 0{,}037\ \text{s}^{-2}$; $A = 60$ J]

170. V zariadení podľa *obr. 58* vypočítajte uhlovú rýchlosť otáčania, pri



Obr. 58

ktorej sa odklon tyče dĺžky $l_0 = 1$ m od zvislého smeru rovná $\alpha = 30°$, keď dĺžka $a = 1$ m!

$$\left[\omega = \sqrt{\frac{3g \operatorname{tg} \alpha}{3a + 2l_0 \sin \alpha}} = 2{,}06 \text{ s}^{-1}\right]$$

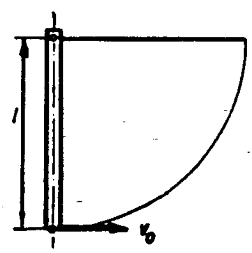
171. Vypočítajte kinetickú energiu telesa valcovitého tvaru s polomerom $r = 8$ cm a hmotnosťou $m = 1{,}5$ kg v čase $t = 5$ s, keď sa toto teleso otáča okolo svojej geometrickej osi s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon = \frac{\pi}{8} \text{ s}^{-2}$, ak v čase $t = 0$ bolo teleso v pokoji!

[$W_k = 0{,}009\ 24$ J]

172. Akou konštantnou uhlovou rýchlosťou sa otáča homogénna kovová guľa hmotnosti $m = 5$ kg a polomeru $r = 10$ cm okolo svojho priemeru, keď jej pohybová energia $W_k = 0{,}1$ J?

[$\omega \doteq 3{,}3 \text{ s}^{-1}$]

173. Tyč dĺžky $l = 1$ m je upevnená tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče *(obr. 59)*. Akú rýchlosť máme udeliť



Obr. 59

voľnému koncovému bodu tyče, aby pri svojom vychýlení z rovnovážnej polohy dosiahol vodorovnú rovinu prechádzajúcu osou otáčania?

[$v_0 = \sqrt{3gl} = 5{,}4 \text{ m.s}^{-1}$]

174. Teleso tvaru kruhovej obruče hmotnosti $m = 10$ kg, s vonkajším priemerom $d = 1$ m, zanedbateľnej hrúbky sa valí bez šmýkania po naklonenej rovine, ktorá zviera s vodorovnou rovinou uhol $\alpha = 30°$. Určite, akú rýchlosť má ťažisko obruče po prejdení dráhy $s = 5$ m, keď na začiatku tejto dráhy bola rýchlosť obruče nulová!

[$v = \sqrt{gs \sin \alpha} = 4{,}95 \text{ m.s}^{-1}$]

175. Homogénne teleso tvaru rotačného valca sa otáča okolo geometrickej osi. Aká je hodnota momentu vonkajších síl vzhľadom na os otáčania, keď sa hodnota momentu hybnosti telesa vzhľadom na os otáčania mení s časom tak, že za 5 sekúnd vzrastie z nulovej hodnoty na hodnotu $L = 0{,}157\ \mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$?

$[M = 0{,}0314\ \mathrm{N.m}]$

176. Krasokorčuliar sa otáča okolo svojej zvislej osi so stálou frekvenciou $f_0 = 2\ \mathrm{s^{-1}}$, pričom jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania je $I_0 = 2\ \mathrm{kg.m^2}$. Ako sa zmenší jeho uhlová rýchlosť otáčania, keď roztiahnutím rúk zväčší svoj moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania na hodnotu $I_1 = 2{,}1\ \mathrm{kg\,.\,m^2}$?

[Uhlová rýchlosť otáčania sa zmenší o hodnotu $\Delta\omega = 0{,}6\ \mathrm{s^{-1}}$]

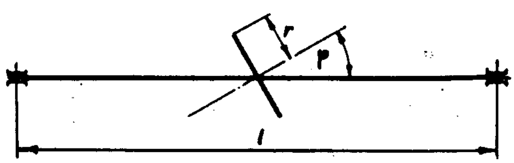
177. V akej vzdialenosti od stredu máme upevniť homogénnu kruhovú dosku s polomerom $R = 10$ cm, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou?

$$\left[x = \frac{R}{\sqrt{2}} \doteq 7\ \mathrm{cm}\right]$$

178. Tyč dĺžky $l = 1$ m sa kýve ako fyzikálne kyvadlo okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Nájdite redukovanú dĺžku tohto kyvadla!

$$\left[l_r = \frac{2}{3}\,l = 0{,}666\ \mathrm{m}\right]$$

179. Homogénna kruhová doska hmotnosti $m = 4$ kg, s polomerom $r = 10$ cm a so zanedbateľnou hrúbkou sa otáča okolo osi, ktorá prechádza stredom dosky a s geometrickou osou dosky zviera uhol $\varphi = 30°$ *(obr. 60)*, uhlovou rýchlosťou



Obr. 60

$\omega = 2\pi\ \mathrm{s^{-1}}$. Mechanická os dosky je uložená v ložiskách, ktorých vzájomná vzdialenosť je $l = 50$ cm. Vypočítajte tlakové sily spôsobené odstredivými silami, ktoré pôsobia na ložiská!

$$\left[F = \frac{mr^2\omega^2 \sin 2\varphi}{8l} \doteq 0{,}33\ \mathrm{N}\right]$$

180. Zotrvačník tvaru homogénnej kruhovej dosky s polomerom $r = 0{,}3$ m sa otáča uhlovou rýchlosťou $\omega = 350\ \mathrm{s^{-1}}$ okolo osi symetrie upevnenej v bode osi, ktorého vzdialenosť od ťažiska zotrvačníka je x. Vypočítajte x, keď uhlová rýchlosť precesného pohybu osi je $\Omega = 0{,}2\ \mathrm{s^{-1}}$!

$[x \doteq 0{,}32\ \mathrm{m}]$

4 DEFORMÁCIA TUHÝCH LÁTOK

Úvod

a) *Napätie* σ je podiel sily $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na určitú plochu S, a tejto plochy, t. j.

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Napätie možno rozložiť na *zložku normálovú*, rovnobežnú s normálou plochy S v danom bode, a na *zložku tangenciálnu*, spadajúcu do tangenciálnej roviny k ploche S v danom bode. Normálové napätie nazývame *ťahom* alebo *tlakom*, a to podľa toho, ako je orientované pôsobiace normálové napätie vzhľadom na plochu, na ktorú pôsobí.

b) V oblasti dokonalej pružnosti je súvis medzi účinkujúcimi silami a deformáciou, ktorú vyvolávajú, vyjadrený *Hookovým zákonom*, ktorý hovorí: *Deformácia pružných telies je úmerná účinkujúcim silám a obrátene.*

c) Ak ide o deformáciu ťahom, napr. tyče alebo drôtu z pôvodnej dĺžky l_0, možno Hookov zákon matematicky vyjadriť vzťahom

$$\sigma = E\varepsilon$$

kde σ je normálové napätie, $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ je relatívne predĺženie a E je *modul pružnosti v ťahu*, ktorý je charakteristickou konštantou pre jednotlivé látky. Pritom $\Delta l = l - l_0$ znamená celkové predĺženie tyče pri deformácii.

Predĺženie tyče sprevádza zmenšenie jej priečneho rezu. Pre relatívne skrátenie priečneho rozmeru $\eta = \dfrac{a_0 - a}{a_0}$, kde a_0 je rozmer pred deformáciou a a po deformácii, platí:

$$\eta = \frac{1}{m}\varepsilon = \frac{\sigma}{mE}$$

kde m je *Poissonova konštanta.*

Pre deformáciu tyče tlakom platia analogické vzťahy, dochádza však k skráteniu dĺžky a k predĺženiu priečneho rozmeru.

d) Ak ide o namáhanie pružných telies šmykom, napr. ak kolmý hranol s obdĺžnikovou podstavou a rozmermi a, b, c je v základni s rozmermi a, b upevnený a v hornej základni namáhaný tangenciálnym napätím σ_t, možno Hookov zákon matematicky vyjadriť vzťahom

$$\sigma_t = G\gamma$$

kde γ je relatívne posunutie hornej základne hranola vzhľadom na dolnú základňu a G je *modul pružnosti v šmyku.*

e) Medzi konštantami E, G a m platí vzťah

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

f) Ak je tyč dĺžky l vo vodorovnej polohe upevnená v pevnej stene a na voľnom konci zaťažená silou F zvislého smeru, pre výchylku h voľného konca z pôvodnej polohy platí:

$$h = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

kde J je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na ohybovú os.

Ak je vodorovná tyč podopretá na svojich koncoch a zaťažená v prostriedku silou F zvislého smeru, stred tyče sa vychýli zo svojej pôvodnej polohy o hodnotu

$$h = \frac{Fl^3}{48EJ}$$

g) Ak valcová tyč dĺžky l a polomeru r je v jednej svojej základni upevnená a na voľnom konci namáhaná silami, ktorých moment vzhľadom na geometrickú os tyče má hodnotu M, pre uhol φ, o ktorý sa stočí tyč, platí:

$$\varphi = \frac{2lM}{\pi G r^4}$$

Pretože aj pri skrúcaní tyče sa uplatňuje modul pružnosti v šmyku G, nazýva sa tento modul aj *modul pružnosti v torzii.*

Príklady

181. Drôt pôvodnej dĺžky 10 m je na jednom konci upevnený a na druhom konci je napínaný v smere dĺžky silou veľkosti $F = 200$ N, čím sa predĺži o 0,4 cm. Nájdite pôvodný priemer drôtu, ako aj jeho zmenu pri predĺžení, keď modul pružnosti v ťahu drôtu $E = 19{,}62 \,.\, 10^{10}$ Pa a jeho modul pružnosti v šmyku $G = 7{,}35 \,.\, 10^{10}$ Pa!

Riešenie:

Podľa Hookovho zákona súvislosť medzi relatívnym predĺžením a napätím je daná vzťahom

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{t. j.} \quad \frac{F}{S} = E\,\frac{\Delta l}{l_0}$$

takže

$$S = \pi r_0^2 = \frac{Fl_0}{\Delta l E}$$

Hľadaný priemer potom bude:

$$d_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{Fl_0}{\pi\,\Delta l E}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{200\ \mathrm{N}\,.\,10\ \mathrm{m}}{3{,}14\,.\,0{,}4\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}\,.\,19{,}62\,.\,10^{10}\ \mathrm{N}\,.\,\mathrm{m}^{-2}}} = 0{,}18\ \mathrm{cm}$$

Relatívne zmenšenie priemeru $\eta = \frac{\Delta d}{d_0}$ súvisí s relatívnym predĺžením podľa vzťahu

$$\eta = \frac{1}{m}\,\varepsilon$$

kde m je Poissonova konštanta a súvisí s E a G podľa vzťahu

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

takže

$$m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{2\,.\,7{,}35\,.\,10^{10}\ \mathrm{N}\,.\,\mathrm{m}^{-2}}{19{,}62\,.\,10^{10}\ \mathrm{N}\,.\,\mathrm{m}^{-2} - 14{,}70\,.\,10^{10}\ \mathrm{N}\,.\,\mathrm{m}^{-2}} = 2{,}99$$

Teda

$$\eta = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{\varepsilon}{2{,}99}$$

takže

$$\Delta d = \frac{\varepsilon}{2{,}99}\,d_0 = \frac{1}{2{,}99}\,\frac{0{,}4\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}\,.\,0{,}18\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = 0{,}23\,.\,10^{-4}\ \mathrm{cm}$$

182. O koľko sa predĺži tyč dĺžky l a prierezu S pôsobením vlastnej tiaže, keď je na jednom konci upevnená a keď hustota materiálu tyče je ϱ a modul pružnosti v ťahu je E?

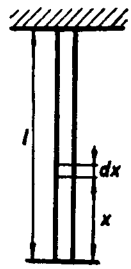
Riešenie:

Element tyče dx *(obr. 61)* sa napína tiažou tej časti tyče, ktorá je pod ním. Pre predĺženie elementu dx potom platí:

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{1}{E}\cdot\frac{\varrho S g x}{S}\,\mathrm{d}x = \frac{\varrho g}{E}\,x\,\mathrm{d}x$$

Celkové predĺženie tyče je dané súčtom predĺžení jednotlivých elementov tyče, takže platí:

$$\Delta l = \frac{\varrho g}{E} \int_0^l x \, dx = \frac{\varrho g}{E} \frac{l^2}{2}$$



Obr. 61

183. Ako sa zmení objem železnej tyče tvaru hranola pôvodných rozmerov $a_0 = 1$ m, $b_0 = c_0 = 10$ cm, keď je tyč v smere rozmeru a_0 namáhaná ťahom $\sigma = 9{,}81 \,.\, 10^7$ N.m^{-2}? Modul pružnosti železa, z ktorého je tyč zhotovená, $E = 19{,}62 \,.\, 10^{10}$ N.m^{-2} a modul pružnosti v šmyku $G = 7{,}35 \,.\, 10^{10}$ N.m^{-2}.

Riešenie:

Pôvodný objem tyče

$$V_0 = a_0 b_0 c_0$$

Jednotlivé rozmery sa po deformácii zmenia takto:

$$a = a_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right); \quad b = c = b_0\left(1 - \frac{\sigma}{mE}\right)$$

Objem po deformácii bude:

$$V = abc = a_0 b_0 c_0 \left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{\sigma}{mE}\right)^2 = V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)\left(1 - \frac{2\sigma}{mE} + \frac{\sigma^2}{m^2 E^2}\right) =$$

$$= V_0\left(1 - \frac{2\sigma}{mE} + \frac{\sigma^2}{m^2 E^2} + \frac{\sigma}{E} - \frac{2}{m}\frac{\sigma^2}{E^2} + \frac{1}{m^2}\frac{\sigma^3}{E^3}\right) =$$

$$= V_0\left(1 + \frac{\sigma}{E} - \frac{2\sigma}{mE}\right) = V_0\left[1 + \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)\right]$$

pričom sme zanedbali výrazy násobené $\frac{\sigma^2}{E^2}$ a $\frac{\sigma^3}{E^3}$ ako malé veličiny vyššieho rádu. Pre zmenu objemu potom vyplýva:

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) = a_0 b_0 c_0 \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

Pre m platí vzťah $G = \frac{mE}{2(m+1)}$, t. j.

$$m = \frac{2G}{E-2G} = \frac{2.7{,}35.10^{10}\,\mathrm{N.m^{-2}}}{19{,}62.10^{10}\,\mathrm{N.m^{-2}} - 14{,}70.10^{10}\,\mathrm{N.m^{-2}}} = 2{,}99$$

Teda

$$\Delta V = 1.0{,}1.0{,}1\ \mathrm{m^3}\ \frac{9{,}81.10^{7}\,\mathrm{N.m^{-2}}}{19{,}62.10^{10}\,\mathrm{N.m^{-2}}}\left(1-\frac{2}{2{,}99}\right) =$$

$$= 1{,}65.10^{-6}\ \mathrm{m^3} = 1{,}65\ \mathrm{cm^3}$$

184. Kovová rúrka dĺžky a, vnútorného polomeru r_i a vonkajšieho polomeru r_e, je vo vodorovnej polohe na oboch koncoch upevnená a v strede zaťažená závažím tiaže G. Ako sa prehne rúrka vo svojom strede, keď modul pružnosti v ťahu materiálu, z ktorého je rúrka zhotovená, je E?

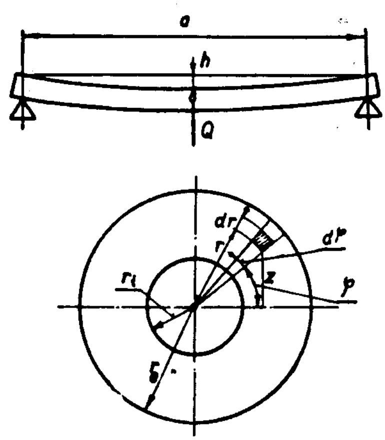
Riešenie:

Pre zníženie h stredu tyče (rúrky) dĺžky a *(obr. 62a)*, na dvoch koncoch upevnenej a v strede zaťaženej, platí vzťah

$$h = \frac{Ga^3}{48EJ}$$

kde

$$J = \int z^2\, \mathrm{d}S$$



Obr. 62a, b

je plošný moment zotrvačnosti prierezu rúrky vzhľadom na ohybovú os. Keďže *(obr. 62b)* $z = r \sin \varphi$, $\mathrm{d}S = r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r$, platí

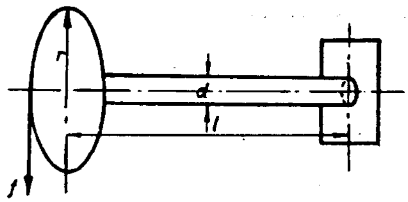
$$J=\int_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \varphi \, d\varphi \, dr=\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi \, d\varphi=$$

$$=\frac{r_e^4-r_i^4}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi}=\pi\,\frac{r_e^4-r_i^4}{4}$$

Pre hľadané prehnutie stredu rúrky dostaneme:

$$h=\frac{Ga^3}{48E\pi\,\dfrac{r_e^4-r_i^4}{4}}=\frac{Ga^3}{12E\pi(r_e^4-r_i^4)}$$

185. Železná valcová tyč dĺžky $l=50$ cm a priemeru $d=0{,}5$ cm je na jednom konci upevnená. Na jej druhom konci je upevnené koleso s polomerom $r=20$ cm *(obr. 63)*. Akou tangenciálnou silou treba pôsobiť na obvode kolesa, aby sa prierez tyče v mieste kolesa stočil vzhľadom na upevnený koniec tyče o uhol $\varphi=15°$, keď modul pružnosti v torzii železa $G=7{,}16 \,.\, 10^{10}$ Pa?



Obr. 63

Riešenie:

Uhol φ súvisí s momentom síl, ktoré spôsobujú skrútenie tyče, vzťahom

$$M=\frac{\pi G}{2}\cdot\frac{\left(\dfrac{d}{2}\right)^4}{l}\,\varphi$$

Avšak $M=Fr$, takže pre hľadané F vyplýva

$$F=\frac{\pi G D^4 \varphi}{32lr}=\frac{3{,}14 \,.\, 7{,}16 \,.\, 10^{10}\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}} \,.\, 625 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{m}^4}{32 \,.\, 0{,}5\ \mathrm{m} \,.\, 0{,}2\ \mathrm{m}}\cdot\frac{15\pi}{180}=11{,}1\ \mathrm{N}$$

186. Kruhová doska s hmotnosťou $m=2$ kg a polomerom $r=10$ cm sa kýve ako torzné kyvadlo na železnom drôte dĺžky $l=1$ m a priemeru $d=2$ mm. Nájdite modul pružnosti v torzii materiálu, z ktorého je drôt zhotovený, keď sa experimentálne zistilo, že perióda torzného kyvadla $T=1{,}9$ s!

Riešenie:

Pre periódu kyvadla platí vzťah

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{M_0}}$$

kde I je moment zotrvačnosti kruhovej dosky vzhľadom na os otáčania a M_0 je direkčný moment torzie. Súvisí s modulom pružnosti v torzii a s rozmermi drôtu vzťahom

$$M_0 = \frac{\pi G}{2} \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4}{l}$$

takže pre hľadané G dostávame:

$$G = \frac{32 l M_0}{\pi d^4}$$

Keďže M_0 možno vyjadriť pomocou periódy torzného kyvadla vzťahom

$$M_0 = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

platí

$$G = \frac{32l}{\pi d^4} \frac{4\pi^2}{T^2} I = \frac{32l}{\pi d^4} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 = \frac{64\pi m l r^2}{d^4 T^2} =$$

$$= \frac{64 . 3{,}14 . 2\ \text{kg} . 10^2\ \text{cm} . 10^2\ \text{cm}^2}{16 . 10^{-4}\ \text{cm}^4 . 1{,}9^2\ \text{s}^2} = 6{,}96 . 10^6\ \frac{\text{kg} . \text{m} . \text{s}^{-2}}{\text{cm}^2} = 6{,}96 . 10^{10}\ \text{Pa}$$

187. Akú dĺžku by mal mať železný drôt, aby sa roztrhol vplyvom vlastnej tiaže, keď ho na jednom konci zavesíme a keď hustota železa $\varrho = 7{,}8\ \text{g} . \text{cm}^{-3}$ a medza pevnosti železa je $31{,}4 . 10^7$ Pa?

Riešenie:

Na jednotlivé vnútorné prierezy drôtu pôsobia rozličné sily, a to vždy tiaž tej časti drôtu, ktorá leží pod príslušným prierezom. Najmenšia sila pôsobí na najnižší prierez drôtu a najväčšia sila (celá tiaž drôtu) pôsobí na jeho najvyšší prierez. Najväčšie napätie, pri ktorom sa ešte drôt neroztrhne, vyhovuje rovnici

$$\sigma = \frac{G}{S} = 31{,}4 . 10^7\ \text{Pa}$$

Pretože $G = \varrho S g l$, platí

$$s g l = 31{,}4 . 10^7\ \text{Pa}$$

t. j.

$$l = \frac{31{,}4 . 10^7\ \text{N} . \text{m}^{-2}}{7{,}8 . 10^3\ \text{kg} . \text{m}^{-3} . 9{,}81\ \text{m} . \text{s}^{-2}} = 4103\ \text{m} = 4{,}103\ \text{km}$$

Aby sa drôt roztrhol, musí byť jeho dĺžka $l > 4{,}103$ km.

Úlohy

188. Oceľový drôt pôvodnej dĺžky $l_0 = 2$ m a priemeru $d = 2$ mm je na jednom konci upevnený a na druhom konci sa napína v smere dĺžky silou F. Aká veľká musí byť táto sila, ak sa má drôt predĺžiť o 3 mm, keď modul pružnosti v ťahu drôtu $E = 21{,}6 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$F \doteq 1016$ N]

189. Železná tyč pôvodnej dĺžky $l_0 = 2$ m a prierezu $S = 1$ cm^2 je na jednom konci upevnená a na druhom sa napína ťahom silou $F = 10\,000$ N. Aká bude dĺžka tyče po predĺžení, keď modul pružnosti v ťahu železa $E = 19{,}62 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$l = 2{,}001$ m]

190. Kovová valcová rúrka pôvodnej dĺžky $l_0 = 2$ m, pôvodného vonkajšieho priemeru $d = 20$ cm a hrúbky steny $t = 2$ cm je stláčaná normálovou silou $F = 30\,000$ N. Nájdite normálové napätie, ktoré pôsobí v priečnom reze rúrky, ako aj skrátenie rúrky, keď modul pružnosti v ťahu rúrky $E = 11{,}77 \,.\, 10^{10}$ Pa!

[$\sigma = 2{,}985 \,.\, 10^6$ Pa; $\Delta l \doteq -0{,}051$ mm]

191. O koľko by sa účinkom vlastnej tiaže predĺžilo oceľové lano dĺžky 9000 m, spustené do mora do takej hĺbky, aby lano voľne viselo a bolo celé ponorené do vody, ak hustota morskej vody $\varrho_1 = 1{,}03 \,.\, 10^3$ kg.m^{-3}, hustota lana $\varrho_2 = 7{,}7 \,.\, 10^3$ kg.m^{-3} a modul pružnosti v ťahu ocele $E = 21{,}6 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$\Delta l = 12{,}28$ m]

192. Valcová tyč pôvodnej dĺžky l_0 je na jednom konci upevnená a na druhom konci namáhaná v smere dĺžky silou F. Ako sa zmenil objem tyče pri deformácii, keď modul pružnosti v ťahu tyče je E?

$$\left[\Delta V = \frac{lF(m-2)}{mE}\right]$$

193. Na železnú tyč tvaru kvádra pôvodných rozmerov $a_0 = 50$ cm, $b_0 = 10$ cm, $c_0 = 5$ cm pôsobí rovnomerný všestranný normálový tlak hodnoty $\sigma = 9{,}81 \,.\, 10^5$ Pa. Ako sa zmenší objem kvádra po deformácii, keď modul pružnosti v ťahu tyče $E = 19{,}62 \,.\, 10^{10}$ Pa a modul pružnosti v šmyku $G = 7{,}16 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$\Delta V = -9{,}72$ mm^3]

194. Valcová železná tyč dĺžky $l = 1$ m a polomeru $R = 2$ cm je na jednom konci upevnená tak, že zaujíma vodorovnú polohu. Akou veľkou silou treba v smere kolmom na dĺžku tyče pôsobiť na jej druhom konci, aby sa pri ohnutí tento koniec tyče posunul vzhľadom na pôvodnú polohu o $h = 5$ mm, keď modul pružnosti v ťahu tyče $E = 19{,}62 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$F = 370$ N]

195. Drevená tyč s obdĺžnikovým prierezom so stranami $a = 5$ cm, $b = 0{,}5$ cm je v dvoch miestach vzdialených od seba $l = 1$ m podopretá tak, že rozmer a je vo vodorovnej rovine. Ako sa zníži stred tyče vzhľadom na svoju pôvodnú polohu, keď tyč v strede zaťažíme závažím hmotnosti 1 kg a keď modul pružnosti v ťahu dreva, z ktorého je tyč zhotovená, $E = 1{,}18 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$h = 3{,}33$ cm]

196. Železný rotačný valec polomeru $r = 1$ cm a výšky $h = 50$ cm je v dolnej základni upevnený a v druhej základni stáčaný silami, ktorých moment spadajúci do osi valca označíme M. Aký veľký má byť moment M, aby stočenie hornej základne valca vzhľadom na dolnú bolo $\varphi = 1°$, keď modul pružnosti v torzii valca $G = 7{,}36 \,.\, 10^{10}$ Pa?

[$M = 40{,}3$ N.m]

197. Nájdite periódu torzného kyvadla, vytvoreného kruhovou doskou hmotnosti $m = 3$ kg a s polomerom $R = 10$ cm, zavesenou na drôte dĺžky $l = 1{,}2$ m a polomeru $r = 1$ mm, keď modul pružnosti v torzii drôtu $G = 7{,}16 \,.\, 10^{10}$ Pa!

[$T = 2{,}51$ s]

198. Aké zaťaženie znesie žulová doska tvaru pravidelného šesťuholníka so stranou $a = 10$ cm, ak prípustné tlakové zaťaženie pre žulu je $4{,}9 \,.\, 10^6$ Pa?

[$F = 12{,}74 \,.\, 10^4$ N]

199. Aký musí byť polomer medeného drôtu, aby sa účinkom sily $F = 500$ N, ktorá naň pôsobí v smere dĺžky, nepretrhol, keď medza pevnosti medi je $2 \,.\, 10^8$ N.m^{-2}?

[$r \geqq 0{,}89$ mm]

5 MECHANIKA KVAPALÍN A PLYNOV

Úvod

a) Kvapalinu nazývame *ideálnou*, keď je nestlačiteľná a keď v nej niet vnútorného trenia.

b) *Základnou rovnicou hydrostatiky* nestlačiteľnej kvapaliny je rovnica

$$\varrho\varphi + p = \text{konšt} \tag{1}$$

kde ϱ je hustota kvapaliny, φ potenciál silového poľa, v ktorom je kvapalina uložená, p tlak v kvapaline. Rovnica (1) hovorí: *V stave pokoja je v nestlačiteľnej kvapaline súčet potenciálnej energie jej objemovej jednotky a tlaku všade rovnaký.*

Keď je kvapalina pod väčším tlakom a nevypĺňa príliš veľký priestor, možno v rovnici (1) člen $\varrho\varphi$ popri tlaku zanedbať, čím sa rovnica (1) zjednoduší na tvar

$$p = \text{konšt}$$

čo je vyjadrením *Pascalovho zákona* o rovnomernom šírení sa tlaku v kvapalinách.

c) Tlak v hĺbke h pod povrchom nestlačiteľnej kvapaliny hustoty ϱ, spôsobený vlastnou tiažou kvapaliny, je daný vzťahom

$$p = h\varrho g$$

kde g je zrýchlenie voľného pádu.

d) Na teleso ponorené do tekutiny (kvapalina, plyn) pôsobí tekutina vztlakom, ktorý sa podľa *Archimedovho zákona* rovná tiaži takého množstva tekutiny, ktoré má rovnaký objem ako ponorená časť telesa.

e) Pre výtokovú rýchlosť kvapaliny, ktorá vyteká z nejakej nádoby vplyvom vlastnej tiaže určitým otvorom, platí *Torricelliho vzorec*

$$v = \sqrt{2gh}$$

kde h je hĺbka otvoru, ktorým kvapalina vyteká, pod povrchom kvapaliny. Vytekajúca kvapalina nevypĺňa celý prierez otvoru. Hovoríme o zúžení vytekajúceho kvapalinového lúča. Pre množstvo kvapaliny $\mathrm{d}V$, ktoré za čas $\mathrm{d}t$ vytečie otvorom s prierezom S potom platí

$$\mathrm{d}V = \mu S v \,\mathrm{d}t$$

kde μ je koeficient zúženia vytekajúceho kvapalinového lúča.

f) *Pri ustálenom prúdení ideálnej kvapaliny v trubici prejde každým prierezom trubice za jednotku času rovnaké množstvo kvapaliny (rovnica kontinuity),* čiže

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

kde S_1 a S_2 sú plošné obsahy dvoch rôznych prierezov trubice a v_1, v_2 sú rýchlosti prúdenia kvapaliny v týchto prierezoch.

g) *Pri ustálenom nevírivom prúdení ideálnej kvapaliny je súčet kinetickej a potenciálnej energie jednotkového objemu kvapaliny a tlaku všade rovnaký*

(*Bernoulliho rovnica*), čiže

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho\varphi + p = \text{konšt}$$

h) Ak sa v tekutine s koeficientom vnútorného trenia (viskozity) η pohybuje teleso guľovitého tvaru polomeru r, tak odpor P, ktorý kladie tekutina pohybu telesa, je podľa *Stokesovho zákona* daný vzťahom

$$P = 6\pi\eta r v$$

kde v je rýchlosť pohybujúceho sa telesa.

i) Keď do kvapaliny v širšej nádobe ponoríme v zvislej polohe *kapiláru* (úzku rúrku s kruhovým prierezom), hladina kvapaliny bude v kapiláre v inej výške ako v širokej nádobe. Kvapalina, ktorá zmáča steny kapiláry (napr. voda v sklenej kapiláre), pôsobením povrchového napätia vystúpi v kapiláre nad úroveň hladiny v širokej nádobe a nastáva *kapilárna elevácia*. Zakrivený povrch kvapaliny v kapiláre, *meniskus*, je dutý. Keď naopak kvapalina nezmáča steny kapiláry (napr. ortuť v sklenej kapiláre), hladina kvapaliny v kapiláre je pod úrovňou hladiny v širokej nádobe, nastáva *kapilárna depresia* a meniskus je vydutý. Pre rozdiel hladín h v kapiláre a v širokej nádobe pri kapilárnej elevácii, resp. depresii platí vzťah

$$h\varrho g = \frac{2\sigma}{R}$$

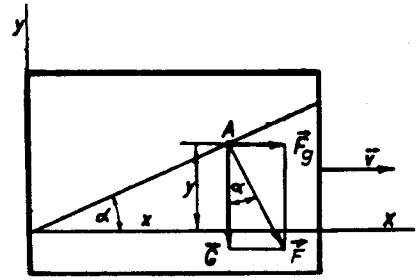
kde ϱ je hustota kvapaliny, R polomer zakriveného povrchu kvapaliny v kapiláre a σ povrchové napätie kvapaliny.

Príklady

200. O aký uhol sa odchýli od vodorovnej roviny hladina kvapaliny v cisternovom voze, ktorý brzdí so spomalením 5 m.s^{-2}?

Riešenie:

Predpokladajme, že voz sa pohybuje v smere šípky znázornenej na *obr. 64*.



Obr. 64

Ak sa postavíme na stanovište vzťažnej sústavy pevne spojenej s vozom, nachádzame sa v neinerciálnej vzťažnej sústave a výsledná sila $\boldsymbol{F}$, ktorá pôsobí na ľubovoľnú časticu kvapaliny, sa skladá z jej tiaže a zo zotrvačnej sily $\boldsymbol{F}_g$, takže

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_g$$

Vzhľadom na túto neinerciálnu vzťažnú sústavu $|\boldsymbol{F}_g| = ma$, kde m je hmotnosť vybranej časti kvapaliny a a hodnota spomalenia cisternového voza. Smer sily $\boldsymbol{F}_g$ je opačný ako smer spomalenia voza. V uvedenej vzťažnej sústave je kvapalina v pokoji, a preto podľa základnej rovnice hydrostatiky možno písať:

$$\varrho\varphi + p = \text{konšt}$$

Keďže v každom mieste povrchu kvapaliny je tlak p rovnaký, možno pre povrch kvapaliny tiež písať:

$$\varphi = \text{konšt}$$

kde φ je potenciál síl, ktoré pôsobia na kvapalinu, t. j. súčet potenciálu tiaže G a zotrvačnej sily F_g. Keď budeme potenciál tiaže, ako aj potenciál zotrvačnej sily F_g uvažovať vzhľadom na začiatok zvolenej súradnicovej sústavy *(obr. 64)*, celkový potenciál v bode A bude daný vzťahom

$$\varphi = gy - ax = \text{konšt}$$

Keďže pre $x = 0$ platí $y = 0$, bude sa konšt $= 0$. Máme teda:

$$gy - ax = 0, \quad \text{t. j.} \quad y = \frac{a}{g}x \tag{1}$$

Hladina kvapaliny sa ustáli v rovine, v ktorej priesečnica so zvislou rovinou spadajúcou do smeru pohybu voza je priamka s rovnicou (1). Smernica tejto priamky určuje uhol α, o ktorý sa odchýli hladina kvapaliny pri tomto pohybe od vodorovnej roviny. Platí teda:

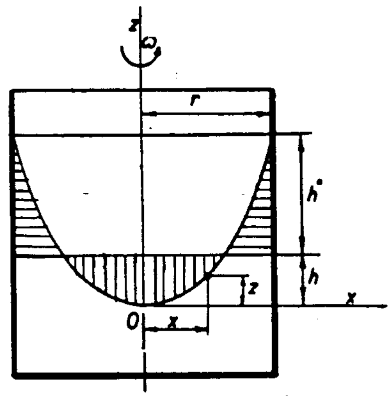
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{5\ \text{m.s}^{-2}}{9{,}81\ \text{m.s}^{-2}} = 0{,}5097, \quad \text{t. j.} \quad \alpha = 27^\circ$$

201. Vo valcovej nádobe polomeru r je umiestnená určitá kvapalina. Nádoba sa otáča okolo svojej geometrickej osi z stálou uhlovou rýchlosťou ω *(obr. 65)*. Určite, ako sa ustáli povrch kvapaliny v nádobe a o koľko sa zníži hladina kvapaliny v strede nádoby oproti pôvodnej polohe, keď nádoba bola v pokoji!

Riešenie:

Keď sa postavíme na stanovište neinerciálnej vzťažnej sústavy, ktorá je pevne spojená s nádobou, potom aj pri otáčaní nádoby je z hľadiska tejto vzťažnej sústavy kvapalina v pokoji. Zo základnej rovnice hydrostatiky vyplýva:

$$\varrho\varphi + p = \text{konšt}$$



Obr. 65

Keďže v každom mieste povrchu kvapaliny pôsobí ten istý tlak, napr. atmosferický, $p = \text{konšt}$, a teda pre povrch kvapaliny v každom mieste musí byť konštantný celkový potenciál síl pôsobiacich na kvapalinu:

$$\varphi = k$$

kde k je konštanta. Celkový potenciál je daný súčtom potenciálov tiaže a zotrvačnej odstredivej sily. Pri označení podľa *obr. 65* možno písať:

$$gz - \frac{\omega^2 x^2}{2} = k$$

lebo potenciál odstredivej sily vzhľadom na začiatok zvolenej súradnicovej sústavy *(obr. 65)*

$$\varphi_0 = -\int_0^x \omega^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\,\omega^2 x^2$$

Potom

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 + \frac{k}{g}$$

čiže povrch kvapaliny v rotujúcej valcovej nádobe bude mať tvar rotačného paraboloidu. Ak zvolíme začiatok súradnicovej sústavy vo vrchole paraboloidu, pre $x = 0$ sa $z = 0$, a teda $k = 0$ a rovnica paraboly, ktorú na paraboloide vytína zvislá rovina, prechádzajúca začiatkom, bude

$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$$

Hľadaný pokles hladiny h v strede nádoby dostaneme z podmien množstvo kvapaliny v objeme vyčiarkovanom zvisle sa rovná množstvu kva v objemoch vyčiarkovaných vodorovne *(obr. 65)*. Pre objem vyčiarkovaný platí:

$$V_1 = \int_0^h \pi x^2 \, dz = \int_0^{\sqrt{2(g/\omega^2)h}} \pi \frac{\omega^2}{g} x^3 \, dx = \pi \frac{\omega^2}{g} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2(g/\omega^2)h}} =$$

$$= \pi \frac{g}{\omega^2} h^2$$

Pre objem vyčiarkovaný vodorovne vyplýva:

$$V_2 = \int_0^{h^*} (\pi r^2 - \pi x^2) \, dz = \int_{\sqrt{2(g/\omega^2)h}}^{r} \left(\pi r^2 \frac{\omega^2}{g} x - \pi \frac{\omega^2}{g} x^3 \right) dx =$$

$$= \left[\pi r^2 \frac{\omega^2}{g} \frac{x^2}{2} - \pi \frac{\omega^2}{g} \frac{x^4}{4} \right]_{\sqrt{2(g/\omega^2)h}}^{r} = \frac{1}{2} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4 - \pi r^2 h + \pi \frac{g}{\omega^2} h^2$$

Keďže $V_1 = V_2$,

$$\pi r^2 h = \frac{1}{4} \pi \frac{\omega^2}{g} r^4$$

čiže

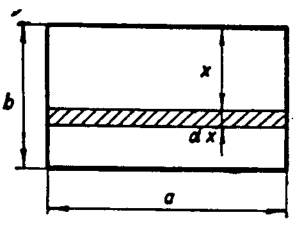
$$h = \frac{1}{4} \frac{\omega^2}{g} r^2$$

202. Akou veľkou silou pôsobí voda na bočnú obdĺžnikovú stenu nádoby, k vodorovná dĺžka steny $a = 20$ cm a zvislá $b = 15$ cm a keď je nádoba celko naplnená vodou?

Riešenie:

Na plošný element $dS = a \, dx$ v hĺbke x pod hladinou *(obr. 66)* pôsobí sil

$$dF = p \, dS = \varrho g a x \, dx$$



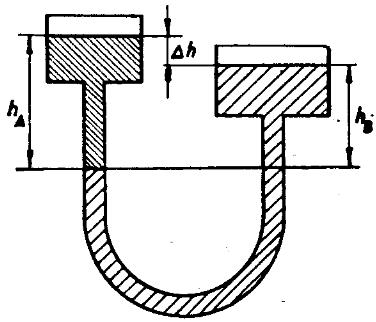
Obr. 66

kde ϱ j. hustota vody. Celková sila, ktorá pôsobí na bočnú stenu,

$$F = \varrho g a \int_0^b x \, dx = \varrho g a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{1}{2} \varrho g a b^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 10^3 \, kg . m^{-3} . 9{,}81 \, m . s^{-2} . 0{,}2 \, m . 0{,}0225 \, m^2 \doteq 22{,}1 \, N$$

203. Dve otvorené ramená A a B spojených nádob *(obr. 67)* sú naplnené nemiešajúcimi sa kvapalinami s hustotami $\varrho_1 = 0{,}9 . 10^3 \, kg . m^{-3}$ a $\varrho_2 = 1 . 10^3 \, kg . m^{-3}$. Aká je vzdialenosť hladín kvapalín v jednotlivých ramenách od spoločného rozhrania, keď rozdiel výšok hladín v jednotlivých ramenách $\Delta h = 10$ cm?



Obr. 67

Riešenie:

Za rovnovážneho stavu podľa základnej rovnice hydrostatiky platí:

$$\varrho \varphi + p = \text{konšt}$$

V našom prípade je φ potenciál tiaže. Ak ho budeme vzťahovať na vodorovnú rovinu, ktorá prechádza spoločným rozhraním dvoch kvapalín, pre kvapalinu v jednom aj v druhom ramene v tejto rovine sa bude $\varphi = 0$, a teda v jednom aj v druhom ramene tejto roviny musí byť tlak v kvapaline rovnaký. Pri označení podľa *obr. 67* platí:

$$b + h_A \varrho_1 g = b + h_B \varrho_2 g$$

kde b je atmosferický tlak.

Z *obr. 67* je tiež zrejmé, že

$$h_A = h_B + \Delta h$$

takže

$$(h_B + \Delta h) \varrho_1 g = h_B \varrho_2 g$$

t. j.

$$h_B(\varrho_2-\varrho_1)=\Delta h\varrho_1$$

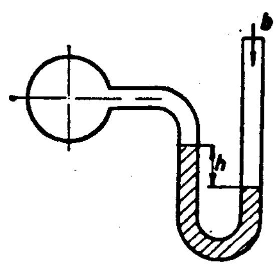
Teda

$$h_B=\frac{\varrho_1}{\varrho_2-\varrho_1}\Delta h=\frac{0,9}{0,1}\,10\text{ cm}=90\text{ cm}$$

a podobne

$$h_A=\frac{\varrho_2}{\varrho_2-\varrho_1}\Delta h=\frac{1}{0,1}\,10\text{ cm}=100\text{ cm}$$

204. Na určenie tlaku v nádobe naplnenej plynom *(obr. 68)* použijeme ortuťový vákuomer. Aký je tlak plynu v nádobe, ak rozdiel hladín ortuti v trubiciach vákuomeru $h=45$ cm, keď atmosferický tlak $b=101{,}3$ kPa?



Obr. 68

Riešenie:

Podobne ako v predošlom príklade vo vodorovnej rovine spoločného rozhrania ortuti a atmosferického vzduchu musia byť tlaky v oboch ramenách vákuomeru rovnaké. Platí *(obr. 68)*:

$$p+h\varrho g=b$$

kde ϱ je hustota ortuti, z čoho

$$p=b-h\varrho g=101{,}3\,.\,10^3\text{ N}\,.\,\text{m}^{-2}-0{,}45\,.\,13{,}6\,.\,10^3\,.\,9{,}81\text{ N}\,.\,\text{m}^{-2}=$$

$$=41{,}3\,.\,10^3\text{ N}\,.\,\text{m}^{-2}=41{,}3\text{ kPa}$$

205. Nájdite závislosť atmosferického tlaku od výšky nad zemským povrchom za predpokladu, že teplota vzduchu je všade rovnaká, a vypočítajte tlak vo výške $h=10\,000$ m nad hladinou mora, keď na hladine mora je tlak $b=101{,}3$ kPa a keď hustota vzduchu za tohoto tlaku $\varrho_0=1{,}29\text{ kg}\,.\,\text{m}^{-3}$!

Riešenie:

Ak uvažujeme potenciál vzhľadom na zemský povrch, tak vo výške z nad zemským povrchom $\varphi = gz$, takže základná rovnica hydrostatiky má tvar

$$\varrho g z + p = \text{konšt}$$

Derivovaním tejto rovnice podľa premennej z dostávame:

$$-\varrho g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

Túto rovnicu možno použiť aj pre prípad vzduchu, ktorý nie je nestlačiteľný.

Hustoty plynu ϱ a ϱ_0 pri rôznych tlakoch p a p_0 za tej istej teploty spĺňajú vzťah

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0}, \quad \text{takže} \quad \varrho = \frac{p}{p_0}\varrho_0$$

z čoho

$$-\frac{p}{p_0}\varrho_0 g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

a po separácii premenných

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\varrho_0}{p_0} g \, \mathrm{d}z$$

Integrovaním rovnice

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \int_0^h \mathrm{d}z$$

dostaneme:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\varrho_0}{p_0} gh, \quad \text{t. j. } p = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0}{p_0} gh\right)$$

Pre konkrétne údaje uvedené v úlohe platí:

$$p = 101{,}3 \,.\, 10^3 \,\mathrm{N\,.\,m^{-2}} \,.\exp\left[-\frac{1{,}29}{0{,}76 \,.\, 13{,}6 \,.\, 10^3 \,.\, 9{,}81} \cdot 9{,}81 \,.\, 10^4\right] \doteq$$
$$\doteq 29{,}1 \,.\, 10^3 \,\mathrm{N\,.\,m^{-2}} = 29{,}1 \,\mathrm{kPa}$$

206. Areometer *(obr. 69)* sa ponorí vo vode do hĺbky h_0 a v kvapaline hustoty ϱ_1 do hĺbky h_1. Ako hlboko sa ponorí v kvapaline hustoty ϱ?

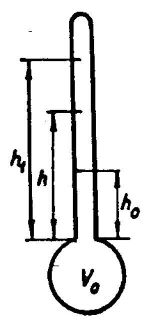
Riešenie:

Ak použijeme Archimedov zákon, možno písať vzťahy

$$mg = (V_0 + Sh_0)\varrho_0 g$$
$$mg = (V_0 + Sh_1)\varrho_1 g$$
$$mg = (V_0 + Sh)\varrho g$$

kde ϱ_0 je hustota vody, S prierez trubice areometra a V_0 objem guľovitej časti areometra. Pre V_0 z uvedených rovníc vyplýva:

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} - Sh_0$$
$$V_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Sh_1$$
$$V_0 = \frac{m}{\varrho} - Sh$$



Obr. 69

Preto platia rovnice

$$\frac{m}{\varrho_0} - Sh_0 = \frac{m}{\varrho_1} - Sh_1$$
$$\frac{m}{\varrho} - Sh = \frac{m}{\varrho_0} - Sh_0$$

Z prvej a z druhej rovnice vyjadríme S

$$S = \frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$$
$$S = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

Porovnaním pravých strán predchádzajúcich rovníc dostaneme:

$$\frac{m}{h_0 - h_1}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = \frac{m}{h_0 - h}\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)$$

Teda

$$h_0 - h = (h_0 - h_1)\,\frac{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho}}{\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{\varrho_1}} = (h_0 - h_1)\,\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{(\varrho_1 - \varrho_0)}$$

$$h = h_0 + (h_1 - h_0)\,\frac{\varrho_1(\varrho - \varrho_0)}{(\varrho_1 - \varrho_0)}$$

207. Voda v nádobe má hladinu vo výške $h = 30$ cm. Ako vysoko nad dnom treba urobiť v stene nádoby otvor, aby voda striekala čo najďalej na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

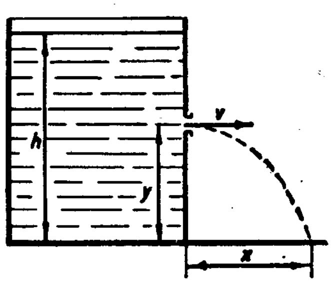
Riešenie:

Ak výšku nad dnom, v ktorej treba urobiť otvor, označíme y, pre výtokovú rýchlosť týmto otvorom, ktorá má vodorovný smer, platí:

$$v = \sqrt{2g(h - y)}$$

Pohyb vytekajúcej kvapaliny je v podstate vodorovný vrh, takže možno napísať *(obr. 70)*:

$$y = \frac{1}{2}\,gt^2; \quad x = vt$$



Obr. 70

a ďalej

$$x = \sqrt{2g(h - y)} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{(h - y)y}$$

Aby bolo x maximálne, musí byť maximálny výraz

$$z = (h - y)y$$

Maximálny je vtedy, keď

$$\frac{dz}{dy} = h - 2y = 0, \quad \text{t. j.} \quad y = \frac{h}{2} = 15 \text{ cm}$$

Je zrejmé, že pre toto $y = \frac{h}{2}$ je x maximálne. Minimálne x je pre $y = 0$, resp. $y = h$, ako to možno zistiť z výrazu pre x.

208. Nádoba tvaru polgule polomeru $r = 10$ cm je celkom naplnená kvapalinou. Na dne nádoby je otvor prierezu $S = 4 \text{ mm}^2$. Za aký čas po uvoľnení otvoru klesne hladina kvapaliny o polovicu polomeru, keď koeficient zúženia vytekajúceho kvapalinového lúča $\mu = 0{,}6$?

Riešenie:

Výtoková rýchlosť kvapaliny otvorom prierezu S má vo všeobecnom okamihu, keď hladina klesla o x, hodnotu

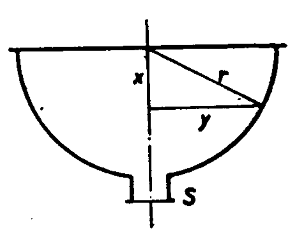
$$v = \sqrt{2g(r - x)}$$

Množstvo kvapaliny, ktoré v tomto okamihu za elementárny čas dt vytečie otvorom S, bude:

$$dV = \mu S v \, dt$$

Súčasne sa však *(obr. 71)* $dV = \pi y^2 \, dx$, a preto

$$\mu S \sqrt{2g(r - x)} \, dt = \pi y^2 \, dx$$



Obr. 71

Keďže $y^2 = r^2 - x^2$, po úprave dostaneme:

$$\mu S \sqrt{2g}(r - x)^{\frac{1}{2}} \, dt = \pi(r^2 - x^2) \, dx$$

odkiaľ

$$dt = \frac{\pi}{\mu S \sqrt{2g}} \left(\frac{r^2}{\sqrt{r - x}} - \frac{x^2}{\sqrt{r - x}} \right) dx$$

Pre hľadaný čas t_0 integráciou dostaneme:

$$t_0 = \frac{\pi}{\mu S\sqrt{2g}} \int_0^{r/2} [r^2(r-x)^{-\frac{1}{2}} - x^2(r-x)^{-\frac{1}{2}}]\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{\mu S\sqrt{2g}} \left[-2r^2\sqrt{r-x} + 2r^2\sqrt{r-x} - \frac{4}{3} r\sqrt{(r-x)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(r-x)^5}\right]_0^{r/2} =$$

$$= \frac{\pi}{\mu S\sqrt{2g}} \left[\frac{2}{5}\sqrt{\frac{r^5}{2^5}} - \frac{4}{3} r\sqrt{\frac{r^3}{2^3}} - \frac{2}{5}\sqrt{r^5} + \frac{4}{3} r\sqrt{r^3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu S\sqrt{g}} r^2\sqrt{r} \cdot \frac{28\sqrt{2}-17}{30} = 493{,}3\ \mathrm{s} = 8{,}22\ \mathrm{min}$$

209. Do nádoby priteká voda rovnomerným prúdom, pričom za jednu sekundu pritečie $Q = \frac{Q_t}{t} = 150\ \mathrm{cm^3.s^{-1}}$. Na dne nádoby je otvor s prierezom $S = 0{,}5\ \mathrm{cm^2}$. V akej výške sa ustáli voda v nádobe, ak zanedbáme zúženie vytekajúceho vodného lúča otvorom?

Riešenie:

Ustálený stav nastane vtedy, keď otvorom na dne vytečie za 1 sekundu rovnaké množstvo vody, ako ho pribudne rovnomerným prúdom za 1 sekundu. Pre množstvo vody, ktoré za jednotku času vytečie otvorom S, platí:

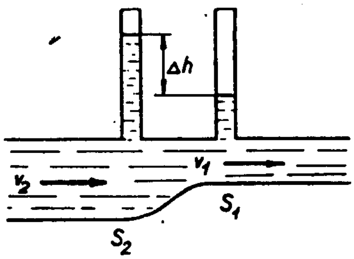
$$Q^* = Sv = S\sqrt{2gh}$$

Keďže sa má $Q^* = Q$, pre hľadané h vyplýva:

$$h = \frac{Q^2}{2gS^2} = \frac{225.10^2\ \mathrm{cm^6.s^{-2}}}{2.981\ \mathrm{cm.s^{-2}}.25.10^{-2}\ \mathrm{cm^4}} = 45{,}8\ \mathrm{cm}$$

Hladina vody sa ustáli vo výške 45,8 cm nad dnom nádoby.

210. Vodorovnou trubicou nerovnakého prierezu *(obr. 72)* preteká voda.



Obr. 72

Treba určiť, aké množstvo vody Q preteká každým prierezom trubice za 1 sekundu, keď v miestach s prierezom $S_1 = 10\ \text{cm}^2$, resp. s prierezom $S_2 = 20\ \text{cm}^2$ umiestnené manometrické trubice ukazujú rozdiel vodných hladín $\Delta h = 20$ cm.

Riešenie:

Na riešenie použijeme Bernoulliho rovnicu, ktorú pre vodorovnú trubicu možno písať v tvare

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$$

alebo

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2)$$

Avšak

$$p_2 - p_1 = \Delta h \varrho g$$

kde ϱ je hustota vody. Teda

$$\Delta h \varrho g = \frac{1}{2}\varrho(v_1^2 - v_2^2)$$

Rovnica kontinuity poskytuje pre neznáme v_1 a v_2 ďalšiu rovnicu

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

takže $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$. Po dosadení tohto výrazu do predošlej rovnice dostaneme:

$$\Delta h g = \frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

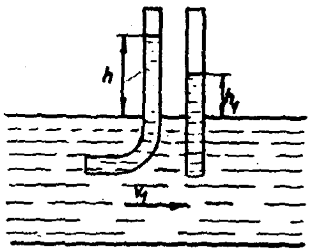
takže

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\ \Delta h g}{\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 0{,}2\ \text{m} \,.\, 9{,}81\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)}} = 2{,}29\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$$

Pre hľadané množstvo vody, ktoré pretečie každým prierezom trubice za 1 sekundu, dostaneme:

$$Q = v_1 S_1 = 2{,}29\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1} \,.\, 10^{-3}\ \text{m}^2 = 2{,}29 \,.\, 10^{-3}\ \text{m}^3\,.\,\text{s}^{-1} = 2{,}29\ \text{l}\,.\,\text{s}^{-1}$$

211. Trubicu ohnutú do pravého uhla vložíme do prúdiacej kvapaliny spôsobom znázorneným na *obr. 73*. Ako vysoko vystúpi kvapalina v tejto trubici, keď v rovnej trubici, uloženej na tom istom mieste, vystúpi do výšky h_1 a keď rýchlosť prúdenia kvapaliny v danom mieste je v_1?



Obr. 73

Riešenie:

Podľa Bernoulliho rovnice možno v prípade ohnutej trubice písať:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p$$

alebo

$$p - p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_1^2$$

kde p_1 je tlak v prúdiacej kvapaline a p tlak v rovnakej hĺbke v zalomenej trubici. Z *obr. 73* je zrejmé, že $p - p_1 = (h - h_1)\varrho g$. Potom bude platiť:

$$(h - h_1)\varrho g = \frac{1}{2}\varrho v_1^2$$

a teda

$$h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g}$$

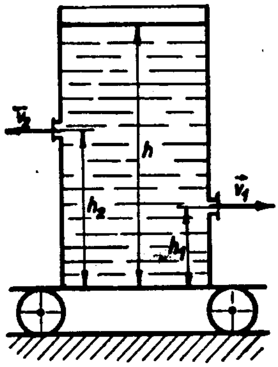
212. Na vozíku stojí valcová nádoba naplnená vodou do výšky 1 m. V nádobe sú na protiľahlých stranách dva rovnaké ventily s otvormi s plošnými obsahmi $S = 10\ \text{cm}^2$. Jeden ventil je vo výške $h_1 = 25$ cm nad dnom nádoby, druhý ventil vo výške $h_2 = 50$ cm. Aká veľká sila F a v ktorom smere musí pôsobiť na vozík, aby sa nepohyboval, keď sú obidva ventily otvorené?

Riešenie:

Na riešenie použijeme zákon o zachovaní hybnosti izolovanej sústavy, ktorú tvorí nádoba s vodou a vozíkom (*obr. 74*). Časová zmena hybnosti vody po otvorení ventilov bude:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \varrho S v_1 \boldsymbol{v}_1 + \varrho S v_2 \boldsymbol{v}_2$$

lebo množstvo vody, ktoré za jednotku času vytečie každým otvorom, je $\varrho S v_1$, resp. $\varrho S v_2$. Avšak $\mathbf{v}_1 = v_1 \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}_2 = -v_2 \boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor v smere rýchlosti $\mathbf{v}_1$.



Obr. 74

Potom

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \varrho S(v_1^2 - v_2^2)\boldsymbol{\tau}$$

Keďže $v_2^2 = 2g(h - h_1)$, $v_1^2 = 2g(h - h_2)$, pre časovú zmenu hybnosti vody dostaneme:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \varrho S 2g(h - h_1 - h + h_2)\boldsymbol{\tau} = \varrho S 2g(h_2 - h_1)\boldsymbol{\tau}$$

t. j.

$$\left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = 10^3\ \mathrm{kg.m^3}.10.10^{-4}\ \mathrm{m^2}.2.9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}.0{,}25\ \mathrm{m} = 4{,}9\ \mathrm{N}$$

Keďže pred otvorením ventilov bola celá sústava v pokoji, zo zákona o zachovaní hybnosti vyplýva, že časová zmena hybnosti vozíka s nádobou bude rovnako veľká ako časová zmena hybnosti vody, no bude mať opačný smer. Aby sme zabránili pohybu vozíka, treba pôsobiť silou v smere jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ hodnoty

$$F = \left|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right| = \varrho S\,.2g(h_2 - h_1) = 4{,}9\ \mathrm{N}$$

213. Guľôčka z materiálu hustoty ϱ_1 má polomer r. Necháme ju voľne padať v kvapaline s koeficientom viskozity η a hustoty ϱ_2. Aká bude rýchlosť guľôčky po čase t od začiatku pohybu a akú dráhu prejde za tento čas?

Riešenie:

Počas pohybu vo viskóznej kvapaline pôsobí na guľôčku jej tiaž, vztlak podľa Archimedovho zákona a odpor kvapaliny podľa Stokesovho zákona. Pohybová rovnica guľôčky potom bude:

$$ma = mg - \varrho_2 Vg - 6\pi\eta r v$$

kde V je objem guľôčky, v jej rýchlosť a a jej zrýchlenie. Keďže $m = V\varrho_1$, po úprave možno písať:

$$a = g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) - \frac{6\pi\eta r}{m} v$$

Ak označíme:

$$g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) = \alpha; \quad \frac{6\pi\eta r}{m} = \beta$$

a keďže $a = \frac{dv}{dt}$, potom

$$\frac{dv}{dt} = \alpha - \beta v$$

Uvedenú diferenciálnu rovnicu možno riešiť zavedením substitúcie $\alpha - \beta v = u$, takže $-dv = \frac{1}{\beta} du$ a po dosadení do rovnice bude:

$$-\frac{1}{\beta}\frac{du}{dt} = u, \quad \text{t. j.} \quad -\frac{du}{u} = \beta\, dt$$

Integráciou dostaneme:

$$-\ln u = \beta t + k; \quad \frac{1}{u} = e^{\beta t + k}; \quad u = \frac{1}{e^{\beta t + k}}$$

takže

$$\alpha - \beta v = \frac{1}{e^{\beta t + k}}$$

Pre rýchlosť v v čase t vyplýva:

$$v = \frac{\alpha - e^{-(\beta t + k)}}{\beta}$$

Hodnotu konštanty k určíme zo začiatočných podmienok. V čase $t = 0$, $v = 0$, takže

$$0 = \alpha - \frac{1}{e^k}, \quad \text{t. j.} \quad e^{-k} = \alpha$$

a

$$v = \frac{\alpha(1 - e^{-\beta t})}{\beta}$$

Po dosadení príslušných hodnôt za α a β pre rýchlosť napokon dostaneme:

$$v = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\,\eta r}\left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t}\right)$$

Pre vykonanú dráhu x platí:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

takže

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^t \left(1 - e^{-\beta t}\right) dt = \frac{\alpha}{\beta}t + \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta t} - \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Po dosadení príslušných hodnôt za α a β bude:

$$x = \frac{mg\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{6\pi\eta r}t + \frac{m^2 g\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)}{36\pi^2\eta^2 r^2}\left(e^{-\frac{6\pi\eta r}{m}t} - 1\right)$$

214. Určite konečnú rýchlosť pádu dažďovej kvapky (guľôčky polomeru $r = 1$ mm) vo vzduchu, keď koeficient viskozity vzduchu $\eta = 1{,}8 . 10^{-4}$ g.cm^{-1}.s^{-1}. (Hustotu vzduchu vzhľadom na hustotu vody zanedbajte!)

Riešenie:

Pohybová rovnica dažďovej kvapky má tvar

$$ma = \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)g - 6\pi\eta r v$$

kde ϱ_1 je hustota vody a ϱ_2 hustota vzduchu. Keď odpor vzduchu, ktorý závisí od rýchlosti ($6\pi\eta r v$), dosiahne takú hodnotu, že pravá strana rovnice sa rovná nule, od tohto okamihu sa kvapka bude pohybovať rovnomerne priamočiaro rýchlosťou, ktorá spĺňa vzťah

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)g - 6\pi\eta r v = 0$$

t. j.

$$v = \frac{2gr^2(\varrho_1 - \varrho_2)}{9\eta} \doteq \frac{2gr^2\varrho_1}{9\eta} = 121{,}1 \text{ m.s}^{-1}$$

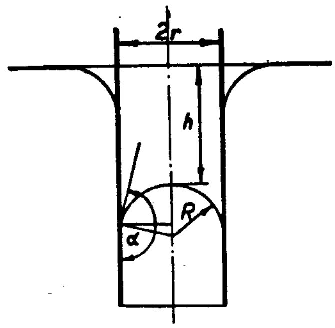
215. Aká je kapilárna depresia ortuti v sklenej rúrke polomeru $r = 1$ mm, keď povrchové napätie ortuti $\sigma = 0{,}433$ N.m^{-1} a keď krajný uhol (t. j. uhol, ktorý zviera rozhranie ortuť—vzduch so sklenou stenou) $\alpha = 120°$?

Riešenie:

Pre zníženie hladiny ortuti h v kapiláre vzhľadom na hladinu v širokej nádobe platí vzťah

$$h = \frac{2\sigma}{R\varrho g}$$

kde ϱ je hustota, σ povrchové napätie ortuti a R polomer krivosti menisku ortuti.



Obr. 75

Z *obr. 75* však vidieť, že

$$R \cos(180 - \alpha) = r$$

takže

$$h = \frac{2\sigma \cos(180 - \alpha)}{r\varrho g} =$$

$$= \frac{2 \,.\, 0{,}433 \text{ N.m}^{-1} .\, 0{,}5}{0{,}001 \text{ m} .\, 13{,}6 .\, 10^3 \text{ kg.m}^{-3} .\, 9{,}81 \text{ m.s}^{-2}} \doteq 0{,}32 \text{ cm}$$

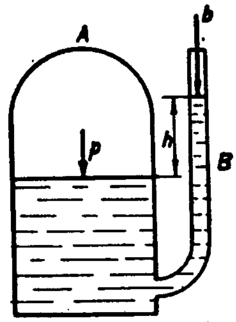
Úlohy

216. Vo valcovitej nádobe polomeru r je kvapalina hustoty ϱ. Nádoba sa otáča okolo svojej geometrickej osi stálou uhlovou rýchlosťou ω. V dôsledku toho sa povrch kvapaliny ustáli v tvare rotačného paraboloidu. Nájdite tlak v kvapaline v hĺbke h (meranej od povrchu kvapaliny v strede nádoby) a vo vzdialenosti x od osi otáčania, keď na povrch kvapaliny pôsobí barometrický tlak b!

$$\left[p = b + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 x^2 + \varrho g h\right]$$

217. V bočnej stene nádoby A, ktorá je naplnená vodou, je uložená piezometrická trubica B (*obr. 76*). Aký tlak pôsobí na voľný povrch vody v nádobe A, ak účinkom tohto tlaku voda v trubici B stúpne o $h = 1{,}5$ m nad hladinu vody v nádobe A a keď barometrický tlak $b = 101{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$?

[$p \doteq 116$ kPa]



Obr. 76

218. V určitej výške h nad zemským povrchom namerali tlak vzduchu $p = 50{,}65 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$. Nájdite výšku h, keď pri zemskom povrchu je tlak $p_0 = 101{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$, hustota vzduchu za tohoto tlaku $\varrho_0 = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a keď predpokladáme, že teplota vzduchu je všade rovnaká!

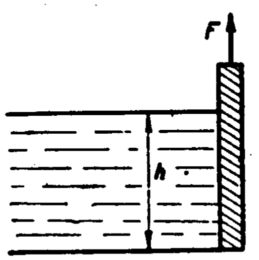
[$h \doteq 5556$ m]

219. V nádobe tvaru hranola je v bočnej stene kruhový otvor polomeru $r = 20$ cm uzavretý zátkou. Aká je celková sila, ktorá pôsobí na zátku, keď stred kruhového otvoru je vo výške $h_1 = 50$ cm nad dnom a keď je nádoba naplnená vodou do výšky $h = 1$ m?

[$F = \pi r^2 \varrho g (h - h_1) = 616$ N]

220. Aká sila F je potrebná na zdvihnutie rovinnej hate, ktorá je pod tlakom vody (obr. 77), ak hmotnosť hate $m = 250$ kg, šírka hate $b = 3$ m a hĺbka vody $h = 1{,}5$ m a keď koeficient trenia hate o opory $\mu = 0{,}3$?

[$F = 12\,390$ N]



Obr. 77

221. Kúsok skla má tiaž 1,37 N. Vo vode je jeho zdanlivá tiaž 0,824 N. Aká je hustota skla?

[$\varrho = 2{,}5\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$]

222. Akou veľkou silou zdvihneme vo vode kameň, ktorý má na vzduchu tiaž

$G_1 = 147{,}2$ N, keď hustota kameňa $\varrho = 3$ g.cm^{-3}?

[$F = 98{,}1$ N]

223. Dutá mosadzná guľa má vonkajší priemer $d_1 = 10$ cm a hrúbku steny $v = 0{,}3$ cm. Treba zistiť, či táto guľa bude plávať na vode, alebo či klesne na dno nádoby, keď hustota mosadze $\varrho_1 = 8{,}5$ g.cm^{-3}.

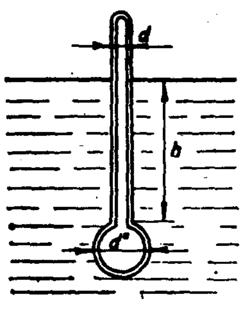
[Tiaž gule $G_1 = 7{,}4$ N; vztlak $G_2 = 5{,}1$ N; guľa klesne na dno]

224. Dutá mosadzná guľa hmotnosti 0,3 kg sa ponorí do vody polovicou svojho objemu. Aký je jej vonkajší priemer a hrúbka steny, keď hustota mosadze je 8,4 g.cm^{-3}?

[$2r_1 = 10{,}46$ cm; $d = 0{,}1$ cm]

225. Areometer tvaru sklenej rúrky má v spodnej časti tvar guľôčky, ktorá je vyplnená potrebným závažím. Vonkajší priemer trubice $d = 25$ mm, priemer guľôčky $d^* = 30$ mm a hmotnosť celého areometra $m = 50$ g. Aká je hustota kvapaliny, v ktorej sa areometer ponorí do hĺbky $h = 10$ cm, keď hĺbku h meriame od spodného konca trubice *(obr. 78)*?

[$\varrho = 0{,}79$ g.cm^{-3}]



Obr. 78

226. Nádoba valcovitého tvaru má v stene nad sebou dva otvory vo výškach h_1 a h_2 od dna. V akej výške má byť hladina tekutiny nad dnom nádoby, aby tekutina striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

[$h = h_1 + h_2$]

227. Akou rýchlosťou vyteká voda z rezervoára, keď z otvoru vo výške $h = 15$ cm nad vodorovnou rovinou strieka do vzdialenosti $d = 20$ cm na túto vodorovnú rovinu?

[$v = 114{,}4$ cm . s^{-1}]

228. Za aký čas vytečie polovica kvapaliny z valcovej nádoby prierezu S malým kruhovým otvorom na dne s prierezom S^*, keď koeficient zúženia vytekajúceho lúča je μ a keď hladina kvapaliny je vo výške h_0 nad dnom?

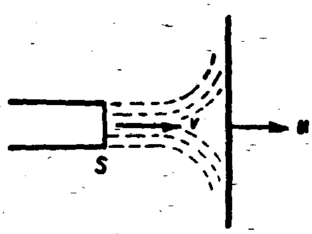
$$\left[t_0 = \frac{S}{\mu S^*}\sqrt{\frac{h_0}{g}}(\sqrt{2}-1)\right]$$

229. Injekčná striekačka má plošný obsah piesta $S_1 = 1{,}2\ cm^2$ a jej otvor má prierez $S_2 = 1\ mm^2$. Ako dlho bude vytekať voda zo striekačky uloženej vo vodorovnej rovine, ak na piest bude pôsobiť sila $F = 4{,}9$ N a ak sa piest posunie celkom o dĺžku $l = 4$ cm? (Vnútorné trenie zanedbajte!)

$[t = 0{,}53\ s]$

230. Z otvoru s prierezom S vyteká prúd vody (hustoty ϱ) vo vodorovnom smere rýchlosťou v a dopadá na zvislú stenu, ktorá sa pohybuje rovnakým smerom rýchlosťou $u < v$. Akou silou pôsobí voda na zvislú stenu, keď predpokladáme, že po náraze na stenu sa vodný lúč rovnomerne rozptýli na všetky strany (*obr. 79* — vplyv tiaže vody zanedbáme). Pri ktorej rýchlosti u je výkon vodného lúča najväčší?

$$\left[F = \varrho S v(v-u);\ \ u = \frac{1}{2}v\right]$$



Obr. 79

231. Oceľová guľôčka polomeru $r = 2$ mm a hustoty $\varrho_1 = 7{,}7\ g.cm^{-3}$ je voľne pustená v oleji s koeficientom viskozity $\eta = 22\ g.cm^{-1}.s^{-1}$ a hustoty $\varrho_2 = 0{,}9\ g.cm^{-3}$. Nájdite hodnotu rýchlosti rovnomerného pohybu, ktorým sa guľôčka bude pohybovať v oleji po uplynutí určitého času!

$[v = 2{,}7\ cm.s^{-1}]$

232. Nájdite povrchové napätie kvapaliny hustoty $\varrho = 0{,}9\ g.cm^{-3}$, keď v kapiláre s priemerom otvoru 1,5 mm vystúpi táto kvapalina do výšky $h = 15$ mm nad okolitú hladinu kvapaliny a keď možno predpokladať, že kvapalina dokonale zmáča steny nádoby!

$[\sigma = 49{,}7 . 10^{-3}\ N.m^{-1}]$

233. Do vody sú ponorené dve sklené kapiláry s polomermi $r = 1$ mm a $r_2 = 1{,}5$ mm. Vypočítajte povrchové napätie vody, keď rozdiel hladín vodných stĺpcov v týchto kapilárach $\Delta h = 4{,}9$ mm a keď predpokladáme, že voda dokonale zmáča stenu sklenej trubice kapiláry!

[$\sigma = 72{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N.m^{-1}}$]

6 MECHANICKÉ KMITY A VLNY AKUSTIKA

Úvod

a) *Netlmený harmonický pohyb* je taký pohyb hmotného bodu, ktorý prebieha účinkom sily úmernej výchylke hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy a smerujúcej stále do rovnovážnej polohy, do stredu harmonického pohybu. Vo všeobecnom prípade je dráha harmonického pohybu hmotného bodu eliptická. V špeciálnom prípade môže byť táto dráha kruhová aj priamková. Pohybová rovnica hmotného bodu s hmotnosťou m, konajúceho jednoduchý netlmený harmonický pohyb v priamke, má tvar

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

kde x je výchylka hmotného bodu z rovnovážnej polohy, k konštanta charakterizujúca vlastnosti zariadenia, ktoré núti hmotný bod konať harmonický pohyb. Závislosť výchylky od času ako riešenie uvedenej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, x_0 je *amplitúda* a α *fázová konštanta* pohybu. Výraz $\omega t + \alpha$ nazývame *fázou* pohybu. Pre *periódu* netlmeného harmonického pohybu platí vzťah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Výraz $f = \frac{1}{T}$ sa nazýva *frekvenciou* pohybu.

b) Ak okrem sily $F = -kx$ pôsobí na hmotný bod sila (odpor prostredia) úmerná rýchlosti pohybujúceho sa bodu a opačného smeru ako rýchlosť, hmotný bod koná *tlmený harmonický pohyb* v priamke a jeho pohybová rovnica je:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = kx - r \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

kde r je koeficient odporu prostredia. Riešením pohybovej rovnice dostaneme pre periodický pohyb ($\omega_0^2 > b_0^2$) vzťah

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + a) \tag{1}$$

kde $b = \dfrac{r}{2m}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, pričom $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Ako vidieť zo vzťahu (1), amplitúda pohybu s časom exponenciálne klesá. Podiel dvoch za sebou idúcich maximálnych výchyliek na tú istú stranu sa volá *útlm* a je daný vzťahom

$$\lambda = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \alpha)}{x_0 e^{-b(t+T)} \cos[\omega(t+T) + \alpha]} = e^{bT}$$

kde $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ je perióda harmonického tlmeného pohybu. Prirodzený logaritmus útlmu je *logaritmický dekrement*, daný vzťahom

$$\delta = \ln \lambda = bT$$

c) Ak okrem síl uvedených v odseku b) pôsobí na hmotný bod ešte harmonicky sa meniaca vonkajšia sila $F = F_0 \sin \omega_2 t$, pohybová rovnica hmotného bodu má tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_2 t$$

Riešením tejto rovnice pre ustálený stav dostaneme vzťah

$$x = x_0 \sin(\omega_2 t - \varphi)$$

kde x_0 a φ sú konštanty, určené vzťahmi

$$x_0 = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4b^2\omega_2^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega_2 b}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$$

pričom $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ a $b = \dfrac{r}{2m}$.

Hovoríme, že hmotný bod koná *kmity vynútené* vonkajšou silou, s kruhovou frekvenciou tejto sily. Ako vidno, amplitúda vynútených kmitov závisí od ω_2. Keď ω_2 je také, že x_0 má maximálnu hodnotu, hovoríme o *rezonancii*.

d) Ak má hmotný bod konať súčasne dva rôzne kmitavé pohyby, tak v každom okamihu je výchylka z rovnovážnej polohy jeho výsledného pohybu daná vektorovým súčtom výchyliek, ktorými by sa vyznačoval hmotný bod v danom okamihu, keby konal len jeden, resp. druhý kmitavý pohyb. Hovoríme o *skladaní* *kmitov.* Ak ide o skladanie rovnobežných kmitov, uvedený vektorový súčet výchyliek sa zmení na algebraický súčet.

e) Ak sa šíri kmitavý pohyb z jedného hmotného elementu prostredia na druhý, hovoríme, že prostredím postupuje *vlnenie*. Prostredie je vo vlnivom pohybe. Ak sú výchylky jednotlivých elementov prostredia pri jeho vlnivom pohybe všade a stále rovnobežné so smerom postupu vlnenia, hovoríme, že vlnenie je *pozdĺžne* (longitudinálne). Naopak, ak sú tieto výchylky na tento smer kolmé, hovoríme, že vlnenie je *priečne* (transverzálne). Pre výchylku z rovnovážnej polohy u platí pri vlnení vo všeobecnosti vzťah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u$$

kde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

a v je rýchlosť šírenia sa vĺn v danom prostredí. Pre rýchlosť šírenia sa pozdĺžnych vĺn v_1, resp. pre rýchlosť priečnych vĺn v_2 v určitom prostredí platia vzťahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}, \quad \text{resp.} \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

kde ϱ je hustota prostredia, E modul pružnosti v ťahu a G modul pružnosti v šmyku (torzii) príslušného prostredia. Keďže pre tekutiny $G = 0$, môžu sa nimi šíriť len pozdĺžne vlny. Pre rýchlosť šírenia sa vĺn v plynnom prostredí platí:

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

kde p je tlak v plyne, ϱ jeho hustota a $\varkappa$ *Poissonova konštanta* (pozri kap. 9).

f) Pod *vlnovou dĺžkou* vlnenia λ rozumieme vzdialenosť, ktorú v danom hmotnom prostredí prejde vlna za jednu periódu T kmitavého pohybu, ktorý vlna prenáša. Teda

$$\lambda = vT$$

kde v je rýchlosť šírenia sa príslušného vlnenia v danom prostredí.

g) *Chvenie* je špeciálny vlnivý pohyb. Je to stojaté vlnenie. Všetky elementy napr. lineárneho hmotného útvaru pri chvení konajú súčasne kmitavý pohyb; amplitúda kmitavého pohybu jednotlivých elementov nie je však rovnaká a závisí od polohy elementu. Body útvaru, ktoré majú pri chvení nulovú amplitúdu, sú počas chvenia trvale v pokoji. Nazývajú sa *uzly*. Body, ktoré majú maximálnu amplitúdu, sa nazývajú *kmitne* a ležia vždy medzi dvoma uzlami. Vzdialenosť dvoch susedných uzlov sa rovná polovici vlnovej dĺžky, takže vzdialenosť uzla a najbližšej kmitne je $\frac{\lambda}{4}$. Body ležiace na dvoch rôznych stranách toho istého uzla majú rozdiel fáz rovnajúci sa π. Hovoríme, že kmitajú s opačnou fázou.

h) Aj pre vlnovú dĺžku stojatého vlnenia platí vzťah $\lambda = vT$, kde v je rýchlosť príslušného postupného vlnenia v prostredí, ktoré je v stave stojatého vlnenia. Pre strunu, ktorej dĺžková jednotka má hmotnosť ϱ a ktorá sa napína silou P, platí:

$$v = \sqrt{\frac{P}{\varrho}}$$

i) Pri dopade vlnenia na rovinné rozhranie dvoch prostredí sa vlnenie jednak odráža späť do pôvodného prostredia, jednak prechádza do druhého prostredia, pravda, pod iným uhlom vzhľadom na kolmicu na rozhranie prostredí. Hovoríme, že vzniká *lom vlnenia.* Pritom uhol odrazu vlnenia sa rovná uhlu dopadu a smer postupu odrazeného vlnenia ostáva v rovine dopadu. Uhol dopadu α_1 a uhol lomu α_2 spĺňajú vzťah

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

kde v_1, resp. v_2 je rýchlosť šírenia sa vlnenia v prvom, resp. v druhom prostredí. Ak $v_2 > v_1$, $\alpha_2 > \alpha_1$. V takomto prípade pri určitom $\alpha_1 = \alpha_0$ sa $\alpha_2 = 90°$. Ak je $\alpha_1 > \alpha_0$, vlnenie do druhého prostredia už neprenikne a dochádza k *úplnému odrazu* vlnenia. Uhol α_0 sa nazýva hraničný uhol.

j) Zvuk je špeciálnym prípadom vlnenia, ktoré vnímame sluchom. Ak zdroj zvukových vĺn a pozorovateľ, ktorý ich vníma, sú v relatívnom pohybe, frekvencia zvuku sa javí pozorovateľovi iná ako v prípade, keby bol pozorovateľ a zdroj zvuku v relatívnom pokoji. Ak sa pozorovateľ pohybuje vzhľadom na prostredie (vzduch, o ktorom predpokladáme, že je v pokoji) rýchlosťou v a zdroj rýchlosťou u v rovnakom smere, tak podľa *Dopplerovho princípu* súvis medzi frekvenciou zvuku f', ktorú pozorovateľ vníma, a frekvenciou f, ktorú by vnímal, keby bol vzhľadom na zdroj v pokoji, je daný vzťahom

$$f' = \frac{c - v}{c - u} f$$

kde c je rýchlosť zvuku vo vzduchu. Keď $v < u$, potom $f' > f$. Ak má v opačný smer ako u, kým sa zdroj i pozorovateľ navzájom približujú, platí:

$$f' = \frac{c + v}{c - u} f$$

k) Pod *hladinou intenzity* nejakého zvuku rozumieme veličinu definovanú vzťahom

$$L_I = \log \frac{I}{I_0^*}$$

kde I je fyzikálna intenzita príslušného zvuku a $I_0^* = 10^{-16}$ W.cm^{-2} je *zvukový prah*, t. j. fyzikálna intenzita referenčného tónu (s frekvenciou 1000 Hz), ktorý priemerné ľudské ucho už práve nevníma. Pod intenzitou vlnenia rozumieme veličinu, ktorá sa číselne rovná energii prechádzajúcej za jednotku času cez plošnú jednotku kolmú na smer postupu vlnenia.

Hladina hlasitosti referenčného tónu je určená vzťahom

$$L_N = 10 \log \frac{I}{I_0^*}$$

Hladina hlasitosti akéhokoľvek zvuku sa rovná hladine hlasitosti jednoduchého tónu s frekvenciou 1000 Hz, ktorý sa javí pre ľudské ucho rovnako silný ako meraný zvuk. Číselné hodnoty hladiny intenzity v decibeloch (dB) a hladiny hlasitosti vo fónoch (Ph) sú pri referenčnom tóne rovnako veľké.

Príklady

234. Určte amplitúdu a fázovú konštantu netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu po priamke, ak sa hmotný bod v čase $t = 0$ vyznačuje výchylkou $X_0 = 5$ cm a rýchlosťou $v_0 = 20$ cm.s^{-1}, keď frekvencia pohybu $f = 1$ s^{-1}!

Riešenie:

Pre výchylku z rovnovážnej polohy pri netlmenom harmonickom pohybe platí vzťah

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

kde amplitúdu x_0 a fázovú konštantu α možno určiť zo začiatočných podmienok. Keďže

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

potom vzhľadom na obsah úlohy možno pre čas $t = 0$ písať:

$$X_0 = x_0 \cos\alpha$$

$$v_0 = -x_0\omega \sin\alpha$$

odkiaľ vyplýva:

$$x_0 = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{X_0^2 + \frac{v_0^2}{4\pi^2 f^2}} = 5{,}92 \text{ cm}$$

a ďalej

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{X_0 \omega} = \frac{v_0}{X_0 . 2\pi f} = -0{,}636\ 93$$

čiže

$$\alpha = -32°\ 30'$$

235. Zistite pohyb hmotnej guľôčky pozdĺž priameho kanála prechádzajúceho stredom Zeme, keď vieme, že sila pôsobiaca na guľôčku vnútri zemskej gule je priamo úmerná vzdialenosti pohybujúceho sa bodu od stredu Zeme a smeruje do jej stredu. Guľôčka bola spustená do kanála bez začiatočnej rýchlosti. Treba určiť čas, za ktorý sa guľôčka dostane zo zemského povrchu do stredu Zeme, ako aj rýchlosť, ktorou prebehne stredom Zeme. (Polomer Zeme $R = 6370$ km.)

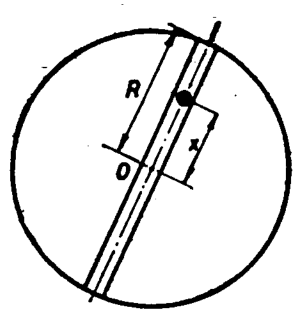
Riešenie:

Pre silu *(obr. 80)* pôsobiacu na guľôčku v súhlase so znením úlohy platí:

$$F = -kx$$

takže

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



Obr. 80

Na zemskom povrchu sa uvedená sila rovná tiaži guľôčky, čiže

$$kR = mg, \quad \text{t. j.} \quad k = \frac{mg}{R}$$

Možno teda ďalej písať

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{mR}x = -\frac{g}{R}x$$

a ďalej

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

keď sme označili $\frac{g}{R} = \omega^2$.

Riešením tejto rovnice je výraz

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

V čase $t = 0$ sa $x = R$, t. j. $x_0 = R$, $\alpha = 0$, takže

$$x = R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t$$

Pre čas, za ktorý sa guľôčka dostane do stredu Zeme, platí:

$$R \cos \sqrt{\frac{g}{R}}\, t_1 = 0, \quad \text{takže} \quad \sqrt{\frac{g}{R}}\, t_1 = \frac{\pi}{2}$$

a teda

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} = 20{,}8 \text{ min}$$

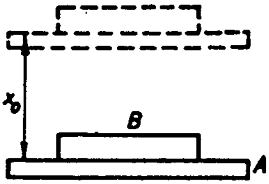
Pre rýchlosť guľôčky platí:

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\sqrt{\frac{g}{R}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}}\, t$$

Stredom Zeme prejde guľôčka rýchlosťou

$$v_1 = R\sqrt{\frac{g}{R}} \sin \sqrt{\frac{g}{R}}\, t_1 = 7{,}9 \text{ km.s}^{-1}$$

236. Kruhová doska A, uložená v horizontálnej rovine, koná vo zvislom smere kmitavý pohyb *(obr. 81)* s amplitúdou $x_0 = 0{,}75$ m. Aká môže byť maximálna frekvencia kmitania dosky, aby sa predmet B, voľne uložený na dosku, od nej neoddelil?



Obr. 81

Riešenie:

Uvedená podmienka bude splnená, keď v mieste maximálneho zrýchlenia dosky smerom nadol sa toto zrýchlenie nanajvýš rovná zrýchleniu voľného pádu g. Pre výchylku dosky z rovnovážnej polohy platí:

$$x = x_0 \cos \omega t$$

a pre zrýchlenie dosky dostaneme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$$

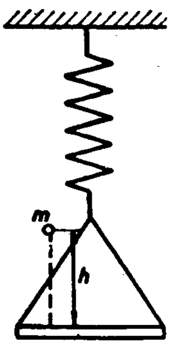
Zrýchlenie má teda maximálnu hodnotu v miestach maximálnej výchylky. V úlohe uvedená podmienka bude preto splnená pri takom najväčšom ω, pri ktorom

$$\omega^2 x_0 = g, \quad \text{t. j.} \quad \omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$$

z toho

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}}{0{,}75\ \mathrm{m}}} = 0{,}575\ \mathrm{s^{-1}}$$

237. Na misku hmotnosti M, zavesenú na špirále s koeficientom pružnosti k, dopadne z výšky h závažie hmotnosti m a zostane na miske *(obr. 82)*. Miska začne konať kmitavý pohyb. Treba nájsť amplitúdu kmitov.



Obr. 82

Riešenie:

Závažie dopadne na misku rýchlosťou v_1, ktorej hodnota vyplýva zo vzťahu

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh, \quad \text{t. j.} \quad v_1 = \sqrt{2gh}$$

Zo zákona o zachovaní hybnosti izolovanej sústavy dostaneme vzťah

$$mv_1 = (m + M)v$$

kde v je rýchlosť, ktorou sa dá miska so závažím do pohybu. Platí pre ňu vzťah

$$v = \frac{mv_1}{m + M} = \frac{m}{m + M}\sqrt{2hg}$$

V začiatočnej polohe je špirála natiahnutá z rovnovážnej polohy (v ktorej by bola, keby nebola zaťažená) o a, pre ktoré platí:

$$Mg = ka, \quad \text{t. j.} \quad a = \frac{Mg}{k}$$

Z vety o kinetickej energii, ktorá hovorí, že práca síl na určitej dráhe sa rovná zväčšeniu kinetickej energie telesa, vyplýva

$$A = -\int_a^{x_0} kx \,\mathrm{d}x + (m + M)g(x_0 - a) = -\frac{1}{2}(m + M)v^2$$

t. j.

$$\frac{1}{2}k(x_0^2 - a^2) = \frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2}{(m + M)^2}2gh + (m + M)g(x_0 - a)$$

kde x_0 prislúcha maximálnej výchylke z pôvodnej rovnovážnej polohy nezaťaženej špirály. Ak sem dosadíme $a = \frac{Mg}{k}$, po úprave dostaneme:

$$x_0^2 - \frac{2(M + m)g}{k}x_0 - \frac{2m^2gh}{(M + m)k} + \frac{M(M + 2m)}{k^2}g^2 = 0$$

Z toho

$$x_0 = \frac{M + m}{k}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M + m)k}}$$

Kmitavý pohyb bude konať miska so závažím okolo rovnovážnej polohy, ktorá je od rovnovážnej polohy nezáťaženej špirály vzdialená o c, pre ktoré platí:

$$(m + M)g = kc$$

Amplitúda kmitavého pohybu

$$A = x_0 - c = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(M + m)k}}$$

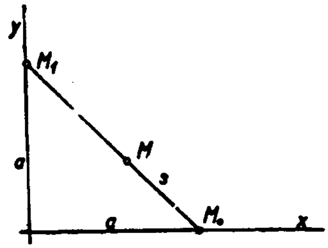
238. Pohyb hmotného bodu je určený rovnicami $x = a \cos^2 kt$, $y = a \sin^2 kt$, kde a a k sú konštanty. Treba určiť dráhu pohybu a zákon pohybu po tejto dráhe.

Riešenie:

Aby sme našli dráhu pohybu, vylúčime z uvedených rovníc čas a dostaneme:

$$x + y = a$$

To je rovnica priamky, znázornenej na *obr. 83.* V čase $t = 0$ sa $x_0 = a$, $y_0 = 0$,



Obr. 83

takže hmotný bod sa v tomto okamihu nachádza v mieste M_0. V čase $t_1 = \dfrac{\pi}{2k}$ sa $x_1 = 0$, $y_1 = a$, takže hmotný bod sa nachádza v mieste M_1. V čase $t_2 = 2t_1 = \dfrac{\pi}{k}$ sa $x_2 = a$, $y_2 = 0$, takže hmotný bod je opäť v mieste M_0 a celý pohyb sa opakuje. Hmotný bod teda koná kmitavý pohyb po úsečke M_0M_1 s periódou

$$T = \frac{\pi}{k}$$

Pre súradnice rýchlosti bodu platí:

$$v_z = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2ak \cos kt \sin kt = -ak \sin 2kt$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2ak \sin kt \cos kt = ak \sin 2kt$$

Pre hodnotu rýchlosti potom platí:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}\, ak \sin 2kt$$

Ak označíme symbolom s vzdialenosť hmotného bodu od miesta M_0, v ktorom bol hmotný bod v čase $t = 0$, zrejme platí:

$$v = \frac{ds}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2}\, ak \sin 2kt$$

takže

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cos 2kt + C$$

Hodnota konštanty C vyplýva zo začiatočných podmienok, ktoré hovoria, že v čase $t = 0$, sa $s = 0$. Teda

$$C = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

a rovnica pre s bude mať tvar

$$s = \frac{a\sqrt{2}}{2} (1 - \cos 2kt) = a\sqrt{2} \sin^2 kt$$

239. Aká je frekvencia netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti $m = 2$ g, keď amplitúda pohybu $x_0 = 10$ cm a celková energia hmotného bodu je pri tomto pohybe 1 J?

Riešenie:

Celková energia hmotného bodu konajúceho netlmený harmonický pohyb je daná súčtom kinetickej a potenciálnej energie:

$$W = W_k + W_p$$

Keďže $x = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$, $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_0\, \omega \sin(\omega t + \alpha)$, platí

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

Pre potenciálnu energiu hmotného bodu nachádzajúceho sa vo vzdialenosti x od rovnovážnej polohy vzhľadom na rovnovážnu polohu platí:

$$W_p = \int_0^x kx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

keďže $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Celková energia

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} mx_0^2\omega^2 = \frac{1}{2} mx_0^2 . 4\pi^2 f^2 = 2\pi^2 m x_0^2 f^2$$

Pre hľadanú frekvenciu dostaneme:

$$f=\sqrt{\frac{W}{2\pi^2 m x_0^2}}=\sqrt{\frac{1\ \mathrm{J}}{2.9{,}86.2.10^{-3}\ \mathrm{kg}.10^{-2}\ \mathrm{m}^2}}=50{,}35\ \mathrm{s}^{-1}$$

240. Aký je logaritmický dekrement útlmu tlmeného harmonického pohybu hmotného bodu, keď za 10 s trvania pohybu hmotný bod stratí 50 % svojej mechanickej energie a keď perióda tlmeného pohybu $T=2$ s?

Riešenie:

Celková energia hmotného bodu konajúceho harmonický pohyb je v určitom okamihu t daná vzťahom

$$W_t=\frac{1}{2}kx_{0t}^2$$

kde x_{0t} je okamžitá amplitúda kmitania. Platí teda:

$$\frac{W_t}{W_0}=\frac{\frac{1}{2}kx_{0t}^2}{\frac{1}{2}kx_0^2}=\frac{x_{0t}^2}{x_0^2}=\frac{1}{2}$$

t. j.

$$\frac{x_{0t}}{x_0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ale

$$\frac{x_{0t}}{x_0}=\frac{x_0 e^{-\delta\frac{t}{T}}}{x_0}=e^{-\delta\frac{t}{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

takže

$$-\delta\frac{t}{T}=-\frac{1}{2}\ln 2,\quad \text{t. j.}\quad \delta=\frac{T}{2t}\ln 2=\frac{2\ \mathrm{s}}{2.10\ \mathrm{s}}\cdot 0{,}693=0{,}0693$$

241. Pozorovaním tlmeného kmitavého pohybu sa zistilo, že po dvoch za sebou nasledujúcich výchylkách na tú istú stranu sa amplitúda kmitov zmenšila o 6/10 a že doba kmitu $T=0{,}5$ s. Určite konštantu útlmu a frekvenciu netlmených kmitov, ktoré by prebiehali za inak rovnakých podmienok!

Riešenie:

Pre logaritmický dekrement tlmených kmitov platí:

$$\delta=\ln\frac{x_1}{x_2}=bT$$

Teraz $x_2 = \frac{4}{10} x_1$, takže pre koeficient útlmu dostaneme:

$$b = \frac{\ln \frac{10}{4}}{0{,}5 \text{ s}} = 1{,}83 \text{ s}^{-1}$$

Pre kruhovú frekvenciu netlmených kmitov platí:

$$\omega_0^2 = \omega^2 + b^2$$

a pre frekvenciu

$$f_0^2 = f^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{T^2} + \frac{b^2}{4\pi^2} = \frac{1}{0{,}5^2 \text{ s}^2} + \frac{1{,}83^2 \text{ s}^{-2}}{4\pi^2} = 4{,}0848 \text{ s}^{-2}$$

t. j.

$$f_0 = 2{,}02 \text{ s}^{-1}$$

242. Aká je rezonančná amplitúda hmotného bodu konajúceho vynútené harmonické kmity, keď jeho hmotnosť $m = 100$ g, kruhová frekvencia vlastných kmitov $\omega_0 = 20 \text{ s}^{-1}$, koeficient útlmu $b = 3 \text{ s}^{-1}$ a amplitúda vynucujúcej sily $F_0 = 10$ N? Vypočítajte aj rezonančnú kruhovú frekvenciu!

Riešenie:

Pre amplitúdu hmotného bodu konajúceho vynútené kmity platí vzťah

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}}$$

Maximálna bude pre také ω_{rez} (rezonancia), pri ktorom $\frac{dx_0}{d\omega} = 0$, t. j. menovateľ uvedeného výrazu má minimum. Je to vtedy, keď

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2).(2\omega) + 8b^2\omega = 0$$

Pre hľadanú rezonančnú kruhovú frekvenciu z tejto rovnice vyplýva:

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = 19{,}54 \text{ s}^{-1}$$

a pre rezonančnú amplitúdu po dosadení ω_{rez} do výrazu pre x_0 dostaneme:

$$x_{0\,\text{rez}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = 84{,}3 \text{ cm}$$

243. Nájdite amplitúdu a fázovú konštantu výsledného harmonického pohybu, ktorý vznikne zložením dvoch rovnobežných kmitavých pohybov $x_1 = x_{01} \cos(\omega t + \alpha_1)$, $x_2 = x_{02} \cos(\omega t + \alpha_2)$, keď $x_{01} = x_{02} = 5$ cm, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$!

Riešenie:

Pre výsledný pohyb bude platiť:

$$x = x_1 + x_2 = x_{01} \cos(\omega t + \alpha_1) + x_{02} \cos(\omega t + \alpha_2) =$$

$$= x_{01}(\cos \omega t \cos \alpha_1 - \sin \omega t \sin \alpha_1) + x_{02}(\cos \omega t \cos \alpha_2 - \sin \omega t \sin \alpha_2) =$$

$$= \cos \omega t(x_{01} \cos \alpha_1 + x_{02} \cos \alpha_2) - \sin \omega t(x_{01} \sin \alpha_1 + x_{02} \sin \alpha_2)$$

Ak označíme:

$$\begin{aligned} x_{01} \cos \alpha_1 + x_{02} \cos \alpha_2 &= x_0 \cos \alpha \\ x_{01} \sin \alpha_1 + x_{02} \sin \alpha_2 &= x_0 \sin \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

pre x dostaneme:

$$x = x_0(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

Výsledný pohyb je tiež harmonický s tou istou frekvenciou, s amplitúdou x_0 a fázovou konštantou α, pre ktoré z rovníc (1) vyplýva:

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} = 9{,}65 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_{01} \sin \alpha_1 + x_{02} \sin \alpha_2}{x_{01} \cos \alpha_1 + x_{02} \cos \alpha_2} = 1$$

takže

$$\alpha = 45°$$

244. Dva rovnobežné kmitavé pohyby rovnakej amplitúdy, rovnakej fázovej konštanty a blízkych periód $T_1 = 3$ s a $T_2 = 3{,}1$ s sa skladajú do výsledného pohybu. Nájdite periódu výsledného kmitavého pohybu a periódu rázov!

Riešenie:

Pre jednotlivé kmitavé pohyby možno písať:

$$x_1 = x_0 \sin(\omega_1 t + \alpha); \quad x_2 = x_0 \sin(\omega_2 t + \alpha)$$

Pre výsledný pohyb bude platiť:

$$x = x_1 + x_2 = x_0 \sin(\omega_1 t + \alpha) + x_0 \sin(\omega_2 t + \alpha) =$$

$$= 2x_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha\right)$$

Pre periódu výsledného kmitavého pohybu možno potom písať:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2}{\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{2}{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = 3{,}05 \text{ s}$$

Amplitúda výsledného pohybu sa s časom mení tiež periodicky. Perióda zmeny amplitúdy

$$T' = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia amplitúdy, t. j. dva rázy, pre periódu rázov platí:

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{T_1T_2}{T_2 - T_1} = 93 \text{ s}$$

245. Nájdite dráhu výsledného pohybu, ktorý vznikne pri skladaní dvoch navzájom kolmých harmonických kmitavých pohybov s rovnakými amplitúdami 5 cm, s rovnakými periódami, keď rozdiel fáz oboch pohybov je $\pi/2$.

Riešenie:

Pre výsledný harmonický pohyb, ktorý vznikne zložením uvedených dvoch harmonických pohybov v navzájom kolmých priamkach, všeobecne platí:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} \cos \omega t + \boldsymbol{b} \sin \omega t =$$

$$= (a_x \cos \omega t + b_x \sin \omega t)\boldsymbol{i} + (a_y \cos \omega t + b_y \sin \omega t)\boldsymbol{j}$$

Ak položíme:

$$a_x = x_0 \sin \varphi_x\,; \quad a_y = y_0 \sin \varphi_y$$

$$b_x = x_0 \cos \varphi_x\,; \quad b_y = y_0 \cos \varphi_y$$

tak platí

$$x_0 = +\sqrt{a_x^2 + b_x^2}\,; \quad y_0 = +\sqrt{a_y^2 + b_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_x = \frac{a_x}{b_x}\,; \quad \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{a_y}{b_y}$$

Kladné znamienka pri predchádzajúcich odmocninách sme písali preto, lebo x_0, y_0 majú význam amplitúd harmonických pohybov, ktoré sú vždy kladné.

Potom

$$a_x \cos \omega t + b_x \sin \omega t = x_0 \sin (\omega t + \varphi_x)$$

$$a_y \cos \omega t + b_y \sin \omega t = y_0 \sin (\omega t + \varphi_y)$$

a

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} x_0 \sin (\omega t + \varphi_x) + \boldsymbol{j} y_0 \sin (\omega t + \varphi_y)$$

Pohyb v smere osi x predstavuje vzhľadom na pohyb v smere osi y fázové predbiehanie $\varphi_x - \varphi_y$. Vhodnou voľbou začiatku času možno dosiahnuť, aby sa $\varphi_y = 0$. Ak potom píšeme $\varphi_x = \varphi$ a $\varphi_y = 0$, dostaneme:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} x_0 \sin (\omega t + \varphi) + \boldsymbol{j} y_0 \sin \omega t$$

V našom prípade $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = y_0 = A = 5$ cm; potom

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} A \cos \omega t + \boldsymbol{j} A \sin \omega t$$

keďže

$$A \cos \omega t = x; \quad A \sin \omega t = y$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

kde $r = A = 5$ cm.

Dráha výsledného harmonického pohybu je kružnica polomeru $r = 5$ cm.

246. Rýchlosť šírenia pozdĺžnych vĺn v oceli $v_1 = 5100$ m.s^{-1}. Aká je rýchlosť šírenia priečnych vĺn v oceli, keď Poissonovo číslo $m = 3{,}1$?

Riešenie:

Pre rýchlosť šírenia pozdĺžnych vĺn v_1 a rýchlosť šírenia priečnych vĺn v_2 v určitom prostredí platia vzťahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{G}{\varrho}}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu, G modul pružnosti v šmyku a ϱ hustota príslušného prostredia.

Ale

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} = \frac{m}{2(m+1)} \varrho v_1^2$$

takže

$$v_2 = \sqrt{\frac{m\varrho v_1^2}{2(m+1)\varrho}} = v_1 \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}} = 5100 \text{ m.s}^{-1} . 0{,}61 = 3111 \text{ m.s}^{-1}$$

247. V Kundtovej trubici vytvoríme stojaté vlnenie pomocou oceľovej tyče dĺžky $l = 120$ cm. Trubica je naplnená vodíkom a vzdialenosť medzi susednými uzlami stojatého vlnenia, zistená meraním, je 28,8 cm. Aká je rýchlosť zvuku vo vodíku, keď rýchlosť zvuku v oceli $v^* = 5300 \text{ m.s}^{-1}$?

Riešenie:

Pre dĺžku vlny v tyči platí:

$$\lambda^* = v^* T$$

a pre dĺžku vlny vo vodíku

$$\lambda = vT$$

Delením oboch rovníc dostaneme:

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{v^*}{v}$$

takže pre hľadanú rýchlosť postupu vlnenia vo vodíku v dostaneme

$$v = \frac{\lambda}{\lambda^*} v^*$$

Keďže $\lambda^* = 2l = 240$ cm, $\lambda = 2 . 28{,}8 \text{ cm} = 57{,}6$ cm a

$$v = \frac{57{,}6 \text{ cm}}{240 \text{ cm}} 5300 \text{ m.s}^{-1} = 1272 \text{ m.s}^{-1}$$

248. Rýchlosť zvuku v kyslíku je za normálnych podmienok $317{,}2 \text{ m.s}^{-1}$. Aký je pomer špecifických tepelných kapacít (Poissonova konštanta) $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ kyslíka?

Riešenie:

Normálnymi podmienkami nazývame tie, pri ktorých je teplota plynu $t = 0$ °C a tlak plynu $p = 101{,}3$ kPa. Pre rýchlosť šírenia zvuku v plyne platí vzťah

$$v = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$$

kde ϱ je hustota plynu a p tlak plynu. Pre hľadané $\varkappa$ potom dostaneme:

$$\varkappa = \frac{\varrho v^2}{p}$$

Hustotu kyslíka za normálnych podmienok určíme z poznatku, že za týchto podmienok mól kyslíka (a akéhokoľvek plynu vôbec) má objem $V_0 = 22{,}4\ \mathrm{dm}^3$. Teda

$$\varrho = \frac{m}{V_0} = \frac{32\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg}}{22{,}4\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m}^3} = 1{,}428\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$$

kde $m = 32\,.\,10^{-3}$ kg je hmotnosť mólu kyslíka. Pre tlak p možno písať

$$p = 101{,}3\ \mathrm{kPa} = 101{,}3\,.\,10^3\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}$$

takže

$$\varkappa = \frac{1{,}428\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}\,.\,317{,}2^2\ \mathrm{m^2\,.\,s^{-2}}}{101{,}3\,.\,10^3\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}} \doteq 1{,}42$$

249. Základná frekvencia struny dĺžky $l = 2$ m a dĺžkovej hustoty $\varrho_l = 1{,}5\ \mathrm{g\,.\,cm^{-1}}$ je $f = 2\ \mathrm{s^{-1}}$. Akou silou sa struna napína?

Riešenie:

Pre základnú frekvenciu chvenia struny platí vzťah

$$f = \frac{v}{2l}$$

kde v je rýchlosť šírenia priečneho vlnenia v strune. Avšak

$$v = \sqrt{\frac{F}{\varrho_l}}$$

kde F je sila, ktorou sa struna napína, a ϱ_l je dĺžková hustota struny. Po dosadení za v dostaneme:

$$f = \frac{\sqrt{\dfrac{F}{\varrho_l}}}{2l}$$

takže

$$F = 4l^2 f^2 \varrho_l = 4\,.\,4\ \mathrm{m^2}\,.\,4\ \mathrm{s^{-2}}\,.\,0{,}15\ \mathrm{kg\,.\,m^{-1}} = 9{,}6\ \mathrm{N}$$

250. Pod akým najväčším uhlom môže dopadať zvuková vlna na rozhranie vzduchu a vody, aby prenikla do vody, keď rýchlosť zvuku vo vode $v_2 = 1450\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$

a rýchlosť zvuku vo vzduchu pri danej teplote $v_1 = 340\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

Riešenie:

Zvuk sa dostane do vody pri všetkých uhloch dopadu, ktoré sú menšie ako hraničný uhol α_0, pre ktorý platí:

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{t. j.} \quad \sin \alpha_0 = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340\ \mathrm{m.s^{-1}}}{1450\ \mathrm{m.s^{-1}}} = 0{,}234\ 48$$

takže

$$\alpha_0 = 13°\ 33'$$

Aby sa zvuk dostal do vody, musia byť uhly dopadu zvukovej vlny menšie ako 13° 33′.

251. V smere priamej spojnice sa pozorovateľ pohybuje smerom k zdroju zvuku rýchlosťou $v = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a zdroj zvuku v smere k pozorovateľovi sa pohybuje rýchlosťou $u = 5\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Obidve uvedené rýchlosti sa vzťahujú na prostredie, ktorým sa zvuk šíri (vzduch) a ktoré je v pokoji. Akú frekvenciu zvuku vníma pozorovateľ, keď zdroj vysiela zvuk s frekvenciou $f = 500\ \mathrm{s^{-1}}$ a keď rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu pri danej teplote $c = 340\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

Riešenie:

Podľa Dopplerovho princípu pre frekvenciu, ktorú vníma pozorovateľ, v takomto prípade platí:

$$f' = \frac{c+v}{c-u} f = \frac{(340+10)\mathrm{m.s^{-1}}}{(340-5)\ \mathrm{m.s^{-1}}} \cdot 500\ \mathrm{s^{-1}} = 522\ \mathrm{s^{-1}}$$

252. O koľko sa zvýši hladina intenzity zvuku, keď sa jeho fyzikálna intenzita zvýši 5-krát?

Riešenie:

Pre hladinu intenzity nejakého zvuku, vyjadrenú v decibeloch, platí vzťah

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

kde $I_0 = 10^{-16}\ \mathrm{W.cm^{-2}}$ je intenzita zvukového prahu referenčného tónu s frekvenciou 1000 Hz. Ak intenzita nejakého zvuku je najprv I_1 a potom sa zvýši na $I_2 = 5I_1$, pre hladiny intenzity týchto zvukov platí:

$$L_{I_1} = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$L_{I_2} = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{5I_1}{I_0}$$

Teda platí

$$L_{I_2} - L_{I_1} = 10\left(\log \frac{5I_1}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0}\right) = 10 \log 5 \doteq 7 \text{ dB}$$

Hladina intenzity zvuku sa zvýši približne o 7 dB.

Úlohy

253. Vypočítajte periódu harmonického pohybu hmotného bodu s hmotnosťou $m = 10$ g, keď sila udržujúca hmotný bod v tomto pohybe má pri výchylke $x = 3$ cm hodnotu $F = 0{,}05$ N!

[$T = 0{,}486$ s]

254. Horizontálna doska koná harmonický pohyb vo vodorovnom smere s periódou $T = 5$ s. Teleso, ktoré leží na doske, sa začína kĺzať, keď amplitúda kmitov dosiahne hodnotu $x_0 = 0{,}5$ m. Aký je koeficient trenia medzi závažím a doskou?

[$\mu = 0{,}08$]

255. Vodorovná doska bola rozkmitaná tak, že koná harmonické kmity vo zvislej rovine s frekvenciou $f = 500$ Hz. Povrch dosky posypeme jemným pieskom. Aká je amplitúda kmitov dosky, ak meraním zistíme, že zrniečka piesku sú nad rovnovážnu polohu dosky vymršťované do výšky $h = 3$ mm?

$$\left[x_0 = \frac{1}{4\pi^2 f^2} \sqrt{8\pi^2 f^2 g h - g^2}\right]$$

256. Na doske leží závažie hmotnosti $m = 2$ kg. Doska koná harmonický pohyb vo zvislom smere s periódou $T = 0{,}5$ s a amplitúdou $x_0 = 3$ cm. Vyjadrite silu F, ktorou závažie tlačí na dosku, a vypočítajte amplitúdu tejto sily!

[$F_{max} = 29$ N]

257. Logaritmický dekrement tlmených harmonických kmitov $\delta = 0{,}02$. Vypočítajte, koľkokrát sa zmenší amplitúda kmitov po 100 kmitoch hmotného bodu!

[7,4-krát]

258. Aký je koeficient útlmu tlmených harmonických kmitov hmotného bodu, keď podiel dvoch za sebou idúcich maximálnych výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu sa rovná 2 a perióda tlmených kmitov $T = 0{,}5$ s? Aká by bola perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok?

[$b=1{,}39\ \mathrm{s}^{-1}$; $T_0=0{,}497\ \mathrm{s}$]

259. Aký je koeficient pružnosti pružín (v počte 4) železničného vozňa, ktorý má spolu s nákladom hmotnosť 50 000 kg, ak sa zistilo, že pri rýchlosti $v=12\ \mathrm{m.s^{-1}}$ sa vozeň začne prudko hojdať vplyvom nárazov na spojoch koľajníc? Dĺžka koľajnice $l=12{,}8$ m. Vplyv tlmenia zanedbajte.

[$k=433\ \mathrm{kN.m^{-1}}$]

260. Nájdite amplitúdu výsledného harmonického pohybu, ktorý vznikne zložením dvoch jednosmerných kmitavých pohybov s rovnakou periódou, s amplitúdami 3 a 5 cm, keď rozdiel ich fáz je 60°!

[$x_0=7$ cm]

261. Dva harmonické kmitavé pohyby blízkych frekvencií sa skladajú do výsledného pohybu, ktorý sa vyznačuje 5 rázmi za sekundu. Aká je frekvencia druhého z týchto pohybov, keď prvý má frekvenciu $f_1=40\ \mathrm{s^{-1}}$?

[$f_2=45\ \mathrm{s^{-1}}$] 35

262. Nájdite dráhu výsledného pohybu, ktorý vznikne pri skladaní dvoch navzájom kolmých harmonických pohybov s amplitúdami 3 a 5 cm, rovnakými periódami a rovnakými fázami!

$$\left[y=\frac{5}{3}x\right]$$

263. Rýchlosť šírenia sa vlnenia vo vzduchu za určitých podmienok $v_1=330\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a vo vode $v_2=1450\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Lúč vo vzduchu postupujúceho vlnenia zviera s hladinou vody uhol $\alpha=80°$. Aký uhol bude zvierať s hladinou vody lúč vlnenia prenikajúci do vody?

[$\beta=40°\ 14'$]

264. Stojaté vlnenie vzniklo interferenciou dvoch vĺn s frekvenciou $f=475\ \mathrm{s^{-1}}$. Vzdialenosť susedných uzlov bola 1,5 m. Aká je rýchlosť postupu vlnenia v prostredí, v ktorom toto stojaté vlnenie vzniklo?

[$v=1425\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

265. Vypočítajte rýchlosť šírenia pozdĺžnych a priečnych vĺn v oceli s hustotou $\varrho=7{,}8\ \mathrm{g.cm^{-3}}$, keď modul pružnosti v ťahu ocele $E=20.10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}$ a modul pružnosti v šmyku ocele $G=8.10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}$!

[$v_1=5065\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $v_2=3200\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

266. Aká je rýchlosť zvuku vo vzduchu pri teplote $t_1 = 10$ °C, keď pri teplote $t_2 = 20$ °C sa táto rýchlosť $v_2 = 340$ m.s^{-1}?

[$v_1 = 334$ m.s^{-1}]

267. Určite pomer špecifických tepelných kapacít (Poissonova konštanta) $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ hélia, ak viete, že rýchlosť zvuku v héliu za normálnych podmienok $v = 940$ m.s^{-1}!

[$\varkappa = 1{,}56$]

268. Pomocou Kundtovej trubice meriame rýchlosť zvuku v dreve. Drevená tyč, pomocou ktorej vytvoríme stojaté vlnenie v Kundtovej trubici, má dĺžku 135 cm. Meraním zistená vzdialenosť medzi susednými uzlami stojatého vlnenia v trubici je 10 cm. Aká je rýchlosť zvuku v dreve, keď rýchlosť zvuku vo vzduchu pri danej teplote je $v^* = 340$ m.s^{-1}?

[$v = 4590$ m.s^{-1}]

269. Rušeň sa blíži k pozorovateľovi rýchlosťou $v = 20$ m.s^{-1}. Aký vysoký základný tón píšťaly počuje pozorovateľ, ktorý je v pokoji, ak strojvodca počuje tón frekvencie $f = 300$ s^{-1} a ak rýchlosť zvuku vo vzduchu za daných podmienok $v_0 = 340$ m.s^{-1}?

[$f^* = 319$ s^{-1}]

270. Určite, koľkokrát väčšiu frekvenciu zvuku klaksónu automobilu vníma cyklista, keď sa automobil smerom k nemu pohybuje rýchlosťou $u = 72$ km.h^{-1} a cyklista sa pohybuje v tom istom smere ako automobil rýchlosťou $v = 5$ m.s^{-1}! Obidve rýchlosti uvažujeme vzhľadom na prostredie (vzduch), ktoré je v pokoji. Rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu za danej teploty $c = 340$ m.s^{-1}.

[1,047-krát]

271. Ak skrátime strunu o 10 cm, zvýši sa jej základná frekvencia 1,5-krát. Vypočítajte pôvodnú dĺžku struny, keď v obidvoch prípadoch je napätie struny rovnaké!

[$l = 30$ cm]

272. Aká je fyzikálna intenzita zvuku, ktorého hladina intenzity $L_I = 50$ dB?

[$I = 10^{11}$ W.cm^{-2}]

B TEPELNÉ JAVY

7 TEPLOTNÁ ROZŤAŽNOSŤ LÁTOK MERANIE TEPLOTY A TEPLA

Úvod

a) *Teplotou* nazývame objektívnu mieru pre tú vlastnosť telies, ktorá pri dotyku s nimi v nás vyvoláva tepelné pocity. Je to stavová veličina a meriame ju tak, že jednotlivým tepelným stavom telies prisudzujeme podľa určitého predpisu číselné údaje, čím získame stupnicu teplôt.

V praxi obyčajne meriame teplotu pomocou teplotnej rozťažnosti kvapalín alebo teplotnej rozpínavosti plynov.

Keď objem nejakej kvapaliny, ktorý sa teplotou len zväčšuje, je pri teplote mrazu vody V_0, pri teplote varu vody V_{100} a pri meranej teplote V, *teplota v stupňoch Celzia* je daná vzťahom

$$t = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0}\, 100\ °\mathrm{C} \tag{1}$$

Keď teplotu meriame pomocou zmien tlaku plynu za konštantného objemu, je teplota v stupňoch Celzia — plynová teplota — určená vzťahom

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0}\, 100\ °\mathrm{C} \tag{2}$$

kde p_0 je tlak plynu pri teplote mrazu vody, p_{100} pri teplote varu vody a p pri meranej teplote.

Často je výhodné merať teplotu v *Kelvinovej stupnici* teplôt. Súvis medzi teplotou vyjadrenou v Celziovej stupnici (t) a Kelvinovej stupnici (T) vyjadruje rovnica

$$T = T_0 + t, \quad \text{kde} \quad T_0 = 273{,}16\ \mathrm{K}$$

b) So zmenou teploty sa menia rozmery telies. Môžeme skúmať dĺžkovú, plošnú i objemovú rozťažnosť telies.

Keď dĺžka pevnej tyče pri teplote 0 °C je l_0, jej dĺžka l pri teplote t bude v prvom priblížení daná vzťahom

$$l = l_0(1 + \alpha t)$$

kde α je *súčiniteľ dĺžkovej teplotnej rozťažnosti*, stanovený vzťahom

$$\alpha = \frac{1}{l_0} \cdot \frac{dl}{dt}$$

Závislosť objemu pevných telies V od teploty približne určuje vzťah

$$V = V_0(1 + \beta t)$$

kde V_0 je objem telesa pri teplote 0 °C, t jeho teplota meraná v Celziovej stupnici a β *súčiniteľ objemovej teplotnej rozťažnosti*, stanovený vzťahom

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dt}$$

Pri telesách zhotovených z izotropnej látky súvisí so súčiniteľom lineárnej rozťažnosti vzťahmi

$$\beta = 3\alpha$$

Pri kvapalinách má význam zisťovať len ich objemovú teplotnú rozťažnosť. Keď V_0 je objem kvapaliny v nádobe pri teplote t_0, V objem, ktorý má pri teplote t, výraz

$$\beta^* = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{V - V_0}{t - t_0}$$

udáva iba priemernú hodnotu zdanlivého súčiniteľa objemovej rozťažnosti kvapalín, lebo pri zmene teploty sa aj objem nádoby mení. Keď β_s je súčiniteľ objemovej rozťažnosti nádoby, skutočná hodnota priemerného súčiniteľa objemovej rozťažnosti kvapalín

$$\beta = \beta^* + \beta_s$$

c) Pri vzájomnom dotyku dvoch alebo viacerých telies nerovnakej teploty (a nerovnakej vnútornej energie) dochádza k vzájomnej výmene energie medzi telesami dovtedy, kým sa ich teploty (a vnútorné energie) nevyrovnajú. Keď sa energetická výmena uskutočňuje pri stálom objeme (nekoná sa objemová práca), energia sa vymieňa iba prostredníctvom tepla. Hovoríme o *tepelnej interakcii.*

Teplo, ktoré teleso príjme pri zmene svojej teploty z T_1 na T_2 (vnútornej energie z U_1 na U_2), bude

$$Q = U_2 - U_1 = mc(T_2 - T_1)$$

kde m je hmotnosť telesa a c *špecifická tepelná kapacita*, o ktorej predpokladáme, že je v intervale teplôt T_1 a T_2 konštantná. Súčin mc sa nazýva aj *tepelnou kapacitou* látky. Meriame ju obvykle pomocou kalorimetra.

Pri zmene svojho skupenstva — pri stálej teplote — látka prijíma, resp. uvoľňuje energiu, pri tepelnej interakcii prostredníctvom tepla L

$$L = ml$$

kde l je *špecifické skupenské teplo* látky.

Príklady

273. Určitý objem vodíka, uzavretý v nádobe, ktorá svoj objem nemení, má v topiacom sa ľade tlak $p_0 = 133\ 322$ Pa. Keď nádobu ponoríme do tepelného kúpeľa, vzrastie tlak vodíka o $\Delta p = 28\ 931$ Pa. Vypočítajte teplotu kúpeľa!

Riešenie:

Opísaným zariadením možno merať teplotu pomocou zmien tlaku vodíka za stáleho objemu. Keď v parách vriacej vody pri tlaku $b_0 = 101\ 325$ Pa má vodík tlak p_{100}, teplota v stupňoch Celzia je určená vzťahom

$$t = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0}\, 100\ °\mathrm{C} = \frac{\Delta p}{p_0} \cdot \frac{100\ °\mathrm{C} . p_0}{p_{100} - p_0}$$

Meraním sa zistilo, že výraz

$$\frac{100\ °\mathrm{C} . p_0}{p_{100} - p_0}$$

má pre všetky dostatočne zriedené plyny rovnakú hodnotu $\frac{1}{\gamma} = 273{,}16\ °\mathrm{C}$, a preto

$$t = \frac{\Delta p}{p_0} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

$$t = \frac{28\ 931\ \mathrm{m^{-1}.kg.s^{-2}} . 273{,}16\ °\mathrm{C}}{133\ 322\ \mathrm{m^{-1}.kg.s^{-2}}} = 59{,}3\ °\mathrm{C}$$

274. Teplomer ponorený do topiaceho sa ľadu ukazuje údaj $t_1 = 0{,}3\ °\mathrm{C}$ a v parách vriacej vody $t_2 = 101{,}5\ °\mathrm{C}$. Keď ho ponoríme do pár vriaceho etylalkoholu, ukazuje $t_n = 79{,}7\ °\mathrm{C}$. Vypočítajte, aká je skutočná teplota varu etylalkoholu (v stupňoch Celzia), keď pri všetkých zisteniach teploty bol tlak $b_0 = 101\ 325$ Pa!

Riešenie:

Rozdiel $t_2 - t_1$, zistený na teplomere, odpovedá skutočnej zmene teploty o 100 °C. Keď bude teplomer v prostredí teploty t, zmení sa údaj t_1 na teplomere o hodnotu

$$\frac{t_2 - t_1}{100\ °\mathrm{C}}\, t$$

a na teplomere odčítame hodnotu

$$t_n = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{100\ °C} t$$

odkiaľ pre hľadanú skutočnú teplotu varu etylalkoholu dostávame:

$$t = 100\ °C \frac{t_n - t_1}{t_2 - t_1} = 100\ °C \frac{79{,}7\ °C - 0{,}3\ °C}{101{,}5\ °C - 0{,}3\ °C} = 78{,}5\ °C$$

275. Teplomer je naplnený vodou. Určite, pre ktoré teploty v Celziovej stupnici v rozsahu teplôt od 0 °C do 10 °C bude teplomer ukazovať rovnaké údaje. Závislosť objemu vody od teploty v tomto rozsahu teplôt možno vyjadriť vzťahom

$$V = V_0(1 + at + bt^2) \tag{1}$$

kde $a = 6{,}105 \,.\, 10^{-5}\ °C^{-1}$, $b = -7{,}733 \,.\, 10^{-6}\ °C^{-2}$ a V_0 je objem vody pri teplote 0 °C.

Riešenie:

Rovnaké údaje bude teplomer ukazovať pri rovnakých objemoch vody. Pretože závislosť $V(t)$ je kvadratická, existujú dve také teploty t_1 a t_2, pri ktorých má voda v rozsahu teplôt 0 až 10 °C rovnaký objem.

Úpravou rovnice (1) dostaneme kvadratickú rovnicu

$$t^2 + \frac{a}{b} t + \frac{1 - \dfrac{V}{V_0}}{b} = 0$$

Korene t_1 a t_2 vyhovujú vzťahu

$$t_1 + t_2 = -\frac{a}{b} = 7{,}9\ °C$$

Ku každej teplote t_1 v rozsahu teplôt 0 až 7,9 °C existuje teplota t_2, určená vzťahom $t_2 = 7{,}9\ °C - t_1$, pri ktorej vodný teplomer ukazuje rovnaký údaj.

276. Mosadzné kyvadlo sa kýve pri teplote $t_1 = 10\ °C$ s dobou kyvu $\tau_1 = 1$ s. Ako sa zmení jeho doba kyvu, keď sa teplota okolia zvýši na $t_2 = 25\ °C$? O koľko by sa denne oneskorovali hodiny s týmto kyvadlom?

Riešenie:

Doba kyvu (polovica periódy) fyzikálneho kyvadla je daná vzťahom

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{I}{mga}}$$

kde I je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os, okolo ktorej sa kyvadlo kýve, mg tiaž kyvadla a a vzdialenosť ťažiska kyvadla od osi otáčania. Ak predpokladáme, že v príklade uvádzané kyvadlo má tvar homogénnej tyče všade rovnakého prierezu, že má dĺžku l a otáča sa okolo osi prechádzajúcej koncom tyče kolmo na jej dĺžku, moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os otáčania

$$I = \frac{ml^2}{3}; \quad a = \frac{l}{2}$$

Pre dobu kyvu kyvadla možno potom písať:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Keď má kyvadlo pri teplote t_1 dĺžku l_1 a pri teplote t_2 dĺžku l_2, pre podiel dôb kyvu pri týchto teplotách vyplýva:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \tag{1}$$

Pri nie veľmi vysokých teplotách platia vzťahy

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

a

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1} \doteq 1 + \alpha(t_2 - t_1)$$

Po dosadení do vzťahu (1) pre dobu kyvu dostávame:

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{1 + \alpha(t_2 - t_1)} = 1\ \mathrm{s}\sqrt{1 + 19.10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}.15\mathrm{K}} = 1{,}000\ 14\ \mathrm{s}$$

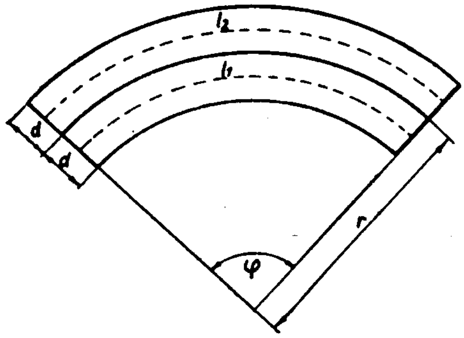
Sekundové kyvadlo vykoná pri teplote $t_1 = 10$ °C za deň $n = 86\ 400$ kyvov, kým pri teplote $t_2 = 25$ °C iba

$$n' = \frac{86\ 400}{1{,}000\ 14} = 86\ 388 \text{ kyvov}$$

Hodiny sa budú teda denne oneskorovať o

$$n - n' = 12 \text{ sekúnd}$$

277. Dva kovové pásy (medený a železný) rovnakej hrúbky $d = 2$ mm majú pri teplote $t_0 = 0$ °C rovnakú dĺžku a sú zvarené tak, že tvoria rovnú doštičku. Keď ju zohrejeme, deformuje sa a bude mať tvar kruhového oblúka. Vypočítajte jeho polomer pri teplote $t = 400\ °C$ *(obr. 84)* !



Obr. 84

Riešenie:

Keď je l_0 dĺžka pásov pri teplote $t_0 = 0\ °C$, po zohriatí na teplotu t bude medený pás dlhý

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 t)$$

a železný

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 t)$$

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \alpha_2 t}{1 + \alpha_1 t} \doteq 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t$$

Ako vidieť z obrázku, l_1 i l_2 sú oblúky kružníc s polomermi $r + \frac{d}{2}$ a $r - \frac{d}{2}$, a preto, ak stredový uhol φ meriame v oblúkovej miere,

$$l_2 = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi$$

$$l_1 = \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi$$

a

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{r + \frac{d}{2}}{r - \frac{d}{2}} \doteq 1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t$$

odkiaľ po úprave dostaneme pre polomer r vzťah

$$r = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)t} + \frac{d}{2}$$

Číselne

$$r=\frac{2\ \text{mm}}{(17-12).10^{-6}\ °\text{C}^{-1}.400\ °\text{C}}+\frac{2\ \text{mm}}{2}=1{,}001\ \text{m}$$

278. Oceľovú tyč s prierezom $S=2\ \text{cm}^2$ zohrejeme z teploty $t_0=0\ °\text{C}$ na teplotu $t=50\ °\text{C}$ a potom ju prudko ochladíme na pôvodnú teplotu. Vypočítajte, akou najmenšou silou pôsobiacou v smere osi treba pôsobiť na tyč, aby sa pri ochladení neskrátila ($E=20{,}6.10^{10}$ Pa)! Predpokladáme, že modul pružnosti E sa s teplotou nemení.

Riešenie:

Keď sa teplota zvýši o Δt, tyč sa predĺži o

$$\Delta l=l_0\alpha\ \Delta t \qquad (1)$$

O túto hodnotu by sa skrátila aj pri ochladení na pôvodnú teplotu. Aby sme pri ochladení tyče zabránili skráteniu, je potrebné v smere jej osi pôsobiť takou silou, ktorá by sama vyvolala rovnaké predĺženie Δl tyče.

Podľa Hookovho zákona

$$\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}$$

kde E je modul pružnosti tyče v ťahu. Z toho

$$F=\frac{ES}{l_0}\Delta l$$

Keď za Δl dosadíme z (1), dostaneme:

$$F=ES\ \Delta t\alpha=$$

$$=20{,}6.10^{10}\ \text{m}^{-1}.\text{kg}.\text{s}^{-2}.2.10^{-4}\ \text{m}^2.50\ °\text{C}.12.10^{-6}\ °\text{C}^{-1}=24\ 720\ \text{N}$$

279. Vypočítajte, aká je hustota ortuti pri teplote 0 °C a teplote 100 °C, keď pri teplote 10 °C má ortuť hustotu $\varrho_{10}=13{,}57\ \text{g}.\text{cm}^{-3}$!

Riešenie:

Nech objem určitého množstva ortuti hmotnosti m sa pri teplote 0 °C rovná V_0 a pri teplote t nech sa rovná V_t. Potom možno písať:

$$m=V_t\varrho_t$$

$$m=V_0\varrho_0$$

Z porovnania týchto výrazov vyplýva

$$\varrho_t = \frac{V_0}{V_t}\varrho_0 \tag{1}$$

Závislosť objemu od teploty pri nie veľmi vysokej teplote je približne vyjadrená vzťahom

$$V_t = V_0(1+\beta t)$$

Po dosadení do rovnice (1) dostaneme:

$$\varrho_t = \frac{\varrho_0}{1+\beta t}$$

Odtiaľ

$$\varrho_0 = \varrho_t(1+\beta t)$$

Potom

$$\varrho_0 = 13{,}57 \,.\, 10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}(1+18{,}2\,.\,10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}\,.\,10\ {}^\circ\text{C}) = 13{,}59\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}$$

a teda

$$\varrho_{100} = \frac{13{,}59\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}}{1+18{,}2\,.\,10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}\,.\,100\ {}^\circ\text{C}} = 13{,}34\,.\,10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}$$

280. Prázdna sklená nádoba má tiaž $G_0 = 0{,}981$ N, naplnená ortuťou pri teplote 0 °C má tiaž $G_1 = 14{,}038$ N. Keď nádobu zohrejeme na teplotu $t = 40$ °C, časť ortuti vytečie a nádoba s ortuťou váži $G_2 = 13{,}96$ N. Vypočítajte, aký je súčiniteľ objemovej rozťažnosti ortuti (skutočný), keď je známy súčiniteľ lineárnej rozťažnosti skla α_s!

Riešenie:

Súvis medzi skutočným β a zdanlivým β^* objemovým súčiniteľom rozťažnosti ortuti je daný rovnicou

$$\beta = \beta^* + \beta_s \tag{1}$$

kde β_s je objemový súčiniteľ rozťažnosti skla.

Keď V, resp. V_0 je objem, ktorý zaujíma ortuť pri teplote t, resp. t_0, je splnený vzťah

$$\beta^* = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{\Delta V}{V_0 t} \tag{2}$$

Pri teplote t_0 má ortuť objem

$$V_0 = \frac{m}{\varrho_0} = \frac{G_1 - G_0}{g\varrho_0} \tag{3}$$

Zmena objemu ortuti pri zmene teploty z t_0 na t je

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{\Delta m}{\varrho}$$

kde Δm je hmotnosť ortuti, ktorá z nádoby vytiekla. Vzhľadom na závislosť hustoty ϱ ortuti od teploty (pozri aj predchádzajúci príklad)

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

a

$$\Delta V = \frac{G_1 - G_2}{\varrho_0 g}(1 + \beta t) \tag{4}$$

Keď vzťahy (3) a (4) dosadíme do rovnice (2) a (1), dostaneme

$$\beta = \frac{\dfrac{G_1 - G_2}{\varrho_0 g}(1 + \beta t)}{\dfrac{G_1 - G_0}{\varrho_0 g}\,t} + \beta_s$$

odkiaľ po krátkej úprave vychádza pre hľadaný súčiniteľ

$$\beta = \frac{G_1 - G_2 + \beta_s t(G_1 - G_0)}{(G_2 - G_0)t}$$

Číselne, ak uvážime, že $\beta_s = 3\alpha_s$, bude

$$\beta = \frac{14{,}038\ \mathrm{N} - 13{,}960\ \mathrm{N} + 30\,.\,10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}\,.\,40\ ^\circ\mathrm{C}(14{,}038\ \mathrm{N} - 0{,}981\ \mathrm{N})}{(13{,}960\ \mathrm{N} - 0{,}981\ \mathrm{N})\,.\,40\ ^\circ\mathrm{C}}$$

$$\beta = 18{,}0\ .\ 10^{-5}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

281. Pri teplote $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ namerali na barometri s mosadzným meradlom tlak vzduch $b = 10^5$ Pa. Meradlo je správne pri 0 °C. Vypočítajte, aký údaj by ukazoval barometer pri teplote 0 °C!

Riešenie:

So zmenou teploty sa jednak mení hustota ortuti, a tým aj výška ortuťového stĺpca, ktorý je v rovnováhe s určitým barometrickým tlakom, a jednak aj stupnica mení svoju dĺžku. Preto odčítanie na barometri redukujeme obyčajne na 0 °C.

Keď skutočná výška ortuťového stĺpca pri teplote t je b_1^* a pri teplote 0 °C b_0, je splnený vzťah

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \varrho g$$

ktorý vyjadruje podmienku, že tlaky pri oboch teplotách sú rovnaké. Hustota ortuti závisí od teploty podľa vzorca

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{1 + \beta t}$$

a preto

$$b_0 \varrho_0 g = b_1^* \frac{\varrho_0}{1 + \beta t} g \tag{1}$$

Vzhľadom na to, že meradlo mení svoju dĺžku s teplotou a je správne pri teplote 0 °C, odčítanej hodnote b_1 prislúcha pri teplote t_1 správna hodnota b_1^* podľa vzťahu

$$b_1^* = b_1 + b_1 \alpha t_1$$

Po dosadení za b_1^* do rovnice (1) pre redukovanú hodnotu tlaku platí vzťah

$$b_0 = b_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \beta t_1} \doteq b_1[1 + (\alpha - \beta) t_1]$$

Príslušná korekcia, ktorú máme k nameranej hodnote b_1 pridať, aby sme dostali redukovaný údaj b_0, je:

$$\Delta b = b_1(\alpha - \beta) t_1$$

Číselne pre hľadanú korekciu dostávame:

$$\Delta b = 100\,000 \text{ Pa}(19 \,.\, 10^{-6} - 182 \,.\, 10^{-6})\ °\text{C}^{-1} \,.\, 20\ °\text{C}$$

$$\Delta b = -326 \text{ Pa}$$

takže

$$b_0 = b_1 + \Delta b = 99\,674 \text{ Pa}$$

282. Teplomer hmotnosti $m = 6{,}7$ g ponorený do vody zvýšil svoju teplotu o $\Delta t = 14{,}6$ °C a ukazuje $t_1 = 32{,}4$ °C. Aká bola teplota vody pred meraním, ak tepelná kapacita teplomeru $C = 1{,}93$ J.K^{-1}?

Riešenie:

Teplomer, ktorého tepelná kapacita je C, sa zohrial po ponorení do vody o teplotu Δt a prijal energiu prostredníctvom tepla

$$Q = C\,\Delta t$$

Voda sa ochladila z pôvodnej teploty t na teplotu t_1 (túto teplotu ukazuje aj teplomer po vyrovnaní teplôt) a odovzdala energiu prostredníctvom tepla

$$Q' = mc(t - t_1)$$

Za predpokladu dobrej tepelnej izolácie platí

$$Q = Q'$$

čiže

$$mc(t - t_1) = C\,\Delta t$$

odkiaľ

$$t = \frac{C\,\Delta t + mct_1}{mc}$$

t. j.

$$t = \frac{1{,}93\ \mathrm{J.K^{-1}}.14{,}6\ \mathrm{K} + 6{,}7.10^{-3}\ \mathrm{kg}.4{,}186.10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.305{,}56\ \mathrm{K}}{6{,}7.10^{-3}\ \mathrm{kg}.4{,}186.10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}} =$$

$$= 306{,}56\ \mathrm{K} = 33{,}4\ °\mathrm{C}$$

283. Aby sme určili špecifické teplo striebra, zohrejeme z neho kúsok hmotnosti $m_1 = 100$ g na teplotu $t_1 = 100$ °C a vložíme ho do mosadzného kalorimetra s vodou. Hmotnosť vnútornej nádobky kalorimetra s miešačkou $m_2 = 124$ g, hmotnosť vody $m_3 = 1000$ g, začiatočná teplota vody $t_3 = 17$ °C. Po vložení kúska striebra sa teplota ustálila na $t_0 = 17{,}5$ °C. Aká je špecifická tepelná kapacita striebra?

Riešenie:

Teplota striebra po ponorení do kalorimetra poklesne z t_1 na t_0 a striebro odovzdá teplo

$$Q' = m_1 c_1 (t_1 - t_0)$$

Špecifickú tepelnú kapacitu striebra c_1 považujeme za konštantnú.

Kalorimeter s príslušenstvom a vodou teplo prijíma a jeho teplota vzrastie z t_3 na t_0. Keď K je jeho celková tepelná kapacita, pri ohriatí z teploty t_3 na t_0 prijal celkom teplo

$$Q = K(t_0 - t_3)$$

a ak našu sústavu látok považujeme za tepelne dobre izolovanú od okolia, platí

$$Q = Q'$$

čo po dosadení dáva:

$$m_1 c_1(t_1 - t_0) = K(t_0 - t_3)$$

Z toho

$$c_1 = \frac{K(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}$$

Pretože tepelná kapacita kalorimetra, predstavujúca tepelnú kapacitu vnútornej nádoby kalorimetra s miešačkou a vodou, $K = m_2 c_2 + m_3 c_3$, kde c_2, c_3 sú špecifické tepelné kapacity mosadze a vody, možno písať:

$$c_1 = \frac{(m_2 c_2 + m_3 c_3)(t_0 - t_3)}{m_1(t_1 - t_0)}$$

Číselne

$$c_1 = \frac{(0{,}124 \,.\, 0{,}389 \,.\, 10^3 + 1 \,.\, 4{,}186 \,.\, 10^3)\ \mathrm{kg.J.kg^{-1}.K^{-1}}(17{,}5 - 17{,}0)\ \mathrm{K}}{0{,}1\ \mathrm{kg}\ (100 - 17{,}5)\ \mathrm{K}} =$$

$$= 0{,}257 \,.\, 10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

284. Do kalorimetra dáme vodu hmotnosti $m_1 = 2$ kg teploty $t_1 = 5$ °C a ľad

a) hmotnosti $m_2 = 0{,}4$ kg a teploty $t_2 = -90$ °C,
b) hmotnosti $m_3 = 0{,}2$ kg a teploty $t_3 = -25$ °C,
c) hmotnosti $m_4 = 0{,}1$ kg a teploty $t_4 = -10$ °C,
d) hmotnosti $m_5 = 4$ kg a teploty $t_5 = -100$ °C.

V každom z uvedených prípadov vypočítajte výslednú teplotu zmesi, príp. hmotnosti zostávajúceho ľadu, resp. vody! Tepelnú kapacitu nádoby možno zanedbať.

Riešenie:

V kalorimetri môžu nastať tieto zmeny:

1) všetok ľad sa roztopí, voda bude mať teplotu t

$$0 < t < t_1$$

2) časť ľadu sa roztopí, v kalorimetri pribudne vody, zostávajúca zmes ľadu a vody bude mať teplotu 0 °C
3) časť vody stuhne, v kalorimetri pribudne ľadu, zmes vody a ľadu bude mať teplotu 0 °C
4) všetka voda stuhne, v kalorimetri bude len ľad teploty

$$t < 0\ °\mathrm{C}$$

V každom z uvedených prípadov dochádza v kalorimetri k vzájomnej výmene vnútornej energie, a to prostredníctvom tepla medzi vodou a ľadom (predpokladáme, že sa nekoná objemová práca). Teplejšia voda odovzdáva časť svojej vnútornej energie a túto prijíma ľad a spotrebuje ju na zvýšenie svojej vnútornej energie, na premenu na vodu, resp. na zvýšenie vnútornej energie vzniknutej vody. Tento proces prebieha tak dlho, kým sa teplota zmesi neustáli.

1) Výsledná teplota zmesi bude t. Voda s teplotou t_1 sa ochladí na výslednú teplotu t a uvoľní pritom energiu $\Delta U_1 = m_1 c_1 (t_1 - t)$. Pretože tepelnú kapacitu kalorimetra možno zanedbať, celú túto energiu prijme ľad. Tento zmení svoju teplotu na 0 °C, premení sa na vodu teploty 0 °C a táto zvýši svoju teplotu na výslednú t. Na to je potrebná energia $m_2 c_2 (0 - t_2) + m_2 l + m_2 c_1 (t - t_1)$. Je splnená rovnica

$$m_1 c_1 (t_1 - t) = -m_2 c_2 t_2 + m_2 l + m_2 c_1 (t - t_1)$$

odkiaľ

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2 - m_2 l}{c_1 (m_1 + m_2)}$$

Aby celý opísaný proces mohol nastať, musí byť $t > 0$, čiže

$$m_1 c_1 t_1 > m_2 l - m_2 c_2 t_2$$

Po dosadení príslušných hodnôt zistíme, že tento proces sa uskutoční v prípade c. Teplota

$$t = \frac{2 . 4186 . 5 - 0{,}1 . 2090 . 10 - 0{,}1 . 333\,600}{4186 . (2 + 0{,}1)} \text{ °C}$$

$$t = 0{,}7 \text{ °C}$$

Výsledná teplota vody bude 0,7 °C a hmotnosť vody bude 2,1 kg.

2) Výsledná teplota zmesi bude 0 °C a bude v nej okrem vody m_3' ľadu. Voda uvoľní energiu $m_1 c_1 (t_1 - 0)$, ktorú spotrebuje ľad. Tento zmení svoju teplotu na 0 °C a časť z neho (m_2') sa zmení na vodu teploty 0 °C. Na to je potrebná energia $m_2 c_2 (0 - t_2) + m_2' l$. Platí potom

$$m_1 c_1 t_1 = -m_2 c_2 t_2 + m_2' l$$

$$m_2' = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{l}$$

Zrejme musí byť splnené $0 < m_2' < m_2$. Po dosadení hodnôt zistíme, že tento proces sa uskutoční v prípade b. Dostaneme

$$m_2' = \frac{2 . 4186 . 5 - 0{,}2 . 2090 . 25}{333\,600}\ \text{kg}$$

$$m_2' = 0{,}09\ \text{kg}$$

Výsledná teplota zmesi bude 0 °C, bude v nej 2,09 kg vody a 0,11 kg ľadu.

3) Výsledná teplota zmesi bude 0 °C. Voda zníži svoju teplotu na 0 °C a časť z nej (m_1') sa premení na ľad. Uvoľní pritom energiu $m_1 c_1 (t_1 - 0) + m_1' l$. Túto energiu spotrebuje ľad. Zmení svoju teplotu na 0 °C, na čo potrebuje energiu $m_2 c_2 (0 - t_2)$. Platiť bude rovnica

$$m_1 c_1 t_1 + m_1' l = -m_2 c_2 t_2$$

$$m_1' = \frac{-m_1 c_1 t_1 - m_2 c_2 t_2}{l}$$

Aby nastal tento proces, musí byť splnená podmienka

$$0 < m_1' < m_1$$

čo odpovedá prípadu a) a hmotnosť

$$m_1' = \frac{-2 . 4186 . 5 - 0{,}4 . 2090 . -90}{333\,600}\ \text{kg}$$

$$m_1' = 0{,}1\ \text{kg}$$

Výsledná teplota zmesi bude 0 °C, bude v nej 1,9 kg vody a 0,5 kg ľadu.

4) Výsledná teplota ľadu bude t. Voda zníži svoju teplotu na 0 °C a celá sa premení na ľad s teplotou 0 °C, ktorý sa ďalej ochladí na teplotu t. Uvoľní sa pritom energia $m_1 c_1 (t_1 - 0) + m_1 l + m_1 c_2 (0 - t)$. Ľad hmotnosti m_2 zvýši svoju teplotu na t, na čo potrebuje energiu $m_2 c_2 (t - t_2)$. Platí rovnica

$$m_1 c_1 t_1 + m_1 l - m_1 c_2 t = m_2 c_2 (t - t_2)$$

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_1 l + m_2 c_2 t_2}{(m_1 + m_2) c_2}$$

Výsledná teplota t bude záporná. Tento proces sa uskutoční v prípade d. Teplota

$$t = \frac{2 . 4186 . 5 + 2 . 333\,600 + 4 . 2090 . (-100)}{(2 + 4) 2090}\ \text{°C}$$

$$t = -10\ \text{°C}$$

V kalorimetri bude 6 kg ľadu teploty -10 °C.

285. V tepelne izolovanej nádobe uvedieme do bezprostredného styku vodnú paru hmotnosti m_1 a teploty $t_1 = 100$ °C, vodu hmotnosti m_0 a teploty t_0 a ľad hmotnosti m_2 a teploty $t_2 = 0$ °C. Po určitom čase — po skvapalnení zložiek — sa v nádobe vytvorí kvapalina. Aká bude jej teplota? Špecifické skupenské teplo varu vody je l_1, topenia ľadu l_2 a špecifická tepelná kapacita vody je c. Predpokladáme, že tepelnú kapacitu nádoby možno zanedbať.

Riešenie:

Pri vytváraní kvapaliny dochádza v sústave k týmto zmenám:

a) Vodná para teploty t_1 kondenzuje na vodu rovnakej teploty, pričom uvoľňuje teplo $Q'_{1,0} = m_1 l_1$. Vzniknutá voda teploty t_1 sa ochladí na konečnú teplotu t a pritom vydá teplo $Q'_{1,1} = m_1 c(t_1 - t)$.

b) Ľad teploty t_2 sa roztopí na vodu rovnakej teploty, na čo potrebuje zvonku teplo $Q_{2,0} = m_2 l_2$. Voda teploty t_2 sa zohreje na konečnú teplotu t, na čo potrebuje teplo $Q_{2,1} = m_2 c(t - t_2)$.

c) Voda teploty t_0 zmení svoju teplotu na t, na čo potrebuje teplo

$$Q_3 = m_0 c(t - t_0)$$

Pretože nádoba je tepelne izolovaná a energetická výmena sa realizuje iba prostredníctvom tepla medzi vodnou parou, vodou a ľadom, je splnený vzťah

$$Q'_{1,0} + Q'_{1,1} = Q_{2,0} + Q_{2,1} + Q_3$$

čiže

$$m_1 l_1 + m_1 c(t_1 - t) = m_2 l_2 + m_2 c(t - t_2) + m_0 c(t - t_0)$$

Odtiaľ po krátkej úprave dostávame:

$$t = \frac{m_1 c t_1 + m_2 c t_2 + m_0 c t_0 + m_1 l_1 - m_2 l_2}{m_1 c + m_2 c + m_0 c}$$

Úlohy

286. Ortuťový teplomer má milimetrovú stupnicu. V topiacom sa ľade je meniskus ortuťového stĺpca pri 20 mm, vo vodných parách vystupujúcich z vriacej vody pri normálnom atmosferickom tlaku pri 60 mm. Aká je teplota vyjadrená v stupňoch Celziovej stupnice, keď je meniskus ortuťového stĺpca pri a) 26 mm, b) 76 mm, c) 0 mm?

[$t_1 = 15$ °C; $t_2 = 140$ °C; $t_3 = -50$ °C]

287. Mosadzná a hliníková tyč majú pri teplote 20 °C rovnakú dĺžku 1 m. Aký bude rozdiel ich dĺžok, keď obidve zohrejeme na teplotu 100 °C?

[$\Delta l = 0{,}04$ cm]

288. Mosadzná guľa má pri teplote $t_1 = 15$ °C priemer $d = 4$ cm. Vypočítajte, akým veľkým otvorom by práve prešla pri teplote $t = 555$ °C?

[4,04 cm]

289. Vzdialenosť dvoch bodov, odmeraná oceľovým meradlom pri teplote $t_1 = 30$ °C, bola $l_1 = 186$ m. Aká je správna hodnota tejto dĺžky, keď meradlo je správne pri teplote $t_0 = 18$ °C?

[$l = 186{,}024$ m]

290. Koleso rušňa má pri teplote 0 °C polomer $r_0 = 1$ m. Aký je rozdiel v počte otočení kolesa na dráhe $l = 100$ km v lete pri teplote $t_1 = 25$ °C a v zime pri teplote $t_2 = -25$ °C, keď súčiniteľ dĺžkovej rozťažnosti materiálu kolesa $\alpha = 12 \,.\, 10^{-6}$ K^{-1}?

[$n_2 - n_1 = 9{,}6$]

291. Homogénna železná tyč s hmotnosťou $m = 3$ kg má pri teplote 8 °C dĺžku 1 meter. Vypočítajte, ako sa zmení moment zotrvačnosti tejto tyče vzhľadom na os kolmú na smer tyče a prechádzajúcu jej koncovým bodom, keď sa zohreje na teplotu 100 °C!

[$\Delta I = 24 \,.\, 10^{-4}$ kg . m^2]

292. O koľko treba zvýšiť vonkajší tlak, aby sa pri zohriatí z 0 °C na 10 °C objem ortuti nezmenil? Súčiniteľ stlačiteľnosti ortuti $\varkappa = 3{,}85 \,.\, 10^{-11}$ N^{-1} . m^2.

[$\Delta p = 47{,}2 \,.\, 10^6$ Pa]

293. Oceľová struna priemeru $d = 1$ mm sa pri teplote $t_1 = 28$ °C napína silou $F_1 = 98{,}1$ N a jej konce sú upevnené. Vypočítajte, akou silou sa má struna napínať, keď ju ochladíme na teplotu $t_2 = -12$ °C, aby sa jej dĺžka nezmenila!

[$F = 175{,}6$ N]

294. Železná tyč sa dotýka obidvoma svojimi koncami pevných stien. Vypočítajte, o koľko sa má zvýšiť jej teplota, aby na steny pôsobila tlakom $\sigma = 490{,}5 \,.\, 10^4$ Pa?

[$\Delta t = 2$ °C]

295. Moment zotrvačnosti tuhého telesa pri teplote t je I_0. Ako sa zmení, keď sa teplota telesa zmení o Δt?

[$\Delta I = 2\alpha I_0 \, \Delta t$]

296. Dva rovnaké teplomery sú pri teplote 0 °C naplnené rovnakými objemami ortuti a liehu. Určite, aký je súvis medzi dĺžkou stĺpca prislúchajúceho jednému stupňu Celzia na stupni ortuťového a liehového teplomeru, keď sú známe príslušné súčinitele objemovej rozťažnosti ortuti a liehu, ako aj súčiniteľ lineárnej rozťažnosti skla!

[$l_1 = 0{,}14 l_2$]

297. Sklený pyknometer objemu $V_0 = 15\ cm^3$ je pri teplote $t_0 = 0\ °C$ naplnený ortuťou. Keď teplotu okolia zvýšime na $t_0 = 100\ °C$, z pyknometra vytečie $\Delta V = 234\ mm^3$ ortuti. Vypočítajte, aký je súčiniteľ objemovej rozťažnosti ortuti!

[$\beta = 18{,}6 \,.\, 10^{-5}\ K^{-1}$]

298. Železný kváder pláva pri teplote 0 °C v ortuti tak, že je ponorený do 5/8 svojej výšky. Určite, ako sa zmení hĺbka ponoru, keď sa teplota zvýši na 100 °C!

[$h = 0{,}635 v$]

299. Do nádrže obsahujúcej 35 kg oleja teploty 30 °C sme pri kalení ponorili oceľový predmet ohriaty na teplotu 800 °C. Vypočítajte, aká je hmotnosť tohto predmetu, keď po jeho vložení sa teplota oleja ustálila na 58 °C!

[$m = 4{,}8$ kg]

300. Do taviacej pece sme vložili platinovú guľu hmotnosti 100 g. Hneď po vytiahnutí sme guľu vložili do mosadzného kalorimetra hmotnosti 200 g, obsahujúceho 1 kg vody teploty 10 °C. Určite, aká bola teplota pece, keď po vložení gule do vody sa jej teplota ustálila na 14 °C!

[$t = 1287$ °C]

301. Aké teplo je potrebné na to, aby sa 1 kg ľadu teploty −10 °C premenil na paru teplotu 100 °C?

[$3{,}03 \,.\, 10^6$ J]

302. Do mosadzného kalorimetra hmotnosti 100 g, ktorý obsahoval 250 g vody teplej 10 °C sme vložili súčasne železný valček hmotnosti 50 g a teploty 150 °C, hliníkový valček hmotnosti 30 g a teploty 90 °C a olovený valček hmotnosti 30 g a teploty 75 °C. Aká bude výsledná teplota vody v kalorimetri po ustálení teploty?

[14,93 °C]

303. Vypočítajte, koľko ľadu teploty 0 °C možno zmiešať so 6 kg vody teploty 90 °C, aby výsledná teplota vody v kalorimetri bola 5 °C! Tepelnú kapacitu kalorimetra možno zanedbať.

[6 kg]

304. Veľký teplomer, ktorý bol zohriaty na teplotu 100 °C, sme ponorili do veľkého množstva topiaceho sa ľadu. Kým sa teplota ustálila na 0 °C, roztopilo sa $m_0 = 125$ g ľadu. Potom sme teplomer preniesli do tepelne izolovanej nádoby, v ktorej bolo $m_1 = 5$ kg ortuti teploty $t_1 = 15$ °C. Akú teplotu ukazoval teplomer po vyrovnaní teplôt? Tepelnú kapacitu nádoby možno zanedbať.

[$t = 9{,}9$ °C]

305. Do 1 kg vody teplej 35 °C sme naliali 20 kg ortuti teploty 110 °C a ľad neznámej hmotnosti teploty −3 °C. Po úplnom roztopení ľadu sa teplota ustálila na 60 °C. Koľko ľadu sme nasypali do zmesi, keď predpokladáme, že tepelná kapacita nádoby je zanedbateľne malá?

[$m = 70{,}90$ g]

306. V medenom kalorimetri hmotnosti $m_0 = 120$ g je $m_1 = 200$ g vody teploty $t_1 = 18$ °C. Ak do kalorimetra vpustíme $m_2 = 20$ g vodnej pary teploty $t_2 = 100$ °C, ustáli sa teplota vody na $t = 71{,}6$ °C. Aké je špecifické skupenské teplo varu vody?

[$l = 22{,}47 \,.\, 10^5$ J.kg^{-1}]

307. V medenom kalorimetri hmotnosti 200 g sa nachádza 300 g vody teplej 0 °C a 20 g ľadu rovnakej teploty. Vypočítajte, koľko vodnej pary teploty 150 °C treba zaviesť do kalorimetra, aby sa po dôkladnom premiešaní v kalorimetri ustálila teplota na 40 °C! Špecifická tepelná kapacita vodnej pary pri stálom tlaku je $c_p = 2 \,.\, 10^3$ J.kg^{-1} K^{-1}.

[24,3 g]

308. V kalorimetri bolo 1500 g vody teploty 6 °C, do ktorej sme pridali 120 g ľadu neznámej teploty. Po vyrovnaní teplôt sme z vody kalorimetra ľad vybrali a vážením zistili, že sa jeho hmotnosť zväčšila o 12 g. Aká bola pôvodná teplota ľadu?

[$t = -166$ °C]

309. V dokonale tepelne izolovanej nádobe zmiešame ľad hmotnosti m_1 a teploty t_1 s vodou, ktorej teplota je t_2. Určte hmotnosť vody tak, aby v nádobe vznikla zmes ľadu a vody v rovnovážnom stave za normálneho tlaku a obidve zložky mali rovnaké hmotnosti!

$$\left[m_2 = \frac{m_1[2c_1(t - t_1) - l]}{2c_2(t_2 - t_0) - l} \right]$$

310. V kalorimetri vo vode hmotnosti $m_1 = 1$ kg a teploty $t_1 = 50$ °C sa pohltila vodná para hmotnosti $m_2 = 0{,}01$ g a teploty $t_2 = 100$ °C.

a) Aká je výsledná teplota t_3 v kalorimetri?

b) Vypočítajte hmotnosť m_3 vody teploty $t_2 = 100\ °C$, ktorú by sme museli pridať do kalorimetra miesto pary, aby sa teplota vody opäť ustálila na hodnote t_3!

Tepelnú kapacitu nádoby zanedbajte.

[a) 55,4 °C; b) 0,121 kg]

8 IDEÁLNY PLYN KINETICKÁ TEÓRIA PLYNOV

Úvod

a) Okamžitý stav určitého zvoleného množstva plynu charakterizujú tieto tri *stavové veličiny*: *tlak p*, *objem v* a jeho *teplota T*. Všetky tieto veličiny spolu súvisia.

Vzájomnú závislosť dvoch z týchto veličín, za predpokladu, že tretia sa nemení, vyjadruje Boylov—Mariottov zákon a Gayho—Lussacov zákon.

Boylov—Mariottov zákon hovorí:

Keď sa teplota plynu nemení, súčin tlaku p a objemu V zvoleného množstva plynu je prakticky konštantný, teda

$$pV = p_0 V_0 = \text{konšt}$$

kde p_0 je tlak a V_0 objem napríklad v začiatočnom stave.

Podľa Gayho—Lussacovho zákona je závislosť objemu zvoleného množstva plynu od jeho teploty za konštantného tlaku vyjadrená rovnicou

$$V = V_0 \frac{T}{T_0}$$

a závislosť tlaku plynu od jeho teploty za konštantného objemu rovnicou

$$p = p_0 \frac{T}{T_0}$$

kde V_0 je objem a p_0 tlak plynu pri teplote T_0. Teplota sa meria v Kelvinovej stupnici teplôt.

Vzájomnú závislosť všetkých troch stavových veličín vyjadruje *stavová rovnica*. Podľa nej súčin tlaku a objemu plynu delený jeho Kelvinovou teplotou pre zvolené množstvo plynu má konštantnú hodnotu, teda

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{konšt}$$

kde p_0, V_0, T_0 sú hodnoty tlaku, objemu a Kelvinovej teploty napríklad v začiatočnom stave plynu.

Konštanta $\frac{p_0 V_0}{T_0}$, uvažovaná vzhľadom na jeden mól plynu, má pre všetky plyny rovnakú hodnotu, ktorá sa označuje písmenom R_m a nazýva sa *molárna plynová konštanta.* Stavová rovnica pre jeden mól plynu má potom tvar

$$pV = R_m T$$

Pre n mólov plynu platí

$$pV = nR_m T$$

Ak uvážime, že ľubovoľne zvolené množstvo plynu hmotnosti m, ktorého mólová hmotnosť je M_m, obsahuje $n = \frac{m}{M_m}$ mólov, možno pre toto množstvo písať stavovú rovnicu v tvare

$$pV = \frac{m}{M_m} R_m T$$

Presne podľa stavovej rovnice sa správa len *ideálny plyn.* Reálne plyny spĺňajú uvedenú stavovú rovnicu len približne, a to tým presnejšie, čím je ich tlak menší a teplota vyššia.

b) V zmesi plynov, ktoré na seba chemicky nepôsobia, sa každý plyn správa tak, akoby sám vypĺňal celý priestor, takže jeho tlak na steny sa prítomnosťou ostatných zložiek zmesi nemení.

Podľa *Daltonovho zákona* sa *výsledný tlak plynnej zmesi rovná súčtu parciálnych (čiastočných) tlakov zložiek tvoriacich plynnú zmes,* t. j.

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

c) Podľa predstáv kinetickej teórie plynov molekuly plynu sa pohybujú rôznymi rýchlosťami vo všetkých smeroch, pričom rýchlosti molekúl sa náhle menia pri zrážkach s pevnou prekážkou alebo s inými molekulami plynu.

Tlak plynu na steny nádoby, v ktorej je plyn uzavretý, je podľa týchto predstáv vyvolaný pružnými nárazmi molekúl na túto stenu. Z príslušných výpočtov pre tento tlak vychádza vzťah

$$p = \frac{1}{3} N_V m_0 v_s^2$$

kde N_V je počet molekúl v jednotkovom objeme plynu, m_0 hmotnosť molekuly plynu a v_s^2 druhá mocnina strednej kvadratickej rýchlosti molekúl plynu. Definovaná je ako aritmetický priemer druhých mocnín rýchlostí pohybu všetkých molekúl plynu:

$$v_s^2 = \frac{\sum_i n_i v_i^2}{N_V}$$

kde n_1, n_2, ... sú príslušné počty molekúl pohybujúcich sa rýchlosťou v_1, v_2, ... Z podrobnejších výpočtov pre strednú kvadratickú rýchlosť molekúl plynu vychádza

$$v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

kde k je Boltzmannova konštanta a T teplota plynu, meraná v Kelvinovej stupnici teplôt.

Keď nahradíme $k = \frac{R_m}{N_m}$, pre strednú kvadratickú rýchlosť dostaneme:

$$v_s = \sqrt{\frac{3R_mT}{M_m}}$$

kde M_m je mólová hmotnosť plynu.

d) V jednotkovom objeme plynu pri tlaku p a teplote T je

$$N_V = \frac{p}{kT}$$

molekúl plynu.

e) *Maxwellov zákon* rozdelenia molekúl podľa ich rýchlostí znie: Počet molekúl dn, ktoré sa z N_V molekúl plynu nachádzajúcich sa v jednotkovom objeme pohybujú rýchlosťami s absolútnymi hodnotami v intervale v až $v + \mathrm{d}v$, je daný vzťahom

$$\mathrm{d}n = N_V f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3} N_V v^2 \left[\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\right] \mathrm{d}v$$

f) Okrem strednej kvadratickej rýchlosti je účelné zaviesť v kinetickej teórii plynov ešte *rýchlosť najpravdepodobnejšiu* a *priemernú*. Najpravdepodobnejšia rýchlosť pohybu molekúl plynu v_m je tá, ktorou sa pri danej teplote pohybuje maximálny počet molekúl. Možno ju vypočítať zo vzťahu

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = v_s\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Priemerná rýchlosť pohybu molekúl je definovaná ako aritmetický priemer rýchlostí pohybu všetkých molekúl plynu:

$$v_p = \frac{\int_0^\infty N_V v f(v)\, dv}{N_V} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\, v_s$$

g) *Stredná hodnota kinetickej energie* molekúl plynu, ktorý sa skladá z molekúl rovnakého druhu, pričom každá jeho molekula má i stupňov voľnosti, je určená vzťahom

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT$$

Jednoatómová molekula má tri, dvojatómová päť a molekula skladajúca sa z troch alebo väčšieho počtu atómov má šesť stupňov voľnosti pohybu.

h) *Priemerný počet zrážok* ktorejkoľvek molekuly plynu s ostatnými molekulami za jednotku času určíme z rovnice

$$Z = N_V \pi D^2 v_s$$

kde D je priemer molekuly plynu.

Priemerná dĺžka dráhy, ktorú molekula prejde medzi dvoma za sebou nasledujúcimi zrážkami, sa nazýva *stredná voľná dráha* molekúl plynu l a určuje sa z rovnice

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi D^2 N_V}$$

i) *Súčiniteľ vnútorného trenia plynu* η sa vypočíta podľa vzorca

$$\eta = \frac{1}{3} \varrho v_s l$$

kde ϱ je hustota plynu.

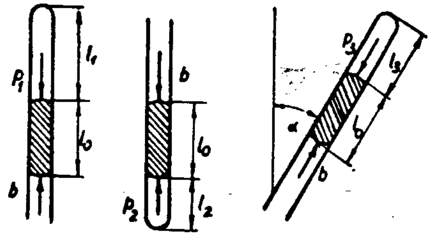
Príklady

311. V úzkej sklenej rúrke všade rovnakého prierezu a na jednom konci zatavenej je vzduch uzavretý stĺpcom ortuti dĺžky $l_0 = 15$ cm. Keď je rúrka v zvislej polohe uzavretým koncom hore, dĺžka vzdušného stĺpca $l_1 = 37{,}5$ cm; keď je uzavretý koniec dole, dĺžka vzdušného stĺpca $l_2 = 25$ cm. Aký je atmosferický tlak? Aká bude dĺžka vzdušného stĺpca, keď rúrku s uzavretým koncom hore odkloníme od zvislej polohy o uhol $\alpha = 60°$?

Riešenie:

Označme hľadaný atmosferický tlak b a príslušné tlaky uzavretého vzdušného stĺpca v prvej a v druhej polohe p_1 a p_2. Potom sú v rovnovážnom stave splnené vzťahy *(obr. 85a, b)*:

$$p_1 + l_0\varrho g = b$$
$$p_2 = b + l_0\varrho g$$



Obr. 85

Za predpokladu, že teplota vzduchu sa počas pokusu nemení a kapilára má všade rovnaký vnútorný prierez, podľa Boylovho—Mariottovho zákona

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

alebo

$$(b - l_0\varrho g)Sl_1 = (b + l_0\varrho g)Sl_2$$

odkiaľ

$$b = l_0 \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \varrho g$$

Po dosadení príslušných číselných hodnôt dostaneme

$$b = 0{,}15 \text{ m} \frac{0{,}625 \text{ m}}{0{,}125 \text{ m}} 13{,}6 \,.\, 10^3 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3} \,.\, 9{,}81 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-2} = 0{,}1 \text{ MPa}$$

Keď rúrku odkloníme o uhol α *(obr. 85c)*, tlak uzavretého vzdušného stĺpca p_3 bude daný rozdielom barometrického tlaku a hydrostatického tlaku ortuťového stĺpca $l_0\varrho g \cos \alpha$. Podľa Boylovho—Mariottovho zákona

$$p_3 V_3 = p_1 V_1$$

čiže

$$(b - l_0\varrho g \cos \alpha)Sl_3 = (b - l_0\varrho g)Sl_1$$

odkiaľ vychádza

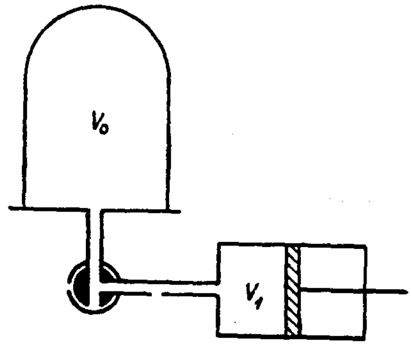
$$l_3 = l_1 \frac{b - l_0\varrho g}{b - l_0\varrho g \cos \alpha} = 0{,}333 \text{ m}$$

312. Čerpací valec piestovej vývevy má objem $V_1 = 2 \text{ dm}^3$, recipient vývevy má objem $V_0 = 3 \text{ dm}^3$. Vypočítajte, aký bude tlak a hustota vzduchu pod recipientom po štvrtom zdvihu, keď čerpanie bude prebiehať tak pomaly, že teplotu vzduchu budeme môcť považovať za konštantnú. Po koľkých zdvihoch piesta klesne tlak vzduchu na desatinu pôvodného tlaku?

Riešenie:

Po prvom zdvihu piesta *(obr. 86)* sa zväčší objem vzduchu z V_0 na $V_0 + V_1$ a jeho tlak poklesne z p_0 na p_1. Zmena nastala za stálej teploty, preto podľa Boylovho—Mariottovho zákona

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + V_1)$$



Obr. 86

Po druhom zdvihu možno písať:

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + V_1)$$

a po n-tom zdvihu

$$p_{n-1} V_0 = p_n (V_0 + V_1)$$

Keď tieto rovnice vynásobíme, dostaneme po úprave pre tlak po n-tom zdvihu vzťah

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n$$

Tlak po štvrtom zdvihu

$$p_4 = p_0 \left(\frac{3}{5} \right)^4 = 0{,}13 p_0$$

Keď začiatočná hustota vzduchu bola ϱ_0, po prvom zdvihu zaujme vzduch väčší objem a jeho hustota sa zmení. Z rovnosti hmotností pred a po zdvihu vyplýva:

$$\varrho_0 V_0 = \varrho_1 (V_0 + V_1)$$

po druhom zdvihu

$$\varrho_1 V_0 = \varrho_2(V_0 + V_1)$$

po n-tom zdvihu

$$\varrho_{n-1} V_0 = \varrho_{n-1}(V_0 + V_1)$$

Po úprave

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n$$

Hustota vzduchu po štvrtom zdvihu

$$\varrho_4 = 0{,}13 \varrho_0$$

Nech po k zdvihoch tlak p_0 poklesne na n-tinu pôvodného; potom

$$p_k = \frac{p_0}{n} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^k$$

odkiaľ po úprave dostaneme:

$$k = \frac{\log n}{\log \dfrac{V_0 + V_1}{V_0}}$$

t. j.

$$k = \frac{\log 10}{\log \dfrac{5}{3}} \doteq 5$$

313. Hustota vzduchu pri tlaku $p_1 = 0{,}2$ MPa a teplote $t_1 = 27$ °C je 2,354 kg.m^{-3}. Aká je hustota vzduchu za normálnych podmienok ($p_0 = 0{,}1$ MPa, $t_0 = 0$ °C)?

Riešenie:

Podľa stavovej rovnice

$$pV = \frac{m}{M_m} R_m T$$

odkiaľ pre hustotu vyplýva vzťah

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{M_m p}{R_m T}$$

Pre hustoty pri rôznych podmienkach možno písať:

$$\varrho_0 = \frac{M_m p_0}{R_m T_0}; \quad \varrho = \frac{M_m p_1}{R_m T_1}$$

Vydelením jednej rovnice druhou po úprave dostaneme:

$$\varrho_0 = \varrho \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_0}$$

$$\varrho_0 = 2{,}354 \text{ kg.m}^{-3} \frac{0{,}1 \text{ MPa}}{0{,}2 \text{ MPa}} \cdot \frac{300 \text{ °C}}{273 \text{ °C}} = 1{,}293 \text{ kg.m}^{-3}$$

314. Bomba obsahuje pri teplote $t_1 = 27$ °C a tlaku $p_1 = 4$ MPa stlačený plyn. Ako sa zmení jeho tlak, keď polovičné množstvo plynu vypustíme a jeho teplota pritom poklesne o 15 °C?

Riešenie:

Pri výpočte použijeme stavovú rovnicu. V začiatočnom stave

$$p_1 V = \frac{m}{M_m} R_m T_1 \tag{1}$$

Po vypustení časti plynu ostáva pri nezmenenom objeme v bombe plyn hmotnosti $m' = \frac{m}{2}$. Jeho tlak i teplota sa pozmení na p_2 a T_2 a podľa stavovej rovnice bude:

$$p_2 V = \frac{m}{2M_m} R_m T_2$$

Keď rovnicu (2) vydelíme rovnicou (1), po úprave dostaneme:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{2T_1} = 4 \text{ MPa} \frac{285 \text{ K}}{600 \text{ K}} = 1{,}9 \text{ MPa}$$

315. Vypočítajte, akú tiaž má $V_0 = 1$ m^3 vzduchu

a) pri povrchu Zeme,

b) vo výške $h = 4$ km nad povrchom Zeme,

keď hustota vzduchu pri povrchu Zeme je $\varrho_0 = 1{,}293$ kg.m^{-3} a atmosferický tlak je 1,013.10^5 Pa!

Predpokladajte, že teplota vzduchu a gravitačné zrýchlenie majú vo výške 4 km rovnakú hodnotu ako na povrchu Zeme.

Riešenie:

a) pri povrchu Zeme bude mať uvažovaný objem V_0 vzduchu tiaž

$$G_0 = V_0 \varrho_0 g = 1 \text{ m}^3 . 1{,}293 \text{ kg.m}^{-3} . 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} = 12{,}7 \text{ N}$$

b) tiaž objemu vzduchu V_0 vo výške h bude

$$G = V_0 \varrho g$$

Hustotu vzduchu ϱ vo výške h vypočítame zo stavovej rovnice

$$\varrho = \frac{p M_m}{R_m T}$$

Vzhľadom na závislosť atmosferického tlaku od výšky, vyjadrenú rovnicou

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}\right)$$

(pozri príklad 197) dostaneme pre hustotu ϱ vzťah

$$\varrho = \frac{p_0 M_m}{R_m T} \exp\left(-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}\right) = s_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}\right)$$

a tiaž vzduchu vo výške h určíme z rovnice

$$G = V_0 \varrho_0 g \exp\left(-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}\right) = G_0 \exp\left(-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}\right)$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$G = 12{,}7 \text{ N.} \exp\left(-\frac{1{,}293 \text{ kg.m}^{-3} . 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} . 4000 \text{ m}}{1{,}013 . 10^5 \text{ N.m}^{-2}}\right) = 7{,}7 \text{ N}$$

316. V akej hĺbke pod povrchom jazera sa bude hustota vzduchovej bublinky rovnať 1 % hustoty vody? Teplota vzduchovej bublinky je 4 °C a vonkajší tlak vzduchu je $p_0 = 0{,}1$ MPa. Hustota vzduchu pri tomto tlaku a teplote 0 °C je $\varrho_0 = 1{,}293 \text{ kg.m}^{-3}$.

Riešenie:

Keď tlak vzduchovej bublinky v hľadanej hĺbke h sa rovná p, pre jej hustotu vyplýva zo stavovej rovnice vzťah

$$\varrho = \frac{p M_m}{R_m T}$$

Hustota vzduchu pri tlaku p_0 a teplote 0 °C je známa ϱ_0. Platí pre ňu:

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M_m}{R_m T_0}$$

Po vydelení predchádzajúcich rovníc a úprave pre hustotu ϱ dostaneme:

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}$$

Tlak v bublinke v rovnovážnom stave je rovnaký ako celkový tlak pôsobiaci zvonka na bublinku, ktorý sa rovná súčtu atmosferického tlaku a tlaku vodného stĺpca nachádzajúceho sa nad bublinkou. Platí teda

$$\varrho = \varrho_0 \frac{p_0 + h\varrho_1 g}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T} \qquad (1)$$

kde ϱ_1 je hustota vody pri teplote T.

V súhlase so znením príkladu má byť:

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{100}$$

takže po úprave z rovnice (1) pre hľadanú hĺbku vyplýva vzťah

$$h = \frac{\varrho_1 T - 100\varrho_0 T_0}{100\varrho_0\varrho_1 g T_0} p_0$$

Keď dosadíme príslušné číselné hodnoty, dostaneme:

$$h = \frac{10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}.277\ \mathrm{K} - 100.1{,}293\ \mathrm{kg.m^{-3}}.273\ \mathrm{K}}{100.1{,}293\ \mathrm{kg.m^{-3}}.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}.9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}.273\ \mathrm{K}} \cdot 10^5\ \mathrm{m^{-1}.kg.s^{-2}} =$$

$$= 70{,}7\ \mathrm{m}$$

317. Vypočítajte, aká výsledná sila pôsobí na balón objemu $V = 3000\ \mathrm{m^3}$ naplnený a) vodíkom, b) héliom vo výške $h = 6000$ m, pri teplote $t = 0$ °C a vonkajšom tlaku $p = 0{,}05$ MPa? Hustota vzduchu za normálnych podmienok $\varrho_0 = 1{,}293\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Riešenie:

Balón je vo vzduchu nadľahčovaný silou, ktorá sa podľa Archimedovho zákona rovná tiaži ním vytlačeného vzduchu $G_1 = V\varrho_1 g$, kde sme ϱ_1 nazvali hustotu vzduchu pri danej teplote. Keď je táto sila väčšia ako vlastná tiaž, balón bude nadľahčovaný výslednou kladnou silou, ktorá sa rovná rozdielu vztlaku G_1 a vlastnej tiaže $G_2 = V\varrho_2 g$, t. j. silou

$$F = G_1 - G_2 = V\varrho_1 g - V\varrho_2 g \qquad (1)$$

kde ϱ_2 je hustota plynu, ktorým je balón naplnený.

Zo stavovej rovnice pre hustotu plynu pri tlaku p a teplote T dostávame:

$$\varrho = \frac{pM}{R_m T}$$

čo pre vodík dáva hodnotu

$$\varrho_2 = \frac{0{,}05 \,.\, 10^6 \text{ m}^{-1} \,.\, \text{kg} \,.\, \text{s}^{-2} \,.\, 2 \,.\, 10^{-3} \text{ kg} \,.\, \text{mol}^{-1}}{8{,}314 \text{ J} \,.\, \text{K}^{-1} \,.\, \text{mol}^{-1} \,.\, 273 \text{ K}} = 0{,}044 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3}$$

a pre hélium

$$\varrho_2' = \frac{0{,}05 \,.\, 10^6 \,.\, 4 \,.\, 10^{-3}}{8{,}314 \,.\, 273} \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3} = 0{,}088 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3}$$

Hustota vzduchu za normálnych podmienok

$$\varrho_0 = \frac{p_0 M_m}{R_m T_0}$$

a pri tlaku p a teplote T_0

$$\varrho_1 = \frac{p M_m}{R_m T_0}$$

Vydelením rovníc pre hustotu vzduchu dostávame:

$$\varrho_1 = \varrho_0 \frac{p}{p_0} = 1{,}293 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3} \frac{0{,}05 \text{ MPa}}{0{,}1 \text{ MPa}} = 0{,}6465 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3}$$

Výsledná sila nadľahčujúca balón (podľa rovnice (1)) pre balón plnený vodíkom

$$F = 3000 \text{ m}^3 \,.\, 9{,}81 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-2}(0{,}6465 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3} - 0{,}0447 \text{ kg} \,.\, \text{m}^{-3}) = 17\,710 \text{ N}$$

a héliom

$$F = 3000 \,.\, 9{,}81(0{,}6465 - 0{,}0894) = 16\,392 \text{ N}$$

318. Zmes plynov sa skladá z vodíka (H_2), metánu (CH_4) a kysličníka uhoľnatého (CO). V akom množstve sú jednotlivé zložky zastúpené v zmesi, keď ich parciálne tlaky v zmesi sú

$$p_1 = 0{,}07 \text{ MPa}; \quad p_2 = 0{,}2 \text{ MPa}; \quad p_3 = 0{,}13 \text{ MPa}$$

Riešenie:

Keď m_1, m_2, m_3 sú hmotnosti jednotlivých zložiek v jednotkovej hmotnosti zmesi a M_1, M_2, M_3 ich mólové hmotnosti, podľa stavovej rovnice pre každú zložku platí:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} R_m T \qquad (1)$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} R_m T \qquad (2)$$

$$p_3 V = \frac{m_3}{M_3} R_m T \qquad (3)$$

kde V je objem zmesi plynov.

Keď vydelíme rovnicu (1) rovnicou (2), resp. rovnicu (1) rovnicou (3), dostávame vzťahy

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{M_2}{M_1}$$

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{m_1}{m_3} \cdot \frac{M_3}{M_1}$$

ktoré spolu s rovnicou $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ kg poskytujú riešenie pre m_1, m_2, m_3 v tvare

$$m_1 = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{M_2}{M_1} + \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{M_3}{M_1} + 1}; \qquad m_2 = \frac{p_2 M_2 m_1}{p_1 M_1}$$

$$m_3 = \frac{p_3 M_3 m_1}{p_1 M_1}$$

kde $M_1 = 2$ g.mol^{-1}, $M_2 = 16$ g.mol^{-1}, $M_3 = 28$ g.mol^{-1}.

Po dosadení

$$m_1 = 0{,}02 \text{ kg}; \quad m_2 = 0{,}46 \text{ kg}; \quad m_3 = 0{,}52 \text{ kg}$$

V zmesi sú 2 % H_2, 46 % CH_4 a 52 % CO.

319. Pri akej teplote sa stredná kvadratická rýchlosť molekúl kysličníka uhličitého rovná strednej kvadratickej rýchlosti molekúl dusíka pri teplote 0 °C?

Riešenie:

Podmienku, že stredné kvadratické rýchlosti dvoch plynov pri rôznych teplotách sú rovnaké, vyjadríme rovnicou

$$\sqrt{\frac{3R_m T_1}{M_1}} = \sqrt{\frac{3R_m T_2}{M_2}}$$

odkiaľ pre hľadanú teplotu kysličníka uhličitého vyplýva vzťah

$$T_2 = \frac{M_2}{M_1} T_1$$

Mólová hmotnosť N_2 je $M_1 = 28\ \text{g.mol}^{-1}$, CO_2 je $M_2 = (12+32)\ \text{g.mol}^{-1} = 44\ \text{g.mol}^{-1}$.

Po dosadení dostaneme:

$$T_2 = \frac{44\ \text{g.mol}^{-1}}{28\ \text{g.mol}^{-1}}\, 273\ \text{K} = 429\ \text{K}$$

a z toho

$$t_2 = 156\ °\text{C}$$

320. Vypočítajte, ako sa mení stredná hodnota kinetickej energie molekúl argónu, ktorého hmotnosť $m = 200$ g, keď pri zachovaní stáleho objemu dodáme $Q = 3516$ J tepla.

Riešenie:

Keď plyn nemení svoj objem, dostáva zvonku energiu iba prostredníctvom tepla (a nie mechanickej práce). Zvonku privedené teplo Q zvyšuje vnútornú energiu plynu o ΔW a je splnený vzťah

$$Q = \Delta W \tag{1}$$

Keď ε je stredná hodnota kinetickej energie molekúl ideálneho plynu, vnútorná energia jedného mólu tohto plynu $W_m = N_A \varepsilon$ (N_A je Avogadrova konštanta) a plyn hmotnosti m má vnútornú energiu

$$W = N_V N_A \varepsilon$$

kde $N_V = \frac{m}{M_m}$ je počet mólov plynu. Vzhľadom na to, že argón je jednoatómový plyn, pre ktorý sa $\varepsilon = \frac{3}{2} kT$, jeho vnútorná energia je

$$W = \frac{m}{M_m} N_A \frac{3}{2} kT$$

V súhlase s rovnicou (1) možno písať

$$Q = \Delta W = \frac{m}{M_m} N_A \frac{3}{2} k\, \Delta T$$

Keď uvážime, že $\Delta \varepsilon = \frac{3}{2} k\, \Delta T$ predstavuje zmenu strednej kinetickej energie jednej molekuly, možno pre túto veličinu písať vzťah

$$\Delta\varepsilon = \frac{M_m Q}{m N_A} = \frac{0{,}04\ \mathrm{kg.mol^{-1}.3516\ J}}{0{,}2\ \mathrm{kg}.6{,}03.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}} = 116{,}3.10^{-23}\ \mathrm{J}$$

321. Pomocou kinetickej teórie plynov určite špecifickú tepelnú kapacitu pri stálom objeme pre a) argón, b) dusík! Výsledky porovnajte s hodnotami v *tab. 7.*

Riešenie:

Keď predpokladáme, že plyn sa skladá z molekúl rovnakého druhu, a keď každá jeho molekula má i stupňov voľnosti, stredná hodnota kinetickej energie jeho molekúl

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT$$

a celková vnútorná energia jedného mólu plynu

$$W_m = N_A \frac{i}{2} kT$$

kde N_A je počet molekúl v jednom móle plynu ($N_A = 6{,}03.10^{26}$ k mol^{-1}). Ľubovoľné množstvo plynu hmotnosti m obsahuje $n = \frac{m}{M_m}$ mólov. Ak uvážime, že Boltzmannova konštanta $k = \frac{R_m}{N_A}$, vnútorná energia plynu

$$W = \frac{m}{M_m} N_A \frac{i}{2} \cdot \frac{R_m}{N_A} T = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{i}{2} R_m T$$

Keď plyn ohrievame pri zachovaní jeho objemu, teplo Q dodané zvonku sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie a jeho teplota vzrastie o ΔT. Platí teda:

$$Q_V = \Delta W = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{i}{2} R_m (T + \Delta T) - \frac{m}{M_m} \cdot \frac{i}{2} R_m T = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{i}{2} R_m \Delta T \qquad (1)$$

Podľa definície špecifickej tepelnej kapacity

$$c_V = \frac{Q_V}{m\,\Delta T}$$

a po dosadení za Q_V z rovnice (1) dostaneme:

$$c_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R_m}{M_m}$$

Po dosadení príslušných číselných hodnôt bude platiť:

a) argón je jednoatómový plyn, ktorého $i = 3$, takže

$$c_V = \frac{3}{2} \cdot \frac{R_m}{M_m} = \frac{3}{2} \frac{8314\ \mathrm{J.K.mol^{-1}}}{40\ \mathrm{kg.mol^{-1}}} = 311\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

Tabuľky udávajú hodnotu 319 $\mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$.

b) dusík je dvojatómový plyn, ktorého $i = 5$, takže

$$c_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{R_m}{M_m} = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{28.10^{-3}}\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} = 742\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

čo súhlasí s hodnotou v tabuľkách.

322. Vypočítajte, koľko percent molekúl argónu sa pri teplote $t_0 = 120\ °\mathrm{C}$ pohybuje rýchlosťami v intervale od $v_1 = 2000\ \mathrm{km.h^{-1}}$ do $v_2 = 2330\ \mathrm{km.h^{-1}}$!

Riešenie:

Podľa Maxwellovho zákona pre rozdelenie rýchlostí molekúl plynu platí:

$$\frac{\mathrm{d}n}{N_V} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3} v^2 . \left[\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\right] \mathrm{d}v \qquad (1)$$

Tento vzťah ešte zjednodušíme, keď zavedieme relatívnu rýchlosť ako podiel okamžitej v a najpravdepodobnejšej rýchlosti molekúl v_m:

$$u = \frac{v}{v_m} = \frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}}$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}n}{N_V} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2} u^2\, \mathrm{d}u$$

$\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}n}{N_V}$ určuje relatívnu početnosť molekúl, ktorých relatívne rýchlosti sú v konečnom intervale rýchlostí medzi u_1 a u_2. Výraz

$$\frac{n_{u_0}}{N_V} = \int_{u_0}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2} u^2\, \mathrm{d}u$$

určuje zase relatívnu početnosť n_r molekúl, ktorých relatívne rýchlosti sú väčšie ako

u_0. Hodnoty tohto integrálu sú vypočítané a na *obr. 87* možno priamo odčítať hodnoty týchto relatívnych početností pre rôzne relatívne rýchlosti.

Podľa údajov príkladu

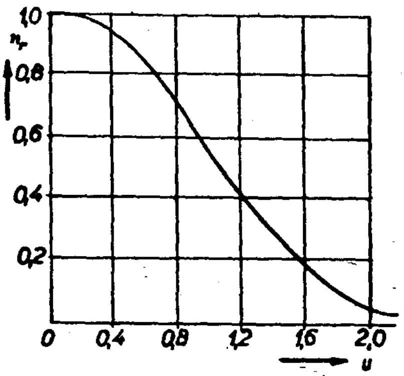
$$v_m = \sqrt{\frac{2kT_0}{m_0}} = \sqrt{\frac{2R_m T_0}{M_m}} = \sqrt{\frac{2\,.\,8{,}314\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,mol^{-1}\,.\,393\ K}}{40\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}}} =$$

$$= 404\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} = 1454\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$$

a relatívne rýchlosti

$$u_1 = \frac{v_1}{v_m} = \frac{2000}{1454} = 1{,}375$$

$$u_2 = \frac{v_2}{v_m} = \frac{2330}{1454} = 1{,}6$$



Obr. 87

Podľa *obr. 87*

$$\frac{n_{u_1}}{n} = 0{,}30; \quad \frac{n_{u_2}}{n} = 0{,}18$$

Teda 30 % molekúl má väčšiu rýchlosť ako 2000 km.h^{-1} a 18 % väčšiu ako 2330 km.h^{-1}.

V intervale rýchlostí 2000 až 2330 km.h^{-1} sa pohybuje 12 % molekúl.

323. Na základe Maxwellovho zákona pre rozdelenie molekúl podľa rýchlosti nájdite vzťah pre najpravdepodobnejšiu a priemernú rýchlosť molekúl plynu!

Riešenie:

Podľa Maxwellovho zákona relatívna početnosť molekúl, ktoré sa pohybujú tak, že absolútna hodnota ich rýchlosti je v intervale v až $v + \mathrm{d}v$, pričom smer rýchlosti je akýkoľvek, je:

$$\frac{\mathrm{d}n}{N_v} = f(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3}\, v^2 \left[\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\right] \mathrm{d}v \qquad (1)$$

Funkcia $f(v)$, ako to vyplýva z jej grafického zobrazenia i výpočtu, dosahuje nulovú hodnotu pre $v=0$ a $v=\infty$ a niekde medzi týmito hodnotami rýchlostí dosahuje maximum. Polohe maxima odpovedá rýchlosť, ktorou sa pri danej teplote pohybuje maximálny počet molekúl, t. j. najpravdepodobnejšia rýchlosť. Pre ňu platí

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0$$

Po výpočte prvej derivácie dostaneme:

$$v^2\left(-\frac{2m_0}{2kT}v\right)\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT}\right)+2v\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT}\right)=0$$

Z toho

$$v_m=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

Pretože $k=\frac{R_m}{N_A}$ a $m_0N_A=M_m$, kde M_m je mólová hmotnosť

$$v_m=\sqrt{\frac{2R_mT}{M_m}}$$

b) Pod priemernou rýchlosťou pohybu molekúl rozumieme aritmetický priemer rýchlostí pohybu všetkých molekúl plynu. Keď z celkového počtu molekúl N_V sa dn molekúl pohybuje rýchlosťami v až $v+\mathrm{d}v$, priemerná rýchlosť v_p je daná vzťahom

$$v_p=\frac{\int_0^\infty v\,\mathrm{d}n}{N_V}=\int_0^\infty v\frac{\mathrm{d}n}{N_V}$$

$\frac{\mathrm{d}n}{N_V}$ ale predstavuje relatívnu početnosť molekúl, ktorých rýchlosti ležia v intervale v až $v+\mathrm{d}v$, t. j. $f(v)\,\mathrm{d}v$. Vzhľadom na vzťah (1) možno teda písať:

$$v_p=\int_0^\infty v\,f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3}v^3\left[\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT}\right)\right]\mathrm{d}v=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3}\int_0^\infty v^3\left[\exp\left(-\frac{m_0v^2}{2kT}\right)\right]\mathrm{d}v$$

Integrál

$$\int_0^\infty v^3 \left[\exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right)\right] dv$$

riešime substitúciou $\frac{m_0 v^2}{2kT} = y^2$, takže $\frac{m_0}{kT} v\, dv = 2y\, dy$. Po substitúcii bude mať predošlý integrál tvar

$$\frac{4k^2T^2}{m_0^2} \int_0^\infty y^3\, e^{-y^2}\, dy$$

Výraz $\int_0^\infty y^3\, e^{-y^2}\, dy$, integrovaný per partes, dáva hodnotu $\frac{1}{2}$, a preto

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3 \frac{4k^2T^2}{m_0^2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

Ak položíme $k = \frac{R_m}{N_A}$ a $m_0 M_A = M_m$, dostávame

$$v_p = \sqrt{\frac{8R_m T}{\pi M_m}}$$

324. Vypočítajte, koľko percent molekúl plynu má kinetickú energiu postupného pohybu väčšiu ako dvojnásobok strednej hodnoty kinetickej energie postupného pohybu molekúl!

Riešenie:

Keď rýchlosti molekúl, ktoré spĺňajú podmienky úlohy, sú v, musí pre každú z nich platiť:

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 > 2\,\frac{1}{2} m_0 v_s^2$$

odkiaľ dostaneme:

$$v > \sqrt{2}\, v_s$$

Počet molekúl, ktorých rýchlosti sú väčšie než rýchlosť $v_0 = \sqrt{2}\, v_s$ ľahko určíme podľa výsledku príkladu 322 a *obr. 87.*

Nájdeme si príslušnú relatívnu rýchlosť

$$u_0 = \frac{v_0}{v_m}; \quad v_m = \sqrt{\frac{2R_m T}{M_m}}; \quad v_s = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}$$

a preto

$$u_0 = \frac{\sqrt{2}\, v_s}{v_m} = \sqrt{3} = 1{,}73$$

Podľa grafu

$$\frac{n_{u_0}}{N_V} = 0{,}11$$

Z úhrnného počtu molekúl má 11 % molekúl kinetickú energiu väčšiu ako dvojnásobok strednej hodnoty kinetickej energie.

325. Pomocou Boltzmannovho zákona rozdelenia určte závislosť barometrického tlaku vzduchu od výšky!

Riešenie:

Molekuly vzduchu v zemskom ovzduší majú kinetickú energiu $\frac{3}{2}\,kT$ a potenciálnu energiu zemského gravitačného poľa m_0gh. Pre celkovú energiu molekuly teda platí

$$W = \frac{3}{2}\,kT + m_0gh$$

Z Boltzmannovho vzťahu

$$n = A\,.\,e^{-\frac{W}{kT}}$$

vyplýva pre počet molekúl vo výške h

$$n_n = A\,.\exp\left[-\frac{1}{kT}\left(\frac{3}{2}\,kT + m_0gh\right)\right] = A\,.\,e^{-3/2}\cdot \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right)$$

a vo výške $h = 0$

$$n_0 = A\,.\,e^{-3/2}$$

takže

$$n_h = N_0 \exp\left(-\frac{m_0gh}{kT}\right)$$

Ak je N počet molekúl v jednotkovom objeme, platí

$$\frac{n_h}{n_0} = \frac{N_h}{N_0}$$

takže

$$N_h = N_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

Keďže pre počet molekúl v jednotkovom objeme platí

$$N_0 = \frac{p_0}{kT}; \quad N_h = \frac{p_h}{kT}$$

dostaneme pre tlak

$$p_h = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right)$$

326. Stredná voľná dráha molekúl vodíka za normálnych podmienok ($p_0 = 0{,}1$ MPa, $t_0 = 0$ °C) je $l_0 = 1{,}28 \,.\, 10^{-5}$ cm. Aký je priemer vodíkovej molekuly a aká je jej stredná voľná dráha pri tlaku $p = 133{,}3 \,.\, 10^{-4}$ Pa a teplote $t_0 = 0$ °C?

Riešenie:

Keď použijeme vzťah pre strednú voľnú dráhu

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N_V}$$

v ktorom za N_V (počet molekúl v jednotkovom objeme) dosadíme

$$N_V = \frac{p}{kT}$$

dostávame pre hľadaný priemer molekuly vodíka vzťah

$$d^2 = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi l p}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude

$$d^2 = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi l_0 p_0} = \frac{1{,}38 \,.\, 10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}.273\ \mathrm{K}}{\sqrt{2}\pi \,.\, 1{,}28 \,.\, 10^{-7}\ m \,.\, 10^5\ N \,.\, m^{-2}} = 6{,}6 \,.\, 10^{-20}\ \mathrm{m^2}$$

takže

$$d = 2{,}6 \,.\, 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Stredná voľná dráha za normálnych podmienok

$$l_0 = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi p_0 d^2}$$

a pri tlaku p a teplote T_0

$$l = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi p d^2}$$

Po vydelení rovníc dostávame

$$\frac{l}{l_0} = \frac{p_0}{p}$$

takže

$$l = l_0 \frac{p_0}{p} = 1{,}28 . 10^{-7} \text{ m } \frac{0{,}1 . 10^6 \text{ Pa}}{133{,}3 . 10^{-4} \text{ Pa}} = 0{,}96 \text{ m}$$

327. V nádobe objemu 1 cm^3 je pri teplote 0 °C a tlaku 0,1 MPa uzavretý vodík. Vypočítajte, koľko nárazov sa uskutoční medzi molekulami za jednu sekundu v tomto objeme! Počítajte s priemerom molekuly $d = 2{,}38 . 10^{-8}$ cm.

Riešenie:

Jedna molekula za sekundu narazí priemerne na Z iných. Ak v_s je stredná kvadratická rýchlosť molekúl, tak

$$Z = N_V \pi d^2 v_s$$

Pri každom náraze sa stretnú dve molekuly. Preto je celkový počet nárazov v jednotkovom objeme plynu za sekundu daný vzťahom

$$Z_0 = \frac{N_V}{2} Z = \frac{N_V^2 \pi d^2 v_s}{2}$$

kde N_V je počet molekúl v jednotkovom objeme. Ak uvážime, že

$$N_V = \frac{p}{kT}; \quad v_s = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}$$

bude

$$z_0 = \frac{p^2 d^2 \pi}{2k^2 T^2} \sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$Z_0 = \frac{(10^5 \text{ Pa})^2 . 2{,}38 . 10^{-20} \text{ m}^2}{2 . 1{,}38^2 . 10^{-46} \text{ J}^2 . \text{K}^{-2} . 273^2 \text{ K}^2} \cdot \sqrt{\frac{3 . 8{,}31 \text{ J} . \text{K}^{-1} . \text{mol}^{-1} . 273 \text{ K}}{2 . 10^{-3} \text{ kg} . \text{mol}^{-1}}}$$

$$Z_0 = 1{,}15 . 10^{32} \text{ m}^{-3} . \text{s}^{-1}$$

328. Aká je priemerná rýchlosť molekúl argónu, keď stredná doba medzi dvoma nárazmi molekúl $\tau = 9.10^{-7}$ s a keď v jednotkovom objeme je $N_V = 3{,}4.10^{12}$ cm^{-3} jeho molekúl? Pri normálnych podmienkach (tlak 0,1 MPa, teplota 0 °C) je dĺžka strednej voľnej dráhy molekúl argónu $l = 6{,}66.10^{-6}$ cm.

Riešenie:

Za čas τ, ktorý sa rovná strednej dobe medzi dvoma nárazmi, prejde molekula pohybujúca sa priemernou rýchlosťou v_p dráhu

$$l = v_p \tau, \quad \text{odkiaľ} \quad v_p = \frac{l}{\tau} \tag{1}$$

Stredná voľná dráha molekuly spĺňa vzťah

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N_V}$$

Neznámy priemer molekuly určíme z údajov pre normálne podmienky v plyne. Z toho vyplýva

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi N_{V0} d^2}$$

a pretože

$$N_{V0} = \frac{p_0}{kT_0}$$

platí

$$d^2 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi N_{V0} l_0} = \frac{kT_0}{\sqrt{2}\pi p_0 l_0}$$

Dosadením do rovnice (2) dostaneme

$$l = \frac{l_0 p_0}{N_V k T_0}$$

Pre priemernú rýchlosť zo vzťahu (1) vyplýva

$$v_p = \frac{l}{\tau} = \frac{l_0 p_0}{N_V k T_0 \tau}$$

Po dosadení číselných hodnôt konečne dostávame

$$v_p = \frac{6{,}66.10^{-8}\,\text{m}.10^5\,\text{N}.\text{m}^{-2}}{3{,}4.10^{18}\,\text{m}^{-3}.1{,}38.10^{-23}\,\text{J}.\text{K}^{-1}.273\,\text{K}.9.10^{-7}\,\text{s}} = 5{,}8.10^5\,\text{m}.\text{s}^{-1}$$

329. Vypočítajte strednú voľnú dráhu molekúl kyslíka za normálnych podmienok, keď koeficient vnútorného trenia kyslíka pri týchto podmienkach $\eta_0 = 19{,}2 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{kg\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}}$, tlak $p_0 = 0{,}1$ MPa a teplota $t_0 = 0$ °C!

Riešenie:

Vychádzajúc zo vzťahu $\eta = \frac{1}{3}\,\varrho v_s l$ pre strednú voľnú dráhu možno písať

$$l = \frac{3\eta}{\varrho v_s}$$

Ak použijeme vzťah pre strednú kvadratickú rýchlosť molekúl

$$v_s = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}$$

a stavovú rovnicu

$$pV = \frac{m}{M_m}RT, \quad \text{odkiaľ} \quad \varrho = \frac{pM_m}{R_m T}$$

máme pre l vzťah

$$l = \frac{3\eta}{\frac{pM_m}{R_m T}\sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}}$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$l = \frac{\eta}{p}\sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}}$$

Po dosadení číselných hodnôt konečne dostávame

$$l = \frac{19{,}2\,.\,10^{-6}\ \mathrm{kg\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}}}{10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}}\sqrt{\frac{3\,.\,8{,}31\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,mol^{-1}}\,.\,273\ \mathrm{K}}{32\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}}} = 8{,}8\,.\,10^{-8}\ \mathrm{m}$$

Úlohy

330. a) Vypočítajte, pri akej teplote má plyn pri nezmenenom tlaku 2/3 toho objemu, aký mal pri 0 °C!

b) Určite, pri akej teplote má plyn pri nezmenenom objeme n-krát väčší tlak ako pri 0 °C!

[$t_1 = -91$ °C; $t_2 = 273\,(n-1)$ °C]

331. Manometer na nádrži so stlačeným plynom ukazoval pri teplote $t = 20\ °C$ tlak 6 MPa. Po znížení teploty plynu ručička manometra ukazovala iba 4,5 MPa. Vypočítajte konečnú teplotu plynu! Zmenu objemu nádoby neberte do úvahy.

[−53,25 °C]

332. V priestore nad ortuťou v ortuťovom barometri je malé množstvo vzduchu, čo má za následok, že barometer ukazuje nižší tlak ako v skutočnosti. Keď je napr. správna hodnota tlaku vzduchu 99 991,5 Pa, čo odpovedá dĺžke ortuťového stĺpca 750 mm, barometer ukazuje len 730 mm. Vypočítajte, aká je správna hodnota tlaku vzduchu, keď barometer ukazuje 690 mm! Dĺžka sklenej barometrickej trubice je 85 cm. Tlak meriame pri rovnakej teplote.

[$p = 93\ 992$ Pa, čo odpovedá dĺžke ortuťového stĺpca 705 mm]

333. Aký objem majú 4 g hélia pri tlaku 99 991,5 Pa a teplote 20 °C?

[$V = 24{,}4$ l]

334. Určité množstvo vzduchu má pri teplote $t_0 = 8\ °C$ a tlaku $p_0 = 99\ 991{,}5$ Pa objem $v_0 = 112\ cm^3$. Na akú teplotu ho treba ohriať, aby pri tlaku $p_1 = 98\ 658$ Pa mal objem $V_1 = 136\ cm^3$?

[$t_1 = 63{,}7\ °C$]

335. V nádrži objemu 40 litrov sa nachádza pri teplote 27 °C kyslík pod tlakom 1 MPa. Vypočítajte, aká je jeho tiaž!

[5 N]

336. Vypočítajte, aká je hustota dusíka pri teplote 10 °C a tlaku 0,2 MPa!

[2,4 kg.m^{-3}]

337. Vypočítajte, koľko váži vzduch v miestnosti, ktorej rozmery sú: šírka 4 m, dĺžka 5 m a výška 3 m, pri tlaku 0,1 MPa a pri izbovej teplote 20 °C. Hustota vzduchu pri teplote 0 °C a tlaku 0,1 MPa je 1,293 kg.m^{-3}.

[709 N]

338. Ideálny plyn má pri teplote $T_1 = 300$ K a tlaku $p_1 = 10^3\ N.m^{-2}$ objem $V_1 = 0{,}25\ m^3$.

a) Zostrojte graf izotermického deja tohoto plynu v súradnicových sústavách p—V, V—T, P—T! Zostrojte grafy aj pre izobarický a izochorický dej!

b) Ku každému grafu z úlohy a) zostrojte príslušný graf pre ideálny plyn dvojnásobnej hmotnosti! Vysvetlite, v čom sa príslušné grafy úlohy a) a b) od seba odlišujú!

c) Za predpokladu, že grafy z úlohy a) platia pre vodík danej hmotnosti, zostrojte príslušné grafy pre hélium tej istej hmotnosti! Vysvetlite, v čom sa príslušné grafy pre vodík a hélium od seba líšia!

Ku každému grafu zostavte tabuľku hodnôt!

339. Žiarovka objemu 150 cm^3 je naplnená argónom. Aká je jeho teplota, keď pri tlaku 0,1 MPa má argón tiaž $1{,}42 . 10^{-3}$ N?

[224 °C]

340. Vypočítajte, aký je špecifický objem vodíka pri tlaku 0,125 MPa a teplote 20 °C!

[$v = 9{,}7\ m^3 . kg^{-1}$]

341. V nádobe objemu 6000 cm^3 je pri teplote 27 °C a tlaku 0,207 MPa 14 g plynu. Aký je to plyn?

[Dusík]

342. Vypočítajte, aký objem zaberajú 3 móly kyslíka pri tlaku 0,3 MPa a teplote 100 °C!

[$V = 0{,}03\ m^3$]

343. Vypočítajte hustotu vodíka pri atmosferickom tlaku $1{,}01 . 10^5$ Pa a pri teplote 0 °C, keď viete, že hmotnosť atómu vodíka je $1{,}67 . 10^{-27}$ kg!

[$\varrho = 8{,}9 . 10^{-2}\ kg . m^{-3}$]

344. V nádobe bol vzduch pri stálej teplote zriedený na 5 % pôvodného tlaku. Koľko vzduchu sa z nádoby odčerpalo?

[Odčerpalo sa 95 % z pôvodného množstva]

345. Hustota plynu pri teplote 30 °C a tlaku $1{,}33 . 10^5$ Pa je 1,7 $kg . m^{-3}$. Aká je hmotnosť jedného kilomólu tohto plynu?

[$M = 32$ kg]

346. V dopravnom lietadle letiacom vo výške 8 km sa udržiava rovnaký tlak ako na zemskom povrchu. Vypočítajte, aký je rozdiel tlakov v kabíne a mimo kabíny lietadla, ak predpokladáme, že atmosferický tlak pri povrchu Zeme je 0,1 MPa a teplota vzduchu 0 °C je rovnaká pri povrchu Zeme aj vo výške 8 km!

[$\Delta p = 0{,}64 . 10^5$ Pa]

347. Správny ortuťový barometer ukazuje pri teplote $t_0 = 27$ °C tlak $b =$ $= 99\,991{,}5$ Pa. Dĺžka barometrickej trubice $l = 90$ cm, jej prierez $S = 1{,}5\ cm^2$. Keď do priestoru nad ortuťou privedieme trochu kyslíka, ortuťový stĺpec poklesne o dĺžku $\Delta l = 50$ mm. Vypočítajte, koľko kyslíka sme použili, ak predpokladáme, že teplota je stále rovnaká!

[$m = 2{,}6$ mg]

348. Vzduchová bublinka na dne jazera v hĺbke $h = 21$ m má pri teplote $t_1 = 4$ °C polomer $r_1 = 1$ cm. Pomaly stúpa na povrch, pričom sa jej objem zväčšuje. Vypočítajte, aký bude jej polomer, keď dosiahne povrch jazera, ktorý má teplotu $t_2 = 27$ °C! Povrchové napätie neberte do úvahy. Atmosferický tlak $b = 0{,}1$ MPa.

[$r = 1{,}5$ cm]

349. V jednom valci objemu $V_1 = 5$ m^3 je kysličník uhoľnatý s tlakom $p_1 = 15$ MPa, v druhom valci objemu $V_2 = 8$ m^3 je vodík s tlakom $p_2 = 22$ MPa pri rovnakej teplote. Aký bude výsledný tlak zmesi po spojení oboch nádob? Teplota ostáva rovnaká.

[$p = 19{,}3$ MPa]

350. V jednej nádobe objemu 3 litre je pri teplote 20 °C 10 g vodíka, v druhej nádobe objemu 5 litrov pri tej istej teplote 8 g dusíka. Aký bude tlak zmesi, ktorá vznikne po spojení oboch nádob?

[$p = 1{,}6$ MPa]

351. Hmotnostné zloženie zmesi suchých plynov vzniknutých horením je: 14 % CO_2, 4,4 % CO, 5,8 % O_2, 75 % N_2. Aká je stredná relatívna molekulová hmotnosť tejto zmesi?

[29,7]

352. Suchý vzduch obsahuje (ak neberieme do úvahy vzácne plyny) 23,2 % (hmotnostných) kyslíka a 76,8 % dusíka. Aké sú parciálne tlaky jednotlivých zložiek, keď celkový tlak vzduchu je 99 991,5 Pa?

[$p_1 = 20\,931$ Pa; $p_2 = 79\,060$ Pa]

353. Zmes plynov v zložení 12 g CO_2, 6 g O_2, 1 g CO, 86 g N_2 je pri teplote $t_1 = 127$ °C v nádobe objemu $V = 3$ l. Aký je celkový tlak zmesi a aké sú parciálne tlaky jednotlivých zložiek?

[$p = 3{,}9 \,.\, 10^6$ Pa; $p_1 = 0{,}3 \,.\, 10^6$ Pa; $p_2 = 0{,}2 \,.\, 10^6$ Pa;
$p_3 = 0{,}39 \,.\, 10^6$ Pa; $p_4 = 34{,}0 \,.\, 10^6$ Pa]

354. Vypočítajte, koľko molekúl obsahuje a) liter vody za normálnych podmienok, b) kocka železa s hranou 1 cm a c) kocka medi s hranou 1 cm!

[a) $3{,}35 \,.\, 10^{25}$; b) $8{,}41 \,.\, 10^{22}$; c) $8{,}44 \,.\, 10^{22}$]

355. Aká je hmotnosť atómu (molekuly) a) železa, b) medi a c) kuchynskej soli?

[a) $9{,}3\,.\,10^{-23}$ g; b) $10{,}5\,.\,10^{-23}$ g; c) $9{,}7\,.\,10^{-23}$ g]

356. Aká veľká je stredná kvadratická rýchlosť molekúl a) dusíka a b) hélia pri teplotách 500 °C, 0 °C a −270 °C?

[a) 830 $m\,.\,s^{-1}$; 493 $m\,.\,s^{-1}$; 52 $m\,.\,s^{-1}$;
b) 2195 $m\,.\,s^{-1}$; 1304 $m\,.\,s^{-1}$; 137 $m\,.\,s^{-1}$]

357. Vypočítajte, aká je stredná kinetická energia postupného pohybu atómov vnútri Slnka, keď predpokladáme, že priemerná teplota Slnka je $2\,.\,10^{7}$ K!

[$\varepsilon \doteq 4{,}14\,.\,10^{-16}$ J]

358. Pri akej teplote je stredná kvadratická rýchlosť molekúl dusíka práve polovičná ako pri izbovej teplote ($t_1 = 20$ °C)?

[$t_2 = -200$ °C]

359. Koľko molekúl je v guľovej nádobe polomeru 3 cm naplnenej kyslíkom, keď jeho teplota je 27 °C a tlak $1{,}33\,.\,10^{-2}$ Pa?

[$n = 3{,}6\,.\,10^{14}$]

360. V nádobe objemu 2 l je $3\,.\,10^{20}$ molekúl dusíka, 10^{20} molekúl kysličníka uhoľnatého a $2\,.\,10^{20}$ molekúl vodíka. Tlak tejto plynnej zmesi je 2666,4 Pa. Aká je teplota zmesi?

[$t = 374$ °C]

361. Určité množstvo hélia sme ochladili z teploty $t_1 = 20$ °C na teplotu $t_2 = -250$ °C. Ako sa pri tom zmenila stredná kinetická energia molekúl a ich priemerná rýchlosť?

[$\Delta\varepsilon = -5{,}6\,.\,10^{-21}$ J; $\Delta v = -895$ $m\,.\,s^{-1}$]

362. Vypočítajte, aká je vnútorná energia $m = 10$ g dusíka teploty 30 °C! Aká časť tejto energie pripadá na postupný a aká na rotačný pohyb molekúl?

[$W = 9\,.\,10^{2}$ J; $W_p = 5{,}4\,.\,10^{2}$ J; $W_r = 3{,}6\,.\,10^{2}$ J]

363. Stredná kvadratická rýchlosť molekúl plynu je 800 $m\,.\,s^{-1}$. Koľko molekúl obsahuje 1 kg tohto plynu, keď je jeho teplota 27 °C?

[$n = 5{,}15\,.\,10^{25}$]

364. Stredná kvadratická rýchlosť molekúl plynu je 1200 $m\,.\,s^{-1}$. Akým tlakom pôsobí tento plyn na steny nádoby, keď jeho hustota je 0,03 $kg.m^{-3}$?

[$p = 1{,}44 \,.\, 10^6$ Pa]

365. Vypočítajte, akou priemernou a akou najpravdepodobnejšou rýchlosťou sa pohybujú pri teplote 0 °C molekuly a) vodíka, b) hélia, c) kyslíka! Porovnajte výsledky so strednou kvadratickou rýchlosťou!

[a) 1845 $m.s^{-1}$; 1504 $m.s^{-1}$; 1697 $m.s^{-1}$;
b) 1304 $m.s^{-1}$; 1062,8 $m.s^{-1}$; 1200 $m.s^{-1}$;
c) 460 $m.s^{-1}$; 375 $m.s^{-1}$; 423 $m.s^{-1}$]

366. V trubici naplnenej argónom sa šíri zvuk rýchlosťou v_0. Vypočítajte, aká je stredná kvadratická rýchlosť molekúl argónu a akou rýchlosťou sa pohybuje najväčší počet jeho molekúl!

$$\left[v_s = \sqrt{\frac{3v_0^2}{\varkappa}}\;;\; v_m = v_0\sqrt{\frac{2}{\varkappa}}\right]$$

367. S použitím predstáv kinetickej teórie plynov vypočítajte hodnotu vnútornej energie a) jednoatómového, b) dvojatómového plynu, ktorého tlak je p a objem V!

$$\left[\text{a) } W = \frac{3}{2}pV;\ \text{b) } W = \frac{5}{2}pV\right]$$

368. Na základe vzťahov z kinetickej teórie plynov vypočítajte a) strednú voľnú dráhu molekúl dusíka a hélia, b) počet zrážok jednej molekuly s ostatnými za sekundu pri teplote 0 °C a tlaku 0,133 Pa a 0,1 MPa! Za stredný priemer molekuly dusíka berte $d_1 = 3{,}16 \,.\, 10^{-10}$ m a hélia $d_2 = 2{,}2 \,.\, 10^{-10}$ m.

[a) $l_{N_2} = 6{,}4 \,.\, 10^{-2}$ m; $l'_{N_2} = 8{,}4 \,.\, 10^{-8}$ m; $l_{He} = 13{,}1 \,.\, 10^{-2}$ m;
$l'_{He} = 17{,}3 \,.\, 10^{-8}$ m;
b) $Z_N = 7{,}1 \,.\, 10^3\ s^{-1}$; $Z'_N = 5{,}4 \,.\, 10^9\ s^{-1}$; $Z_{He} = 9{,}2 \,.\, 10^3\ s^{-1}$;
$Z'_{He} = 7{,}0 \,.\, 10^9\ s^{-1}$]

369. Vypočítajte, aký je priemer molekuly neónu, keď pri teplote $t = 327$ °C a tlaku 133,3 Pa molekula vykoná priemerne $2{,}2 \,.\, 10^6$ zrážok za sekundu!

[$d = 2 \,.\, 10^{-10}$ m]

370. Dusík pri teplote $t = 68$ °C je uzavretý v guľovej nádobe objemu $V = 4{,}2$ l. Na aký tlak treba plyn zriediť, aby sa stredná voľná dráha jeho molekúl rovnala rozmerom nádoby? Koľko molekúl sa pritom bude pohybovať v nádobe? Priemer molekuly dusíka uvažujte $2{,}3 \,.\, 10^{-10}$ m.

[$p = 1{,}05 \,.\, 10^{-1}$ Pa; $n = 9{,}45 \,.\, 10^{16}$]

371. Vyjadrite všeobecne závislosť súčiniteľa vnútorného trenia plynu od teploty! Vypočítajte súčiniteľ vnútorného trenia vzduchu pri teplote $t = 27\ °C$, keď pri teplote $t_0 = 0\ °C$ sa $\eta_0 = 18\,.\,10^{-6}\ kg\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}$!

$$\left[\eta = \eta_0\sqrt{\frac{T}{T_0}};\quad \eta = 2{,}1\,.\,10^{-5}\ kg\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}\right]$$

9 TERMODYNAMIKA

Úvod

a) Pod *vnútornou energiou* sústavy látok (napr. plynu uzavretého v nádobe) rozumieme energiu, ktorú sústave musíme dodať, aby prešla zo stavu, ktorý sme zvolili za základný, do daného stavu. Sústava látok v rovnovážnom stave sa vyznačuje celkom určitou hodnotou vnútornej energie.

Z hľadiska molekulárno-kinetických predstáv pod vnútornou energiou sústavy rozumieme súčet kinetickej a potenciálnej energie molekúl tvoriacich sústavu.

Sústave látok privádzame zvonku energiu obvykle prostredníctvom *mechanickej práce* alebo *tepla*; veľkosť zmeny energie sústavy možno merať veľkosťou práce alebo tepla[1].

Práca i teplo sú *ekvivalentné (rovnocenné)* spôsoby prenosu (premeny) energie.

b) Keď sústava pri elementárnej zmene svojho stavu prijme zvonku energiu prostredníctvom mechanickej práce dA a tepla dQ, zväčší sa jej vnútorná energia o hodnotu dW podľa rovnice

$$dW = dA + dQ \tag{1}$$

Prácu dA i teplo dQ vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, v jouloch (J).

Rovnica (1) je jednou z matematických formulácií *prvej vety termodynamickej*.

Keď je veličina dA (alebo dQ) záporná, sústava prácu (alebo teplo) od svojho okolia neprijíma, ale odovzdáva mu ju. Keď prácu, ktorú vykoná sústava, označíme dA' (odovzdané teplo dQ'), platia vzťahy

$$dA = -dA';\quad dQ = -dQ'$$

[1] Obvykle to vyjadrujeme stručne: sústave dodávame teplo (prácu), sústava odovzdáva teplo, koná prácu.

c) V sústave látok prebieha *termodynamický* dej, keď sa jej stav mení. Termodynamický dej prebiehajúci v sústave látok sa nazýva *kruhový (cyklický)*, keď sa po vykonaní rôznych stavových zmien sústava vráti do začiatočného stavu.

d) Práca, ktorú vykoná plyn pri elementárnej vratnej zmene svojho objemu o $\mathrm{d}V$ proti vonkajším silám *(objemová práca)*, je daná vzťahom

$$\mathrm{d}A' = p\,\mathrm{d}V$$

kde p je tlak plynu.

e) Pod tepelnou kapacitou ľubovoľného množstva plynu rozumieme teplo potrebné na jeho ohriatie o 1 °C. Rozlišujeme *tepelnú kapacitu za stáleho tlaku* a *tepelnú kapacitu za stáleho objemu*; pri danom plyne je prvá tepelná kapacita vždy väčšia než druhá.

Tepelná kapacita jedného mólu plynu sa nazýva *mólová tepelná kapacita*. So špecifickou tepelnou kapacitou súvisí takto:

$$C_p = M_m c_p\,; \quad C_V = M_m c_V$$

kde M_m je mólová hmotnosť plynu.

f) Ideálny plyn je taký, ktorý dokonale spĺňa stavovú rovnicu

$$pV = nR_mT$$

a ktorého vnútorná energia závisí len od jeho teploty.

Keď sa pri elementárnej stavovej zmene jedného mólu ideálneho plynu jeho teplota zmení o $\mathrm{d}T$, jeho vnútorná energia sa zmení o

$$\mathrm{d}W = C_V\,\mathrm{d}T$$

Keď máme na mysli plyn hmotnosti m, tento obsahuje $n = \dfrac{m}{M_m}$ mólov, takže

$$\mathrm{d}W = \frac{m}{M_m} C_V\,\mathrm{d}T = mc_V\,\mathrm{d}T$$

Vzťah medzi mólovou tepelnou kapacitou ideálneho plynu za stáleho tlaku a stáleho objemu vyjadruje *Mayerova rovnica*:

$$C_p - C_V = R_m$$

Pre špecifické tepelné kapacity potom platí:

$$c_p - c_V = \frac{R_m}{M_m}$$

g) Prvá veta termodynamická má pre ľubovoľné množstvo ideálneho plynu tvar

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W + \mathrm{d}A' = nC_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V$$

Niektoré jednoduché stavové zmeny ideálneho plynu:

1. *Izochorická zmena*

Objem plynu zostáva konštantný; $dV = 0$

$$dA' = 0; \quad dQ = dW; \quad Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 dW = W_2 - W_1$$

Plyn prijíma (odovzdáva) energiu iba prostredníctvom tepla.

2. *Izotermická zmena*

Teplota plynu sa nemení: $dT = 0$

$$dW = nC_V \, dT = 0; \quad dQ = dA'$$

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 dA' = A'$$

Plyn dostáva energiu jedným spôsobom, napr. prostredníctvom tepla (práce), ale súčasne odovzdáva okoliu rovnaké množstvo energie iným spôsobom, prostredníctvom práce (tepla). Stručne sa vyjadrujeme: *všetko teplo (práca) sústave zvonku dodané sa premení na mechanickú prácu (teplo).*

3. *Adiabatická zmena*

Prebieha pri dokonalej tepelnej izolácii sústavy; $dQ = 0$

$$dA' = -dW; \quad A' = \int_1^2 dA = -\int_1^2 dW = W_1 - W_2$$

Plyn nedostáva energiu prostredníctvom tepla, iba prostredníctvom práce. Analogicky okoliu plyn odvádza energiu iba prostredníctvom práce (nie tepla). Plynom vykonaná práca sa rovná úbytku jeho vnútornej energie.

Vzťah medzi tlakom a objemom plynu vyjadruje *Poissonova rovnica*

$$pV^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa} = \text{konšt}$$

kde

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V}$$

p_0 je tlak a V_0 objem plynu napríklad v začiatočnom stave.

h) *Carnotov vratný kruhový dej* prebieha v cykle štyroch za sebou nasledujúcich vratných dejov, z ktorých sú dva izotermické (1. a 3.), prebiehajúce pri teplotách T_1 a T_2 a dva adiabatické (2. a 4.). Pracovnou látkou je jeden mól ideálneho plynu.

V priebehu jedného cyklu plyn odoberie zo zásobníka tepla teploty T_1 teplo Q_1, chladiču teploty T_2 odovzdá teplo Q_2' a vykoná prácu

$$A' = Q_1 - Q_2'$$

Podiel plynom vykonanej práce A' a pri vyššej teplote T_1 prijatého tepla Q_1 je *účinnosť deja* η:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Keď Carnotov kruhový dej prebieha v opačnom smere, plyn pri nižšej teplote T_2 prijíma od chladiča teplo Q_2, zvonka naberie určité množstvo mechanickej práce A a zásobníku tepla odovzdá teplo prijaté, zväčšené o teplo, na ktoré sa premení zvonka prijatá mechanická práca. Jeho účinnosť je potom

$$\eta = \frac{A}{A + Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Takto by pracoval *chladiaci stroj*.

i) *Entropia* je stavová veličina zavedená takto:

Keď pri elementárnej zmene svojho stavu sústava látok pri teplote T vratným spôsobom naberie množstvo tepla dQ, zmení sa jej entropia o hodnotu

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

Celková zmena entropie plynu pri jeho prevedení zo začiatočného stavu (1) do konečného stavu (2) je:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

Týmto vzťahom je určená len zmena entropie, nie jej hódnota.

Zmena entropie ideálneho plynu pri prechode zo stavu, v ktorom sa vyznačoval stavovými veličinami p_0, V_0, T_0, do stavu, v ktorom majú tieto veličiny hodnoty p, V, T, je daná vzťahom

$$\Delta S = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = nR_m \ln \frac{V}{V_0} + nC_V \ln \frac{T}{T_0}$$

Pri vratných adiabatických dejoch sa entropia sústavy látok nemení. Pri všetkých nevratných dejoch, ktoré prebiehajú v sústavách tepelne izolovaných od vonkajšieho okolia, sa ich entropia zväčšuje.

j) Okrem veličín p, V, T, W a S, ktoré sú funkciami stavu sústavy, sa v termodynamike používajú ešte ďalšie stavové veličiny, napr.:

1. *entalpia* H, definovaná vzťahom

$$H = W + pV$$

2. *voľná energia* F, definovaná vzťahom

$$F = W - TS$$

Z definície tejto veličiny vyplýva, že práca vykonaná sústavou látok pri izotermickej vratnej zmene jej stavu sa rovná úbytku jej voľnej energie:

$$-(\mathrm{d}F)_T = \mathrm{d}A'$$

3. *Termodynamická potenciálna energia* G je definovaná vzťahom

$$G = W - TS + pV = H - TS$$

Diferenciál termodynamickej potenciálnej energie pri vratných zmenách stavu sústavy, keď sústava môže konať iba objemovú prácu, je:

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

k) *Gibbsovo fázové pravidlo* určuje počet stupňov voľnosti v sústavy pomocou počtu fáz f a zložiek k, z ktorých sa sústava skladá, vzťahom

$$v = k + 2 - f$$

Pod počtom stupňov voľnosti rozumieme počet stavových veličín (napr. tlaku, teploty atď.), ktoré možno aspoň v určitom rozsahu meniť bez toho, aby sa zmenšil počet fáz sústavy.

Príklady

372. Oceľová guľka padá z výšky $h = 20$ m so začiatočnou rýchlosťou $v_0 = 4\ \mathrm{m.s^{-1}}$ a po dopade sa odrazí do výšky $h_0 = 4$ m. O koľko stupňov sa pritom ohreje, keď predpokladáme, že len 60 % práce, vykonanej pri deformovaní guľky pri náraze, prispieva k zvýšeniu vnútornej energie guľky?

Riešenie:

Podľa zákona o zachovaní energie celková energia, ktorú mala guľka pri vypustení

$$W = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2$$

musí ostať zachovaná. Vzhľadom na to, že po odraze vystúpi guľka len do výšky $h_0 < h$, časť energie sa odvádza do okolia prostredníctvom deformačnej práce a zvyšuje vnútornú energiu guľky i okolia.

Pre deformačnú prácu možno — v zhode so zákonom zachovania energie — písať

$$A = mgh + \frac{1}{2}\, mv_0^2 - mgh_0 \qquad (1)$$

Časť tejto práce ($A' = 0{,}6A$) prispieva k zvýšeniu vnútornej energie samotnej guľky, čo sa prejaví zvýšením jej teploty. Rovnako by sa teplota zrejme zvýšila, keby guľka prijala zvonku energiu prostredníctvom tepla

$$Q = mc\,\Delta t$$

kde Δt je zvýšenie teploty guľky.

S ohľadom na rovnocennosť práce A' a tepla Q možno písať

$$A' = 0{,}6A = Q = mc\,\Delta t$$

a s prihliadnutím na rovnicu (1) platí

$$mc\,\Delta t = 0{,}6\left(mgh + \frac{1}{2}\, mv_0^2 - mgh_0\right)$$

odkiaľ po úprave dostaneme

$$\Delta t = 0{,}6\,\frac{2g(h - h_0) + v_0^2}{2c}$$

t. j.

$$\Delta t = 0{,}6\,\frac{2\,.\,9{,}81\ \mathrm{m\,.\,s^{-2}}\,.\,16\ \mathrm{m} + 16\ \mathrm{m^2\,.\,s^{-2}}}{2\,.\,4{,}186\,.\,10^2\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}} = 0{,}23\ {}^\circ\mathrm{C}$$

373. Akou rýchlosťou musí letieť olovená guľka, aby sa pri náraze na nepružnú stenu roztopila? Pôvodná teplota guľky bola $t_1 = 27\ {}^\circ\mathrm{C}$, bod topenia olova $t_2 = 327\ {}^\circ\mathrm{C}$. Predpokladáme, že pri náraze sa mení kinetická energia guľky úplne na jej vnútornú energiu.

Riešenie:

Pri náraze na nepružnú stenu sa guľka zastaví; jej kinetická energia sa prostredníctvom deformačnej práce

$$A = \frac{1}{2}\, mv^2 \qquad (1)$$

celá odovzdá guľke a zväčší jej vnútornú energiu. Guľkou prijatá energia postačí na to, aby sa zohriala na bod topenia a úplne roztopila.

Toto zohriatie a roztopenie by nastalo, aj keby guľka zvonku prijala energiu prostredníctvom tepla Q. Na ohriatie guľky z teploty t_1 na t_2 a na jej roztopenie pri teplote t_2 je potrebné teplo

$$Q = mc(t_2 - t_1) + ml \qquad (2)$$

kde c je špecifická tepelná kapacita a l špecifické skupenské teplo topenia olova. Vzhľadom na rovnocennosť tepla Q a práce A možno tiež písať

$$A = Q$$

a s prihliadnutím na rovnicu (1) a (2) dostávame

$$mc(t_2 - t_1) + ml = \frac{1}{2} mv^2$$

$$v^2 = 2c(t_2 - t_1) + 2l$$

t. j.

$$v = \sqrt{2 \,.\, 129 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.300 \text{ K} + 2 \,.\, 20{,}9 \,.\, 10^3 \text{ J.kg}^{-1}} = 345 \text{ m.s}^{-1}$$

374. Pracovný stroj, konajúci $f = 1200$ otáčok za minútu, má brzdu chladenú vodou. Moment trecích síl je $M = 4905$ Nm. Brzde sa privádza za hodinu $m = 8$ m^3 vody teploty $t = 10$ °C. Vypočítajte, akú teplotu bude mať odtekajúca voda, keď predpokladáme, že iba 75 % práce síl trenia prispieva k zvýšeniu vnútornej energie chladiacej vody?

Riešenie:

Trecie sily, ktorých moment M je stály, vykonajú pri otočení telesa o uhol φ prácu

$$A = M\varphi \qquad (1)$$

Touto prácou sa zväčšuje vnútorná energia vody aj okolia. Časť tejto práce ($A_0 = 0{,}75A$) zväčšuje vnútornú energiu vody, ktorá sa privádza brzdiacemu zariadeniu, čo sa prejaví zvýšením jej teploty o Δt. Rovnako by sa zvýšila teplota, keby sme chladiacej vode zvonku priviedli energiu prostredníctvom tepla Q. Na ohriatie vody hmotnosti m o teplotu Δt je potrebné teplo

$$Q = mc\,\Delta t \qquad (2)$$

Vzhľadom na rovnocennosť práce A_0 a tepla Q je splnená rovnica

$$A_0 = Q \qquad (3)$$

a porovnaním rovníc (1), (2) a (3) dostávame

$$mc\,\Delta t = 0{,}75 M\varphi \qquad (4)$$

Stroj sa otáča stálou uholnou rýchlosťou $\omega = 2\pi f$ a za čas t sa otočí o uhol $\varphi = 2\pi f t$. Keď do rovnice (4) za φ dosadíme, dostaneme pre zvýšenie teploty

$$\Delta t = \frac{2\pi M f t}{mc} 0{,}75$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$\Delta t = 0{,}75 \frac{2\pi \,.\, 500 \,.\, 9{,}81 \text{ N.m} \dfrac{1200}{60} \text{s}^{-1} \,.\, 3600 \text{ s}}{8 \,.\, 10^3 \text{ kg} \,.\, 4186 \text{ J.kg}^{-1} \,.\, \text{K}^{-1}} = 49{,}7 \text{ K}$$

Pretože začiatočná teplota vody bola 10 °C, teplota odtekajúcej vody bude 59,7 °C.

375. Sústava látok prijala od svojho okolia $Q = 4186$ J tepla a súčasne vykonala vonkajšiu prácu $A' = 1680$ J. Určite, ako sa pri tomto deji zmenila vnútorná energia sústavy!

Riešenie:

Podľa prvej vety termodynamickej prostredníctvom tepla zvonku privedená energia sústave sa spotrebuje jednak na zmenu vnútornej energie sústavy ΔW a jednak sa odovzdáva okoliu prostredníctvom práce A'

$$Q = \Delta W + A'$$

Pre hľadanú zmenu vnútornej energie platí

$$\Delta W = Q - A'$$

t. j.

$$\Delta W = 4186 \text{ J} - 1680 \text{ J} = 2506 \text{ J}$$

376. Určite, aká je špecifická tepelná kapacita zmesi troch plynov zloženia $m_1 = 3$ g CO, $m_2 = 6{,}1$ g N_2 a $m_3 = 2{,}2$ g O_2, keď špecifické tepelné kapacity c_{V_i} jednotlivých zložiek sú známe.

Riešenie:

Teplo potrebné na ohriatie zmesi plynov sa rovná súčtu tepiel potrebných na ohriatie jednotlivých jej zložiek. Ak zmesi dodáme teplo pri zachovaní stáleho objemu (tlaku) zmesi a ak máme na mysli vzťah, pomocou ktorého je špecifická tepelná kapacita definovaná, t. j. vzťah

$$c_V = \frac{(\mathrm{d}Q)_V}{m \,\mathrm{d}T}; \quad \text{resp.} \quad c_p = \frac{(\mathrm{d}Q)_p}{m \,\mathrm{d}T}$$

možno pre zmes troch plynov písať:

$$m c_V \, \mathrm{d}T = m_1 c_{V_1} \, \mathrm{d}T + m_2 c_{V_2} \, \mathrm{d}t + m_3 c_{V_3} \, \mathrm{d}T$$

$$m c_p \, \mathrm{d}T = m_1 c_{p_1} \, \mathrm{d}T + m_2 c_{p_2} \, \mathrm{d}T + m_3 c_{p_3} \, \mathrm{d}T$$

odtiaľ

$$c_V = \frac{m_1 c_{V_1} + m_2 c_{V_2} + m_3 c_{V_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$c_p = \frac{m_1 c_{p_1} + m_2 c_{p_2} + m_3 c_{p_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Po dosadení

$$c_V = \frac{(3.745 + 6{,}1.741 + 2{,}2.648).10^{-3}\ \mathrm{kg.J.kg^{-1}.K^{-1}}}{(3 + 6{,}1 + 2{,}2).10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 720\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

Špecifické tepelné kapacity c_{p_i} určíme pomocou Mayerovej rovnice. Ak C_p a C_V sú tepelné kapacity jedného mólu plynu, podľa Mayerovej rovnice

$$C_p - C_V = R_m$$

Pretože vzťah medzi tepelnou kapacitou jedného mólu plynu a špecifickou tepelnou kapacitou možno vyjadriť vzťahom

$$C_m = M_m c$$

kde M_m je mólová hmotnosť, vidíme, že

$$c_p - c_V = \frac{R_m}{M_m}$$

Po dosadení

$$c_{p_1} = 745\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{28.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}} = 1042\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$c_{p_2} = 741\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{28.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}} = 1038\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

$$c_{p_3} = 648\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{32.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}} = 908\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

a pre zmes plynov bude platiť

$$c_p = \frac{(3.1042 + 6{,}1.1038 + 2{,}2.408).10^{-3}\ \mathrm{J.K^{-1}}}{(3 + 6{,}1 + 2{,}2).10^{-3}\ \mathrm{kg}} =$$

$$= 1014\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

377. Nádoby, ktorých objemy sú V_1 a V_2, obsahujú dva plyny s tlakmi p_1, p_2 a teplotami T_1, T_2. Spojené sú trubicou s kohútikom. Keď kohútik otvoríme, plyny sa premiešajú a ich výsledná teplota a tlak sa ustália na hodnotách T a p. Určite tieto hodnoty za predpokladu, že obidva plyny sú ideálne, majú rovnakú Poissonovu konštantu a že nedochádza k odvodu tepla do okolia!

Riešenie:

Predpokladajme, že $T_2 > T_1$. Pri premiešaní si plyny vymieňajú časť svojej vnútornej energie dovtedy, kým sa ich teploty (a vnútorné energie) nevyrovnajú. Keď príslušné špecifické tepelné kapacity sú c_{V_1}, c_{V_2} a hmotnosti plynov m_1, m_2, prvý plyn zníži svoju vnútornú energiu o $\Delta W_1 = m\, c_{V_1}(T - T_1)$ a druhý ju zvýši o $\Delta W_2 = m_2 c_{V_2}(T_2 - T)$.

Za predpokladu dobrej tepelnej izolácie

$$\Delta W_1 = \Delta W_2$$

čiže

$$m_1 c_{V_1}(T - T_1) = m_2 c_{V_2}(T_2 - T)$$

odkiaľ po krátkej úprave dostávame

$$T = \frac{m_2 c_{V_2} T_2 + m_1 c_{V_1} T_1}{m_2 c_{V_2} + m_1 c_{V_1}} \qquad (1)$$

Poissonova konštanta plynov je rovnaká, teda platí

$$\varkappa = \frac{c_{p1}}{c_{V_1}} = \frac{c_{p2}}{c_{V_2}}$$

a po použití Mayerovej rovnice

$$\frac{c_{V_1} + \dfrac{R_m}{M_1}}{c_{V_1}} = \frac{c_{V_2} + \dfrac{R_m}{M_2}}{c_{V_2}}$$

pričom M_1, M_2 sú mólové hmotnosti uvažovaných plynov. Po úprave dostávame

$$c_{V_1} = \frac{M_2}{M_1} c_{V_2}$$

Po dosadení do rovnice (1) a po úprave dostávame pre teplotu T vzťah

$$T=\frac{\frac{m_2}{M_2}T_2+\frac{m_1}{M_1}+T_1}{\frac{m_2}{M_2}+\frac{m_1}{M_1}}$$

Vzhľadom na platnosť stavovej rovnice sú splnené vzťahy

$$p_1V_1=\frac{m_1}{M_1}R_mT_1;\quad p_2V_2=\frac{m_2}{M_2}R_mT_2 \tag{2}$$

a ich použitím dostávame pre hľadanú teplotu plynov po premiešaní

$$T=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}} \tag{3}$$

Podľa Daltonovho zákona sa bude výsledný tlak plynnej zmesi rovnať súčtu parciálnych tlakov p_1 a p_2 plynov tvoriacich zmes. Pre tieto platí

$$p_1(V_1+V_2)=\frac{m_1}{M_1}R_mT;\quad p_2(V_1+V_2)=\frac{m_2}{M_2}R_mT$$

$$p=p_1+p_2=\frac{R_mT}{V_1+V_2}\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right)$$

Ak do posledného vzťahu dosadíme vzťah pre výslednú teplotu (3), dostávame

$$p=\frac{1}{V_1+V_2}\left(\frac{m_1}{M_1}R_m+\frac{m_2}{M_2}R_m\right)\frac{p_1V_1+p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}}$$

a vzhľadom na vzťahy (2)

$$p=\frac{1}{V_1+V_2}\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{p_1V_1+p_2V_2}{\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_1}}$$

odkiaľ dostávame pre hľadaný výsledný tlak

$$p=\frac{p_1V_1+p_2V_2}{V_1+V_2}$$

378. Vo valci s pohyblivým piestom je $m=36$ g vodíka teploty $t_1=27$ °C pod tlakom $p_1=0{,}4$ MPa. Na jeho stlačenie na tretinu pôvodného objemu bolo treba vynaložiť prácu $A=1{,}5\,.\,10^5$ J a súčasne sa mu chladením odňalo $Q'=5{,}95\,.\,10^4$ J tepla. Vypočítajte teplotu a tlak vodíka po stlačení!

Riešenie:

Podľa prvej vety termodynamickej

$$dW = dQ + dA$$

kde

$$dW = nC_V\, dT = mc_V\, dT$$

Pri konečnej zmene stavu bude

$$\int_{T_1}^{T_2} mc_V\, dT = \int_1^2 dQ + \int_1^2 dA$$

t. j.

$$mc_V(T_2 - T_1) = Q + A$$

odkiaľ

$$T_2 = T_1 + \frac{Q + A}{mc_V}$$

Vzhľadom na to, že sústavou prijaté teplo Q je záporné a sústava vydáva navonok kladné teplo $Q' = -Q$, platí

$$T_2 = T_1 + \frac{A - Q'}{mc_V}$$

Po dosadení bude:

$$T_2 = 300\ \mathrm{K} + \frac{1{,}5\,.\,10^5\ \mathrm{J} - 0{,}595\,.\,10^5\ \mathrm{J}}{36\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg}\,.\,10\,130\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}} = 548\ \mathrm{K}$$

t. j.

$$t_2 = 275\ °\mathrm{C}$$

Pre tlak p_2 zo stavovej rovnice vyplýva vzťah

$$p_2 = \frac{mR_m T_2}{M_m V_2} = \frac{3mR_m T_2}{M_m V_1}$$

a pretože

$$V_1 = \frac{mR_m T_1}{p_1 M_m}$$

vychádza

$$p_2 = 3p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

t. j.

$$p_2 = 3 \,.\, 0{,}4\ \mathrm{MPa}\left(\frac{548\ \mathrm{K}}{300\ \mathrm{K}}\right) = 2{,}2\ \mathrm{MPa}$$

379. Plyn, ktorý pri tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa a teplote $t_0 = 20$ °C zaberal objem $V_0 = 830$ litrov, sme stlačili. Na stlačenie sme vynaložili prácu $A = 166\,770$ J. Vypočítajte, aký bude konečný objem, tlak a teplota po stlačení, keď pri uvedenej stavovej zmene sa plyn správal podľa zákona $pV^n = \text{konšt}$, kde $n = 1{,}25$!

Riešenie:

Plyn pri zmene svojho objemu z V_0 na V_1 vykoná prácu

$$A' = \int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V$$

V našom prípade sa plyn stláča, práca A', ktorú plyn vykonal, je záporná, na stlačenie plynu bola dodaná zvonku kladná práca $A = -A'$. Preto

$$A = -\int_{V_0}^{V_1} p\,\mathrm{d}V \qquad (1)$$

Integrál na pravej strane možno vypočítať, keď z rovnice $pV^n = p_0 V_0^n = \text{konšt}$ vyjadríme tlak p a dosadíme do rovnice (1). Tak dostávame:

$$A = -\int_{V_0}^{V_1} p_0 \frac{V_0^n}{V^n}\,\mathrm{d}V = -p_0 V_0^n \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^n}\,\mathrm{d}V = \frac{p_0 V_0^n}{n-1} \cdot (V_1^{1-n} - V_0^{1-n})$$

odkiaľ pre objem plynu po stavovej zmene vyplýva:

$$V_1^{1-n} = \frac{(n-1)A + p_0 V_0}{p_0 V_0^n}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude

$$V_1^{-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}\,166\,770\ \mathrm{J} + 1{,}013 \,.\, 10^5\ \mathrm{N \,.\, m^{-3}} \,.\, 0{,}83\ \mathrm{m^3}}{1{,}013 \,.\, 10^5\ \mathrm{N \,.\, m^{-2}} (0{,}83\ \mathrm{m^3})^{\frac{5}{4}}}$$

z čoho

$$V_1 = 0{,}166\ \mathrm{m^3}$$

Konečný tlak p_1 určíme z rovnice

$$p_1 V_1^n = p_0 V_0^n$$

odkiaľ

$$p_1 = p_0\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^n = 0{,}1\ \text{MPa}\left(\frac{0{,}83\ \text{m}^3}{0{,}166\ \text{m}^3}\right)^{\frac{5}{4}} = 0{,}75\ \text{MPa}$$

Pre výpočet konečnej teploty použijeme rovnicu

$$p_0 V_0^n = p_1 V_1^n$$

do ktorej zo stavovej rovnice

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

dosadíme

$$V_1 = \frac{p_0 V_0}{p_1}\frac{T_1}{T_0}$$

takže po úprave dostaneme

$$p_0^{1-n} T_0^n = p_1^{1-n} T_1^n$$

odkiaľ

$$T_1 = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-n}{n}} T_0$$

Po dosadení číselných hodnôt sa bude

$$T_1 = \left(\frac{0{,}1\ \text{MPa}}{0{,}75\ \text{MPa}}\right)^{-\frac{1}{5}} 293\ \text{K} = 438{,}3\ \text{K}$$

t. j.

$$t_1 = 165\ °\text{C}$$

380. Hélium objemu $V_0 = 3$ litre zväčšilo pri stálom tlaku $p_0 = 0{,}2$ MPa svoj objem na dvojnásobný. Vypočítajte, koľko tepla na to bolo treba! Poissonova konštanta pre hélium $\varkappa = 1{,}67$.

Riešenie:

Podľa prvej vety termodynamickej

$$\mathrm{d}Q = \frac{m}{M_m} C_V\, \mathrm{d}T + p\, \mathrm{d}V$$

Pre konečnú stavovú zmenu, pri ktorej tlak ostáva stály ($p = p_0$) a objem sa zväčší na dvojnásobný ($V_1 = 2V_0$), po integrácii dostaneme:

$$Q = \frac{m}{M_m} C_V (T_1 - T_0) + p_0 V_0 \tag{1}$$

Ale podľa stavovej rovnice

$$\frac{m}{M_m} T_1 - \frac{m}{M_m} T_0 = \frac{p_0 2 V_0}{R_m} - \frac{p_0 V_0}{R_m} = \frac{p_0 V_0}{R_m}$$

čo po dosadení do vzťahu (1) dáva:

$$Q = \frac{C_V}{R_m} p_0 V_0 + p_0 V_0 = \frac{C_V + R_m}{R_m} p_0 V_0$$

Použitím Mayerovej rovnice možno ďalej písať:

$$Q = \frac{C_p}{R_m} p_0 V_0$$

Keďže $\dfrac{C_p}{C_V} = \varkappa$ a $C_p - C_V = R_m$, bude:

$$C_p = \varkappa C_v = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R_m$$

takže

$$Q = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_0 V_0$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$Q = \frac{1,67}{0,67} 2 . 10^5 \text{ N} . \text{m}^{-2} . 3 . 10^{-3} \text{ m}^3 = 1496 \text{ J}$$

381. Vypočítajte, koľko tepla sa musí chladením odňať pri izotermickom stlačení $m = 45$ g kysličníka uhličitého teploty $t_1 = -15$ °C z tlaku $p_1 = 0,23$ MPa na tlak $p_2 = 0,58$ MPa!

Riešenie:

Pri izotermickom deji sa vnútorná energia ideálneho plynu nemení. Pri zmene svojho objemu z V_1 na V_2 vykoná plyn vonkajšiu prácu A' premenou prijímaného tepla Q

$$A' = Q = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

Tento výraz možno integrovať, keď za tlak dosadíme zo stavovej rovnice výraz

$$p = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m T}{V}$$

Potom

$$A' = Q = \frac{m}{M_m} R_m T \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{m}{M_m} R_m T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pri izotermickej zmene platí podľa Boylovho—Mariottovho zákona vzťah

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

a preto

$$A' = \frac{m}{M_m} R_m T \ln \frac{p_1}{p_2} = Q$$

Pretože $p_1 < p_2$, je táto práca (i prijaté teplo) záporná. Na izotermickú kompresiu treba zvonka dodať kladnú prácu $A = -A'$, ktorá sa úplne premení na teplo Q', ktoré plyn vydá a ktoré sa chladením plynu odoberie. Platí preň:

$$Q' = A = -\frac{m}{M_m} R_m T \ln \frac{p_1}{p_2}$$

teda

$$Q' = \frac{45 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{44 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{kg \,.\, mol^{-1}}}\ 8{,}314\ \mathrm{J \,.\, K^{-1} \,.\, mol^{-1}} \,.\, 258\ \mathrm{K} \,.\, 2{,}3 \log \frac{0{,}58\ \mathrm{MPa}}{0{,}23\ \mathrm{MPa}} =$$

$$= 2027\ \mathrm{J}$$

382. Kompresor nasáva $V_0 = 150\ \mathrm{m^3}$ atmosferického vzduchu za hodinu a stláča ho na tlak $p_1 = 1{,}1$ MPa. Ochladzuje sa tečúcou vodou, takže stláčanie možno považovať za izotermický dej. Vypočítajte, koľko vody pretieklo chladiacim zariadením za hodinu, keď sa v ňom voda ohriala z teploty $t_0 = 10\ °\mathrm{C}$ na $t_1 = 18\ °\mathrm{C}$! Vonkajší tlak vzduchu $p_0 = 0{,}1$ MPa.

Riešenie:

Voda pretekajúca chladiacim zariadením prijme za každú hodinu teplo Q', a tým sa ohreje o teplotu Δt, pričom je zrejme splnený vzťah

$$Q' = mc\ \Delta t$$

takže

$$m = \frac{Q'}{c\ \Delta t} \qquad (1)$$

Tento termodynamický dej je izotermický, to znamená, že sa pri ňom vnútorná energia plynu nemení a celá zvonka dodaná práca A sa mení na teplo Q', ktoré sa odovzdáva chladiacej vode.

Podľa prvej vety termodynamickej platí:

$$A = -\int_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V = Q'$$

Keď za tlak p dosadíme z Boylovho—Mariottovho zákona výraz

$$p = \frac{p_0 V_0}{V} \tag{2}$$

dostaneme

$$Q' = \int_{V_1}^{V_0} \frac{p_0 V_0}{V} \, \mathrm{d}V = p_0 V_0 \ln \frac{V_0}{V_1}$$

Pretože podľa rovnice (2) $\frac{V_0}{V_1} = \frac{p_1}{p_0}$, platí:

$$Q' = p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame pre hľadané množstvo vody vzťah

$$m = \frac{p_0 V_0 \ln \frac{p_1}{p_0}}{c \, \Delta t}$$

t. j.

$$m = \frac{10^5 \,\mathrm{N \cdot m^{-2}} \cdot 150 \,\mathrm{m^3} \cdot 2{,}3 \log \frac{11}{1}}{4186 \,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}} \cdot 8 \,\mathrm{K}} = 1073 \,\mathrm{kg}$$

383. Vo valci s kruhovou základňou výšky $l_1 = 50$ cm je vzduch teploty $t_1 = 20$ °C a tlaku $p_1 = 0{,}1$ MPa. Ako sa zmení tlak i teplota vzduchu, keď sa pri adiabatickom stlačení piest posunie o vzdialenosť $l_2 = 20$ cm? Poissonova konštanta pre vzduch $\varkappa = 1{,}4$.

Riešenie:

Tlak vzduchu po adiabatickej kompresii určíme podľa Poissonovej rovnice

$$p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

odkiaľ

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\varkappa} \tag{1}$$

Pred kompresiou vzduchu zaberal objem $V_1 = \pi \frac{d^2}{4} l_1$, po kompresii sa objem zmenšil na $V_2 = \pi \frac{d^2}{4} (l_1 - l_2)$. Po dosadení do rovnice (1) dostávame pre hľadaný tlak vzťah

$$p_2 = p_1 \left(\frac{l_1}{l_1 - l_2}\right)^{\varkappa}$$

t. j.

$$p_2 = 0{,}1 \text{ MPa} \left(\frac{0{,}5}{0{,}3}\right)^{1{,}4} \doteq 0{,}2 \text{ MPa}$$

Závislosť teploty plynu od objemu pri adiabatickej zmene dostaneme z rovnice (1), v ktorej tlak p_2 nahradíme výrazom $p_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{V_2}$ podľa stavovej rovnice.

Po krátkej úprave dostaneme:

$$T_1 V_1^{\varkappa - 1} = T_2 V_2^{\varkappa - 1}$$

odkiaľ

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}$$

t. j.

$$T_2 = 293 \text{ K} \left(\frac{5}{3}\right)^{0{,}4} = 359{,}5 \text{ K}$$

čiže

$$t_2 = 86{,}5 \text{ °C}$$

384. Z balóna, v ktorom je kyslík s tlakom $p_1 = 0{,}15$ MPa, náhle vypustíme isté množstvo plynu, a tým jeho tlak poklesne na $p_2 = 0{,}1$ MPa. Tento dej možno považovať za adiabatický. Po uzavretí balóna plyn zvonka prijíma teplo, až dosiahne teplotu, ktorú mal na začiatku. Vypočítajte, koľko percent z celkového množstva plynu sme vypustili a na akej hodnote sa ustálil tlak plynu po ukončení deja!

Riešenie:

V začiatočnom stave podľa stavovej rovnice platí:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M_m} R_m T_1 \tag{1}$$

Keď z balóna vypustíme Δm kyslíka, zmení sa jeho tlak na p_2, teplota na T_2 a vzťah medzi novými stavovými veličinami udáva opäť stavová rovnica

$$p_2 V_1 = \frac{m - \Delta m}{M_m} R_m T_2 \tag{2}$$

Keď rovnicu (1) vydelíme rovnicou (2), dostaneme:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \frac{T_1}{T_2} \tag{3}$$

Keďže ide o adiabatický dej, vzťah medzi tlakom a teplotou vyjadríme pomocou Poissonovej rovnice

$$p_1 V_1^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

do ktorej za V_2 dosadíme zo stavovej rovnice $V_2 = \frac{p_1 V_1}{T_1} \frac{T_2}{p_2}$. Po úprave dostaneme:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \tag{4}$$

Keď tento vzťah dosadíme do rovnice (3), máme:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{m - \Delta m} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

odkiaľ

$$\frac{m - \Delta m}{m} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

a pre množstvo vypusteného plynu v percentách vyplýva:

$$100 \frac{\Delta m}{m} = 100 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}\right]$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$100 \frac{\Delta m}{m} = 100 \left[1 - \left(\frac{0{,}1}{0{,}15}\right)^{\frac{1}{1{,}4}}\right] = 25\ \%$$

Po ukončení celého deja plyn dosiahne opäť začiatočnú teplotu T_1 a nový tlak p_3.

Podľa stavovej rovnice

$$\frac{p_3 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{T_2}$$

odkiaľ

$$p_3 = p_2 \frac{T_1}{T_2}$$

a po dosadení za $\dfrac{T_1}{T_2}$ z rovnice (4) dostávame:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = 0{,}1 \text{ MPa} \left(\frac{0{,}15 \text{ MPa}}{0{,}1 \text{ MPa}}\right)^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} = 0{,}112 \text{ MPa}$$

385. Určitý objem dusíka teploty $t_0 = 27\ °\text{C}$ a tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa sme a) izotermicky, b) adiabaticky zväčšili na dvojnásobný. Vypočítajte, ako sa pritom zmenila stredná rýchlosť molekúl a počet molekúl plynu v jednotkovom objeme!

Riešenie:

a) Po izotermickej zmene teplota ostala stála, a preto sa nemení ani stredná rýchlosť molekúl:

$$v_s = \sqrt{\frac{3R_m T}{M_m}} = \sqrt{\frac{3\,.\,8{,}314\ \text{J}\,.\,\text{K}^{-1}\,.\,\text{mol}^{-1}\,.\,300\ \text{K}}{28\,.\,10^{-3}\ \text{kg}\,.\,\text{mol}^{-1}}} = 516{,}4\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$$

Počet molekúl v jednotkovom objeme sa zmenil z N_0 na N_1. Pre ich podiel dostaneme:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{\dfrac{p_1}{kT_0}}{\dfrac{p_0}{kT_0}} = \frac{p_1}{p_0}$$

Podľa Boylovho—Mariottovho zákona platí $p_0 V_0 = p_1 V_1$ a $\dfrac{N_1}{N_0} = \dfrac{V_0}{V_1}$, takže

$$N_1 = \frac{1}{2} N_0 = \frac{p_0 N_A}{2R_m T_0} = \frac{10^5\ \text{N}\,.\,\text{m}^{-2}\,.\,6{,}03\,.\,10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{2\,.\,8{,}314\ \text{J}\,.\,\text{K}^{-1}\,.\,\text{mol}^{-1}\,.\,300\ \text{K}} = 1{,}21\,.\,10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

V začiatočnom stave sa $N_0 = 2N_1 = 2{,}42\,.\,10^{25}\ \text{m}^{-3}$.

b) Po adiabatickej zmene, pri zmene objemu z V_0 na V_2, sa teplota zmení na T_2. Možno ju určiť pomocou Poissonovej rovnice (pozri príklad 383) zo vzťahu

$$T_0 V_0^{\varkappa - 1} = T_2 V_2^{\varkappa - 1} \tag{1}$$

Pretože pre dusík $\varkappa = 1{,}4$, možno písať:

$$T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = 300\ \text{K} \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}4} = 117{,}3\ \text{K}$$

Pre strednú kvadratickú rýchlosť po adiabatickej zmene potom dostaneme:

$$v_s' = \sqrt{\frac{3R_m T_2}{M_m}} = \sqrt{\frac{3\,.\,8{,}314\,.\,227{,}3}{28\,.\,10^{-3}}}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}} = 449{,}5\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Na určenie počtu molekúl v jednotkovom objeme po adiabatickej zmene treba poznať konečný tlak p_2. Zistíme ho z Poissonovej rovnice:

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

odkiaľ

$$p_2 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

a

$$N_2 = \frac{p_2}{kT_2} = \frac{p_0}{kT_2}\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\varkappa}$$

Keď sem dosadíme T_2 z rovnice (1), po úprave dostaneme:

$$N_2 = \frac{p_0}{kT_0}\,\frac{V_0}{V_2} = \frac{1}{2}\,N_0$$

Jednotkový objem bude obsahovať rovnaký počet molekúl po vykonaní izotermickej i adiabatickej zmeny, ako je to zrejmé aj zo skutočnosti, že plyn zväčšil v oboch prípadoch svoj objem na dvojnásobný.

386. V balóne je zmes dvoch plynov, ktoré na seba nepôsobia. Odvoďte vzťah pre závislosť tlaku od objemu tejto zmesi pre prípad adiabatickej stavovej zmeny!

Riešenie:

Podľa Daltonovho zákona v zmesi plynov, ktoré na seba chemicky nepôsobia, každý plyn sa správa tak, ako keby sám vypĺňal celý objem V. Keď n_1 a n_2 je počet mólov jednotlivých zložiek plynu v zmesi, C_{V_1}, C_{V_2} sú príslušné tepelné kapacity uvažované vzhľadom na jeden mól a p_1, p_2 sú parciálne tlaky, pri elementárnej zmene stavu plynnej zmesi sa zmení vnútorná energia zmesi o

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_1 + \mathrm{d}W_2 = n_1 C_{V_1}\,\mathrm{d}T + n_2 C_{V_2}\,\mathrm{d}T$$

a vykoná sa práca

$$\mathrm{d}A' = \mathrm{d}A_1' + \mathrm{d}A_2' = p_1\,\mathrm{d}V + p_2\,\mathrm{d}V$$

Podľa prvej vety termodynamickej pre adiabatickú zmenu ($\mathrm{d}Q = 0$) platí:

$$n_1 C_{V_1}\,\mathrm{d}T + n_2 C_{V_2}\,\mathrm{d}T + p_1\,\mathrm{d}V + p_2\,\mathrm{d}V = 0$$

Keď za p_1 a p_2 dosadíme zo stavovej rovnice výrazy

$$p_1 = \frac{n_1 R_m T}{V}; \quad p_2 = \frac{n_2 R_m T}{V}$$

dostaneme vzťah

$$n_1 C_{V_1}\, dT + n_2 C_{V_2}\, dT + n_1 R_m T \frac{dV}{V} + n_2 R_m T \frac{dV}{V} = 0$$

Po malej úprave vyjde:

$$\frac{dT}{T} + \frac{n_1 R_m + n_2 R_m}{n_1 C_{V_1} + n_2 C_{V_2}} \frac{dV}{V} = 0$$

a po integrácii dostaneme hľadanú závislosť teploty od objemu:

$$T \,.\, V^{\frac{n_1 R_m + n_2 R_m}{n_1 C_{V_1} + n_2 C_{V_2}}} = k \tag{2}$$

Aby sme našli závislosť $p(V)$, za T dosadíme výraz vyplývajúci zo stavovej rovnice:

$$pV = nR_m T$$

kde $p = p_1 + p_2$, $n = n_1 + n_2$. Dostaneme:

$$p \,.\, V^{\frac{n_1 R_m + n_2 R_m}{n_1 C_{V_1} + n_2 C_{V_2}}} = k \,.\, nR = \text{konšt}$$

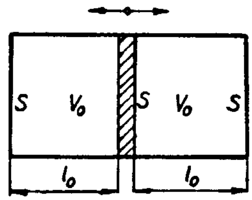
odkiaľ po úprave použitím Mayerovej rovnice $C_p = C_V + R_m$ máme hľadanú závislosť:

$$p \,.\, V^{\frac{n_1 C_{p_1} + n_2 C_{p_2}}{n_1 C_{V_1} + n_2 C_{V_2}}} = \text{konšt}$$

387. Vo valci, ktorý je naplnený vzduchom a na oboch koncoch uzavretý, je piest, ktorý rozdeľuje objem valca na dve rovnaké polovice. Tlak vzduchu na piest z oboch strán $p_0 = 0{,}1$ MPa. Keď piest celkom nepatrne vychýlime z rovnovážnej polohy a pustíme, začne konať kmitavý pohyb. Vypočítajte periódu týchto kmitov, keď deje v plyne možno považovať za adiabatické! Hmotnosť piesta $m = 1{,}5$ kg. Vzdialenosť piesta od steny $l_0 = 20$ cm, plocha piesta $S = 100\ \text{cm}^2$. Trenie možno zanedbať.

Riešenie:

Keď piest vysunieme o nepatrnú vzdialenosť x, napr. doprava *(obr. 88)*, zväčší sa objem v ľavej časti na $V_1 = V_0 + \Delta V = S(l_0 + x)$ a tlak klesne z p_0 na p_1, kým v pravej časti objem poklesne na hodnotu $V_2 = S(l_0 - x)$ a tlak z p_0 narastie na p_2.



Obr. 88

Keď príslušné zmeny pri nepatrnom posune piesta považujeme za adiabatické, podľa Poissonovej rovnice platí:

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_1 V_1^{\varkappa}$$

$$p_0 V_0^{\varkappa} = p_2 V_2^{\varkappa}$$

a po dosadení za V_1 a V_2 dostaneme:

$$p_0 l_0^{\varkappa} = p_1 (l_0 + x)^{\varkappa}$$

$$p_0 l_0^{\varkappa} = p_2 (l_0 - x)^{\varkappa}$$

V základnej polohe je výsledná tlaková sila pôsobiaca na piest nulová. Po jeho vysunutí bude podliehať výslednej tlakovej sile

$$F = (p_2 - p_1)S = Sp_0 \frac{l_0^{\varkappa}}{(l_0 - x)^{\varkappa}} - \frac{l_0^{\varkappa}}{(l_0 + x)^{\varkappa}} =$$

$$= Sp_0 l_0^{\varkappa} \frac{(l_0 + x)^{\varkappa} - (l_0 - x)^{\varkappa}}{(l_0^2 - x^2)^{\varkappa}}$$

Pri nepatrných výchylkách možno x^2 vzhľadom na l_0^2 zanedbať a podobne i v binomickom rozvoji $(l_0 \pm x)^{\varkappa}$ možno zanedbať všetky členy, v ktorých sa x vyskytuje vo vyššej mocnine ako v prvej. Po takejto úprave bude:

$$F = S(p_2 - p_1) = \frac{2Sp_0^{\varkappa}}{l_0} \cdot x$$

Podľa tohto výsledku je sila pôsobiaca na piest priamo úmerná okamžitej výchylke z rovnovážnej polohy. Jej smer je rovnobežný so smerom, v ktorom prebieha posunutie. Preto možno pre pohyb piesta použiť pohybovú rovnicu v tvare

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \text{kde} \quad \omega^2 = \frac{2Sp_0^{\varkappa}}{ml_0} = \text{konšt}$$

Piest bude zrejme konať harmonické kmity s periódou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_0}{2p_0 S^{\varkappa}}}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1,5\ \text{kg}.0,2}{2.10^5\ \text{N}.\text{m}^{-2}.10^{-2}\ \text{m}^2.1,4}}=0,06\ \text{s}$$

388. Vzduch objemu $V_0=10$ litrov, teploty $t_0=0\ °C$ a tlaku $p_0=0,1$ MPa najprv izotermicky stlačíme na objem $V_1=2$ l a potom adiabaticky rozopneme na objem $V_2=20$ l. Aká bude výsledná teplota vzduchu po ukončení tejto stavovej zmeny a aká celková práca sa pritom spotrebuje, keď pre vzduch $\varkappa=1,4$?

Riešenie:

Po izotermickej zmene bude mať vzduch tlak p_1, objem V_1 a teplotu T_1. Pre tieto veličiny podľa Boylovho zákona platí:

$$p_0V_0=p_1V_1;\quad T_1=T_0 \tag{1}$$

Po adiabatickej zmene sa zmení tlak, objem i teplota plynu na hodnoty p_2, V_2, T_2. Výslednú teplotu určíme zo vzťahu platného pre adiabatickú zmenu:

$$T_1V_1^{\varkappa-1}=T_2V_2^{\varkappa-1}$$

Pomocou vzťahu (1) možno ďalej písať:

$$T_0V_1^{\varkappa-1}=T_2V_2^{\varkappa-1}$$

odkiaľ pre hľadanú teplotu T_2 vyplýva vzťah

$$T_2=T_0\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$T_2=273\ \text{K}\left(\frac{2\ \text{l}}{20\ \text{l}}\right)^{1,4-1}=108,6\ \text{K},\quad t_2=-164,4\ °\text{C}$$

Celková práca A', ktorú plyn vykoná, sa bude rovnať súčtu prác získaných pri izotermickej zmene A_I' a adiabatickej zmene A_{II}'. Platí pre ne:

$$A_I'=\int \text{d}A'=\int_{V_0}^{V_1}p\ \text{d}V=\frac{m}{M_m}R_mT_0\int_{V_0}^{V_1}\frac{\text{d}V}{V}=p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}$$

$$A_{II}'=\int \text{d}A'=\int -\text{d}W=-\int_{T_1}^{T_2}mc_V\ \text{d}T=mc_V(T_1-T_2) \tag{2}$$

a použitím Mayerovej rovnice ľahko zistíme, že

$$c_V=\frac{R_m}{M_m(\varkappa-1)}$$

Po dosadení do rovnice (2) a úprave bude:

$$A'_{II} = \frac{mR_m}{M_m(\varkappa - 1)}(T_1 - T_2) = \frac{mR_m T_1}{M_m(\varkappa - 1)}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Podľa stavovej rovnice sa však $\frac{mR_m T_1}{M_m} = p_0 V_0$, takže

$$A'_{II} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

Celková práca, ktorú vykonal plyn,

$$A' = A'_I + A'_{II} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) =$$

$$= 10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}\,.\,10\,.\,10^{-3}\ m^3\,.}\ln \frac{2}{10} +$$

$$+ \frac{10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}\,.\,10\,.\,10^{-3}\ m^3}}{0{,}4}\left(1 - \frac{108{,}6}{273}\right) = -104\ \mathrm{J}$$

Plyn teda spotreboval prácu 104 J.

389. Určité množstvo plynu má pri tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa objem $V_0 = 1$ l. Plyn podrobíme postupne týmto zmenám:

a) Najprv ho izobaricky zohrejeme, až sa jeho objem zdvojnásobí;
b) potom ho izochoricky zohrejeme, až sa jeho tlak zdvojnásobí;
c) napokon ho necháme adiabaticky rozopnúť, až jeho teplota poklesne na začiatočnú hodnotu.

Vypočítajte, aké celkové teplo plynu sa počas tejto zmeny dodalo, akú prácu plyn vykonal a ako sa pritom zmenila jeho vnútorná energia! Poissonova konštanta plynu $\varkappa = 1{,}4$.

Riešenie:

Pri každom deji zistíme prácu, ktorú vykonal plyn, zmenu jeho vnútornej energie a dodané teplo. Pri výpočte použijeme prvú vetu termodynamickú, ktorá má pre elementárnu stavovú zmenu tvar

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W + \mathrm{d}A', \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}A' = p\,\mathrm{d}V$$

Pre ideálny plyn platí

$$\mathrm{d}W = \frac{m}{M_m} C_V\, \mathrm{d}T$$

Keďže v našom prípade poznáme Poissonovu konštantu plynu, vyjadríme tepelnú kapacitu jedného mólu zo vzťahu $C_V = \dfrac{R_m}{\varkappa - 1}$ a

$$dW = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m}{\varkappa - 1} \, dT$$

a) Izobarická zmena

Po ukončení tejto zmeny bude mať plyn tlak $p_1 = p_0$, objem $V_1 = 2V_0$ a pre teplotu T_1 zo stavovej rovnice vyplýva:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 2V_0}{T_1}; \quad T_1 = 2T_0$$

Plyn vykoná prácu

$$A'_I = \int_{V_0}^{2V_0} p_0 \, dV = p_0 V_0$$

Jeho vnútorná energia sa zmení o

$$\Delta W_I = \int_{T_0}^{2T_0} \frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m}{\varkappa - 1} \, dT = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m}{\varkappa - 1} T_0$$

Podľa stavovej rovnice však $\dfrac{mR_m T_0}{M_m} = p_0 V_0$, preto

$$\Delta W_I = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1}$$

Teplo dodané plynu

$$Q_I = \Delta W_I + A'_I = p_0 V_0 + \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} = p_0 V_0 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$$

b) Izochorická zmena

Po tejto zmene má plyn objem $V_2 = V_1 = 2V_0$, tlak $p_2 = 2p_1 = 2p_0$ a pre teplotu zo stavovej rovnice dostaneme hodnotu

$$T_2 = 4T_0$$

Pretože $V =$ konšt, objemová práca vykonaná plynom $A'_{II} = 0$.
Zmena vnútornej energie

$$\Delta W_{II} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m}{\varkappa - 1} \, dT = \frac{mR_m}{M_m(\varkappa - 1)} \int_{2T_0}^{4T} dT = \frac{2mR_m T_0}{M_m(\varkappa - 1)} = \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1}$$

V priebehu izochorickej zmeny sa plynu dodalo teplo

$$Q_{II} = A'_{II} + \Delta W_{II} = \frac{2p_0V_0}{\varkappa - 1}$$

c) Adiabatická zmena

Po ukončení tohto deja bude mať plyn tlak p_3, objem V_3 a teplotu $T_3 = T_0$. Objem V_3 určíme z rovnice

$$T_3V_3^{\varkappa-1} = T_2V_2^{\varkappa-1}$$

určujúcej závislosť teploty a objemu pri adiabatickej zmene, z ktorej vyplýva:

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot V_2 = \left(\frac{4T_0}{T_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot 2V_0 = 2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \cdot V_0$$

Tlak p_3 vypočítame z Poissonovej rovnice

$$p_3V_3^{\varkappa} = p_2V_2^{\varkappa}$$

odkiaľ

$$p_3 = p_2\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\varkappa} = 2p_0\left(\frac{2V_0}{2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}}V_0}\right)^{\varkappa} = 2^{-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \cdot p_0$$

Pri adiabatickom deji sa práca vykonaná plynom rovná úbytku jeho vnútornej energie, preto

$$A'_{III} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = -\int_{T_2}^{T_3} \frac{m}{M_m} C_V\,\mathrm{d}T = -\frac{m}{M_m} \cdot \frac{R_m}{\varkappa - 1}\int_{4T_0}^{T_0} \mathrm{d}T = \frac{mR_m}{M_m(\varkappa - 1)} \cdot 3T_0$$

a použitím stavovej rovnice dostaneme:

$$A'_{III} = \frac{3p_0V_0}{\varkappa - 1}$$

Plyn pri tejto zmene teplo neprijíma ani nevydáva, preto $Q_{III} = 0$ a zmena vnútornej energie

$$\Delta W_{III} = -A'_{III} = -\frac{3p_0V_0}{\varkappa - 1}$$

Celkom sa pri uvedenej stavovej zmene vykonala práca

$$A' = A'_I + A'_{II} + A'_{III} = p_0V_0 + \frac{3p_0V_0}{\varkappa - 1} = p_0V_0\,\frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = 850\ \mathrm{J}$$

dodalo sa teplo

$$Q = Q_I + Q_{II} + Q_{III} = p_0V_0\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0V_0}{\varkappa - 1} = p_0V_0 \cdot \frac{\varkappa + 2}{\varkappa - 1} = 850\ \mathrm{J}$$

a zmena vnútornej energie

$$\Delta W = \Delta W_{\mathrm{I}} + \Delta W_{\mathrm{II}} + \Delta W_{\mathrm{III}} = \frac{p_0 V_0}{\varkappa - 1} + \frac{2p_0 V_0}{\varkappa - 1} - \frac{3p_0 V_0}{\varkappa - 1} = 0$$

390. V nádobe objemu V_0 sa pri teplote t_0 nachádza plyn známej relatívnej molekulovej hmotnosti. Vypočítajte, akú prácu treba vykonať na stlačenie tohto plynu na objem V_1 a ako sa pritom zmení jeho teplota, keď pri tejto stavovej zmene sa plyn správa podľa zákona $pV^n = \text{konšt}$, pričom $1 < n < \varkappa$!

Riešenie:

Plyn vykoná prácu

$$A' = \int_{V_0}^{V_1} p \, \mathrm{d}V$$

Keď za p dosadíme z rovnice

$$pV^n = p_0 V_0^n = \text{konšt}$$

dostaneme

$$A' = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^n}{V^n} \mathrm{d}V$$

Po integrácii bude:

$$A' = \frac{p_0 V_0^n}{1-n} (V_1^{1-n} - V_0^{1-n})$$

Tlak p_0 vyjadríme pomocou známych veličín zo stavovej rovnice $p_0 V_0 = \frac{m}{M_m} R_m T_0$; po úprave dostaneme:

$$A' = \frac{m R_m T_0}{M_m(n-1)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{n-1}\right]$$

Na stlačenie plynu treba zvonka dodať prácu

$$A = -A' = \frac{m R_m T_0}{M_m(1-n)} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{n-1}\right]$$

Závislosť teploty plynu od objemu dostaneme z rovnice

$$pV^n = p_0 V_0^n$$

kde za p a p_0 dosadíme zo stavovej rovnice. Takto bude:

$$\frac{m R_m T_0}{V_0} V_0^n = \frac{m R_m T}{V} \cdot V^n$$

odkiaľ

$$TV^{n-1} = T_0 V_0^{n-1} = \text{konšt}$$

Pre hľadanú teplotu T_1 dostávame:

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{n-1}$$

391. Carnotov stroj pracuje s účinnosťou $\eta_1 = 40$ %. Ako sa má zmeniť teplota zásobníka tepla, aby účinnosť stroja vzrástla na $\eta_2 = 50$ %? Teplota chladiča pritom ostáva stála, $t_2 = 9$ °C.

Riešenie:

Účinnosť Carnotovho stroja, predstavujúca podiel práce A' vykonanej strojom a prijatého tepla Q_1 pri vyššej teplote, je:

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

odkiaľ

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}$$

V prvom prípade

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta_1}$$

a v druhom prípade

$$T_1' = \frac{T_2}{1 - \eta_2}$$

Pre hľadanú zmenu teploty možno potom písať:

$$\Delta T = T_1' - T_1 = \frac{T_2(\eta_2 - \eta_1)}{(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)}$$

t. j.

$$\Delta T = \frac{282\ \text{K} \,.\, 0{,}1}{(1 - 0{,}4)(1 - 0{,}5)} = 94\ °\text{C}$$

392. Vypočítajte, akú prácu vykoná chladiaci stroj pracujúci na princípe Carnotovho stroja, keď v prostredí s teplotou $t_1 = 20$ °C zmrazí $m = 1$ kg vody teploty 20 °C na ľad teploty $t_0 = 0$ °C!

Riešenie:

Pracovná účinnosť Carnotovho stroja

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0}{T_1}$$

kde A' je práca vykonaná pri kruhovom deji, Q_1 teplo, ktoré odobrala pracovná látka, T_1 a T_0 teploty zásobníka tepla, resp. chladiča. Keď stroj pracuje ako chladiaci, naberá z chladiča teplo Q_2, zvonka prijme prácu A a na zásobník tepla prevedie teplo Q_2, ako aj teplo vzniknuté z dodanej práce, teda celkom $Q_2' = Q_2 + A$. Pre účinnosť preto možno písať vzťah

$$\eta = \frac{A}{Q_2 + A}$$

odkiaľ

$$A = Q_2 \frac{\eta}{1-\eta} = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0}$$

V našom prípade pri chladení teplota chladiacej vody (chladiča) stále klesá, kým teplota prostredia (zásobník tepla) sa nemení. Na odvedenie tepla $\mathrm{d}Q$ z chladiča pri teplote T je potrebná práca

$$\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}Q \frac{T_1 - T}{T}$$

Odňatím tepla $\mathrm{d}Q$ poklesne teplota chladenej vody z T na $T + \mathrm{d}T$ a voda vydá teplo $\mathrm{d}Q = -mc\mathrm{d}T$. Na ochladenie vody z teploty T_1 na T_0 je potom potrebná práca

$$A_1 = \int \frac{T_1 - T}{T} \mathrm{d}Q = -\int_{T_1}^{T_0} \frac{T_1 - T}{T} mc\mathrm{d}T$$

t. j.

$$A_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{T_1}{T} mc\mathrm{d}T - \int_{T_0}^{T_1} mc\mathrm{d}T = mcT_1 \ln \frac{T_1}{T_0} - mc(T_1 - T_0)$$

Po dosadení číselných hodnôt bude platiť

$$A_1 = 1\ \mathrm{kg} . 4186\ \mathrm{J} . \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{K}^{-1} . 293\ \mathrm{K} . 2{,}3 \log \frac{293}{273} -$$

$$- 1\ \mathrm{kg} . 4186\ \mathrm{J} . \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{K}^{-1} (293 - 273)\ \mathrm{K}$$

$$A_1 = 2900\ \mathrm{J}$$

Pri zmrazení vody teploty 0 °C na ľad rovnakej teploty sa uvoľní teplo

$$Q_2 = ml$$

kde l je špecifické skupenské teplo topenia ľadu. Na prenos tohto tepla na zásobník tepla pri stálej teplote T_0 je potrebná práca

$$A_2 = Q_2 \frac{T_1 - T_0}{T_0} = ml \frac{T_1 - T_0}{T_0} = 1\ \mathrm{kg}\,.\,333{,}6\,.\,10^3\,.\,\mathrm{J}\,.\,\mathrm{kg}^{-1}\,\frac{20}{273} = 24\,440\ \mathrm{J}$$

Celková práca vykonaná chladiacim strojom

$$A = A_1 + A_2 = 27\,340\ \mathrm{J}$$

393. Ideálny tepelný stroj, ktorého pracovnou látkou je jeden mól ideálneho plynu, pracuje v cykle troch za sebou nasledujúcich vratných dejov:

1. plyn sa izobaricky zohreje z pôvodného objemu V_1 a teploty T_1 na teplotu T_2;
2. plyn adiabaticky zväčší svoj objem, až jeho teplota poklesne na začiatočnú T_1;
3. plyn sa izotermicky stlačí na začiatočný objem V_1.

Aká je účinnosť tohto stroja?

Riešenie:

Účinnosť stroja určíme zo vzťahu

$$\eta = \frac{A'}{Q}$$

kde A' je celková práca vykonaná strojom, Q teplo, ktoré stroj odobral zo zásobníka tepla.

1. pri izobarickej expanzii plyn zväčší svoj objem z V_1 na $V_2 = V_1 \dfrac{T_2}{T_1}$ a vykoná prácu

$$A_1' = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$

Zo stavovej rovnice vyplýva:

$$p\,\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = R_m\,\mathrm{d}T$$

a pri stálom tlaku $\mathrm{d}p = 0$, $p\mathrm{d}V = R_m\,\mathrm{d}T$, preto aj

$$A_1' = \int_{T_1}^{T_2} R_m\,\mathrm{d}T = R_m(T_2 - T_1)$$

Vnútorná energia sa pri tomto deji zmenila o

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \int \mathrm{d}W = \int_{T_1}^{T_2} C_V \mathrm{d}T = C_V(T_2 - T_1)$$

Teplo, ktoré plyn nabral, určíme z prvej vety termodynamickej:

$$Q_I = A'_I + \Delta W = R_m(T_2 - T_1) + C_V(T_2 - T_1) = C_p(T_2 - T_1)$$

2. Pri adiabatickej expanzii plyn zväčší svoj objem z V_2 na V_3 a jeho teplota poklesne z T_2 na $T_3 = T_1$. Zo známej závislosti teploty od objemu $TV^{\varkappa-1} = \text{konšt}$ určíme objem V_3 po expanzii:

$$T_3 V_3^{\varkappa-1} = T_2 V_2^{\varkappa-1} = T_2\left(V_1 \frac{T_2}{T_1}\right)^{\varkappa-1}$$

odkiaľ

$$V_3 = V_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{1}$$

Práca, ktorú vykonal plyn pri adiabatickej expanzii, sa rovná úbytku jeho vnútornej energie:

$$A'_{II} = \int_{V_2}^{V_3} p\mathrm{d}V = -\int \mathrm{d}W = -\int_{T_2}^{T_3=T_1} C_V \mathrm{d}T = C_V(T_2 - T_1)$$

Pri tomto deji plyn teplo nezískal, ani neodovzdal, platí teda

$$Q_{II} = 0$$

3. Izotermickou kompresiou sa plyn dostáva do začiatočného stavu, v ktorom sa vyznačoval objemom V_1, teplotou T_1 a tlakom $p_1 = \dfrac{R_m T_1}{V_1}$. Práca vykonaná plynom

$$A'_{III} = \int_{V_3}^{V_1} p\mathrm{d}V = \int_{V_3}^{V_1} R_m T_1 \frac{\mathrm{d}V}{V} = R_m T_1 \ln \frac{V_1}{V_3}$$

(táto práca je záporná)

No podľa vzťahu (1)

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

a odtiaľ

$$A'_{III} = -R_m T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

Pri tomto deji uvoľnil plyn kladné teplo $Q'_{III} = A_{III} = -A'_{III}$:

$$Q'_{III} = R_m T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}$$

Pri uvedených stavových zmenách plyn vykonal celkom prácu

$$A' = A'_I + A'_{II} + A'_{III} = R_m(T_2 - T_1) + C_V(T_2 - T_1) - R_m T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

a prijal teplo

$$Q = Q_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

Účinnosť zariadenia

$$\eta = \frac{A'}{Q} = \frac{(R_m + C_V)(T_2 - T_1) - R_m T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}}{C_p(T_2 - T_1)}$$

Vzhľadom na to, že $\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = \frac{C_p}{R_m}$,

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

394. Vypočítajte, ako sa zmení entropia po zmiešaní $m_1 = 10$ g vody teploty $t_1 = 100$ °C a $m_2 = 20$ g vody teploty $t_2 = 15$ °C!

Riešenie:

Výslednú teplotu zmesi po premiešaní určíme pomocou vzťahu

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 43{,}3 \text{ °C}, \quad \text{t. j.} \quad T = 316{,}3 \text{ K}$$

Entropia sústavy dvoch kvapalín, ktorá sa vzťahuje na nejaký základný stav, napr. na stav, v ktorom má kvapalina teplotu 0 °C, bude daná súčtom entropií oboch kvapalín vzhľadom na ten istý stav. Pre celkovú entropiu pred zmiešaním potom platí:

$$S_1 = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dQ}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{m_1 c \, dT}{T} + \int_{T_0}^{T_2} \frac{m_2 c \, dT}{T} = m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} + m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0}$$

Po premiešaní bude entropia určená vzťahom

$$S_2 = \int_{T_0}^{T} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc \, dT}{T} = mc \ln \frac{T}{T_0}$$

kde $m = m_1 + m_2$.

Celkový prírastok entropie potom je:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = mc \ln \frac{T}{T_0} - m_1 c \ln \frac{T_1}{T_0} - m_2 c \ln \frac{T_2}{T_0} =$$

$$= m_1 c \ln \frac{T}{T_1} + m_2 c \ln \frac{T}{T_2}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\Delta S = 10 . 10^{-3}\ \mathrm{kg} . 4186\ \mathrm{J} . \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{K}^{-1} . 2{,}3 \log \frac{316{,}3}{373} +$$

$$+ 20 . 10^{-3}\ \mathrm{kg} . 4186\ \mathrm{J} . \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{K}^{-1} . 2{,}3 \log \frac{316{,}3}{288}$$

$$\Delta S = 0{,}94\ \mathrm{J} . \mathrm{K}^{-1}$$

395. Vypočítajte, ako sa zmení entropia $m = 2$ g dusíka, keď ho zohrejeme z teploty $t_0 = 0$ °C na $t_1 = 30$ °C

a) izochoricky,

b) izobaricky!

Riešenie:

Pre elementárnu zmenu entropie ideálneho plynu platí:

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{nC_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V}{T}$$

a pre celkovú zmenu entropie pri zmene zo začiatočného stavu, v ktorom sa plyn vyznačoval entropiou S_0, do konečného s entropiou S dostaneme:

$$S - S_0 = \int \frac{nC_V\,\mathrm{d}T}{T} + \int \frac{p\,\mathrm{d}V}{T}$$

kde $n = \dfrac{m}{M_m}$.

Ak máme na mysli ľubovoľnú hmotnosť ideálneho plynu m, platí:

a) Pri izochorickej zmene $\mathrm{d}V = 0$, takže

$$S - S_0 = \frac{m}{M_m} C_V \int_{T_0}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{m}{M_m} C_V \ln \frac{T_1}{T_0} = mc_V \ln \frac{T_1}{T_0}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$S - S_0 = 2 . 10^{-3}\ \mathrm{kg} . 740{,}9\ \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{K}^{-1} . 2{,}3 \log \frac{303}{273} = 0{,}154\ \mathrm{J} . \mathrm{K}^{-1}$$

b) Pri izobarickej zmene zo stavovej rovnice $pV = \frac{m}{M_m} R_m T$ vyplýva:

$$p\,dV + V\,dp = \frac{m}{M_m} R_m\,dT$$

Keďže pri izobarickej zmene $dp = 0$, platí $p\,dV = \frac{m}{M_m} R\,dT$. Pre zmenu entropie dostaneme:

$$S' - S_0 = \frac{m}{M_m} C_V \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M_m} R_m \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} = \frac{m}{M_m} C_V \ln\frac{T}{T_0} + \frac{m}{M_m} R_m \ln\frac{T}{T_0} =$$

$$= \frac{m}{M_m} C_p \ln\frac{T}{T_0} = mc_p \ln\frac{T}{T_0}$$

keďže

$$c_p = c_V + \frac{R_m}{M_m} = 740{,}9\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}} + \frac{8{,}314\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}}{28.10^{-3}\ \mathrm{kg.mol^{-1}}} = 1038\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}$$

a

$$S' - S_0 = 2.10^{-3}\ \mathrm{kg}.1038\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}.2{,}3 \log\frac{303}{273} = 0{,}216\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

396. Nájdite vzťah medzi tlakom, objemom a entropiou ideálneho plynu!

Riešenie:

Ak vyjdeme z definície entropie $dS = \frac{dQ}{T}$, možno napísať prvú vetu termodynamickú pre ideálny plyn v tvare

$$T\,dS = nC_V\,dT + p\,dV \qquad (1)$$

Zo stavovej rovnice pre ideálny plyn, $pV = nR_mT$, vyplýva

$$p\,dV + V\,dp = nR_m\,dT$$

a po krátkej úprave

$$\frac{dT}{T} = \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}$$

Keď tento vzťah dosadíme do rovnice (1), dostaneme

$$dS = nC_V\frac{dV}{V} + nC_V\frac{dp}{p} + nR_m\frac{dV}{V}$$

Ak ešte použijeme Mayerov vzťah $C_p = C_V + R_m$ a vyjadrenie $C_p = \varkappa C_V$, dostaneme ďalej

$$\frac{dS}{nC_V} = \varkappa \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p}$$

Integrovaním tejto rovnice máme

$$\ln p + \varkappa \ln V = \frac{S}{nC_V} + \ln K$$

odkiaľ

$$pV^{\varkappa} = K \cdot \exp\left(\frac{S}{nC_V}\right)$$

a keďže $nC_V = mc_V$ (m je hmotnosť a c_V je špecifická tepelná kapacita plynu pri stálom objeme), dostávame hľadaný vzťah

$$pV^{\varkappa} = K \cdot \exp\left(\frac{S}{mc_V}\right)$$

kde K je konštanta.

397. Dokážte, že celková zmena entropie ideálneho plynu v Carnotovom kruhovom deji sa rovná nule!

Riešenie:

Predpokladajme, že v začiatočnom stave má plyn entropiu S_0 a po ukončení jedného cyklu entropiu S. Celková zmena entropie pri jednom cykle $S - S_0$ sa rovná súčtu zmien entropií pri jednotlivých dejoch cyklu:

$$S - S_0 = S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S - S_3 \tag{1}$$

Pri izotermickej expanzii

$$S_1 - S_0 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = \frac{m}{M_m} R_m \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pri adiabatickej expanzii

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = 0, \quad \text{lebo} \quad dQ = 0$$

Pri izotermickej kompresii

$$S_3 - S_2 = \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_3}{V_4}$$

a pretože $\dfrac{V_3}{V_4} = \dfrac{V_2}{V_1}$, bude:

$$S_3 - S_2 = -\frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Pri adiabatickej kompresii $dQ = 0$, takže

$$S - S_3 = 0$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostávame:

$$S - S_0 = \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_2}{V_1} = 0$$

odkiaľ

$$S = S_0$$

398. V oceľovej fľaši objemu $V_1 = 50$ l je plyn tlaku $p_1 = 4{,}5$ MPa, v inej oceľovej fľaši objemu $V_2 = 30$ l je iný plyn tlaku $p_2 = 8{,}5$ MPa. Teploty oboch plynov sú rovnaké $t = 20$ °C. Vypočítajte, ako sa zmení entropia tejto sústavy po spojení oboch fliaš! Plyny spolu nereagujú.

Riešenie:

Pre zmenu entropie určitého množstva ideálneho plynu pri prechode zo začiatočného do konečného stavu platí:

$$S_2 - S_1 = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{\frac{m}{M_m} C_V \, dT + p \, dV}{T} = mc_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M_m} R_m \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$

$$= mc_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (1)$$

Entropia sústavy oboch plynov pred zmiešaním je

$$S_1 = S_1' + S_2'$$

kde S_1' a S_2' sú entropie jednotlivých plynov.

Keď sa po zmiešaní sústava vyznačuje entropiou S_2, pre celkovú zmenu entropie platí:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S_2 - S_1' - S_2'$$

Všetky entropie uvažujeme vzhľadom na ten istý základný stav, v ktorom mal plyn stavové veličiny p_0, V_0, T_0. Pomocou vzťahu (1) možno písať:

$$S_2 - S_1 = mc_V \ln \frac{T}{T_0} + \frac{m}{M_m} R_m \ln \frac{V}{V_0} - m_1 c_{V_1} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_1}{M_1} R_m \ln \frac{V_1}{V_0} -$$

$$- m_2 c_{V_2} \ln \frac{T}{T_0} - \frac{m_2}{M_2} R_m \ln \frac{V_2}{V_0} \qquad (2)$$

Pretože tepelná kapacita zmesi plynov sa rovná súčtu tepelných kapacít plynov tvoriacich zmes, platí:

$$mc_V = m_1 c_{V_1} + m_2 c_{V_2}$$

a pretože celkový počet mólov zmesi

$$\frac{m}{M_m} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}$$

zo vzťahu (2) po úprave pre zmenu entropie vyplýva vzťah

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) R_m \ln V - \frac{m_1 R_m}{M_1} \ln V_1 - \frac{m_2 R_m}{M_2} \ln V_2$$

Podľa stavovej rovnice platí:

$$\frac{m_1 R_m}{M_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \quad \text{a} \quad \frac{m_2 R_m}{M_2} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

takže po dosadení bude:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T} [(p_1 V_1 + p_2 V_2) \ln V - p_1 V_1 \ln V_1 - p_2 V_2 \ln V_2]$$

Po úprave napokon dostaneme:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{p_1 V_1}{T} \ln \frac{V}{V_1} + \frac{p_2 V_2}{T} \ln \frac{V}{V_2}$$

Dosadením číselných hodnôt dostaneme:

$$\Delta S = \frac{4{,}5 \,.\, 10^5 \text{ N} \,.\, \text{m}^{-2} \,.\, 50 \,.\, 10^{-3} \text{ m}^3}{293 \text{ K}} \cdot 2{,}3 \log \frac{50+30}{30} +$$

$$+ \frac{8{,}5 \,.\, 10^5 \text{ N} \,.\, \text{m}^{-2} \,.\, 30 \,.\, 10^{-3} \text{ m}^3}{293 \text{ K}} \cdot 2{,}3 \log \frac{50+30}{30}$$

$$\Delta S = 121{,}3 \text{ J} \,.\, \text{K}^{-1}$$

399. Vypočítajte, ako sa zmení entropia ideálneho plynu teploty $t_0 = 20$ °C, tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa a objemu $V_0 = 2$ l, keď sa rozopne do vákua na dvojnásobný objem!

Riešenie:

Po rozopnutí ideálneho plynu do vákua sa nemení ani jeho vnútorná energia, ani teplota, ako to dokazuje aj známy Gayov—Lussacov pokus.

Keď sa plyn v začiatočnom stave vyznačoval entropiou S_0 a v konečnom entropiou S, pri zmene stavu sa jeho entropia zmenila o $\Delta S = S - S_0$; pre túto zmenu platí vzťah

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{m}{M_m} C_V \frac{dT}{T} + \int \frac{p\, dV}{T}$$

Pretože pri tomto deji sa teplota nemení,

$$\Delta S = \int \frac{p\, dV}{T}$$

a keď p vyjadríme zo stavovej rovnice, dostaneme

$$\Delta S = \frac{m}{M_m} R_m \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{V}{V_0}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$\Delta S = S - S_0 = \frac{10^5\ \mathrm{N.m^{-2}.2.10^{-3}\ m^3}}{293\ \mathrm{K}} \cdot 2{,}3 \log \frac{2V_0}{V_0} = 0{,}473\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

400. Ideálny plyn objemu $V_1 = 10$ litrov a tlaku $p_1 = 0{,}2.10^5$ Pa necháme sa vratne rozopnúť pri stálej teplote na objem $V_2 = 27{,}18$ litrov. Vypočítajte, ako sa pri tomto deji zmenila voľná energia plynu!

Riešenie:

Pre elementárnu zmenu voľnej energie plynu z jej definície vyplýva:

$$dF = dW - T\, dS - S\, dT$$

Pri vratných dejoch elementárna zmena entropie $dS = \dfrac{dQ}{T}$. Pri izotermickom deji $dW = 0$, $dT = 0$, $dQ = dA'$, takže po dosadení máme:

$$dF = -dQ = -dA'$$

Celkovú zmenu voľnej energie dostaneme integrovaním:

$$\int_1^2 dF = -\int_1^2 dA' = -\int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$

Platí teda:

$$F_2 - F_1 = -\frac{m}{M_m} R_m T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$F_2 - F_1 = 0{,}2\,.\,10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}\,.\,10\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m^3}\,.\,2{,}3\ \log\frac{10}{27{,}18} = -200\ \mathrm{J}$$

401. Určité množstvo dusíka hmotnosti $m = 2$ g a teploty $t_0 = 27$ °C bolo pri stálom tlaku stlačené na 3/4 pôvodného objemu. Vypočítajte, ako sa pri tomto deji zmenila termodynamická potenciálna energia plynu!

Riešenie:

Z definície termodynamickej potenciálnej energie pre jej elementárnu zmenu vyplýva:

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}W + p\ \mathrm{d}V + V\ \mathrm{d}p - T\ \mathrm{d}S - S\ \mathrm{d}T$$

Pri vratných dejoch $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q}{T}$. Ak ešte uvážime, že podľa prvej vety termodynamickej $\mathrm{d}W + p\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}Q$, možno písať:

$$\mathrm{d}G = V\ \mathrm{d}p - S\ \mathrm{d}T$$

Keďže pre izobarickú zmenu $\mathrm{d}p = 0$, bude

$$\mathrm{d}G = -S\ \mathrm{d}T \tag{1}$$

Entropiu v stave, v ktorom má plyn teplotu T, vzhľadom na stav, v ktorom mal teplotu T_0, nájdeme zo vzťahu

$$S = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int \frac{\frac{m}{M_\mathrm{m}} C_V\ \mathrm{d}T + p\ \mathrm{d}V}{T}$$

Pre izobarickú zmenu platí $p\ \mathrm{d}V = \dfrac{m}{M_\mathrm{m}} R_\mathrm{m}\ \mathrm{d}T$, a keď ešte použijeme Mayerov vzťah $C_p = C_V + R_\mathrm{m}$, máme:

$$S = \int_{T_0}^{T} \frac{m}{M_\mathrm{m}} C_p \frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{m}{M_\mathrm{m}} C_p \ln\frac{T}{T_0} = mc_p \ln\frac{T}{T_0} \tag{2}$$

Ak použijeme vzťah (2), z rovnice (1) pre celkovú zmenu termodynamickej potenciálnej energie pri požadovanej stavovej zmene vyplýva vzťah

$$\int_1^2 \mathrm{d}G = -\int_{T_0}^{T_1} S\ \mathrm{d}T = -\int_{T_0}^{T_1} mc_p \ln\frac{T}{T_0}\,\mathrm{d}T$$

Podľa známych pravidiel integrálneho počtu $\int \ln x\ \mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$ a po úprave dostaneme:

$$G_2 - G_1 = mc_p(T_1 - T_0) + mc_pT_1 \ln \frac{T_0}{T_1}$$

Teplotu plynu po izobarickej kompresii určíme zo stavovej rovnice

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_0 \frac{3}{4} V_0}{T_1}, \quad \text{takže} \quad T_1 = \frac{3T_0}{4} = 225 \text{ K}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$G_2 - G_1 = 2.10^{-3} \text{ kg}.1042{,}3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}\left[-75 \text{ K} + 225 \text{ K}.2{,}3 \log \frac{4}{3}\right] = -21 \text{ J}$$

402. Pomocou fázového pravidla rozhodnite, koľkými od seba nezávislými stavovými veličinami je určený rovnovážny stav sústavy:

a) voda so svojou nasýtenou parou,

b) soľný roztok ($H_2O + NaCl$) s nasýtenou parou,

c) sústava zložená z látok $CaCO_3$; CaO; CO_2, keď medzi nimi môže prebiehať reakcia

$$CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2 \tag{1}$$

Riešenie:

Použijeme Gibbsove fázové pravidlo

$$v = k + 2 - f$$

a) Sústava má jednu zložku (H_2O) a dve fázy (voda, para), preto

$$v = 1 + 2 - 2 = 1$$

Rovnovážny stav je určený jediným parametrom, napr. teplotou.

b) Sústava má dve zložky (H_2O, $NaCl$) a dve fázy (roztok, para), preto

$$v = 2 + 2 - 2 = 2$$

Rovnovážny stav je určený dvoma parametrami, napr. teplotou a koncentráciou.

c) V sústave existujú dve tuhé fázy (CaO, $CaCO_3$) a jedna plynná (CO_2). Keby látky tvoriace sústavu spolu nevystupovali do reakcie, mala by sústava tri zložky. Vzhľadom na rakciu (1) je počet od seba nezávislých zložiek o jednu menší, takže $k = 2$. Teda

$$v = 2 + 2 - 3 = 1$$

Rovnovážny stav je určený jediným parametrom, napr. teplotou. Tým je určený napr. aj tlak CO_2.

Úlohy

403. Stroj pracujúci s výkonom $P = 368$ W vyvŕta za dve minúty otvor do liatinového bloku hmotnosti $m = 20$ kg. O koľko stupňov sa blok ohreje, keď 80 % práce, konanej pri vŕtaní, prispieva k zväčšeniu vnútornej energie bloku? Špecifická tepelná kapacita liatiny $c = 544{,}2\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}$.

[$\Delta t = 3{,}25$ °C]

404. Zo známej hmotnosti 1 mólu plynu a pomeru špecifických tepelných kapacít $\varkappa = \dfrac{c_p}{c_V}$ určite hodnotu špecifickej tepelnej kapacity c_p a c_V. Vypočítajte ich hodnoty pre dusík!

$$\left[c_V = \frac{R_m}{M_m(\varkappa - 1)};\ c_p = \varkappa \frac{R_m}{M_m(\varkappa - 1)};\ c_V = 736{,}7\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,K^{-1}};\ c_p = 1031{,}4\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}\right]$$

405. Určite relatívnu molekulovú hmotnosť vzduchu, keď je známa špecifická tepelná kapacita vzduchu c_V a pomer špecifických tepelných kapacít $\varkappa = \dfrac{c_p}{c_V}$!

[28,45]

406. Zmiešame $m_1 = 2$ g kysličníka uhličitého s $m_2 = 3$ g dusíka. Vypočítajte, aký je pomer špecifických tepelných kapacít pre túto plynnú zmes! Známe sú iba špecifické tepelné kapacity c_{V_1} a c_{V_2}.

[$\varkappa = 1{,}36$]

407. Vypočítajte, koľko tepla treba na ohriatie zmesi $m_1 = 2$ g kyslíka s $m_2 = 5$ g dusíka pri stálom objeme z teploty $t_1 = 20$ °C na teplotu $t_2 = 40$ °C!

[$Q = 100$ J]

408. Keď sme dodali určitému množstvu argónu teploty 60 °C pri stálom objeme 209,3 J tepla, zvýšila sa jeho teplota na 88 °C. Koľko bolo argónu?

[23,43 g]

409. Vypočítajte, na akú teplotu poklesne teplota kysličníka uhličitého tiaže $G = 5{,}9$ N a začiatočnej teploty $t_0 = 50$ °C, keď sa jeho vnútorná energia zmenší o 15 696 J!

[$t = 10$ °C]

410. Ideálny plyn má pri tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa objem $V_0 = 1$ l. Vypočítajte, ako sa zmení vnútorná energia plynu, keď sa jeho tlak zvýši na štvornásobok a objem poklesne na polovicu! Berte do úvahy plyn a) jednoatómový ($\varkappa = 5/3$), b) dvojatómový ($\varkappa = 7/5$).

$$\left[W_2 - W_1 = \frac{1}{\varkappa - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1); \text{ a) } \Delta W = 152 \text{ J}; \text{ b) } \Delta W = 253{,}25 \text{ J} \right]$$

411. Vzduchu hmotnosti $m = 6$ kg uzavretému v nádobe sme dodali $Q = 368{,}4$ kJ. Vzduch zväčšil svoj objem a vykonal prácu $A' = 181{,}5$ kJ, pričom jeho teplota stúpla z $t_1 = 10$ °C na $t_2 = 52$ °C. Na základe týchto údajov vypočítajte špecifické tepelné kapacity c_p a c_V pre vzduch! Poissonova konštanta pre vzduch je 1,4.

[$c_V = 740{,}9$ J.kg^{-1}.K^{-1}; $c_p = \varkappa c_V = 1038$ J.kg^{-1}.K^{-1}]

412. Vo valci s pohyblivým piestom sa pri stálom tlaku $p_0 = 0{,}2$ MPa rozpína 5 g vzduchu z teploty $t_0 = 18$ °C na $t_1 = 200$ °C. Koľko tepla na to vzduch potrebuje a akú prácu pri rozopnutí vykoná? Vypočítajte, o akú dĺžku sa posunie pohyblivý piest pri uvedenej stavovej zmene, keď priemer kruhovej základne valca je 6 cm!

[$Q = 929{,}7$ J; $A' = 266{,}7$ J; $\Delta l = 46{,}6$ cm]

413. 0,5 kg vzduchu so začiatočnou teplotou 35 °C sme dodali pri stálom tlaku 97,9 kJ tepla. Na akú teplotu sa vzduch ohrial?

[227 °C]

414. V nádobe s objemom 60 litrov sú pod tlakom 1 MPa uzavreté 0,2 kg vzduchu. Vypočítajte, koľko tepla treba vzduchu dodať, aby pri stálom tlaku zmenil svoj objem na dvojnásobný! Ako sa pri tom zmenila jeho vnútorná energia a akú prácu vzduch navonok vykonal?

[$Q = 206$ kJ; $\Delta W = 147{,}1$ kJ; $A' = 25{,}1$ kJ]

415. Plynu hmotnosti $m = 100$ g pri stálom tlaku sme dodali určité teplo; plyn zmenil svoju teplotu z $t_1 = 40$ °C na $t_2 = 110$ °C a vykonal prácu 1817 J. O aký plyn ide, aký je prírastok jeho vnútornej energie pri tomto deji a koľko tepla sme mu dodali?

[kyslík; $\Delta W = 4{,}54$ kJ; $Q = 6{,}36$ kJ]

416. Vo zvislom valci s piestom výšky l_0 a s prierezom S je plyn s tlakom p_0. Aká veľká práca sa vykoná pri zmenšení plynom vyplneného priestoru na desatinu pôvodnej výšky pri stálej teplote?

[$A = 2{,}3\ p_0 S l_0$]

417. Koľko tepla treba na izotermickú expanziu 2 litrov vodíka tlaku 0,08 MPa na štvornásobný objem? Aký bude výsledný tlak?

$\left[Q = p_0 V_0 \ln \frac{V}{V_0};\ Q = 221{,}5\ \text{J};\ p = 0{,}02\ \text{MPa}\right]$

418. Pri izotermickom stlačení $V_1 = 4{,}5$ litrov vzduchu z pôvodného tlaku $p_1 = 98\,658$ Pa sa okoliu odovzdalo $Q' = 1046{,}5$ J tepla. Vypočítajte tlak a objem vzduchu po stlačení!

[$p_2 = 1{,}04$ MPa; $V_2 = 0{,}427$ l]

419. Po ukončení izotermického stláčania určitého množstva plynu sa dosiahol tlak 0,22 MPa pri objeme 4 litre a chladením sa odviedlo 25,1 J tepla. Vypočítajte, aký bol tlak plynu na začiatku deja, keď teplota plynu bola 20 °C!

[$p_1 = 0{,}213$ MPa]

420. Kompresor nasáva atmosferický vzduch s tlakom 0,1 MPa a teplotou 27 °C a stláča ho pri stálej teplote na tlak 3,5 MPa. Vypočítajte, koľko tepla sa odvádza chladiacej vode za hodinu, keď za tento čas sa stlačí 10 kg vzduchu!

[$3{,}1 \cdot 10^6$ J]

421. Vzduch s hmotnosťou 1 kg a teplotou 0 °C sme stlačili z tlaku 0,1 MPa na desaťnásobný tlak. Vypočítajte, akú prácu na to potrebujeme, keď stláčanie prebieha a) izotermicky, b) adiabaticky!

[a) $\approx 183\,000$ J; b) $\approx 185\,000$ J]

422. Dieselov motor má kompresný pomer $V_1 : V_2 = k$. Vzduch vo valci motora má začiatočný tlak p_1, objem V_1 a teplotu t_1.

a) Aký je tlak p_2 a teplota t_2 vzduchu vo valci motora na konci adiabatickej kompresie pri uvedenom kompresnom pomere?

b) Akú prácu vykonali pri kompresii vonkajšie sily?

$$\left[p_2 = k^{\varkappa} p_1;\ T_2 = k^{\varkappa - 1} T_1;\ A = \frac{p_1 V_1 M_m c_p}{R_m \varkappa}\left(k^{\varkappa - 1} - 1\right)\right]$$

423. V nádobe s objemom 2 litre sú pri teplote 27 °C 2 móly dusíka. Vypočítajte, aké budú tlaky dusíka pri objemoch 1,5 l, 4 l, 5 l, 6 l, keď plyn mení svoj objem a) izotermicky, b) adiabaticky! Zobrazte príslušné zmeny tlaku v $p - V$ diagramoch!

[a) $p_1 = 3{,}3$ MPa; $p_2 = 1{,}25$ MPa; $p_3 = 1$ MPa; $p_4 = 0{,}8$ MPa
b) $p_1' = 3{,}7$ MPa; $p_2' = 0{,}9$ MPa; $p_3' = 0{,}7$ MPa; $p_4' = 0{,}5$ MPa]

424. Určité množstvo dusíka hmotnosti $m = 8$ g a teploty $t_0 = 20$ °C adiabaticky stlačíme na objem, ktorý sa rovná pätine pôvodného. Akú prácu sme pri tomto deji plynu dodali a ako sa zmenila jeho vnútorná energia? Vypočítajte aj teplotu dusíka po ukončení stláčania!

[$A = 1564$ J; $\Delta W = 1564$ J; $t = 283$ °C]

425. Vzduch teploty $t_1 = 25$ °C a tlaku $p_1 = 0{,}1$ MPa náhle stlačíme z objemu $V_1 = 15$ l na $V_2 = 3{,}4$ l. Aká je teplota a tlak vzduchu na konci stlačenia a ako sa zmení vnútorná energia vzduchu, keď stláčanie možno považovať za adiabatický dej? Poissonova konštanta pre vzduch $\varkappa = 1{,}4$.

[$p = 0{,}8$ MPa; $t = 266{,}6$ °C; $\Delta W = 3065$ J]

426. Určité množstvo vzduchu sme nechali rozopnúť zo začiatočného objemu $V_0 = 2$ l na päťnásobný. Začiatočný tlak vzduchu $p_0 = 0{,}1$ MPa. Vypočítajte, akú prácu sme získali, keď sa expanzia uskutočnila a) izobaricky, b) izotermicky, c) adiabaticky!

[a) $7{,}8 \cdot 10^2$ J; b) $3{,}2 \cdot 10^2$ J; c) $2{,}3 \cdot 10^2$ J]

427. Plyn s tlakom $p_1 = 4{,}9 \cdot 10^4$ Pa sme adiabaticky stlačili na polovičný objem a potom izochoricky ochladili na teplotu, ktorú mal na začiatku stláčania. Vypočítajte konečný tlak plynu!

[$p = 9{,}81 \cdot 10^4$ Pa]

428. Dva móly vodíka teploty $t_1 = 27$ °C a tlaku $p_1 = 99\,325$ Pa sme adiabaticky stlačili na 1/3 pôvodného objemu. Potom sme nechali plyn izotermicky rozopnúť na pôvodný objem. Aká bola konečná teplota a tlak a akú prácu pritom plyn vykonal?

[$t \approx 198$ °C; 0,156 MPa; 1600 J]

429. V balóne je plynná zmes vytvorená rovnakým množstvom hélia a vodíka pri teplote 0 °C a tlaku 0,1 MPa. Vypočítajte, ako sa zmení teplota a tlak tejto zmesi, keď sa adiabaticky rozopne na dvojnásobný objem!

[$t = -75{,}8$ °C; $p = 0{,}036$ MPa]

430. Dusík hmotnosti $m = 200$ g, začiatočnej teploty $t_1 = 27$ °C a tlaku $p_1 = 0{,}4$ MPa podrobíme termodynamickému deju, pri ktorom jeho tlak klesne na $p_2 = 0{,}3$ MPa. Koľko tepla sme dodali dusíku, akú prácu dusík vykonal a ako sa zmenila jeho vnútorná energia, keď dej prebiehal a) izochoricky, b) izotermicky, c) adiabaticky? Zobrazte tieto deje v diagramoch $p - V$!

[a) $Q = -11\,100$ J, $A' = 0$, $\Delta W = -11\,100$ J; b) $A' = Q = 5117{,}5$ J, $\Delta W = 0$; c) $\Delta W = -3507$ J, $A' = 3507$ J, $Q = 0$]

431. Aký je teoreticky najpriaznivejší stupeň účinnosti parného stroja, ktorý pracuje s parou teplou 190 °C a ktorého kondenzátor má teplotu 40 °C?

$[\eta = 32{,}4\ \%]$

432. Vypočítajte, aká by mala byť teplota zásobníka tepla a chladiča, keď je medzi nimi teplotný rozdiel 40 °C, aby ideálny Carnotov stroj, ktorý by medzi nimi pracoval, mal účinnosť 12 %!

$[t_1 = 60\ °C;\ t_2 = 20\ °C]$

433. Carnotov tepelný stroj naberá pri každom cykle zo zásobníka tepla 419 J tepla a chladiču odovzdáva 335 J. Vypočítajte, aká je teplota chladiča, keď zásobník tepla udržiavame na teplote 127 °C!

$[t_2 = 47\ °C]$

434. Aký najmenší musí byť výkon stroja, ktorý má odoberať vode stálej teploty $t_1 = 17\ °C$ teplo $Q = 41{,}9$ kJ za sekundu a dodávať ho tepelnému radiátoru teploty $t_2 = 46\ °C$? Koľko tepla sa odovzdá teplejšiemu zásobníku?

$[P = 4{,}18\ kW;\ Q_1' = 46{,}1\ kJ.s^{-1}]$

435. O koľko sa zmení entropia 20 g vody, keď ju zohrejeme z 10 °C na 75 °C?

$[\Delta S = 17{,}3\ J.K^{-1}]$

436. Vypočítajte zmenu entropie jedného gramu vody teploty 100 °C a zmenu entropie jedného gramu nasýtenej pary teploty 100 °C vzhľadom na stav v kvapalnom skupenstve pri teplote 0 °C!

$[S_2 - S_1 = 1{,}3\ J.K^{-1};\ S_3 - S_1 = 7{,}4\ J.K^{-1}]$

437. Do 3 litrov vody teploty 15 °C sme ponorili 1 kg olova zohriateho na teplotu 300 °C. Ako sa zmenila entropia tejto sústavy po ustálení teploty, keď vylučujeme tepelné straty a predpokladáme, že tepelnú kapacitu nádoby, v ktorej sa voda nachádza, môžeme zanedbať?

$[S_2 - S_1 = 39{,}3\ J.K^{-1}]$

438. O koľko sa zmení entropia 20 g ľadu teploty 0 °C, keď ho premeníme na vodnú paru teploty 100 °C pri normálnom atmosferickom tlaku?

$[\Delta S = 171{,}6\ J.K^{-1}]$

439. Vypočítajte zmenu entropie 2 g dusíka, ktorý pri teplote 27 °C izotermicky zmenšil svoj objem zo 6 litrov na 4 litre!

$[\Delta S = -0{,}24\ J.K^{-1}]$

440. Ako sa zmení entropia $m = 1$ g kysličníka uhličitého, ktorý sa rozopnul zo začiatočného stavu s $p_1 = 0{,}6$ MPa, $t_1 = 20$ °C do konečného stavu s $p_2 = 0{,}2$ MPa, $t_2 = -20$ °C?

[$\Delta S = 0{,}08$ J.K^{-1}]

441. Dva móly plynu pri teplote $t_0 = 127$ °C sme izotermicky stlačili tak, že tlak plynu vzrástol na dvojnásobný. Vypočítajte, ako sa pri tomto deji zmenila voľná energia i termodynamická potenciálna energia plynu!

[$F_2 - F_1 = 4600$ J; $G_2 - G_1 = 4600$ J]

442. Vypočítajte, koľkými od seba nezávislými veličinami je určený stav chemicky čistej látky pri zmene skupenstva!

[$v = 1$]

443. Dokážte, že sústava, v ktorej existujú vedľa seba tri fázy tej istej zložky, môže byť v rovnováhe len pri celkom určitých hodnotách tlaku a teploty!

[$v = 0$, sústava je invariantná; k rovnováhe dochádza v trojnom bode]

10 SÚSTAVY LÁTOK S JEDNOU A DVOMA ZLOŽKAMI

Úvod

a) Pri premene skupenstva látka prijíma (alebo uvoľňuje) energiu obvykle prostredníctvom tepla. Stručne hovoríme: *Na premenu skupenstva sa spotrebuje teplo. Špecifickým skupenským teplom l* nazývame teplo potrebné na premenu skupenstva jednotkovej hmotnosti látky. Podľa prvej vety termodynamickej platí:

$$Q = l = W_2 - W_1 + p(V_2 - V_1)$$

Časť dodaného tepla pri skupenskej premene sa spotrebuje na zväčšenie vnútornej energie $W_2 - W_1$ a časť na prácu, ktorá sa vykoná pri zmene objemu látky z V_1 na V_2, prebiehajúcej za stáleho tlaku p.

b) Chemicky čisté látky sa za daného tlaku vyznačujú určitou teplotou topenia a určitou teplotou varu. Táto teplota sa mení so zmenou vonkajšieho tlaku. *Clausiusova—Clapeyronova rovnica* vyjadruje závislosť teploty skupenskej premeny látok od tlaku v diferenciálnom tvare. Hovorí: Keď látka prechádza pri teplote T zo skupenstva 1 do skupenstva 2 a keď na príslušnú skupenskú premenu sa spotrebuje špecifické skupenské teplo l, elementárna zmena tlaku dp zapríčiní zmenu teploty, pri ktorej látka mení svoje skupenstvo, o dT podľa rovnice

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(v_2 - v_1)}$$

kde v_1, resp. v_2 je špecifický objem príslušného skupenstva látky. Všetky tri skupenstvá látky môžu existovať vedľa seba v rovnováhe len pri celkom určitom tlaku a teplote v *trojnom bode*.

c) *Nasýtenou parou* nazývame paru, ktorá je v termodynamickej rovnováhe so svojou kvapalinou. Jej napätie — pokiaľ para ostáva nasýtená — nezávisí od objemu, ktorý zaberá. S rastúcou teplotou napätie nasýtených pár rastie, až pri určitej, *kritickej teplote* T_k dosahuje maximálnu hodnotu. Nad kritickou teplotou prestáva kvapalná fáza existovať. Tlak nasýtených pár prislúchajúci kritickej teplote sa nazýva *kritický tlak* p_k a príslušný objem *kritický objem* V_k. Izoterma skutočného plynu, zobrazujúca závislosť jeho tlaku od objemu pri kritickej teplote, má v kritickom bode bod obratu s vodorovnou dotyčnicou.

d) Vlastnosti skutočných plynov pomerne dobre opisuje *van der Waalsova stavová rovnica*, ktorá má pre jeden mól plynu tvar

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T$$

kde a, b sú rozličné konštanty pre rozličné plyny, V_m mólový objem plynu, p jeho tlak a R_m plynová konštanta. Člen $\frac{a}{V_m^2}$ sa nazýva *vnútorný (kohézny) tlak*. Pomocou neho charakterizujeme vzájomnú príťažlivosť molekúl.

Súvis medzi van der Waalsovými konštantami a, b a parametrami kritického stavu p_k, V_k, T_k udávajú rovnice

$$V_k = 3b\,; \quad T_k = \frac{8a}{27bR_m}; \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

e) Homogénnu zmes dvoch chemicky čistých látok nazývame *roztokom*. Koncentrácia roztokov sa obyčajne udáva:

1) počtom mólov rozpustenej látky v 1 litri roztoku (*molarita* roztoku),

2) počtom mólov rozpustenej látky, ktoré pripadajú na 1000 g čistého rozpúšťadla (*molalita* roztoku),

3) pomocou hmotnostných percentových čísel (*gramových zlomkov*),

4) pomocou *molárnych zlomkov* podľa tejto definície:

Molárny zlomok A v roztoku s dvoma zložkami A a B je určený vzťahom

$$\nu_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$$

kde n_A, resp. n_B je počet mólov zložky A, resp. B v roztoku.

f) Rovnorodá zmes dvoch kvapalín sa nazýva *ideálna*, keď parciálne tlaky zložiek p_1, resp. p_2 v nasýtenej pare sú úmerné ich molárnym zlomkom ν_1, resp. ν_2 v kvapaline.

Keď máme na mysli roztok neprchavej látky, jeho nasýtené pary pozostávajú iba z pár rozpúšťadla. Keď n_0 je počet mólov rozpúšťadla, n počet mólov rozpustenej látky, p_0 napätie nasýtených pár rozpúšťadla a p napätie nasýtených pár rozpúšťadla nad roztokom, pre relatívne zvýšenie napätia nasýtených pár nad ideálnym roztokom neprchavej látky platí *Raoultov zákon*:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}$$

g) Podľa *van't Hoffa osmotický tlak* π, ktorým pôsobia zriedené, elektricky nevodivé roztoky, je práve taký, ako keby rozpustená látka vypĺňala objem, ktorý roztok zaberá, v plynnom stave. Teda

$$\pi = \frac{m}{M_m V} R_m T = c R_m T$$

V tomto vzťahu m je hmotnosť rozpustenej látky, M_m hmotnosť jedného mólu, V objem roztoku a T jeho teplota. Podiel $\dfrac{m}{M_m V} = \dfrac{n}{V} = c$ predstavuje počet mólov rozpustenej látky pripadajúci na jednotkový objem roztoku.

h) Roztoky tuhnú pri nižšej teplote a vrú pri vyššej teplote ako čisté rozpúšťadlo. Zníženie bodu tuhnutia, resp. zvýšenie bodu varu elektricky nevodivých roztokov určujú rovnice

$$\Delta t_m = -K \frac{m}{M_m V}; \quad \Delta t_V = E \frac{m}{M_m V}$$

kde Δt_m, resp. Δt_V predstavujú rozdiel medzi teplotou tuhnutia, resp. varu čistého rozpúšťadla a roztoku, m je hmotnosť rozpustenej látky, M_m mólová hmotnosť tejto látky a V objem roztoku. *Kryoskopickú konštantu K* a *ebulioskopickú konštantu E* možno vypočítať zo vzťahu

$$K = \frac{R_m T_m^2}{\varrho_0 l_m}; \quad E = \frac{R_m T_V^2}{\varrho_0 l_V}$$

pričom R_m je plynová konštanta, T_m a T_V a teplota tuhnutia a varu čistého rozpúšťadla, l_m a l_V skupenské teplo topenia a varu čistého rozpúšťadla a ϱ_0 hustota čistého rozpúšťadla.

Príklady

444. Olovo sa topí pri tlaku $p_1 = 0{,}1$ MPa pri teplote $t_1 = 327$ °C. Vypočítajte, aké je špecifické skupenské teplo topenia olova pri tejto teplote, keď pri zväčšení vonkajšieho tlaku o $\Delta p = 0{,}1$ MPa sa teplota topenia zvýši o $\Delta t = 0{,}008$ °C a topením olovo zväčšuje svoj objem o $k = 3{,}4$ %!

Riešenie:

Špecifické skupenské teplo topenia určíme z Clausiusovej—Clapeyronovej rovnice

$$l_t = T(v_2 - v_1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} \qquad (1)$$

Špecifický objem tuhej fázy $v_1 = \frac{1}{\varrho}$, kde ϱ je hustota olova. Špecifický objem kvapalnej fázy určíme z podmienky, že jej objem je o k % väčší ako objem tuhej fázy, teda

$$v_2 = v_1 + \Delta v = v_1 + \frac{v_1}{100}k$$

Pretože teplotná zmena ΔT je veľmi malá, možno deriváciu $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}$ nahradiť podielom $\frac{\Delta p}{\Delta T}$.

Po dosadení do rovnice (1) dostaneme

$$l_t = T_1 \frac{v_1}{100} k \frac{\Delta p}{\Delta T} =$$

$$= 600\ \mathrm{K}\,\frac{1}{11{,}3\,.\,10^3\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}}\cdot 3{,}4\cdot\frac{10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}}{0{,}008\ \mathrm{K}} = 22{,}6\,.\,10^3\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}$$

445. Závislosť teploty topenia od vonkajšieho tlaku pri α-naftole možno vyjadriť rovnicou

$$T = a + bp + cp^2$$

kde $a = 369$ K, $b = 2{,}45\,.\,10^{-7}$ K.Pa^{-1} a $c = -6{,}3\,.\,10^{-17}$ K.Pa^{-2}.

Vypočítajte, aké je špecifické skupenské teplo topenia tejto látky pri tlaku $p_0 = 10$ MPa, keď pri topení sa špecifický objem tuhej fázy zväčší o $\Delta v =$ $= 0{,}107$ cm^3.g^{-1}!

Riešenie:

Pri tlaku $p = p_0$ sa látka topí pri teplote T_0, pre ktorú platí:

$$T_0 = a + bp_0 + 2cp_0^2$$

Derivovaním závislosti $T(p)$ podľa tlaku dostávame

$$\frac{dT}{dp} = b + 2cp$$

odkiaľ pre zmenu tlaku nasýtených pár v závislosti od teploty všeobecne vyplýva:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{b + 2cp}$$

a pre tlak $p = p_0$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = \frac{1}{b + 2cp_0}$$

Špecifické skupenské teplo topenia vypočítame potom z Clausiusovej—Clapeyronovej rovnice:

$$l_t = T_0(v_2 - v_1)\,\frac{dp}{dT}$$

Keďže

$$T_0 = 371{,}5\ \mathrm{K};\quad \Delta v = v_2 - v_1 = 0{,}107\ \mathrm{cm^3\,.\,g^{-1}}$$

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{p=p_0} = 4{,}1\,.\,10^6\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}\,.\,K^{-1}}$$

potom

$$l_t = 371{,}5\ \mathrm{K}\,.\,0{,}107\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m^3\,.\,kg^{-1}}\,.\,4{,}1\,.\,10^6\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}\,.\,K^{-1}} =$$

$$= 1{,}63\,.\,10^5\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}$$

446. Aký bude tlak nasýtenej vodnej pary pri teplote $t_1 = 80\ °\mathrm{C}$, keď závislosť špecifického skupenského tepla vyparovania vody od teploty je vyjadrená približným vzťahom

$$l = a - bT$$

kde $a = 3{,}2\,.\,10^6\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}$ a $b = 2511\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}$?

Pri výpočte pre plynnú fázu použite stavovú rovnicu a špecifický objem kondenzovanej fázy vzhľadom na plynnú pri danej teplote zanedbajte.

Riešenie:

Podľa Clausiusovej—Clapeyronovej rovnice platí:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{(v_2 - v_1)T}$$

a po dosadení podmienky $l = a - bT$, $v_1 \ll v_2$ bude:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{a-bT}{v_2T}$$

Zo stavovej rovnice $pV=\frac{m}{M_m}R_mT$ pre špecifický objem plynnej fázy vyplýva vzťah

$$v_2=\frac{V}{m}=\frac{R_mT}{M_mp}$$

čo po dosadení do (1) a úprave dáva:

$$\frac{dp}{p}=\frac{M_m}{R_m}\frac{a-bT}{T^2}dT$$

Keď obe strany integrujeme, dostaneme

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\int_{T_0}^{T}\frac{M_m}{R_m}\cdot\frac{a-bT}{T^2}dT$$

t. j.

$$\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{M_m}{R_m}\left[a\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)+b\ln\frac{T}{T_0}\right]$$

takže

$$p=p_0\exp\left\{-\frac{M_m}{R_m}\left[a\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)+b\ln\frac{T}{T_0}\right]\right\}$$

Pri teplote $t_0=100$ °C tlak nasýtených vodných pár $p_0=1{,}013\,.\,10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}$, takže po dosadení číselných hodnôt bude platiť

$$p=1{,}013\,.\,10^5\ \mathrm{N\,.\,m^{-2}}\,.\exp\left\{-\frac{18\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}}{8{,}31\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,mol^{-1}}}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[32\,.\,10^6\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}\left(\frac{1}{353}\ \mathrm{K^{-1}}-\frac{1}{373}\ \mathrm{K^{-1}}\right)+2511\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,.\,K^{-1}}\,.\,2{,}3\log\frac{353}{373}\right]\right\}=$$

$$=47\,680\ \mathrm{Pa}$$

Výsledok je v dobrom súhlase s hodnotou získanou experimentálne (47 343 Pa).

447. Vypočítajte, aká práca je potrebná na premenu $m=1$ g vody teploty $t=100$ °C na nasýtenú vodnú paru tej istej teploty pri atmosferickom tlaku $p_a=1{,}013\,.\,10^5$ Pa. Ako sa zväčší vnútorná energia vody pri tejto skupenskej premene? Špecifický objem vodnej pary pri týchto podmienkach $v_2=1674\ \mathrm{cm^3\,.\,g^{-1}}$, vody $v_1=1{,}04\ \mathrm{cm^3\,.\,g^{-1}}$.

Riešenie:

Podľa prvej vety termodynamickej dodané skupenské teplo sa spotrebuje na zmenu vnútornej energie a na vykonanie práce spojenej so zmenou objemu vyparenej vody. Bude teda platiť

$$l = W_2 - W_1 + A'$$

Pri skupenskej premene sa tlak nemení, no špecifický objem vody sa mení z v_1 na v_2. Pre objemovú prácu pri stálom tlaku máme:

$$A' = \int_{v_1}^{v_2} p \, \mathrm{d}V = p(v_2 - v_1) = 1{,}013 \, . \, 10^5 \, \mathrm{N \, . \, m^{-2}} \, . \, 1674 \, . \, 10^{-3} \, \mathrm{m^3 \, . \, kg^{-1}} =$$

$$= 169{,}6 \, . \, 10^3 \, \mathrm{J \, . \, kg^{-1}}$$

Zmena vnútornej energie bude:

$$W_2 - W_1 = l - A' = 2256 \, . \, 10^3 \, \mathrm{J \, . \, kg^{-1}} - 169{,}6 \, . \, 10^3 \, \mathrm{J \, . \, kg^{-1}} =$$

$$= 2{,}086 \, . \, 10^6 \, \mathrm{J \, . \, kg^{-1}}$$

448. Určite teplotu a tlak trojného bodu arzénu, keď je závislosť nasýtených pár od teploty daná rovnicou

a) pre kvapalnú fázu

$$p_1 = k_1 \mathrm{e}^{a_1/T} \tag{1}$$

b) pre pevnú fázu

$$p_2 = k_2 \mathrm{e}^{a_2/T} \tag{2}$$

ak $a_1 = -5658$ K; $a_2 = -15\,978$ K, $k_1 = 652$ MPa a $k_2 = 8{,}4 \, . \, 10^6$ MPa!

Riešenie:

V trojnom bode pri celkom určitom tlaku a teplote existujú vedľa seba v rovnováhe všetky tri skupenstvá látky. Napätie nasýtených pár nad kvapalinou i nad pevnou fázou musí byť teda pri teplote trojného bodu rovnaké.

Príslušnú teplotu určíme porovnaním rovníc (1) a (2) a ich riešením:

$$p_1 = p_2$$

$$k_1 \mathrm{e}^{a_1/T} = k_2 \mathrm{e}^{a_2/T}$$

$$\exp\left(\frac{a_1 - a_2}{T}\right) = \frac{k_2}{k_1}$$

takže

$$\frac{a_1 - a_2}{T} = 2{,}3 \log \frac{k_2}{k_1}$$

a teda

$$T = \frac{a_1 - a_2}{2{,}3 \log \dfrac{k_2}{k_1}}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude

$$T = \frac{-5658 \text{ K} + 15\,978 \text{ K}}{2{,}3 \log \dfrac{8{,}4 \,.\, 10^6 \text{ MPa}}{652 \text{ MPa}}} = 1094 \text{ K}$$

Príslušný tlak určíme z rovnice (1) alebo (2)

$$p = 652 \text{ MPa} \,.\, \mathrm{e}^{-\frac{5658}{1091}} = 3{,}6 \text{ MPa}$$

Veličiny charakterizujúce trojný bod arzénu majú hodnoty: 3,6 MPa a 821 °C.

449. Nasýtená vodná para sa adiabaticky a vratne rozpína z teploty $t_1 = 195$ °C na teplotu $t_2 = 120$ °C a pritom určitá jej časť skvapalnie. Vypočítajte, aké bude zloženie zmesi nasýtenej pary a vody po expanzii! Príslušné špecifické skupenské teplá vyparovania sú: $l_1 = 1{,}96 \,.\, 10^6 \text{ J} \,.\, \text{kg}^{-1}$ a $l_2 = 2{,}2 \,.\, 10^6 \text{ J} \,.\, \text{kg}^{-1}$.

Riešenie:

Pri adiabatickej vratnej zmene sa entropia sústavy nemení. V začiatočnom stave má m kilogramov nasýtenej vodnej pary entropiu (uvažujeme ju v základnom stave, keď má teplotu T_0) danú vzťahom

$$S_1 = S_1' + m \frac{l_1}{T_1} \tag{1}$$

Po adiabatickej expanzii na teplotu T_2 určité množstvo pár (y kilogramov) kondenzuje a entropiu vzniknutej zmesi (voda a nasýtená para) nájdeme ako súčet entropií oboch zložiek, t. j.

$$S_2 = \frac{y}{m} S_2' + \frac{m-y}{m} S_2' + (m-y) \frac{l_2}{T_2} \tag{2}$$

kde S_1' a S_2' sú entropie m kg vody pri teplotách T_1 a T_2. Z rovnice (2) po úprave vyplýva:

$$S_2 = S_2' = (m-y) \frac{l_2}{T_2}$$

Pretože ide o vratnú adiabatickú stavovú zmenu, entropia sa pri nej nemení a z porovnania rovníc (1) a (2) vyplýva:

$$S_1' + m\frac{l_1}{T_1} = S_2' + (m-y)\frac{l_2}{T_2} \tag{3}$$

Podiel $x = \dfrac{m-y}{m}$ predstavuje relatívne množstvo nasýtených vodných pár po adiabatickej zmene. Pre túto hodnotu vychádza z rovnice (3) vzťah

$$x = \frac{m-y}{m} = \frac{T_2}{l_2} \cdot \left[\frac{S_1' - S_2'}{m} + \frac{l_1}{T_1}\right] \tag{4}$$

Entropiu m kg vody S' pri teplote T vzhľadom na základný stav teploty T_0 určíme zo vzťahu

$$S' = \int \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_0}^{T} \frac{mc\,\mathrm{d}T}{T} = mc \ln \frac{T}{T_0}$$

a

$$S_1' - S_2' = mc \ln \frac{T_1}{T_0} - mc \ln \frac{T_2}{T_0} = mc \ln \frac{T_1}{T_2}$$

Po dosadení do rovnice (4) máme:

$$x = \frac{T_2}{l_2}\left[c \ln \frac{T_1}{T_2} + \frac{l_1}{T_1}\right].$$

Číselne

$$x = \frac{393\ \mathrm{K}}{2{,}2\,.\,10^6\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}} \cdot$$

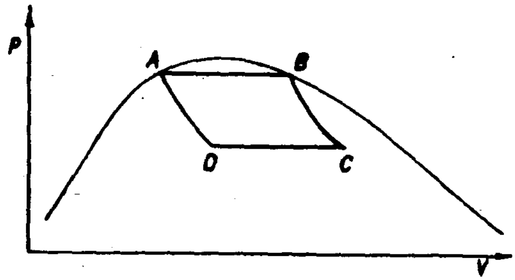
$$\cdot\left[4186\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}\,K^{-1}}\,.\,2{,}3 \log \frac{468}{393} + \frac{1{,}96\,.\,10^6\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}}{468\ \mathrm{K}}\right] = 0{,}88$$

Para, ktorá vznikne po adiabatickej expanzii, bude obsahovať 88 % nasýtených vodných pár a 12 % vody.

450. Carnotov kruhový dej prebieha medzi teplotami T_1 a T_2. Pracovnou látkou je $m = 1$ kg vodnej pary, ktorá ostáva počas celého deja nasýtená. Zobrazte tento dej v $p-V$ diagrame a vypočítajte jeho účinnosť!

Riešenie:

Z podmienky, že vodná para má pri kruhovom deji ostať nasýtená, vyplýva, že krivka zobrazujúca cyklus v $p-V$ diagrame musí ležať celá vnútri oblasti, v ktorej existuje kvapalná a plynná fáza vedľa seba. Izotermická zmena prebieha pri stálom tlaku, preto sú izotermy totožné s izobarami *(obr. 89)*.



Obr. 89

V začiatočnom stave A máme $m = 1$ kg kvapalnej fázy pri teplote T_1 a entropii S_1'.

a) V priebehu izotermickej expanzie (dej AB) sa voda úplne vyparí na nasýtenú paru, na čo treba zvonka dodať teplo

$$Q_1 = ml_1 \tag{1}$$

kde l_1 je špecifické skupenské teplo vyparovania pri teplote T_1.

b) V priebehu adiabatickej expanzie (dej BC) teplota pary poklesne na T_2, časť pár skvapalnie a vzniknutá zmes pary a vody obsahuje množstvo nasýtených pár, dané vzťahom

$$x_C = \frac{T_2}{l_2}\left(S_1' - S_2' + m\,\frac{l_1}{T_1}\right) \tag{2}$$

kde S_2' je entropia $m = 1$ kg vody pri teplote T_2, l_2 špecifické skupenské teplo vyparovania pri teplote T_2.

c) V priebehu izotermickej kompresie (dej CD) ďalšia časť pary skvapalnie, obsah nasýtených pár poklesne na x_D a množstvo kondenzovanej pary je

$$x_C - x_D$$

Pri tomto deji sa uvoľní teplo

$$Q_2' = (x_C - x_D)l_2 \tag{3}$$

d) Adiabatickou kompresiou (dej DA) zmes nadobudne pôvodný stav, pričom celá skvapalnie. Entropia sa pri tomto deji nemení, preto je entropia S_2 sústavy v stave D rovnaká ako entropia S_1' v stave A, ale

$$S_2 = (m - x_D)\,\frac{S_2'}{m} + x_D\left(\frac{S_2'}{m} + \frac{l_2}{T_2}\right) = S_1'$$

odkiaľ

$$x_D = (S_1' - S_2')\frac{T_2}{l_2} \tag{4}$$

Použitím vzťahu (2) a (4) dostaneme:

$$x_C - x_D = m\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{l_1}{l_2}$$

a pre uvoľnené teplo Q_2' z (3) vyplýva:

$$Q_2' = m\frac{T_2}{T_1}l_1$$

Pri jednom Carnotovom cykle sa získa práca

$$A' = Q_1 - Q_2' = ml_1 - m\frac{T_2}{T_1}l_1 = ml_1\frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

takže účinnosť deja

$$\eta = \frac{A'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

451. V nádobe objemu $V = 2\ \mathrm{m}^3$ je $m = 4$ kg kyslíka pri teplote $t = 29$ °C. Aký je jeho tlak? Ako sa tento tlak zmení, keď kyslík pri stálom objeme zohrejeme na dvojnásobnú teplotu? Pri výpočte použite van der Waalsovu rovnicu.

Riešenie:

Pre jeden mól reálneho plynu má van der Waalsova rovnica tvar

$$\left(p + \frac{a}{V_\mathrm{m}^2}\right)(V_\mathrm{m} - b) = R_\mathrm{m}T \tag{1}$$

kde V_m predstavuje mólový objem plynu.

Ak máme na mysli ľubovoľné množstvo plynu s hmotnosťou m, pri danej teplote a tlaku mu prislúcha objem

$$V = nV_\mathrm{m}$$

kde n je počet mólov plynu.

Keď za V_m dosadíme do vzťahu (1), po úprave máme:

$$\left(p + n^2\frac{a}{V^2}\right)(V - nb) = nR_\mathrm{m}T$$

z čoho

$$p = \frac{nR_m T}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2}$$

Pre tlak kyslíka pred stavovou zmenou po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$p = \frac{\frac{4\ \mathrm{kg}}{32 \, . \, 10^{-3}\ \mathrm{kg \, . \, mol^{-1}}} 8{,}314\ \mathrm{J \, . \, K^{-1} \, . \, mol^{-1} \, . \, 302\ K}}{2\ \mathrm{m^3} - \frac{4\ \mathrm{kg}}{32 \, . \, 10^{-3}\ \mathrm{kg \, . \, mol^{-1}}} 3 \, . \, 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \, . \, mol^{-1}}} -$$

$$- \left(\frac{4\ \mathrm{kg}}{32 \, . \, 10^{-3}\ \mathrm{kg \, . \, mol^{-1}}}\right)^2 \frac{0{,}137\ \mathrm{N \, . \, m^4 \, . \, mol^{-2}}}{2^2\ \mathrm{m^6}} = 0{,}157\ \mathrm{MPa}$$

Po stavovej zmene sa tlak zmení o

$$\Delta p = p' - p = \frac{nR_m(T_0 + 2t)}{V - nb} - n^2 \frac{a}{V^2} - \frac{nR_m(T_0 + t)}{V - nb} + n^2 \frac{a}{V^2} =$$

$$= n \frac{R_m t}{V - nb} = 0{,}015\ \mathrm{MPa}$$

452. Jeden mól reálneho plynu, správajúceho sa podľa van der Waalsovej stavovej rovnice, zohrejeme z teploty t_1 na teplotu t_2. Jeho objem sa pritom zmení z V_1 na V_2. Vypočítajte, ako sa pri tejto stavovej zmene zmenila vnútorná energia plynu!

Riešenie:

Skutočný plyn pri zmene svojho objemu koná prácu aj proti vnútorným silám, ktoré majú svoj pôvod vo vzájomnom pôsobení molekúl. Vnútorný tlak p_i, ktorým toto vzájomné pôsobenie vystihujeme, určíme podľa vzťahu $p_i = \frac{a}{V^2}$, a celková práca, ktorú plyn vykoná proti vnútornému tlaku, t. j.

$$A' = \int_{V_1}^{V_2} p_i \, \mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} \, \mathrm{d}V = a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

sa spotrebuje na zvýšenie vnútornej energie plynu. O túto hodnotu je teda pri uvedenej stavovej zmene väčšia zmena vnútornej energie reálneho plynu, ako by bola za rovnakých podmienok u ideálneho plynu. Keď predpokladáme, že tepelná kapacita jedného mólu plynu nezávisí od teploty, pre celkovú zmenu vnútornej energie platí vzťah

$$W_2 - W_1 = C_V(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)$$

453. Vypočítajte, ako sa zmení teplota plynu správajúceho sa podľa van der Waalsovej rovnice pri Joulovom—Thomsonovom pokuse! Predpokladajte, že konštantu b vo van der Waalsovej rovnici možno zanedbať.

Riešenie:

V zariadení Joulovho—Thomsonovho pokusu sa plyn adiabaticky a nevratne rozpína na väčší objem. Tento dej prebieha za konštantnej entalpie plynu. Platí preto $H_1 = H_2$, čiže

$$W_1 + p_1 V_1 = W_2 + p_2 V_2 \tag{1}$$

kde sa indexy 1, resp. 2 vzťahujú na začiatočný, resp. konečný stav plynu. Pre súčin pV z van der Waalsovej rovnice (pre 1 mól) vyplýva:

$$pV = \frac{R_m T V}{V - b} - \frac{a}{V}$$

a pretože $b = 0$,

$$pV = R_m T - \frac{a}{V} \tag{2}$$

Pre zmenu vnútornej energie reálneho plynu použijeme vzťah odvodený v príklade 452:

$$W_2 - W_1 = C_V(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) \tag{3}$$

Keď vzťahy (2) a (3) dosadíme do (1), vyjde:

$$C_V(T_2 - T_1) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = R_m T_1 - \frac{a}{V_1} - R_m T_2 + \frac{a}{V_2}$$

odkiaľ po úprave dostaneme:

$$T_2 - T_1 = \frac{2a}{C_V + R_m}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$$

Pretože

$$V_2 > V_1, \text{ bude } T_2 < T_1$$

Plyn sa ochladzuje. Ide o kladný Joulov—Thomsonov jav.

454. Vlastnosti niektorých skutočných plynov možno dobre opísať rovnicou

$$\left(p + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = R_m T$$

Vypočítajte hodnoty stavových veličín p, V, T v kritickom stave pomocou konštánt a a b!

Riešenie:

V kritickom stave má izoterma plynu inflexný bod a dotyčnica v tomto bode je rovnobežná s osou V.

Preto musia byť splnené podmienky

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}=0; \quad \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2}=0 \tag{1}$$

Z udanej stavovej rovnice vyplýva:

$$p=\frac{R_\mathrm{m}T}{V-b}-\frac{a}{TV^2} \tag{2}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}=-\frac{R_\mathrm{m}T}{(V-b)^2}+\frac{2a}{TV^3}; \quad \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2}=\frac{2R_\mathrm{m}T}{(V-b)^3}-\frac{6a}{TV^4}$$

V kritickom stave použitím podmienky (1) máme:

$$\frac{R_\mathrm{m}T_\mathrm{k}}{(V_\mathrm{k}-b)^2}=\frac{2a}{T_\mathrm{k}V_\mathrm{k}^3}; \quad \frac{2R_\mathrm{m}T_\mathrm{k}}{(V_\mathrm{k}-b)^3}=\frac{6a}{T_\mathrm{k}V_\mathrm{k}^4} \tag{3}$$

Keď prvú rovnicu vydelíme druhou, po úprave dostaneme:

$$V_\mathrm{k}=3b$$

Pre T_k a p_k z rovníc (3) a (2) vyplýva:

$$T_\mathrm{k}^2=\frac{8}{27}\cdot\frac{a}{R_\mathrm{m}b}; \quad p_\mathrm{k}^2=\frac{aR_\mathrm{m}}{216b^3}$$

455. Vypočítajte, ako sa zmení entropia jedného mólu dusíka, ktorý pri zohriatí z teploty $t_1=27$ °C na 100 °C zmení svoj objem z $V_1=2$ l na $V_2=3$ l! Predpokladáme, že plyn sa správa podľa van der Waalsovej rovnice.

Riešenie:

Pre elementárnu zmenu entropie platí:

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\frac{\mathrm{d}W+\mathrm{d}A'}{T} \tag{1}$$

Zmena vnútornej energie reálneho plynu $\mathrm{d}W$ je vzhľadom na ideálny plyn väčšia o prácu, ktorú plyn vykoná proti vnútornému tlaku (pozri aj príklad 452).

Táto práca je daná vzťahom

$$\mathrm{d}A_i' = \frac{a}{V^2}\,\mathrm{d}V$$

a pre elementárnu zmenu vnútornej energie možno písať:

$$dW = C_V\,\mathrm{d}T + \frac{a}{V^2}\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

Prácu, ktorú plyn koná proti vonkajším silám, vypočítame zo vzťahu

$$\mathrm{d}A' = p\,\mathrm{d}V$$

a keď za p dosadíme z van der Waalsovej rovnice, dostaneme:

$$\mathrm{d}A' = \left(\frac{R_m T}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)\mathrm{d}V \tag{3}$$

Keď vzťah (2) a (3) dosadíme do (1), po úprave máme:

$$\mathrm{d}S = C_V\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + R_m\,\frac{\mathrm{d}V}{V-b}$$

a pre celkovú zmenu entropie dostaneme:

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_V\,\frac{\mathrm{d}T}{T} + \int_{V_1}^{V_2} R_m\,\frac{\mathrm{d}V}{V-b} = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R_m \ln\frac{V_2-b}{V_1-b}$$

Číselne

$$S_2 - S_1 = 20{,}8\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.2{,}3\log\frac{373\ \mathrm{K}}{300\ \mathrm{K}} +$$

$$+\,8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}.2{,}3\log\frac{(3.10^{-3} - 0{,}04.10^{-3})\mathrm{m^3.mol^{-1}}}{(2.10^{-3} - 0{,}04.10^{-3})\mathrm{m^3.mol^{-1}}}$$

$$S_2 - S_1 = 7{,}95\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$$

456. Určité množstvo bezvodého chloridu vápenatého ($CaCl_2$) s hmotnosťou $m_1 = 53{,}846$ g sme rozpustili v $m_2 = 100$ g vody pri teplote $t = 18$ °C. Hustota vytvoreného roztoku $\varrho = 1342\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. Vyjadrite koncentráciu roztoku:

a) v hmotnostných percentách p, b) v molarite c_m, c) v molarite C_m a d) v molárnych zlomkoch!

Riešenie:

a) Keď hmotnosti jednotlivých zložiek sú m_1 a m_2, platí:

$$p = 100\,\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

t. j.

$$p = 100\,\frac{53{,}846\ \text{g}}{53{,}846\ \text{g} + 100\ \text{g}} = 35{,}0\ \%$$

b) Molarita roztoku c_m je počet mólov rozpustenej látky v 1 litri roztoku. Keď má roztok objem V a rozpustená látka obsahuje n_1 mólov, molarita je daná vzťahom

$$c_m = \frac{n_1}{V}$$

Ďalej možno písať

$$V = \frac{m_1 + m_2}{\varrho}; \quad n_1 = \frac{m_1}{M_1}$$

Hmotnosť jedného mólu rozpustenej látky M_1 ľahko určíme pomocou relatívnych atómových hmotností jej zložiek. Pre $CaCl_2$ platí $M_1 = 111\ \text{g.mol}^{-1}$, takže

$$c_m = \frac{m_1 \varrho}{M_1(m_1 + m_2)} = \frac{53{,}846\ \text{g}.1342\ \text{g.l}^{-1}}{111\ \text{g.mol}^{-1}.153{,}846\ \text{g}} =$$

$$= 4{,}23\ \text{mol.l}^{-1}$$

c) Molalita roztoku C_m je počet mólov rozpustenej látky v 1000 g rozpúšťadla.

Na $m_2 = 100$ g rozpúšťadla pripadá $n_1 = \dfrac{m_1}{M_1}$ mólov rozpustenej látky. Pre molalitu potom platí

$$C_m = 10 n_1 = 10\,\frac{53{,}846\ \text{g}}{111\ \text{g.mol}^{-1}} = 4{,}85\ \text{mol}$$

d) Molárny zlomok zložky A v roztoku s dvoma zložkami A a B je určený vzťahom

$$\nu_A = \frac{A}{n_A + n_B}$$

kde n_A, n_B je počet mólov zložky A a B. Molárny zlomok $CaCl_2$ je potom daný vzťahom

$$\nu_1 = \frac{\dfrac{m_1}{M_1}}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}} = \frac{\dfrac{53{,}846\ \text{g}}{111\ \text{g.mol}^{-1}}}{\dfrac{53{,}846\ \text{g}}{111\ \text{g.mol}^{-1}} + \dfrac{100\ \text{g}}{18\ \text{g.mol}^{-1}}} = 0{,}08$$

457. Celkový tlak nasýtenej pary nad 100 kg roztoku benzénu (C_6H_6) a toluénu ($C_6H_5CH_3$) pri teplote 100 °C je 0,126 MPa. Vypočítajte, koľko benzénu a toluénu obsahuje roztok, keď napätie nasýtenej pary samého benzénu pri danej teplote je $p_1^0 = 0{,}179$ MPa a toluénu $p_2^0 = 0{,}074$ MPa! Roztok považujte za ideálny!

Riešenie:

Rovnorodá zmes dvoch kvapalín je ideálna, keď parciálne tlaky zložiek (p_1, p_2) v nasýtenej pare sú úmerné ich molárnych zlomkom (v_1, v_2) v kvapaline. Keď napätie nasýtených pár prvej zložky pri danej teplote je p_1^0 a druhej p_2^0, pre parciálne tlaky potom z úmery vyplýva:

$$p_1 : p_1^0 = v_1 : 1; \quad p_2 : p_2^0 = v_2 : 1 \tag{1}$$

$$p_1 = v_1 p_1^0; \quad p_2 = v_2 p_2^0$$

kde

$$v_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}; \quad v_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \tag{2}$$

hodnoty n_1, n_2 predstavujú príslušný počet mólov jednotlivých zložiek.

Pretože $v_1 + v_2 = 1$, pri použití vzťahu (1) možno písať:

$$\frac{p_1}{p_1^0} + \frac{p_2}{p_2^0} = 1$$

Celkový tlak nasýtenej pary nad roztokom sa rovná súčtu parciálnych tlakov zložiek:

$$p_1 + p_2 = p$$

Táto rovnica spolu s predchádzajúcou poskytuje riešenie pre p_1 a p_2:

$$p_1 = p_1^0 \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p_2^0}; \quad p_2 = p_2^0 \frac{p_1^0 - p}{p_1^0 - p_2^0} \tag{3}$$

Z rovnice (1) a (2) vychádza:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_2^0}{p_1^0} = \frac{n_1}{n_2}$$

a po dosadení zo vzťahov (3), ak uvážime, že $n_1 = \dfrac{m_1}{M_1}$ a $n_2 = \dfrac{m_2}{M_2}$, po úprave dostávame:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{p - p_2^0}{p_1^0 - p}$$

Tento vzťah s rovnicou $m = m_1 + m_2$ poskytuje hľadané riešenie

$$m_1 = \frac{M_1(p - p_2^0)}{M_2(p_2^0 - p) + M_1(p - p^2_0)}\, m$$

a $m_2 = m - m_1$.

Číselne

$$M_1 = 78 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}; \quad M_2 = 92 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}$$

$$m_1 = \frac{78 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}(0{,}126 - 0{,}074) \,.\, 10^6\ \text{N.m}^{-2}}{92 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}(0{,}179 - 0{,}126) \,.\, 10^6\ \text{N.m}^{-2} + 78 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}(0{,}126 - 0{,}074) \,.\, 10^6\ \text{MPa}}\ 100\ \text{kg}$$

$$m_1 = 45\ \text{kg}; \quad m_2 = 55\ \text{kg}$$

458. V jednom litri vody sme rozpustili $m = 50$ g nedisociujúcej látky pri teplote $t = 95$ °C. Napätie nasýtených pár nad roztokom bolo $p = 0{,}8437$ MPa. Určite relatívnu molekulovú hmotnosť rozpustenej látky! Napätie nasýtených vodných pár pri teplote 95 °C je 0,8453 MPa.

Riešenie:

Z Raoultovho zákona

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{n}{n_0 + n}$$

určíme počet mólov rozpustenej látky n a pomocou vzťahu $n = \dfrac{m}{M_m}$ hmotnosť jedného mólu, a tým aj relatívnu molekulovú hmotnosť:

$$n = \frac{p_0 - p}{p}\, n_0 = \frac{m}{M_m}$$

$$M_m = \frac{p}{n_0(p_0 - p)}\, m$$

kde n_0 je počet mólov vody, t. j. $n_0 = \dfrac{m_0}{M_0} = \dfrac{1000\ \text{g}}{18\ \text{g.mol}^{-1}}$. Po dosadení číselných hodnôt bude

$$M_m = \frac{0{,}8437 \,.\, 10^6\ \text{N.m}^{-2}}{\dfrac{1\ \text{kg}}{18 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.mol}^{-1}}(0{,}8453 - 0{,}8437) \,.\, 10^6\ \text{N.m}^{-2}} \cdot 5 \,.\, 10^{-2}\ \text{kg} =$$

$$= 0{,}475\ \text{kg.mol}^{-1}$$

Relatívna molekulová hmotnosť $\mu = 475$.

459. V jednom litri vody sme rozpustili $m = 2{,}92$ g chloridu sodného pri teplote $t = 27$ °C. Aký bude osmotický tlak v roztoku, keď 44 % molekúl NaCl je disociovaných na ióny?

Riešenie:

Osmotický tlak látok, ktoré tvoria elektricky vodivé roztoky, je vždy väčší, ako udáva van't Hoffov zákon, lebo molekuly látky pri rozpúšťaní disociujú na ióny, ktoré účinkujú ako samostatné molekuly. Tým sa zvyšuje počet častíc pripadajúcich na jednotkový objem rozpúšťadla a osmotický tlak sa zväčšuje.

Nech n_0 je počet molekúl rozpustenej látky v jednotkovom objeme za predpokladu, že nenastáva disociácia. Keď z tohto počtu i molekúl disociuje tak, že každá sa štiepi na dva ióny, po disociácii bude množstvo častíc nachádzajúcich sa v jednotkovom objeme dané vzťahom

$$n_0' = 2i + (n_0 - i)$$

Osmotický tlak je priamo úmerný počtu častíc v jednotkovom objeme, preto v dôsledku disociácie narastie v pomere

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{n_0'}{n_0} = \frac{2i + (n_0 - i)}{n_0} = k + 1$$

kde sme podiel počtu disociovaných molekúl a celkového počtu molekúl n_0 označili k (stupeň disociácie). Potom

$$\pi' = \pi(k + 1)$$

a keď použijeme van't Hoffov zákon, bude platiť:

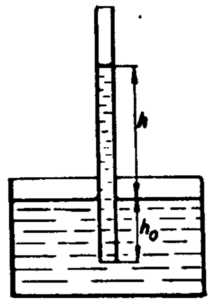
$$\pi' = \frac{m}{MV} R_m T(k + 1)$$

Hmotnosť 1 mólu NaCl je 58,5 g, $k = 0{,}44$, takže číselne

$$\pi' = \frac{2{,}92 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{kg} \,.\, 8{,}31\ \mathrm{J} \,.\, \mathrm{K}^{-1} \,.\, \mathrm{mol}^{-1} \,.\, 300\ \mathrm{K}(0{,}44 + 1)}{58{,}5 \,.\, 10^{3}\ \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{mol}^{-1} \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m}^{3}} =$$

$$= 1{,}79 \,.\, 10^{5}\ \mathrm{N} \,.\, \mathrm{m}^{-2}$$

460. Valcová trubica obsahujúca roztok trstinového cukru ($C_{12}H_{22}O_{11}$) a dole uzavretá polopriepustnou blanou je ponorená do inej nádoby, v ktorej je čistá voda. Po ustálení rovnováhy je hladina roztoku vo valcovej nádobe vo výške $h = 10$ cm nad hladinou vody. Prierez valcovej nádoby $S = 2\ \mathrm{cm}^2$, teplota roztoku $t_0 = 13$ °C. Blana je v hĺbke $h_0 = 3$ cm pod hladinou vody. Vypočítajte, koľko cukru je v roztoku! Hustota roztoku sa len nepatrne líši od hustoty vody *(obr. 90)*.



Obr. 90

Riešenie:

Polopriepustná blana má tú vlastnosť, že neprepúšťa rozpustenú látku, ale čisté rozpúšťadlo cez ňu dobre preniká. Preto bude voda postupne vnikať do roztoku cukru a podľa experimentálnej skúsenosti hladina roztoku bude vyššie ako hladina vody. Po určitom čase vznikne rovnovážny stav, keď sa hladina roztoku ustáli v takej výške, že hydrostatický tlak kvapalného stĺpca nad hladinou vody sa vyrovná osmotickému tlaku roztoku. Potom platí

$$\pi = h\varrho g$$

Vzhľadom na podmienku $\varrho \cong \varrho_0 \cong 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ a použitím van't Hoffovho zákona pre osmotický tlak možno písať:

$$\frac{m}{M_m V} R_m T = hg\varrho_0$$

odkiaľ

$$m = \frac{M_m Vhg\varrho_0}{R_m T}$$

Mólová hmotnosť cukru $M_m = 342 \,.\, 10^{-3}$ kg, objem roztoku

$$V = S(h + h_0)$$

takže po dosadení

$$m = \frac{M_m gSh(h+h_0)\varrho_0}{R_m T}$$

t. j.

$$m = \frac{342 \,.\, 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1} \,.\, 9{,}81 \text{ m.s}^{-2} \,.\, 2 \,.\, 10^{-4} \text{ m}^2 \,.\, 10 \,.\, 10^{-2} \text{ m}(10+3) \,.\, 10^{-2} \text{ m} \,.\, 1 \,.\, 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}{8{,}314 \text{ J.K}^{-1} \,.\, \text{mol}^{-1} \,.\, 276 \text{ K}} =$$

$$= 3{,}67 \,.\, 10^{-6} \text{ kg}$$

461. Roztok, ktorý vznikne rozpustením $m = 30$ g látky v 300 cm^3 vody, tuhne pri teplote o 0,6 °C nižšej ako čistá voda. Aká je relatívna molekulová hmotnosť látky? Látka pri rozpúšťaní nedisociuje.

Riešenie:

Zníženie bodu tuhnutia roztoku v zriedených roztokoch je priamo úmerné počtu mólov rozpustenej látky v 1 litri rozpúšťadla C. Keď je v objeme V rozpustených m gramov látky, ktorej jeden mól má hmotnosť M, potom

$$C_m = \frac{m}{M_m V}$$

a zníženie bodu tuhnutia bude:

$$\Delta t = -K \frac{m}{M_m V}$$

odkiaľ

$$M_m = -\frac{Km}{\Delta t V}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$M_m = -\frac{1{,}86\ \mathrm{K.mol^{-1}.30.10^{-3}\ kg}}{-0{,}6\ \mathrm{K.0{,}3.10^{-3}\ m^3}} = 0{,}31\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$$

Relatívna molekulová hmotnosť $\mu = 310$.

Úlohy

462. Vypočítajte, pri akej teplote sa bude topiť ľad pod tlakom $p = 0{,}2$ MPa, keď špecifický objem ľadu $v_1 = 1{,}09 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg^{-1}}$, vody $v_2 = 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg^{-1}}$ a špecifické skupenské teplo topenia ľadu $l = 333{,}2 \,.\, 10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}}$?

[$t_0 = -0{,}0075$ °C]

463. Pri akom tlaku vrie voda pri teplote 99 °C, keď špecifické skupenské teplo varu vody pri 100 °C je $2256{,}2 \,.\, 10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}}$ a keď špecifický objem vodnej pary pri tejto teplote $v_2 = 1675 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg^{-1}}$ a jej kondenzovanej fázy $v_1 = 1{,}04 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}}$?

[$p = 0{,}977$ MPa]

464. Vypočítajte, aký je špecifický objem vodnej pary pri teplote $t_1 = 300$ °C, keď špecifické skupenské teplo vyparovania pri tejto teplote $l = 1402{,}7 \,.\, 10^3\ \mathrm{J.kg^{-1}}$ a špecifický objem kondenzovanej fázy $v_1 = 1{,}4 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}}$! Pri zmene teploty o 1 °C v okolí teploty t_1 sa tlak nasýtených pár mení o $1{,}4 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}}$.

[$v_2 = 21{,}1 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg^{-1}}$]

465. Aké je špecifické skupenské teplo vyparovania argónu pri teplote

$t = 87{,}5$ K, keď závislosť napätia jeho nasýtených pár od teploty možno vyjadriť empirickou rovnicou

$$p = k \,.\, e^{\frac{a}{T} + b \ln T + cT}$$

kde $a = -780{,}4$ K, $b = 1{,}75$, $c = -0{,}015\ \mathrm{K}^{-1}$ a $k = 1{,}18$ MPa? Pri výpočte pre plynnú fázu použite stavovú rovnicu a špecifický objem kondenzovanej fázy vzhľadom na plynnú pri danej teplote zanedbajte.

[$l = 169 \,.\, 10^3\ \mathrm{J \,.\, kg^{-1}}$]

466. V oceľovej bombe s objemom $V_0 = 0{,}53\ \mathrm{m}^3$ je jeden mól kysličníka uhličitého pri tlaku $p_0 = 5$ MPa. Akú teplotu má plyn podľa van der Waalsovej rovnice, keď príslušné konštanty sú: $a = 0{,}365\ \mathrm{N \,.\, m^4 \,.\, mol^{-2}}$, $b = 4{,}3 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{m^3 \,.\, mol^{-1}}$? Porovnajte výsledok s teplotou ideálneho plynu za rovnakých podmienok!

[$t_1 = 100$ °C; $t_2 = 50{,}1$ °C]

467. Jeden mól kysličníka uhličitého zväčšil svoj objem z pôvodného $V_0 = 1$ l na dvojnásobný. Vypočítajte, aká práca sa vykonala proti vnútorným silám v plyne! Predpokladáme, že plyn sa správa podľa van der Waalsovej stavovej rovnice.

[$A' = 182$ J]

468. Ako sa zmení vnútorná energia jedného mólu plynu správajúceho sa podľa van der Waalsovej rovnice, keď sa pri zmene objemu z $V_1 = 0{,}3\ \mathrm{m}^3$ na $V_2 = 2{,}7\ \mathrm{m}^3$ zmení jeho teplota z $t_1 = 20$ °C na $t_2 = 100$ °C? Použite údaje pre dusík.

[$\Delta W = 1662$ J]

469. Nájdite číselné hodnoty konštánt a a b van der Waalsovej rovnici pre kyslík, keď jeho kritický tlak $p_k = 5{,}06$ MPa a kritická teplota $t_k = -119$ °C!

[$a = 0{,}136\ \mathrm{N \,.\, m^4 \,.\, mol^{-2}}$; $b = 3{,}2 \,.\, 10^5\ \mathrm{m^3 \,.\, mol^{-1}}$]

470. Vypočítajte kritický tlak a kritickú teplotu pre kysličník uhličitý, keď poznáme konštanty a a b vo van der Waalsovej rovnici!

[$p_k = 73 \,.\, 10^5\ \mathrm{N \,.\, m^{-2}}$; $t_k = 29{,}5$ °C]

471. Použitím van der Waalsovej rovnice vypočítajte, akú prácu proti vonkajším silám vykoná $m = 50$ g dusíka, keď svoj objem izotermicky zväčší zo začiatočného $V_1 = 0{,}5$ l na štvornásobný pri teplote $t = 27$ °C!

[$A' = 6042{,}5$ J]

472. 10-%-ný roztok metylalkoholu (CH_3OH) má pri teplote $t = 20$ °C hustotu $\varrho = 981{,}5\ g.l^{-1}$. Určite koncentráciu tohto roztoku pomocou: a) mólárneho zlomku, b) molality, c) molarity!

[a) $v_A = 0{,}059$; $v_B = 0{,}941$; b) $C_1 = 3{,}5\ mol.kg^{-1}$; c) $C_2 = 3{,}1\ mol.l^{-1}$]

473. Vodný roztok dusičnanu strieborného obsahuje pri teplote $t_0 = 100\ °C$ a tlaku $p_0 = 0{,}1$ MPa $m_1 = 110$ g $AgN0_3$ a $m_2 = 100$ g vody. Vyjadrite koncentráciu tohto roztoku: a) v molalite, b) v hmotnostných percentách! Vyjadrite zloženie roztoku aj pomocou mólárnych zlomkov jeho zložiek!

[a) $C_1 = 6{,}5\ mol.kg^{-1}$; b) $C_2 = 52{,}4\ \%$; $v_A = 0{,}1046$; $v_B = 0{,}8954$]

474. Určite parciálne tlaky i celkový tlak nasýtenej pary nad roztokom benzénu a chlórbenzénu pri teplote 30 °C, keď tento roztok možno považovať za ideálny! Mólárny zlomok benzénu v roztoku je 0,25, napätie nasýtených pár čistého benzénu pri udanej teplote je 15 759 Pa, chlórbenzénu 3613 Pa.

[$p_1 = 3933$ Pa; $p_2 = 2706$ Pa; $p = 6639{,}4$ Pa]

475. Vypočítajte, aké je napätie nasýtených pár nad 5-%-ným vodným roztokom sacharózy ($C_{12}H_{22}O_{11}$), kde teplota roztoku je 100 °C!

[$p = 0{,}1$ MPa]

476. Vypočítajte, aká má byť teplota roztoku 20 g glukózy ($C_6H_{12}O_6$) v 2,2 l vody, aby osmotický tlak roztoku bol 0,12 MPa!

[$t = 17\ °C$]

477. Vypočítajte, koľko chloridu sodného treba rozpustiť v 1 litri vody pri teplote 0 °C, aby osmotický tlak takto vytvoreného roztoku bol 0,23 MPa! Predpokladáme, že NaCl je v roztoku celkom disociovaný.

[$m = 3.10^{-3}$ kg]

478. Vypočítajte kryoskopickú a ebulioskopickú konštantu vody!

[$K = 1{,}86.10^{-3}\ m^3.K.mol^{-1}$; $E = 0{,}52.10^{-3}\ m^3.K.mol^{-1}$]

479. Určite, koľko glycerínu ($C_3H_8O_3$) treba doliať do 100 g vody, aby takto vzniknutá zmes tuhla pri teplote $-2\ °C$!

[$m = 9{,}9$ g]

480. V jednom litri vody rozpustíme 100 g trstinového cukru ($C_{12}H_{22}O_{11}$). Vypočítajte, pri akej teplote bude tento roztok tuhnúť a vrieť za normálnych podmienok!

[$t_0 = -0{,}54$ C; $t_1 = 100{,}15\ °C$]

11 TEPELNÉ VLASTNOSTI TUHÝCH LÁTOK

Úvod

a) Ak máme na mysli prenos tepla vedením v tyči, pozdĺž ktorej teplota rovnomerne klesá, v ustálenom stave je teplo Q, ktoré prejde cez ktorýkoľvek prierez tyče za čas τ, priamo úmerné veľkosti prierezu tyče S, času τ, rozdielu teplôt obidvoch koncov tyče $t_1 - t_2$ a nepriamo úmerné dĺžke tyče l, t. j.

$$Q = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l} \tau \tag{1}$$

Konštanta úmernosti λ sa nazýva *súčiniteľ tepelnej vodivosti* tyče. Keď *hustotou tepelného toku i* nazveme teplo prechádzajúce za jednotku času cez jednotkovú plochu kolmú na smer postupu tepla, podľa rovnice (1) je hustota tepelného toku v ktoromkoľvek priereze tyče daná vzťahom

$$i = \frac{Q}{S\tau} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{l}$$

Keď os tyče stotožníme s osou x a priradíme jej smer súhlasne rovnobežný so smerom klesania teploty a keď spád teploty v ľubovoľnom mieste tejto osi označíme $-\frac{dt}{dx}$, hustota tepelného toku v tomto mieste

$$i = \frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{dt}{dx}$$

Tento vzťah vyjadruje správne hustotu tepelného toku aj v izotropných telesách, a to aj vtedy, ak teplota neklesá rovnomerne.

b) Teplo, ktoré prejde za ustáleného toku vedením radiálne cez plášť dutého valca s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším r_2 za čas τ, vyjadríme vzťahom

$$Q = 2\pi l \lambda \tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

kde l je dĺžka valca, $t_1 - t_2$ rozdiel okrajových teplôt na vnútornom, resp. vonkajšom povrchu dutého valca.

c) Nech teplo postupuje cez rozhranie, ktoré oddeľuje tuhú látku od plynu alebo kvapaliny. Keď má plyn teplotu t a povrch tuhej steny je t', možno pre hustotu tepelného toku vstupujúceho do steny písať vzťah

$$i = \alpha(t - t')$$

kde α je *súčiniteľ prestupu tepla*.

Keď teplo prechádza stenou oddeľujúcou dva plyny rôznych teplôt t_1 a t_2, pre hustotu tepelného toku platia súčasne vzťahy

$$i = \alpha_1(t_1 - t_1') = \lambda \frac{t_1' - t_2'}{d} = \alpha_2(t_2' - t_2)$$

kde t_1' a t_2' sú teploty na povrchu steny, d hrúbka steny, α_1 a α_2 príslušné koeficienty prestupu tepla a λ koeficient tepelnej vodivosti steny.

d) Stavebné častice kryštalickej tuhej látky konajú molekulový pohyb v podobe kmitavého pohybu okolo istých rovnovážnych polôh umiestnených v uzloch mriežky. Energia tohoto pohybu predstavuje vnútornú energiu tuhej látky. Energia kmitov stavebných častíc kryštálu s N atómami je — ako to vyplýva z teoretických úvah — rovnaká ako energia sústavy 3 N harmonických oscilátorov.

Pre energiu kmitov 1 mólu kryštálu pozostávajúceho z N_A atómov možno písať

1) podľa klasickej teórie

$$W = 3N_A kT = 3R_m T \tag{1}$$

kde N_A je Avogadrova konštanta, T teplota látky, k Boltzmanova konštanta a R_m všeobecná plynová konštanta;

2) podľa kvantovej teórie

$$W = 3N_A \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1} \tag{2}$$

kde h je Planckova konštanta, f je frekvencia kmitov atómov.

e) Mólová tepelná kapacita tuhej látky je daná vzťahom

$$C_V = \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_V$$

kde W je vnútorná energia jedného mólu látky.

f) V klasickej teórii sa $W = 3RT$, takže

$$C_V = 3R = 24{,}94\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,mol^{-1}}$$

čo je matematické vyjadrenie Dulongovho a Petitovho pravidla. V tejto teórii je mólová tepelná kapacita pre všetky kryštalické látky rovnaká, nezávislá od teploty.

g) Podľa Einsteinovej kvantovej teórie je W vyjadrené vzťahom (2), takže pre mólovú tepelnú kapacitu C_V platí

$$C_V = \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_V = 3R\left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{kT}}}{(e^{\frac{hf}{kT}} - 1)^2}$$

Pre relatívne vysoké teploty nadobudne Einsteinov vzťah tvar klasického vzťahu $C_V = 3R_m$. S teplotou klesajúcou k absolútnej nule klesajú aj hodnoty mólového tepla k nule.

h) Za predpokladu, že atómy tuhej látky kmitajú s rôznymi frekvenciami kmitov, vyjadril Debye mólovú tepelnú kapacitu C_V tuhej látky vzťahom

$$C_V = 3R_m \left| 12\left(\frac{kT}{hf_m}\right)^3 \int_0^{hf_m/kT} \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} - \frac{3\,\dfrac{hf_m}{kT}}{\exp\left(\dfrac{hf_m}{kT}\right) - 1} \right|$$

kde $x = \dfrac{hf}{kT}$ a f_m je maximálna frekvencia kmitov atómov v kryštáli.

Z Debyeovej teórie vyplýva, že od istej teploty Θ *(Debyeova teplota)* začína mólová tepelná kapacita s klesajúcou teplotou rýchlo klesať. Je to teplota, pre ktorú platí

$$k\Theta = hf_m, \quad \text{čiže} \quad \Theta = \frac{hf_m}{k}$$

Debyeovu teplotu možno považovať za hranicu medzi teplotami vysokými ($T > \Theta$), pre ktoré je mólová tepelná kapacita konštantná a nezávisí od teploty, a medzi teplotami nízkymi ($T < \Theta$), pre ktorú sa už výrazne uplatňujú kvantové efekty a mólová tepelná kapacita s klesajúcou teplotou klesá k nule.

Príklady

481. Jeden koniec oceľovej tyče dĺžky $l = 20$ cm a prierezu $S = 3$ cm^2 udržujeme na stálej teplote $t_1 = 300$ °C, druhý koniec zasahuje do topiaceho sa ľadu. Za predpokladu, že sme zabránili tepelným stratám do okolia, určite hmotnosť ľadu, ktorý sa roztopí za $\tau = 10$ minút!

Riešenie:

Za ustáleného stavu prejde ktorýmkoľvek prierezom tyče za čas τ teplo

$$Q = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l} \tau$$

Keďže nevzniká nijaká strata tepla do okolia, celé toto teplo sa spotrebuje na roztopenie ľadu. Keď hmotnosť ľadu roztopeného za čas τ je x a špecifické skupenské teplo topenia ľadu je l_t, platí

$$\lambda S \frac{t_1 - t_2}{l} \tau = x l_t$$

odkiaľ

$$x = \lambda S \frac{t_1 - t_2}{l l_t} \tau$$

t. j.

$$x = 59\,\mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,s^{-1}\,.\,m^{-1}}\,.\,3\,.\,10^{-4}\,\mathrm{m^2}\,.$$

$$\cdot \frac{300\ \mathrm{K}}{333{,}6\,.\,10^3\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}\,.\,20\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}} \cdot 10\,.\,60\ \mathrm{s} = 0{,}0475\ \mathrm{kg}$$

482. Medená tyč dĺžky $l_1 = 15$ cm je pripojená k železnej tyči rovnakého prierezu a dĺžky $l_2 = 8$ cm. Voľný koniec medenej tyče udržiavame na stálej teplote $t_1 = 150$ °C, koniec železnej tyče na teplote $t_2 = 20$ °C. Za predpokladu, že sme zabránili tepelným stratám do okolia, vypočítajte hustotu tepelného toku v tyči a teplotu na stykovej ploche oboch tyčí!

Riešenie:

Hustota tepelného toku, číselne predstavujúca teplo prechádzajúce za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na smer postupu tepla, je za ustáleného tepelného toku v oboch tyčiach rovnaká. Preto

$$i = \frac{Q}{S\tau} = \lambda_1 \frac{t_1 - t_1'}{l_1} = \lambda_2 \frac{t_1' - t_2}{l_2}$$

kde t' je teplota na stykovej ploche oboch tyčí. Z toho

$$\left.\begin{aligned} t_1 - t_1' &= \frac{il_1}{\lambda_1} \\ t_1' - t_2 &= \frac{il_2}{\lambda_2} \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Sčítaním týchto rovníc dostávame:

$$t_1 - t_2 = i\left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right)$$

odkiaľ

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{l_1}{\lambda_1} + \dfrac{l_2}{\lambda_2}}$$

t. j.

$$i = \frac{(150 - 20)\ \mathrm{K}}{\dfrac{15\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}}{3{,}98\,.\,10^2\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}}} + \dfrac{8\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}}{0{,}59\,.\,10^2\ \mathrm{J\,.\,K^{-1}\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}}}} =$$

$$= 75\,.\,10^3\ \mathrm{J\,.\,m^{-2}\,.\,s^{-1}}$$

Pre teplotu t_1' na stykovej ploche oboch tyčí zo vzťahu (1) po dosadení vyplýva vzťah

$$t_1' = t_1 - i\frac{l_1}{\lambda_1} = 121{,}9\ °\mathrm{C}$$

483. Dve doštičky, medená hrúbky $h_1 = 6$ mm a železná hrúbky $h_2 = 4$ mm, sa dotýkajú. Vypočítajte, aká má byť tepelná vodivosť jednoduchej rovnorodej dosky hrúbky $h = 10$ mm, aby viedla teplo rovnako ako tieto dve doštičky!

Riešenie:

Keď t_1 a t_2 sú okrajové teploty zloženej medenej a železnej doštičky a λ_1 a λ_2 príslušné súčinitele tepelnej vodivosti medi a železa, za ustáleného stavu hustota tepelného toku v každom priereze

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{h_1}{\lambda_1} + \dfrac{h_2}{\lambda_2}}$$

Rovnorodá doska, ktorá má nahradiť obe, má mať takú tepelnú vodivosť, aby v ktoromkoľvek jej priereze pri rovnakom teplotnom rozdiele $t_1 - t_2$ bola hustota tepelného toku práve taká ako pri zloženej doštičke. Preto

$$i = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{h}{\lambda}} = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{h_1}{\lambda_1} + \dfrac{h_2}{\lambda_2}}$$

odkiaľ

$$\lambda = h\frac{\lambda_1\lambda_2}{h_1\lambda_2 + h_2\lambda_1}$$

t. j.

$$\lambda = 11{,}93\ \mathrm{J\,.\,m^{-1}\,.\,s^{-1}\,.\,K^{-1}}$$

484. Valcové oceľové potrubie vnútorného priemeru $d_1 = 70$ mm a vonkajšieho priemeru $d_2 = 76$ mm je obalené azbestovým, tepelne izolujúcim obalom hrúbky 30 mm. Vnútorný povrch potrubia má teplotu $t_1 = 10\,°\mathrm{C}$, vonkajší povrch obalu má teplotu $t_2 = -10\ °\mathrm{C}$. Potrubie je dlhé jeden meter. Vypočítajte, koľko tepla sa odvedie potrubím do okolia za $\tau = 24$ hodín! Ako by sa zmenilo za rovnakých podmienok odvedené teplo, keby potrubie nebolo obalené izolujúcim obalom?

Riešenie:

Pri radiálnom prechode tepla cez jednoduché valcové potrubie za ustáleného stavu prejde cez valcovú plochu za čas τ teplo

$$Q = 2\pi l \lambda \tau \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{1}$$

kde r_1 je vnútorný, r_2 vonkajší polomer potrubia, l jeho dĺžka a $t_1 - t_2$ rozdiel okrajových teplôt.

Keď sa valcové potrubie skladá z viacerých vrstiev, za ustáleného stavu prechádza opäť ľubovoľnou valcovou plochou v ktorejkoľvek vrstve za rovnaký čas rovnaké teplo, a teda v prípade dvoch vrstiev bude:

$$Q = 2\pi l \lambda_1 \tau \frac{t_1 - t_1'}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi l \lambda_2 \tau \frac{t_1' - t_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \tag{2}$$

kde t_1, t_2 sú okrajové teploty, t_1' teplota na styku oboch vrstiev a r_3 vonkajší polomer druhej vrstvy.

Z rovnice (2), keď vyjadríme rozdiely teplôt a sčítame ich, dostaneme:

$$t_1 - t_1' + t_1' - t_2 = \frac{Q}{2\pi l \tau}\left(\frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda_1} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda_2}\right)$$

a po úprave pre odvedené teplo dostávame vzťah

$$Q = 2\pi l \tau (t_1 - t_2) \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} \tag{3}$$

Číselne:

$$Q = 2\pi \,.\, 1\,\mathrm{m} \,.\, 24\,\mathrm{h} \frac{20\,\mathrm{K}}{\frac{1}{59 \,.\, 3600 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\,.\,h\,.\,K}}} 2{,}3 \log \frac{76}{70} + \frac{1}{0{,}75 \,.\, 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m\,.\,h\,.\,K}}} 2{,}3 \log \frac{136}{76}} =$$

$$= 3{,}9 \,.\, 10^6\,\mathrm{J}$$

Keď chýba izolujúci obal, odvedené teplo určíme z rovnice (1) vzťahom

$$Q_1 = 2\pi l \tau (t_1 - t_2) \frac{1}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

takže

$$Q_1 = 7{,}74 \,.\, 10^9\,\mathrm{J}$$

a potom

$$Q_1 = Q \,.\, 1{,}9 \,.\, 10^3$$

485. Priestor medzi dvoma koncentrickými guľami s polomermi R_1 a R_2 ($R_2 > R_1$) je vyplnený homogénnou látkou dobre vedúcou teplo tepelnej vodivosti λ.

Určite:

a) množstvo tepla, ktoré prejde za čas τ za ustáleného tepelného toku ktoroukoľvek guľovou plochou, koncentrickou s oboma danými guľovými plochami,

b) rozloženie teploty v priestore medzi oboma guľami! Teplotu vnútornej i vonkajšej gule t_1, t_2 ($t_2 > t_1$) považujte za stálu.

Riešenie:

a) Guľovou plochou polomeru x prejde za čas τ za ustáleného tepelného toku teplo

$$Q = -\lambda S \tau \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\lambda \,.\, 4\pi x^2 \tau \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

ktoré nezávisí od polomeru guľovej plochy.

Po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$Q \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

a po integrácii v hraniciach od R_1 do R_2, resp. od t_1 do t_2 rovnicu

$$Q \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t$$

dostávame pre hľadané teplo vzťah

$$Q = 4\pi\lambda\tau \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (t_1 - t_2) \tag{2}$$

b) Závislosť teploty od vzdialenosti v priestore medzi guľami dostaneme integráciou rovnice (1) v hraniciach od R_1 do x, resp. od t_1 do t, t. j.

$$Q \int_{R_1}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -4\pi\lambda\tau \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t$$

odkiaľ

$$Q = 4\pi\lambda\tau \frac{R_1 x}{x - R_1} (t_1 - t) \tag{3}$$

Toto teplo je pre každú guľovú plochu za ustáleného stavu rovnaké, preto keď výraz (3) porovnávame s (2), dostaneme:

$$\frac{x}{x-R_1}(t_1-t)=\frac{R_2}{R_2-R_1}(t_1-t_2)$$

Keď z tejto rovnice vyjadríme t, po krátkej úprave dostaneme:

$$t=\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\cdot\frac{t_1-t_2}{x}+\frac{R_2t_2-R_1t_1}{R_2-R_1}$$

486. Dymové plyny pod parným kotlom majú teplotu $t_0=950\ °C$ a voda v parnom kotle má teplotu $t=180\ °C$. Vypočítajte, koľko tepla sa dodá za hodinu cez plochu $1\ m^2$ vode v kotle, keď železná stena kotla hrúbky $d_2=18\ cm$ je z vnútornej strany pokrytá vrstvou kotolného kameňa hrúbky $d_3=5\ mm$ a z vonkajšej strany vrstvou sadzí a popola hrúbky $d_1=4{,}5\ mm$! Určite, aká je teplota vonkajšej i vnútornej steny kotla!

Riešenie:

Teplo prechádza postupne z plynov teploty t_0 do vrstvy sadzí a popola cez železnú stenu kotla a kotolný kameň do vody teploty t. Za ustáleného stavu bude hustota tepelného toku pre každú vrstvu rovnaká. Keď príslušné teploty na stykových miestach označíme t_1 (popol—plyny), t_2 (stena kotla—sadze), t_3 (kotolný kameň—stena kotla), t_4 (voda—kotolný kameň), možno pre hustotu tepelného toku písať:

$i=\alpha_1(t_0-t_1)$ pre prestup tepla z plynov do popola,

$i=\lambda_1\dfrac{t_1-t_2}{d_1}=\lambda_2\dfrac{t_2-t_3}{d_2}=\lambda_3\dfrac{t_3-t_4}{d_3}$ pre jednotlivé tuhé vrstvy,

$i=\alpha_2(t_4-t)$ pre prestup tepla z kotolného kameňa do vody,

kde λ_i sú príslušné súčinitele tepelnej vodivosti a α_i súčinitele prestupu tepla.

Keď z týchto rovníc vyjadríme rozdiely teplôt

$$t_0-t_1=\frac{i}{\alpha_1} \tag{1}$$

$$t_1-t_2=i\,\frac{d_1}{\lambda_1} \tag{2}$$

$$t_2-t_3=i\,\frac{d_2}{\lambda_2} \tag{3}$$

$$t_3-t_4=i\,\frac{d_3}{\lambda_3} \tag{4}$$

$$t_4-t=\frac{i}{\alpha_2} \tag{5}$$

a rovnice (1) až (5) sčítame, dostaneme:

$$t_0 - t = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

odkiaľ

$$i = k(t_0 - t)$$

kde konštantu úmernosti k, nazývanú aj koeficientom prestupu tepla stenou, určíme zo vzťahu

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_2}$$

Číselne

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{1}{62{,}8} + \frac{4{,}5\,.\,10^{-3}}{0{,}293} + \frac{18\,.\,10^{-3}}{210{,}9} + \frac{5\,.\,10^{-3}}{8{,}37} + \frac{1}{16\,744}\right) \frac{10^{-3}}{\mathrm{J\,.\,m^{-2}\,.\,h^{-1}\,.\,K^{-1}}}$$

$$k = 31{,}2\,.\,10^3\ \mathrm{J\,.\,m^{-2}\,.\,h^{-1}\,.\,K^{-1}}$$

Celkové teplo dodané vode za čas τ cez plochu S

$$Q = S\tau k(t_0 - t)$$

t. j.

$$Q = 1\ \mathrm{m^2}\,.\,1\ \mathrm{h}\,.\,31{,}2\,.\,10^3\ \mathrm{J\,.\,m^{-2}\,.\,h^{-1}\,.\,K^{-1}}(950 - 180)\ \mathrm{K} = 2{,}4\,.\,10^7\ \mathrm{J}$$

Teplotu vonkajšej steny kotla určíme sčítaním rovníc (1) a (2), čím dostaneme:

$$t_0 - t_2 = i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right)$$

odkiaľ

$$t_2 = t_0 - i\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1}\right) = 197{,}5\ °\mathrm{C}$$

Z rovnice (3) dostaneme teplotu vnútornej steny:

$$t_3 = t_2 - i\,\frac{d_2}{\lambda_2} = 195{,}4\ °\mathrm{C}$$

487. Určte frekvenciu tepelných kmitov atómov medi, keď poznáte modul pružnosti v ťahu ($E = 12{,}3\,.\,10^{10}$ Pa) a vzdialenosť medzi atómami medi v mriežke ($a_0 = 0{,}23$ nm)!

Riešenie:

Keď predpokladáme, že vybraný atóm medi koná kmitavý harmonický pohyb, potom je frekvencia jeho kmitov daná vzťahom

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m_0}} \tag{1}$$

kde m_0 je hmotnosť atómu medi a K je konštanta úmernosti, charakterizujúca elastické vlastnosti kmitajúceho systému. Keď sa účinkom vonkajšej sily F atóm vychýli o Δa za predpokladu, že výchylky z rovnovážnej polohy sú dostatočne malé, aby bol splnený Hookov zákon, bude platiť

$$\sigma = E\varepsilon$$

kde σ je napätie, pôsobiace na stenu kocky s hranou a_0 a ε je relatívne predĺženie hrany $\frac{\Delta a}{a_0}$. Potom

$$\frac{F}{a_0^2} = E \frac{\Delta a}{a_0} \tag{2}$$

a pre veľkosť sily vyvolávajúcej harmonické kmity platí

$$F = K . \Delta a$$

Po dosadení do rovnice (2) dostaneme

$$K = a_0 E$$

Keď M_m je hmotnosť 1 mólu, hmotnosť atómov medi bude

$$m_0 = \frac{M_m}{N_A}$$

kde N_A je Avogadrova konštanta.

Po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a_0 E N_A}{M_m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{0{,}23 . 10^{-9}\ \mathrm{m} . 12{,}3 . 10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}} . 6{,}02 . 10^{26}\ \mathrm{kmol^{-1}}}{63{,}5 . 10^{-3}\ \mathrm{kg.kmol^{-1}}}} =$$

$$= 2{,}6 . 10^{12}\ \mathrm{s^{-1}}$$

Frekvencia tepelných kmitov atómov medi je v skutočnosti vyššia (približne $7 . 10^{12}\ \mathrm{s^{-1}}$).

488. Ak predpokladáte, že stredná hodnota energie harmonického oscilátora kmitajúceho s frekvenciou f je

$$\bar{\varepsilon} = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

určte mólovú tepelnú kapacitu kryštalickej látky pri stálom objeme!

Riešenie:

V priblížení možno predpokladať, že atóm kryštalickej látky koná harmonické kmity a jeho energia je potom rovnaká ako energia troch harmonických oscilátorov kmitajúcich v troch navzájom kolmých smeroch. Keď predpokladáme, že všetky atómy kryštálu kmitajú s rovnakou frekvenciou, pre vnútornú energiu jedného mólu kryštalickej látky možno písať

$$W = 3\bar{\varepsilon}N_A = 3N_A \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

kde N_A je Avogadrova konštanta.

Mólovú tepelnú konštantu C_V potom určíme zo vzťahu

$$C_V = \frac{dW}{dT} = 3R_m \left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{kT}}}{\left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1\right)^2}$$

489. Vychádzajúc z Einsteinovho vzťahu pre mólovú tepelnú kapacitu C_V kryštalických látok ukážte, že pri relatívne vysokých teplotách nezávisí C_V od teploty a má pre všetky kryštalické látky rovnakú hodnotu!

Riešenie:

Podľa Einsteinovho vzťahu

$$C_V = 3R_m \left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{kT}}}{\left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1\right)^2}$$

Po vysokých teplotách bude kT podstatne väčšie ako hf a podiel $x = \frac{hf}{kT} \ll 1$.

V rozvoji

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

možno potom kvadratický člen a ďalšie členy vyššieho stupňa zanedbať a pre mólové teplo v priblížení písať

$$C_V = 3R_m \frac{\left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \left(1 + \frac{hf}{kT}\right)}{\left(\frac{hf}{kT}\right)^2} \doteq 3R_m$$

čo je známe Dulongovo a Petitovo pravidlo.

490. Na základe klasickej teórie určte mólovú tepelnú kapacitu medi a vypočítajte, pre ktoré teploty je tento výsledok použiteľný! Za maximálnu frekvenciu tepelných kmitov atómov dosaďte hodnotu $f_m = 7 . 10^{12}\ s^{-1}$.

Riešenie:

Podľa Dulongovho a Petitovho pravidla je mólové teplo tuhých látok konštantné a pre prvky má hodnotu $C_V = 3R_m = 24{,}94\ J . K^{-1} . mol^{-1}$. Toto je splnené približne pre teploty vyššie, ako je Debyeova teplota Θ, ktorá je daná vzťahom

$$\Theta = \frac{hf_m}{k}$$

kde f_m je frekvencia kmitov atómov. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\Theta = \frac{6{,}6 . 10^{-34}\ J . s . 7 . 10^{12}\ s^{-1}}{1{,}38 . 10^{-23}\ J . K^{-1}} = 335\ K$$

Klasický výsledok je použiteľný pre vyššie teploty ako izbové.

Úlohy

491. Určite, koľko tepla prejde za hodinu cez 1 m^2 tehlovej steny hrúbky $d = 50$ cm, keď vnútorný povrch steny má teplotu $t_1 = 18$ °C a vonkajší $t_2 = -2$ °C! Tepelným stratám do okolia sme zabránili.

[$Q = 75{,}3 . 10^3\ J . h^{-1}$]

492. Hliníkovú nádobu zohrieva varič. Voda v nádobe vrie pri teplote 100 °C a za každú minútu vznikne $m = 200$ g pary. Hrúbka dna $h = 2$ mm, plocha dna $S = 200\ cm^2$. Vypočítajte teplotu vonkajšieho povrchu dna nádoby, keď celé dno sa zohrieva rovnomerne a výmenu tepla s bočnými stenami nádoby, ako aj žiarením možno zanedbať.

[$t_1 = 103{,}6$ °C]

493. Vypočítajte, koľko tepla prejde vedením za hodinu cez tehlový múr hrúbky $d_1 = 43$ cm a rozmerov 6,5 m × 3,2 m, ktorý je na oboch stranách omietnutý omietkou hrúbky $d_0 = 1$ cm. Vonkajší povrch múru má teplotu $t = -5$ °C, vnútorný $t_0 = 20$ °C. Ako sa zmení teplo, ktoré prejde múrom, keď múr na vnútornej strane pokryjeme vrstvou heraklitu hrubou $d_2 = 5$ cm?

[$Q = 2198$ J, $Q_1 = 0{,}55Q$]

494. Vypočítajte, aký má byť rozdiel teplôt na vnútornom a vonkajšom povrchu dutého medeného valca, keď za každú minútu prejde plochou 1500 cm^2

jeho vonkajšieho povrchu za ustáleného tepelného toku 837,4 J tepla. Polomery dutého valca sú: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm.

[$\Delta t = 11$ °C]

495. Stenu z tehál hrúbky 12 cm, ktorá má z oboch strán omietku hrúbky 1,5 cm, máme spevniť heraklitovou platňou takej hrúbky, aby viedla teplo rovnako ako stena z tehál hrúbky 38 cm, omietnutá z oboch strán omietkou hrúbky 1,5 cm. Aká má byť hrúbka heraklitovej vrstvy?

[$x = 3{,}6$ cm]

496. Koľko tepla prejde za hodinu neomietnutým múrom z tehál hrúbky 30 cm, s plošným obsahom 16,5 m^2, ak teplota vzduchu v miestnosti $t_1 = 22$ °C a teplota vonkajšieho vzduchu $t_2 = -12$ °C? Súčinitele prestupu tepla sú: vnútri miestnosti $\alpha_1 = 29{,}3$ a na vonkajšej strane (vplyvom voľného prúdenia vzduchu) $\alpha_2 = 83{,}7 \,.\, 10^3$ J . m^{-2} . h^{-1} . K^{-1}.

[$Q = 2724 \,.\, 10^3$ J]

497. V hrubostennej uzavretej kovovej nádobe je kvapalina teploty t_1. Teplota vonkajšieho vzduchu je t_2. Vypočítajte teplotu vonkajšej steny nádoby t', keď súčiniteľ tepelnej vodivosti kovu je λ, súčiniteľ prestupu tepla pre rozhranie kov a vzduch je α; pre rozhranie kov a kvapalina je tento súčiniteľ nekonečne veľký! Hrúbka steny nádoby je d.

$$\left[t' = \frac{\lambda t_1 + \alpha d t_2}{\lambda + \alpha d} \right]$$

498. Určite frekvenciu tepelných kmitov atómov hliníka, ktorého modul pružnosti v ťahu $E = 7{,}07 \,.\, 10^{10}$ Pa a medziatómová vzdialenosť $a_0 = 0{,}29$ nm!

[$3{,}4 \,.\, 10^{12}$ s^{-1}]

499. Špecifická tepelná kapacita olova a hliníka pri stálom objeme a teplote 20 °C je 126 a 896 J . kg^{-1} . K^{-1}. Porovnajte ich mólové tepelné kapacity s hodnotou vypočítanou podľa Dulongovho a Petitovho pravidla!

[26,1; 24,2 J . K^{-1} . mol^{-1}; podľa Dulongovho a Petitovho pravidla 24,9 J . K^{-1} . mol^{-1}]

500. Mólová tepelná kapacita kryštalických látok je podľa Einsteinovho vzťahu

$$C_V = 3R_m \left(\frac{hf}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{hf}{kT}}}{\left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)^2}$$

Ukážte, že pre teploty blížiace sa k absolútnej nule sa aj mólová tepelná kapacita blíži k nule.

501. Debyeova teplota pre zlato je 170 K. Určte hodnotu konštanty K, charakterizujúcej elastické vlastnosti zlata!

[$K = 164\ \mathrm{kg.s^{-2}}$]

502. Keď $\Theta = 335$ K je Debyeova teplota medi, vypočítajte vlnovú dĺžku odpovedajúcu maximálnej frekvencii mriežky!

[$\lambda = 0{,}043$ mm]

503. Určte Debyeovu teplotu pre diamant, keď poznáte jeho modul pružnosti v ťahu E a vzdialenosť medzi atómami uhlíka a_0($E = 112\,.\,10^{10}$ Pa ; $a_0 = 0{,}18$ nm)!

[$\Theta = 808$ K]

C ELEKTRICKÉ A MAGNETICKÉ JAVY

12 ELEKTRICKÉ POLE

Úvod

Zdrojom elektrického poľa sú *elektricky nabité* látkové objekty, napr. *elektróny, protóny*, ale aj *ionizované atómy* a *molekuly* a *elektricky nabité makroskopické telesá.* Elektricky nabité teleso nesie *kladný* alebo *záporný elektrický náboj* (Q).

Ak sú rozmery elektricky nabitého telesa malé v porovnaní s inými rozmermi, ktoré pri elektrickom vzájomnom pôsobení medzi ním a inými telesami treba uvažovať, označujeme elektrický náboj tohoto telesa ako *bodový.* Ak je elektrický náboj uložený na povrchu telesa v takej tenkej vrstve, že možno jej hrúbku oproti ostatným rozmerom zanedbať, hovoríme o *povrchovom elektrickom náboji.* Pre *plošnú hustotu* σ elektrického náboja, t. j. elektrický náboj jednotkovej plochy platí

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$$

kde $\mathrm{d}Q$ je náboj pripadajúci na element povrchu $\mathrm{d}S$. S *objemovými nábojmi* sa stretávame v prípade, keď nosiče elektrických nábojov sú rozložené v istom objeme. Pre *objemovú hustotu* ϱ elektrického náboja, t. j. elektrický náboj pripadajúci na jednotkový objem platí

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$$

kde $\mathrm{d}Q$ je náboj v objemovom elemente $\mathrm{d}V$.

Silové pôsobenie medzi elektricky nabitými telesami nastáva prostredníctvom *elektrického poľa.*

Pre elektrické pole sú charakteristické tieto pojmy, veličiny a vzťahy:

a) Dva bodové elektrické náboje pôsobia na seba podľa *Coulombovho zákona* silou

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^3}\, \boldsymbol{r}_{12}$$

kde $\boldsymbol{F}_{12}$ je sila, ktorou pôsobí náboj Q_1 na Q_2, $\boldsymbol{r}_{12}$ polohový vektor náboja Q_2 vzhľadom na Q_1, r vzdialenosť nábojov, ε *permitivita* prostredia, v ktorom sú náboje uložené. Túto možno vyjadriť v tvare $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, kde $\varepsilon_0 = 8{,}859 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4}$ je *permitivita vákua* a ε_r je *relatívna permitivita* prostredia. Pre vákuum sa zrejme $\varepsilon_r = 1$.

b) *Intenzitou elektrického poľa* $\boldsymbol{E}$ v ľubovoľnom mieste poľa nazývame podiel sily $\boldsymbol{F}$, ktorá v danom mieste pôsobí na nejaký náboj Q', a tohto náboja. V okolí bodového náboja Q

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom zisťujeme intenzitu poľa vzhľadom na miesto, v ktorom je uložený náboj Q.

Intenzitu poľa v okolí väčšieho počtu bodových nábojov Q_1, Q_2, ... počítame podľa vzťahu

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i$$

t. j. ako vektorový súčet intenzít elektrických polí, ktoré by v danom mieste budili jednotlivé náboje samostatne.

Ak je náboj rozložený v určitom objeme spojite, intenzita elektrického poľa v jeho okolí je daná vzťahom

$$\boldsymbol{E} = \int \frac{\varrho\, \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^3}\boldsymbol{r}$$

kde ϱ je objemová hustota náboja, $\mathrm{d}V$ objemový element a $\boldsymbol{r}$ polohový vektor miesta, v ktorom $\boldsymbol{E}$ počítame, vzhľadom na uvažovaný objemový element. Pritom integrácia sa vzťahuje na celý objem, v ktorom je uložený elektrický náboj.

Keď je elektrický náboj rozložený na povrchu vodivého telesa s plošnou hustotou σ, intenzita elektrického poľa, budeného týmto nábojom, je daná vzťahom

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\sigma\, \mathrm{d}S}{r^3}\boldsymbol{r}$$

kde $\mathrm{d}S$ je plošný element povrchu vodiča a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom intenzitu poľa hľadáme, vzhľadom na plošný element $\mathrm{d}S$.

Z definície intenzity elektrického poľa je zrejmé, že v mieste elektrického poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}$ pôsobí na elektrický náboj Q sila $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}Q$.

c) *Práca*, ktorú vykonajú sily elektrického poľa, keď sa v ňom posunie nejaký elektrický náboj Q' z miesta 1 na miesto 2, spĺňa vzťah

$$A = W_1 - W_2$$

kde W_1, resp. W_2 je *potenciálna energia* náboja Q' v mieste 1, resp. v mieste 2. Ak ide o posunutie náboja Q' v elektrickom poli bodového náboja Q, platí

$$A = W_1 - W_2 = \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

kde r_1 a r_2 sú vzdialenosti začiatočného a koncového bodu dráhy, prejdenej nábojom Q' od náboja Q.

Potenciálna energia náboja Q', uvažovaná vzhľadom na nekonečno, je v elektrickom poli bodového náboja Q daná vzťahom

$$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{QQ'}{r}$$

kde r je vzdialenosť náboja Q' od náboja Q.

Potenciál elektrického poľa v určitom mieste poľa je definovaný ako podiel potenciálnej energie skúšobného náboja Q' v uvažovanom mieste a tohoto náboja Q', t. j.

$$\varphi = \frac{W_e}{Q'}$$

Ak ide o elektrické pole bodového náboja Q a ak potenciálnu energiu, a teda aj potenciál uvažujeme vzhľadom na nekonečno *(absolútny potenciál)*, možno písať

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r}$$

kde r je vzdialenosť miesta, v ktorom potenciál zisťujeme, od náboja Q.

Ak je elektrické pole budené väčším počtom nábojov $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, pre absolútny potenciál v určitom mieste poľa možno písať vzťah

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}$$

kde r_i je vzdialenosť bodu, v ktorom potenciál skúmame, od náboja Q_i.

Ak je náboj, ktorý je zdrojom elektrického poľa, rozložený spojite v určitom objeme s objemovou hustotou ϱ, resp. na určitom povrchu s splošnou hustotou σ, pre absolútny potenciál v určitom mieste elektrického poľa možno písať:

$$\varphi = \int_V \frac{\varrho\, \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon r}$$

resp.

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma\, \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon r}$$

Súbor všetkých miest, ktoré majú v danom elektrickom poli rovnaký potenciál, vypĺňa plochu, ktorú nazývame *ekvipotenciálnou plochou.*

Z definície potenciálu elektrického poľa je zrejmé, že v mieste elektrického poľa s potenciálom φ sa elektrický náboj Q vyznačuje potenciálnou energiou $W_e = QV$.

d) Súvis medzi potenciálom a intenzitou elektrického poľa je daný vzťahom

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

Pretože platí:

$$\mathrm{d}\varphi = \text{grad } \varphi . \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

možno potenciál v mieste poľa s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, v ktorom je intenzita poľa $\boldsymbol{E}$, vzhľadom na miesto s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}_0$ počítať podľa vzťahu

$$\varphi = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

e) *Tokom T* intenzity elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ cez povrch do seba uzavretej plochy S rozumieme výraz

$$T = \int \boldsymbol{E} . \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je vektor prislúchajúci elementu plochy $\mathrm{d}S$.

Podľa *Gaussovej—Ostrogradského vety* tok T intenzity elektrického poľa cez uzavretú plochu sa rovná podielu elektrického náboja Q, nachádzajúceho sa vnútri plochy, a permitivity ε prostredia, v ktorom je pole vytvorené, t. j.

$$T = \frac{Q}{\varepsilon}$$

f) Veľkosť intenzity elektrického poľa v blízkosti povrchu vodiča možno podľa *Coulombovej vety* určiť ako podiel plošnej hustoty náboja σ v danom mieste povrchu vodiča a permitivity ε prostredia, ktorým je vodič obklopený, t. j.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_r}$$

Platnosť Coulombovej vety možno dokázať pomocou Ostrogradského—Gaussovej vety.

Pomocou tejto vety možno tiež dokázať, že elektrické pole v okolí náboja vypĺňajúceho rovnomerne objem určitej gule je práve také ako v okolí rovnako veľkého bodového elektrického náboja uloženého v jej strede. Podobne je to aj s elektrickým poľom v okolí guľového vodiča nabitého elektrickým nábojom keď sa náboj rovnomerne rozloží po povrchu guľového vodiča.

g) *Indukcia elektrického poľa* (čiže posunutie v elektrickom poli) $\boldsymbol{D}$ súvisí s intenzitou elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ vzťahom

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = (\varepsilon_0 + \varkappa_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

kde $\varkappa_e$ je dielektrická susceptibilita.

h) *Elektrický dipól* je sústava dvoch rovnako veľkých elektrických nábojov s opačnými znamienkami $-Q$ a Q, vzdialených od seba l, pričom l je podstatne menšie ako vzdialenosť r, v ktorej pole dipólu zisťujeme ($l \ll r$). Moment elektrického dipólu definujeme vzťahom

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{l}; \quad p = |\boldsymbol{p}| = Ql$$

Homogénne elektrické pole s intenzitou $\boldsymbol{E}$ pôsobí na elektrický dipól dvojicou síl, ktorej moment je daný vzťahom

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

Potenciálna energia elektrického dipólu s momentom $\boldsymbol{p}$ v mieste elektrického poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}$ je daná vzťahom

$$W_e = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

i) *Kapacitou* osamoteného vodiča C nazývame podiel celkového náboja Q a potenciálu vodiča φ, teda

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Kapacita kondenzátora je definovaná vzťahom

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

kde Q je náboj na jednej elektróde kondenzátora a φ je potenciál tejto elektródy vzhľadom na druhú elektródu kondenzátora.

j) Výsledná kapacita C kondenzátorov s kapacitami C_1, C_2, ..., C_n, zapojených paralelne (vedľa seba), je daná súčtom kapacít jednotlivých kondenzátorov:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Pre výslednú kapacitu C batérie týchto kondenzátorov zapojených do série (za sebou) platí vzťah:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

t. j.

$$C = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

k) Energia elektrického poľa, budeného elektricky nabitým vodičom alebo nachádzajúceho sa medzi elektródami kondenzátora, je daná vzťahom

$$W_e = \frac{1}{2} C\varphi^2$$

kde C je absolútna kapacita vodiča, resp. kapacita kondenzátora a φ je absolútny potenciál vodiča, resp. potenciál jednej dosky kondenzátora vzhľadom na druhú.

l) Objemová hustota energie elektrického poľa w, t. j. energia pripadajúca na jednotkový objem elektrického poľa sa dá vyjadriť vzťahom

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

kde E je intenzita elektrického poľa v danom mieste a ε je permitivita prostredia, v ktorom sa pole vytvára.

Pre energiu elektrického poľa v konečnom objeme V možno potom písať

$$W_e = \int_0^V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \, \mathrm{d}V$$

Príklady

504. Dve rovnako veľké guľôčky majú elektrické náboje $Q_1 = +24.10^{-6}$ C a $Q_2 = -18.10^{-6}$ C. a) Akou silou sa priťahujú zo vzdialenosti $r = 6$ cm vo vákuu? b) Akou silou sa budú z tej istej vzdialenosti odpudzovať, keď sme ich predtým uviedli do vzájomného styku?

Riešenie:

a) Podľa Coulombovho zákona možno písať

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} =$$

$$= \frac{24.10^{-6}\,\mathrm{C}.18.10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi.8{,}859.10^{-12}\,\mathrm{A}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^4.0{,}06^2\,\mathrm{m}^2} =$$

$$= \frac{2{,}4.1{,}8.10^5\,\mathrm{kg.m.s}^{-2}}{4\pi.8{,}859.3{,}6} = 1{,}078.10^3\,\mathrm{N}$$

b) Keď sa obe guľky dotknú, náboje sa vyrovnajú, takže celkový náboj pripadajúci na obidve guľôčky bude:

$$Q_{1,2} = 24 . 10^{-6}\,\mathrm{C} - 18 . 10^{-6}\,\mathrm{C} = 6 . 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

Po oddialení oboch guľôčok sa bude každá z nich vyznačovať rovnakým nábojom, t. j.

$$Q_1 = +3 . 10^{-6}\,\mathrm{C}; \quad Q_2 = +3 . 10^{-6}\,\mathrm{C}$$

Sila, ktorou sa budú guľôčky odpudzovať zo vzdialenosti $r = 6$ cm, bude mať hodnotu

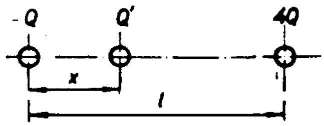
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} =$$

$$= \frac{3 . 10^{-6}\,\mathrm{C} . 3 . 10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi . 8{,}859 . 10^{-12}\,\mathrm{A}^2 . \mathrm{kg}^{-1} . \mathrm{m}^{-3} . \mathrm{s}^4 . 0{,}06^2\,\mathrm{m}^2} = 22{,}46\,\mathrm{N}$$

505. Vo vzdialenosti l od seba sú pevne uložené dva kladné náboje, Q a $4Q$. Kde na spojnici medzi oboma nábojmi treba umiestniť tretí náboj Q', aby naň nepôsobila nijaká sila?

Riešenie:

Uvedená podmienka bude splnená, keď sily, ktorými pôsobia na náboj Q'



Obr. 91

náboje Q a $4Q$, budú rovnako veľké a opačného smeru. Pri označení podľa *obr. 91* možno teda písať:

$$\frac{Q . Q'}{4\pi\varepsilon x^2} = \frac{Q' . 4Q}{4\pi\varepsilon (l - x)^2}$$

t. j.

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(l - x)^2}$$

Po úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$3x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

ktorej riešenia sú:

$$x_{1,2}=\frac{-2l\pm\sqrt{4l^2+12l^2}}{6}=\left\langle\begin{matrix}\frac{l}{3}\\ -l\end{matrix}\right.$$

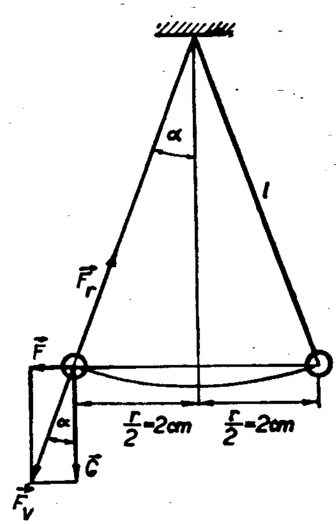
Pretože nás zaujíma bod medzi oboma nábojmi, použijeme koreň $x_1=\frac{l}{3}$, a tak hľadané miesto je 1/3 vzdialenosti oboch nábojov meranej od menšieho náboja.

506. Dve elektricky rovnako nabité guľôčky, každá hmotnosti $5\,.\,10^{-4}$ kg, boli vo vákuu zavesené v jednom bode na dvoch nitiach 1 m dlhých a odpudzovaním sa od seba vzdialili na vzdialenosť $r=4$ cm. Aké veľké sú ich náboje?

Riešenie:

Ak je guľôčka v pokoji, výslednica $\boldsymbol{F}_v$ elektrickej sily $\boldsymbol{F}$ a tiaže guľôčky $\boldsymbol{G}$ má smer závesu a je kompenzovaná reakciou závesu $\boldsymbol{F}_r$. Za týchto podmienok *(obr. 92)*

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{G}$$



Obr. 92

Súčasne však pri malom uhle α možno písať:

$$\operatorname{tg}\alpha\cong\sin\alpha=\frac{\frac{r}{2}}{l}=\frac{r}{2l}$$

takže

$$\frac{F}{G}=\frac{r}{2l}$$

Keďže podľa Coulombovho zákona je F daná vzťahom

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\,.\,Q}{r^2}$$

platí

$$\frac{1}{G}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q^2}{r^2}=\frac{r}{2l}$$

Odtiaľ pre veľkosť náboja jednej guľôčky dostaneme:

$$Q=\sqrt{\frac{r^3}{2l}4\pi\varepsilon_0 G}=$$

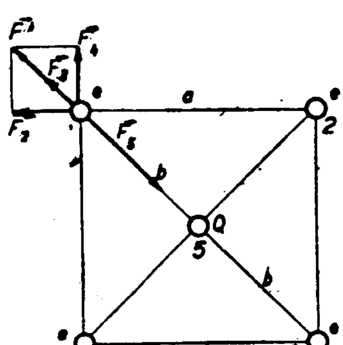
$$=\sqrt{\frac{0{,}04^3\ \mathrm{m}^3}{2\,.\,1\ \mathrm{m}}4\,.\,3{,}14\,.\,8{,}859\,.\,10^{-12}\ \mathrm{A}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^4.5\,.\,9{,}81\,.\,10^{-4}\ \mathrm{N}}=$$

$$=4{,}177\,.\,10^{-9}\ \mathrm{C}$$

507. Štyri voľné, rovnako veľké kladné bodové náboje e sú vo vrcholoch štvorca so stranou a. Aký náboj máme umiestniť v strede štvorca, aby sústava nábojov bola v rovnováhe?

Riešenie:

Celkovú situáciu vidíme na *obr. 93*. Na náboj e v mieste 1 pôsobia náboje z miesta 2, 3, 4 silami $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$ a výsledná sila $\boldsymbol{F}$, ktorou tieto náboje pôsobia na



Obr. 93

náboj v mieste 1, je daná vektorovým súčtom uvedených síl. Náboj Q, ktorý chceme umiestniť do stredu 5 štvorca a dosiahnuť, aby celá sústava nábojov bola v rovnováhe, musí mať opačné znamienko ako náboje e a takú hodnotu, aby sila $\boldsymbol{F}_5$, ktorou tento náboj pôsobí na náboj e v mieste 1, mala rovnakú hodnotu, ale opačný smer ako sila $\boldsymbol{F}$. Možno teda písať:

$$|\boldsymbol{F}_5| = |\boldsymbol{F}|$$

Vzhľadom na označenie na *obr. 93* možno predchádzajúcu rovnicu upraviť na tvar

$$F' + F_3 = F_5 \tag{1}$$

kde $F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2}$ je hodnota výslednice síl $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_4$. Keďže podľa Coulombovho zákona

$$F_2 = F_4 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon a^2}$$

platí

$$F' = \sqrt{F_2^2 + F_4^2} = \frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2}$$

Ďalej možno podľa Coulombovho zákona písať:

$$F_3 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon\left(\dfrac{2a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2}; \quad F_5 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2}$$

Po dosadení týchto vzťahov do rovnice (1) dostaneme:

$$\frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon a^2} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon a^2} = \frac{eQ}{2\pi\varepsilon a^2}$$

odkiaľ pre absolútnu hodnotu náboja Q, ktorý, ako sme uviedli, musí mať opačné znamienko ako náboje e, vyplýva vzťah

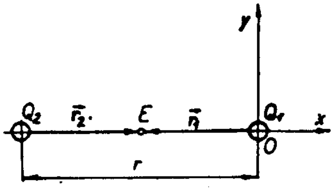
$$Q = \frac{e}{4}(1 + 2\sqrt{2})$$

Rovnaká úvaha platí pre každý z nábojov e, uložených vo vrcholoch štvorca.

508. Aká je intenzita elektrického poľa v bode, ktorý leží uprostred medzi dvoma nábojmi $Q_1 = +50\ \mu C$ a $Q_2 = +70\ \mu C$, ktoré sú od seba vzdialené $r = 20$ cm? Náboje sú v petroleji ($\varepsilon = 2\varepsilon_0$).

Riešenie:

Výsledná intenzita elektrického poľa $\boldsymbol{E}$ v strede medzi oboma nábojmi



Obr. 94

(obr. 94) sa rovná súčtu intenzít $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$, ktorými jednotlivé náboje prispievajú k výslednej intenzite. Teda

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$$

t. j.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi . 2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^3} \boldsymbol{r}_1 + \frac{1}{4\pi . 2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^3} \boldsymbol{r}_2$$

pričom

$$r_1 = r_2 = \frac{r}{2} = 10 \text{ cm}; \quad \boldsymbol{r}_1 = -r_1 \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{r}_2 = r_2 \boldsymbol{i}$$

kde $\boldsymbol{i}$ je jednotkový vektor v smere osi x. Potom možno písať:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi . 2\varepsilon_0} \left(-\frac{Q_1}{r_1^2} + \frac{Q_2}{r_2^2} \right) \boldsymbol{i}$$

z čoho pre absolútnu hodnotu výslednej intenzity vyplýva:

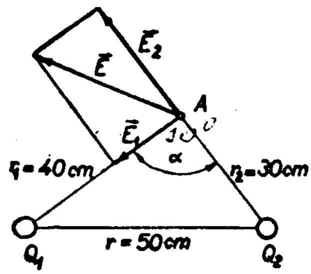
$$E = \frac{1}{4\pi . 2\varepsilon_0} \left(\frac{Q_2}{r_2^2} - \frac{Q_1}{r_1^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi . 8{,}859 . 10^{-12} \text{ A}^2 . \text{kg}^{-1} . \text{m}^{-3} . \text{s}^4} \left(\frac{70 . 10^{-6} \text{ C}}{0{,}1^2 \text{ m}^2} - \frac{50 . 10^{-6} \text{ C}}{0{,}1^2 \text{ m}^2} \right) =$$

$$= \frac{20 . 10^{-6}}{8\pi . 8{,}859 . 10^{-12} . 10^{-2}} \text{ V} . \text{m}^{-1} = 8{,}983 . 10^6 \text{ V} . \text{m}^{-1}$$

Intenzita bude mať zrejme smer jednotkového vektora $\boldsymbol{i}$.

509. Nájdite v mieste A vo vákuu intenzitu elektrického poľa budeného dvoma bodovými elektrickými nábojmi $Q_1 = -4 . 10^{-7}$ C a $Q_2 = 5 . 10^{-7}$ C, ktorých vzájomná poloha a poloha vzhľadom na bod A je zrejmá z *obr. 95.*



Obr. 95

Riešenie:

Pre celkovú intenzitu elektrického poľa v mieste A možno písať:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$$

kde $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ sú príspevky jednotlivých nábojov k celkovej intenzite poľa. Pre absolútnu hodnotu celkovej intenzity E možno vzhľadom na označenie na *obr. 95* písať:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(180 - \alpha)}$$

Uhol α možno určiť zo vzťahu

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\alpha$$

takže

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2} = \frac{40^2 + 30^2 - 50^2}{2.40.30} = 0$$

z čoho vyplýva $\alpha = 90°$. Teda

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Keďže

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi . 8{,}859 . 10^{-12}\ \mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4}} \cdot \frac{4.10^{-7}\ \mathrm{C}}{0{,}4^2\ \mathrm{m^2}} =$$

$$= 22\ 457\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r_2^2} = \frac{1}{4\pi . 8{,}859 . 10^{-12}\ \mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4}} \cdot \frac{5.10^{-7}\ \mathrm{C}}{0{,}3^2\ \mathrm{m^2}} =$$

$$= 49\ 905\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

tak

$$E = \sqrt{22\ 457^2 + 49\ 905^2}\ \mathrm{V.m^{-1}} \doteq 54\ 725\ \mathrm{V.m^{-1}}$$

510. Vypočítajte potenciál elektrického poľa vo vzdialenosti $a = 20$ cm, meranej kolmo od stredu vodivej kruhovej dosky polomeru $R = 10$ cm, nabitej elektrickým nábojom $Q = 1\ \mu$C! V okolí kruhovej dosky je vákuum.

Riešenie:

Keďže v tomto prípade ide o elektrické pole v okolí elektrického náboja, ktorý je spojite rozložený na povrchu vodiča, budeme potenciál počítať podľa vzťahu

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r}$$

kde σ je plošná hustota náboja a v našom prípade pre ňu platí vzťah $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$. Plošný element $\mathrm{d}S$ v tomto prípade *(obr. 96)* predstavuje medzikružie šírky $\mathrm{d}x$, takže $\mathrm{d}S = 2\pi x\ \mathrm{d}x$. Pre potenciál v mieste A možno písať:

$$\varphi = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overbrace{\frac{Q}{\pi R^2}}^{\sigma} \cdot \overbrace{2\pi x\ \mathrm{d}x}^{S}}{r} = \qquad = Q$$

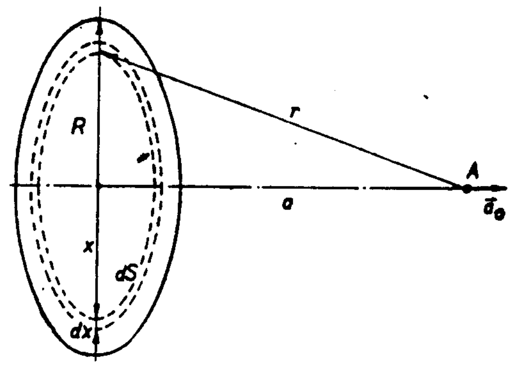
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{x\ \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left[\sqrt{a^2 + x^2}\right]_0^R =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon R^2} \left(\sqrt{a^2 + R^2} - a\right)$$

Po dosadení príslušných číselných hodnôt dostaneme:

$$\varphi = \frac{10^{-6}\ C}{2\pi\,.\,8{,}859\,.\,10^{-12}\ \mathrm{A}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^4.0{,}1^2\ \mathrm{m}^2}\,.$$

$$.\left(\sqrt{0{,}2^2\ \mathrm{m}^2 + 0{,}1^2\ \mathrm{m}^2} - 0{,}2\ \mathrm{m}\right) = 4{,}252\,.\,10^4\ \mathrm{V}$$



Obr. 96

Intenzitu elektrického poľa zistíme pomocou vzťahu

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

Keďže v našom prípade je intenzita poľa v mieste A iba funkciou premennej a, možno písať:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}\boldsymbol{a}_0 \quad .$$

kde $\boldsymbol{a}_0$ je jednotkový vektor v smere znázornenom na *obr. 96*. Platí teda:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2 . a}{\sqrt{R^2 + a^2}} - 1\right)\boldsymbol{a}_0$$

t. j.

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right)\boldsymbol{a}_0 =$$

$$= \frac{10^{-6}\ \text{C}}{2\pi . 8{,}859 . 10^{-12} . \text{A}^2 . \text{kg}^{-1} . \text{m}^{-3} . \text{s}^4 . 0{,}1^2\ \text{m}^2} \cdot \left(1 - \frac{0{,}2\ \text{m}}{\sqrt{0{,}1^2\ \text{m}^2 + 0{,}2^2\ \text{m}^2}}\right)\boldsymbol{a}_0$$

$$\boldsymbol{E} = 1{,}897 . 10^5 \boldsymbol{a}_0\ \text{V} . \text{m}^{-1}$$

511. Treba vypočítať potenciál a intenzitu elektrického poľa v okolí a vnútri vodivej gule polomeru R, nabitej kladne s plošnou hustotou náboja σ.

Riešenie:

Pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety možno dokázať, že intenzita, a teda aj potenciál poľa v okolí nabitej gule možno vypočítať ako intenzitu, resp. potenciál v okolí bodového náboja predstavujúceho celý náboj gule a umiestneného v strede gule. Preto

a) pre $r > R$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma . S}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma . 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma . R^2}{\varepsilon_0 r}$$

pričom S je povrch gule a σ plošná hustota náboja.

Pre intenzitu poľa platí vzťah

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{\varrho}$$

kde $\boldsymbol{\varrho} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ je jednotkový vektor v smere vektora $\boldsymbol{r}$. Potom

$$\mathbf{E}=\frac{\sigma . R^2}{\varepsilon_0 . r^2}\,\mathbf{\varrho}=\frac{\sigma . R^2}{\varepsilon_0 . r^3}\,\mathbf{r}$$

b) pre $r<R$ je potenciál vnútri vodivej gule taký istý ako na jej povrchu, teda pre $r=R$. Z toho

$$\varphi=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

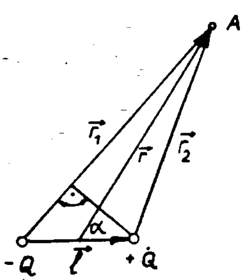
Keďže potenciál je vnútri gule všade rovnaký, t. j. $\varphi=$konšt, intenzita elektrického poľa vnútri gule vzhľadom na vzťah $\mathbf{E}=-\text{grad}\ \varphi$ sa rovná nule.

~~512.~~ Nájdite vzťah vyjadrujúci intenzitu elektrického poľa v okolí elektrického dipólu!

Riešenie:

Elektrické pole v okolí dipólu je vlastne výsledným poľom v okolí dvoch nábojov. Možno preto pre potenciál v mieste A *(obr. 97)* písať (vo vákuu)

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{Q(r_1-r_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2} \qquad (1)$$



Obr. 97

Ak predpokladáme, že r_1, $r_2 \gg l$, možno s dostatočnou presnosťou písať

$$r_1 r_2=r^2; \quad r_1-r_2=l\cos\alpha \qquad (2)$$

kde α je uhol, ktorý zvierajú vektory $\mathbf{l}$ a $\mathbf{r}$, a teda aj vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{r}$. Po dosadení (2) do (1) dostávame

$$\varphi=\frac{Ql\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p . \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\mathbf{p} . \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Intenzita elektrického poľa v určitom mieste súvisí s potenciálom elektrického poľa v tom istom mieste podľa vzťahu $\mathbf{E}=-\text{grad}\ \varphi$, takže možno písať

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad}\ \varphi = -\text{grad}\ \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} =$$

$$= -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}\ \text{grad}\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ \text{grad}\ (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) \tag{3}$$

Avšak

$$\text{grad}\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\frac{3\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \tag{4}$$

$$\text{grad}\ (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) = (\text{grad}\ \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{p} \cdot (\text{grad}\ \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p} \cdot \text{grad}\ \boldsymbol{r} =$$

$$= \boldsymbol{p} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}) =$$

$$= (p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}) \cdot (\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}) = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p} \tag{5}$$

kde sme písali grad $\boldsymbol{p} = 0$, lebo $\boldsymbol{p}$ je konštantný vektor. Po dosadení (4) a (5) do (3) konečne dostávame

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}\left(-\frac{3\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\right) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right)$$

513. Z vodivej mydlovej bubliny polomeru $r = 2$ cm a nabitej na potenciál E
$\varphi = 10\,000$ V vznikne po prasknutí kvapka vody s polomerom $r_1 = 0{,}05$ cm. Aký veľký je potenciál φ_1 kvapky?

Riešenie:

Potenciál bubliny pred prasknutím bol:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

z čoho pre náboj uložený na bubline vyplýva:

$$Q = \varphi \cdot r \cdot 4\pi\varepsilon_0$$

Potenciál guľôčky vzniknutej prasknutím bubliny potom bude:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_1} = \frac{\varphi \cdot r \cdot 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \varphi\ \frac{r}{r_1} =$$

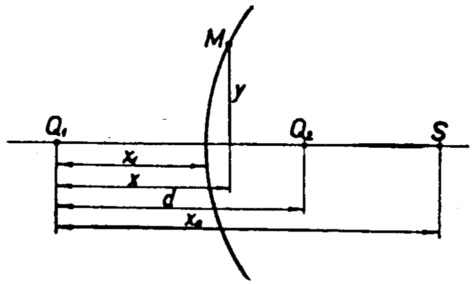
$$= 10\,000\ \text{V} \cdot \frac{0{,}02\ \text{m}}{0{,}0005\ \text{m}} = 400 \cdot 10^3\ \text{V}$$

514. Vzdialenosť medzi dvoma bodovými nábojmi $Q_1 = -3\ \mu\text{C}$ a $Q_2 = +2\ \mu\text{C}$ je $d = 5$ cm. Treba nájsť ekvipotenciálnu hladinu výsledného poľa, budeného vo vákuu uvedenými nábojmi, ktorá sa vyznačuje nulovým potenciálom.

Riešenie:

Pre potenciál v bode M možno pri označení použitom na *obr. 98* písať

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d-x)^2+y^2}}$$



Obr. 98

Ak má bod M ležať na hľadanej ekvipotenciálnej hladine, v bode M sa musí potenciál $\varphi = 0$,

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(d-x)^2+y^2}} = 0$$

odkiaľ po úprave dostávame rovnicu

$$(Q_1^2 - Q_2^2)x^2 + (Q_1^2 - Q_2^2)y^2 - 2Q_1^2 xd + Q_1^2 d^2 = 0$$

To je rovnica ekvipotenciálnej čiary s nulovým potenciálom v rovine, v ktorej sú náboje Q_1 a Q_2 uložené. Je to zrejme kružnica so stredom na osi x, t. j. na spojnici nábojov Q_1 a Q_2. Aby sme našli polomer tejto kružnice, hľadajme body, v ktorých kružnica pretína os x. Pre tieto sa $y = 0$; takže pre hľadané body platí

$$(Q_1^2 - Q_2^2)x^2 - 2Q_1^2 xd + Q_1^2 d^2 = 0$$

t. j.

$$x_1 = \frac{Q_1 d}{Q_1 - Q_2} = \frac{-3\,.\,10^{-6}\ \mathrm{C}\,.\,5\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}}{-5\,.\,10^{-6}\ \mathrm{C}} = 3\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m} = 3\ \mathrm{cm}$$

$$x_2 = \frac{Q_1 d}{Q_1 + Q_2} = \frac{-3\,.\,10^{-6}\ \mathrm{C}\,.\,5\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m}}{-1\,.\,10^{-6}\ \mathrm{C}} = 15\,.\,10^{-2}\ \mathrm{m} = 15\ \mathrm{cm}$$

Hľadaný polomer kružnice potom je

$$r = \frac{x_2 - x_1}{2} = 6\ \mathrm{cm}$$

Stred kružnice je vo vzdialenosti $x_0 = x_1 + r = 9$ cm od náboja Q_1. Ekvipotenciálnou plochou, ktorú hľadáme, bude guľa, ktorá vznikne rotáciou tejto kružnice okolo osi x.

515. V elektrickom poli sa potenciál v mieste A rovná $\varphi_A = 300$ V, v mieste B sa $\varphi_B = 1200$ V. Akú prácu treba vykonať, aby sme kladný náboj $Q = 3 \,.\, 10^{-8}$ C preniesli z miesta A do miesta B?

Riešenie:

Práca, ktorú vykonávame, sa bude rovnať zväčšeniu potenciálnej energie prenášaného náboja, takže možno písať

$$A = W_B - W_A = Q\varphi_B - Q\varphi_A = Q(\varphi_B - \varphi_A) =$$

$$= (1200 - 300)\ \mathrm{V} \,.\, 3 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{C} = 27 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

Použili sme pritom vzťah $W = Q\varphi$, ktorý vyplýva z definície potenciálu.

516. Aká je energia elektrického poľa, ktoré sa vytvára v okolí vodiča guľovitého tvaru s polomerom R, keď je nabitý nábojom Q a keď je obklopený homogénnym nevodivým prostredím s permitivitou ε?

Riešenie:

Celková energia poľa je daná vzťahom

$$W_e = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \,\mathrm{d}V$$

kde integráciu treba vykonať cez celý objem poľa, ktorý je v tomto prípade nekonečne veľký.

S ohľadom na to, že náboj Q je rovnomerne rozložený po povrchu guľového vodiča, elektrické pole v jeho okolí je také isté, aké by budil bodový náboj Q uložený v strede gule. Možno preto písať

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2}$$

Keďže ďalej

$$\mathrm{d}V = r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta$$

možno pre celkovú energiu poľa písať

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon} \int_{r=R}^{\infty} \int_{\varphi=-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \frac{1}{r^2} \cos\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{\varepsilon R}$$

Uvedený vzťah pre celkovú energiu poľa možno dostať aj z výrazu

$$W_e = \frac{1}{2} Q\varphi = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ktorý udáva energiu elektricky nabitého vodiča, kde $C=4\pi\varepsilon R$, čo predstavuje kapacitu samotného guľového vodiča.

517. V homogénnom elektrickom poli, ktorého intenzita má hodnotu $E=10^2\ \mathrm{V.m^{-1}}$, sa nachádza elektrický dipól s momentom hodnoty $p=10^{-9}\ \mathrm{C.m}$. V ktorej polohe má dipól najväčšiu a najmenšiu hodnotu potenciálnej energie a aké sú tieto hodnoty?

Riešenie:

Potenciálna energia elektrického dipólu v elektrickom poli je daná vzťahom

$$W_e = -\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{E}$$

Najväčšiu hodnotu W_e bude mať vtedy, keď $\boldsymbol{p}\uparrow\downarrow\boldsymbol{E}$; vtedy

$$W=-\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{E}=pE=10^{-9}\ \mathrm{A.s.m}\,.\,10^2\ \mathrm{V.m^{-1}}=10^{-7}\ \mathrm{J}$$

Najmenšiu hodnotu má W_e vtedy, keď $\boldsymbol{p}\uparrow\uparrow\boldsymbol{E}$; vtedy

$$W_e=-\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{E}=-pE=-10^{-7}\ \mathrm{J}$$

518. Aká sila pôsobí na bodový elektrický náboj Q, uložený do elektrického poľa elektricky nabitej nekonečne veľkej kovovej dosky s konštantnou plošnou hustotou náboja σ, keď dosku obklopuje vákuum?

Riešenie:

Pre hľadanú silu možno na základe definície intenzity elektrického poľa písať:

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}Q$$

Vzhľadom na to, že ide o nekonečne veľkú elektricky nabitú dosku, bude elektrické pole v jej okolí homogénne a jeho intenzitu možno zistiť napr. tak, že vypočítame limitu výrazu pre intenzitu elektrického poľa, zisteného v príklade 510 pre kruhovú dosku, a to pre $R\to\infty$. Intenzita teda bude:

$$\boldsymbol{E}=\lim_{R\to\infty}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\right)\boldsymbol{a}_0=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\boldsymbol{a}_0$$

kde $\boldsymbol{a}_0$ je jednotkový vektor kolmý na rovinu dosky a smerujúci od dosky. Na náboj Q bude potom v ktoromkoľvek mieste tohto elektrického poľa pôsobiť sila

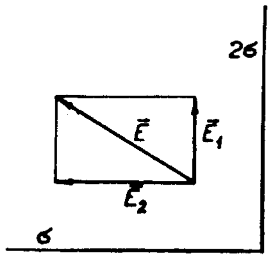
$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}Q=\frac{\sigma Q}{2\varepsilon_0}\,\boldsymbol{a}_0$$

519. Aká je intenzita elektrického poľa v blízkosti dvoch nekonečne veľkých vodivých, navzájom kolmých rovinných stien, keď jedna z nich je nabitá plošnou hustotou náboja σ a druhá plošnou hustotou 2σ a keď sa elektrické pole vytvára vo vákuu?

Riešenie:

Jednotlivé dosky by samostatne budili homogénne elektrické polia, ktorých intenzity sú navzájom kolmé *(obr. 99)* a majú hodnoty

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Obr. 99

Výsledné elektrické pole sa bude v každom mieste vyznačovať intenzitou, ktorá sa rovná vektorovému súčtu intenzít $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$. Vzhľadom na to, že $\boldsymbol{E}_1$ a $\boldsymbol{E}_2$ sú navzájom kolmé, možno pre hodnotu výslednej intenzity písať:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}} = \sqrt{\frac{5\sigma^2}{4\varepsilon_0^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

520. Medzi dvoma rovnobežnými vertikálnymi doskami, vzdialenými od seba $d = 0{,}5$ cm, sa nachádza elektricky nabitá kvapôčka hmotnosti $m = 10^{-9}$ g. Ak dosky nabijeme na rozdiel potenciálov $U = 400$ V, voľne pustená kvapôčka padá pod uhlom $\alpha = 7° \, 25'$ k vertikále. Určite náboj na nej!

Riešenie:

Výpočet založíme na tom, že kvapôčka padá v smere výslednej sily, ktorá na ňu pôsobí. Táto sila $\boldsymbol{F}$ je daná vektorovým súčtom elektrickej sily $\boldsymbol{F}_e = Q\boldsymbol{E}$ a tiaže kvapôčky $\boldsymbol{G} = m\boldsymbol{g}$ *(obr. 100)*, kde sme náboj kvapôčky označili Q.

Keďže elektrické pole medzi doskami je homogénne, platí

$$U = Ed$$

takže

$$E = \frac{U}{d}$$

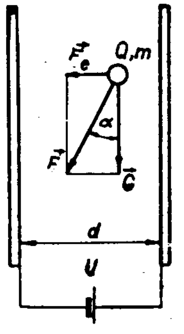
Vzhľadom na označenie na *obr. 100* možno ďalej písať:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{Q\,.\,E}{m\,.\,g} = \frac{Q\cdot\dfrac{U}{d}}{m\,.\,g} = \frac{Q\,.\,U}{m\,.\,g\,.\,d}$$

t. j.

$$Q = \frac{m\,.\,g\,.\,d\,.\,\text{tg}\,\alpha}{U} = \frac{10^{-9}\,.\,10^{-3}\,\text{kg}\,.\,9{,}81\,\text{m}\,.\,\text{s}^{-2}\,.\,0{,}5\,.\,10^{-2}\,\text{m}\,.\,\text{tg}\,7°\,25'}{400\,\text{V}} =$$

$$= 1{,}596\,.\,10^{-17}\,\text{C}$$



Obr. 100

521. Guľôčka hmotnosti $m = 10$ g je elektricky nabitá nábojom $Q = \frac{5}{3}\cdot 10^{-9}$ C. Akým zrýchlením sa bude táto guľôčka pohybovať v homogénnom elektrickom poli s intenzitou $E = 300\ \text{V}\,.\,\text{cm}^{-1}$?

Riešenie:

V zmysle definície intenzity elektrického poľa platí:

$$E = \frac{F}{Q}$$

takže

$$F = E\,.\,Q$$

Keďže podľa druhého Newtonovho zákona

$$F = m\,.\,a$$

možno po porovnaní oboch posledných rovníc písať

$$E\,.\,Q = m\,.\,a$$

Pre hľadané zrýchlenie v smere intenzity poľa potom dostávame:

$$a = \frac{E.Q}{m} = \frac{300.10^2\ \mathrm{V.m^{-1}}\ \frac{5}{3} \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}{10.10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 5.10^{-3}\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

522. Aká je tiaž vodivej gule priemeru $2r = 1$ m, ktorá má záporný potenciál hodnoty $\varphi = 10^6$ V a ktorá sa v určitom mieste zemského elektrického poľa, kde intenzita poľa má hodnotu $E = 10^4\ \mathrm{V.m^{-1}}$, práve vznáša vo vákuu?

Riešenie:

Ak sa vodivá guľa vznáša vo vákuu v určitom mieste zemského elektrického poľa, jej tiaž G a sila F elektrického zemského poľa, ktorá na guľu pôsobí, sú rovnako veľké a opačného smeru. Možno preto písať:

$$G = F$$

Pre F však platí $F = EQ$. Náboj Q, ktorý má guľa, určíme z výrazu pre potenciál gule:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

takže

$$Q = \varphi . 4\pi\varepsilon_0 r$$

Keďže φ je záporné, je záporné aj Q. Intenzita zemského elektrického poľa má smer do stredu Zeme, t. j. prakticky smer zvislý nadol, preto sila F má smer zvislý nahor.

Pre hľadanú tiaž vodivej gule možno teda písať:

$$G = F = EQ = 4\pi\varepsilon_0 r\varphi . E =$$

$$= 4\pi . 8{,}859 . 10^{-12}\ \mathrm{A^2.kg^{-1}.m^{-3}.s^4} . 0{,}5\ \mathrm{m} . 10^6\ \mathrm{V} . 10^4\ \mathrm{V.m^{-1}} = 0{,}555\ \mathrm{N}$$

523. Aký musí byť plošný obsah polepov rovinného kondenzátora s izolačnou sklenou vrstvou hrúbky 1 mm ($\varepsilon = 7\varepsilon_0$), aby kondenzátor mal kapacitu 150 pF?

Riešenie:

Kapacita kondenzátora je definovaná vzťahom $C = Q/\varphi$, kde Q je náboj na jednej elektróde kondenzátora a φ je potenciál tejto elektródy, ktorej náboj je v čitateli napísaného vzťahu, vzhľadom na druhú elektródu. Pretože pri rovinnom kondenzátore možno pole medzi doskami kondenzátora považovať za homogénne, platí pre φ vzťah $\varphi = Ed$, kde d je vzdialenosť dosiek kondenzátora a E je intenzita homogénneho elektrického poľa. Pre intenzitu možno podľa Coulombovej vety písať $E = \sigma/\varepsilon = Q/\varepsilon S$, kde S je plocha dosky kondenzátora. Pre kapacitu doskového kondenzátora možno potom už písať

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon S} d} = \frac{\varepsilon S}{d}$$

Pre hľadaný plošný obsah polepu rovinného kondenzátora potom vyplýva

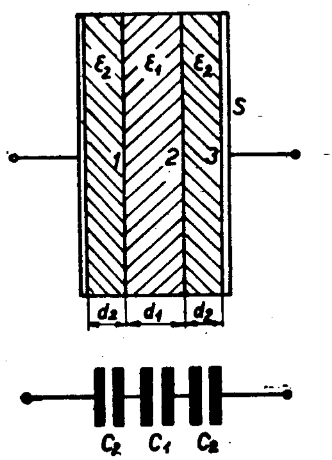
$$S = \frac{C.d}{\varepsilon} = \frac{150.10^{-12}\,\mathrm{F}.1.10^{-3}\,\mathrm{m}}{8{,}859.10^{-12}\,\mathrm{A}^2.\mathrm{kg}^{-1}.\mathrm{m}^{-3}.\mathrm{s}^4.7} =$$

$$= 2{,}4188.10^{-3}\,\mathrm{m}^2$$

Mi, **524.** Vypočítajte kapacitu doskového kondenzátora s plošným obsahom polepov $200\,\mathrm{cm}^2$! Medzi polepmi je sklo ($d_1 = 1$ mm) z oboch strán pokryté vrstvou parafínu. Hrúbka každej vrstvy parafínu $d_2 = 0{,}2$ mm. Sklo má relatívnu permitivitu $\varepsilon_1 = 7$, parafín $\varepsilon_2 = 2$.

$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

$\frac{Q}{C_1}$



Obr. 101

Riešenie:

Elektrická indukcia je vo všetkých dielektrikách rovnaká *(obr. 101)*, takže

$$D = \frac{Q}{S} = D_1 = D_2$$

t. j.

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2$$

Ak potenciálne rozdiely medzi jednotlivými vrstvami vyjadríme pomocou príslušných intenzít elektrického poľa, dostaneme:

$$U_{01} = E_2 . d_2 = E_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot d_2$$

$$U_{12} = E_1 . d_1$$

$$U_{23} = E_2 . d_2 = E_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot d_2$$

Pre výsledný potenciálový rozdiel možno potom písať:

$$U = U_{01} + U_{12} + U_{23} = E_1 . d_1 + 2E_2 d_2 = E_1 d_1 + 2E_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2$$

$$U = E_1 \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 \right) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 \right)$$

Pre kapacitu doskového kondenzátora dostaneme:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S . D}{\frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \left(d_1 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2 \right)} = \frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} + \frac{2d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$$

Pretože predchádzajúci vzťah možno písať aj v tvare

$$C = \frac{1}{\frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S} + 2 \frac{d_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + 2 \cdot \frac{1}{C_2}}$$

vidieť, že kapacitu takéhoto kondenzátora možno vypočítať ako kapacitu troch doskových kondenzátorov C_2, C_1, C_2, zapojených do série *(obr. 101)*.

Keď dosadíme číselné hodnoty, dostaneme:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_3 . S}{2\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} =$$

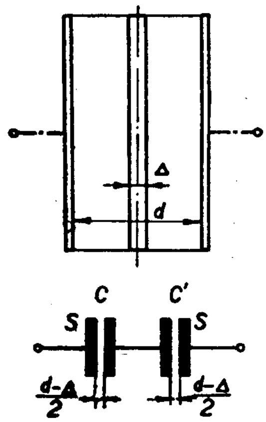
$$= \frac{8{,}859 . 10^{-12}\ \mathrm{A^2 . kg^{-1} . m^{-3} . s^4} . 7 . 2 . 200 . 10^{-4}\ \mathrm{m^2}}{2 . 7 . 0{,}2 . 10^{-3}\ \mathrm{m} + 2 . 1 . 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 516{,}775 . 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

525. Vzduchový kondenzátor s rovinnými doskami má kapacitu $C_0 = 10$ pF a vzdialenosť dosiek $d = 1$ cm. Do stredu medzi dosky vložíme plech hrúbky $\Delta = 1$ mm. Aká bude nová kapacita celého zariadenia? (Okrajové účinky možno zanedbať).

Riešenie:

Vložením dosky hrúbky Δ sa kondenzátor kapacity

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (1)$$



Obr. 102

zmení na dva kondenzátory s kapacitami *(obr. 102)*

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d-\Delta}{2}} = 2\,\frac{\varepsilon_0 S}{d-\Delta}$$

ktoré sú zapojené do série. Výsledná kapacita tejto kombinácie potom spĺňa vzťah

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = \frac{2}{C'}$$

takže

$$C = \frac{C'}{2} = \frac{\varepsilon_0 . S}{d-\Delta}$$

Zo vzťahu (1) však vidieť, že

$$\varepsilon_0 . S = C_0 d$$

takže po dosadení pre hľadanú kapacitu dostaneme:

$$C = C_0 \frac{d}{d-\Delta} = 10\text{ pF}\,\frac{1\text{ cm}}{1\text{ cm} - 0{,}1\text{ cm}} = 10\,\frac{1}{0{,}9}\text{ pF} = 11{,}11\text{ pF}$$

Nc **526.** Na aký potenciál φ_1 sa musí nabiť kondenzátor kapacity $C_1 = 2\ \mu\text{F}$, aby na ňom bol taký náboj ako na leidenskej fľaši s kapacitou $C_2 = 900\text{ pF}$ pri potenciáli $\varphi_2 = 30\,000\text{ V}$?

Riešenie:

Pre náboje na elektródach jedného aj druhého kondenzátora možno písať:

$$Q_1 = C_1 . \varphi_1 ; \quad Q_2 = C_2 . \varphi_2$$

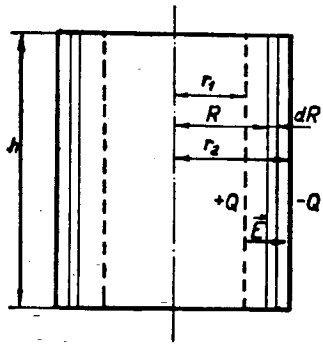
Keďže podľa znenia úlohy sa má $Q_1 = Q_2$, platí vzťah

$$C_1 \varphi_1 = C_2 \varphi_2$$

odkiaľ pre hľadaný potenciál dostávame:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \frac{C_2}{C_1} = 30\,000 \text{ V} \cdot \frac{900 . 10^{-12} \text{ F}}{2 . 10^{-6} \text{ F}} = 13{,}5 \text{ V}$$

527. Vypočítajte kapacitu valcového kondenzátora výšky $h = 20$ cm s polomermi elektród $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, keď medzi elektródami je vákuum *(obr. 103)*.



Obr. 103

Riešenie:

Na výpočet kapacity potrebujeme najprv zistiť potenciál napr. vnútornej (kladnej) elektródy vzhľadom na vonkajšiu. Tento potenciál sa rovná podielu práce A, ktorú musíme vykonať pri prenesení náboja proti silám tohto poľa z vonkajšej na vnútornú elektródu, a prenášaného náboja. Možno teda písať

$$\varphi = \frac{A}{Q} = \frac{1}{Q} \int_{r_2}^{r_1} \boldsymbol{f} . \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{Q} \int_{r_2}^{r_1} (-\boldsymbol{E}Q) . \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_2}^{r_1} E \, \mathrm{d}r = -\int_{r_2}^{r_1} E . \mathrm{d}R$$

pretože intenzita poľa a elementárny vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sú opačného smeru a $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}R$. Veľkosť intenzity elektrostatického poľa dostaneme pomocou Gaussovej—Ostrogradského vety, podľa ktorej tok cez povrch mysleného valca s polomerom R sa rovná podielu veľkosti náboja vo vnútri valca a permitivity obklopujúceho prostredia. Teda

$$E . 2\pi R h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

keďže tok cez základňu valca vzhľadom na smer intenzity poľa je nulový. Z toho

$$E=\frac{Q}{2\pi R\,.\,h\,.\,\varepsilon_0}$$

Pre potenciál φ potom dostávame:

$$\varphi=\int_{r_2}^{r_1}-E\,.\,\mathrm{d}R=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{r_2}^{r_1}-\frac{\mathrm{d}R}{R}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Pre kapacitu valcového kondenzátora napokon vyplýva:

$$C=\frac{Q}{\varphi}=\frac{2\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,h}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}=$$

$$=\frac{2\pi\,.\,8{,}859\,.\,10^{-12}\ \mathrm{A}^2\,.\,\mathrm{kg}^{-1}\,.\,\mathrm{m}^{-3}\,.\,\mathrm{s}^4\,.\,0{,}2\ \mathrm{m}}{2{,}3\log\dfrac{0{,}04\ \mathrm{m}}{0{,}03\ \mathrm{m}}}=38{,}721\,.\,10^{-12}\ \mathrm{F}$$

528. Vypočítajte kapacitu guľového kondenzátora vytvoreného dvoma sústrednými vodivými plochami s polomermi r_1 a r_2, keď je medzi nimi prostredie s permitivitou ε!

Riešenie:

Postupujeme analogicky ako pri príklade s valcovým kondenzátorom, teda určíme E použitím Gaussovej—Ostrogradského vety. Možno písať:

$$4\pi R^2\,.\,E=\frac{Q}{\varepsilon}$$

kde R je polomer ľubovoľnej myslenej gule medzi guľovými elektródami so spoločným stredom. Potenciál určíme ako predtým podľa vzťahu

$$\varphi=\int_{r_2}^{r_1}-E\,.\,\mathrm{d}r=\int_{r_2}^{r_1}E\ \mathrm{d}R=\int_{r_2}^{r_1}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{R^2}\,\mathrm{d}R=$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{r_2-r_1}{r_1\,.\,r_2}$$

lebo $\mathrm{d}r=-\mathrm{d}R$.

Kapacita guľového kondenzátora potom bude:

$$C=\frac{Q}{\varphi}=4\pi\varepsilon\cdot\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}$$

529. Aké sú výsledné kapacity sústav znázornených na *obr. 104*? Hodnoty kapacít v jednotlivých prípadoch sú tieto: a) $C_1=6\ \mu\mathrm{F}$, $C_2=2\ \mu\mathrm{F}$, $C_4=3\ \mu\mathrm{F}$,

$C_5 = 3$ μF; b) $C_1 = 2$ μF, $C_2 = 4$ μF, $C_3 = 4$ μF, $C_4 = 2$ μF; c) $C_1 = 6$ μF, $C_2 = 2$ μF, $C_3 = 1$ μF, $C_4 = 3$μF.

Riešenie:

Postupujeme tak, že do série alebo paralelne zapojené kondenzátory zložíme a vytvoríme náhradnú schému, ktorú ďalej zjednodušujeme. Pritom sa výpočet urýchli, keď vieme, že dva rovnaké kondenzátory v sérii majú výslednú kapacitu, ktorá sa rovná polovici kapacity jedného kondenzátora, kým dva rovnaké kondenzátory, zapojené paralelne, majú výslednú kapacitu, ktorá sa rovná dvojnásobku kapacity jedného. Pri zapojení do série

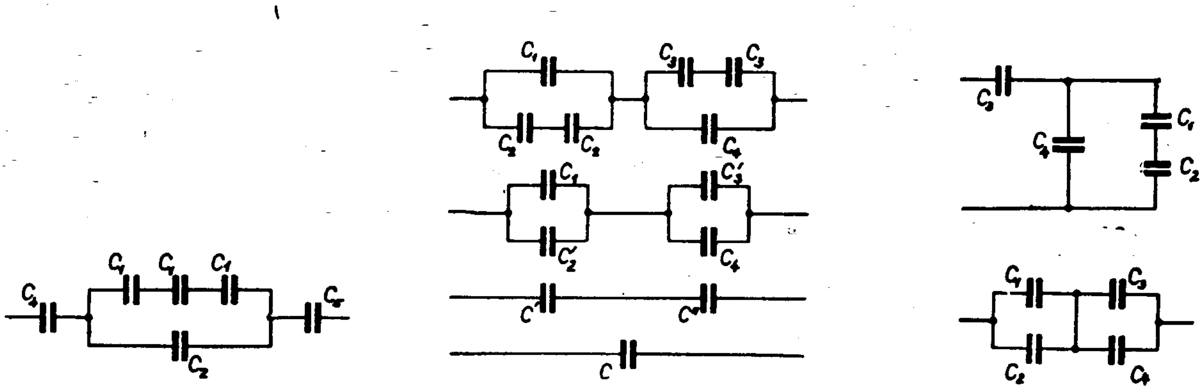
$$\frac{1}{C_v} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}; \quad C_v = \frac{C}{2}$$

a pri zapojení paralelne

$$C_v = C + C = 2C$$

Podobne sa dá dokázať, že pri troch kondenzátoroch s kapacitami C, zapojenými do série, je výsledná kapacita $C_v = \dfrac{C}{3}$, pri paralelnom zapojení $C_v = 3C$.

Jednotlivé prípady, ktoré sú uvedené na *obr. 104*, riešime potom takto:



Obr. 104a, b, c, d

a) Tri kapacity s hodnotami 6 μF v sérii dávajú $C_1^* = \dfrac{C_1}{3} = \dfrac{6\ \mu F}{3} = 2$ μF. Táto výsledná kapacita je s kapacitou $C_2 = 2$ μF zapojená paralelne, teda $C_3^* = C_1^* + C_2 = (2+2)$ μF $= 4$ μF. Táto kapacita C_3^* je zapojená v sérii s dvoma 3 μF kapacitami na okrajoch, takže

$$\frac{1}{C_v} = \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_3^*} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{3\ \mu F} + \frac{1}{4\ \mu F} + \frac{1}{3\ \mu F} = \frac{11}{12\ \mu F}$$

$$C_v = \frac{12}{11}\ \mu F = 1{,}09\ \mu F$$

b) Kondenzátory C_2 sú zapojené sériove, takže ich výsledná kapacita bude: $C_2' = \frac{C_2}{2} = 2\ \mu F$. Na ľavej strane schémy sú potom paralelne zapojené dve kapacity C_1 a C_2', takže ich výsledná kapacita bude $C' = C_1 + C_2' = (2 + 2)\ \mu F = 4\ \mu F$. Podobne možno ľahko zistiť, že výsledná kapacita C'' pravej časti zapojenia bude tiež $C'' = 4\ \mu F$. Keďže C' a C'' sú zapojené sériove, je zrejmé, že výsledná kapacita celého zapojenia bude: $C = 2\ \mu F$. Náhradné schémy potrebné pri výpočte sú na *obr. 104b* dolu.

c) Kapacity C_1 a C_2 môžeme nahradiť výslednou kapacitou C_1^*, pre ktorú platí:

$$\frac{1}{C_1^*} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6\ \mu F} + \frac{1}{2\ \mu F}$$

takže

$$C_1^* = \frac{3}{2}\ \mu F = 1,5\ \mu F$$

Keďže kapacity C_1^* a C_4 sú v paralelnom zapojení, možno ich nahradiť výslednou kapacitou

$$C_2^* = C_1^* + C_4 = 1,5\ \mu F + 3\mu F = 4,5\ \mu F$$

Kapacity C_3 a C_2^* sú teraz v sériovom zapojení, takže pre hľadanú výslednú kapacitu C celého zapojenia platí:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_2^*} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{4,5\ \mu F} + \frac{1}{1\ \mu F} = \frac{5,5}{4,5\ \mu F}$$

t. j.

$$C = \frac{4,5\ \mu F}{5,5} = 0,82\ \mu F$$

d) C_1 je s C_2 zapojené paralelne, aj C_3 a C_4 sú navzájom spojené paralelne. Dvojica kapacít C_1, C_2 je s dvojicou kapacít C_3, C_4 zapojená do série, takže pre výslednú kapacitu platí:

$$\frac{1}{C_v} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} = \frac{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}$$

t. j.

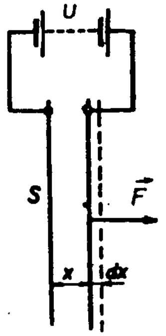
$$C_v = \frac{C_1C_3 + C_1C_4 + C_2C_3 + C_2C_4}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}$$

530. Vzduchový doskový kondenzátor, pozostávajúci z dvoch dosiek s plošným obsahom $S = 1000\ \mathrm{cm}^2$, vzdialených od seba $d = 1$ mm, nabijeme na potenciálový rozdiel $U = 1000$ V. Akou silou sa priťahujú tieto dosky?

Riešenie:

a) Daný príklad riešme najprv na základe energetických úvah. Označme F hodnotu sily, ktorou sa dosky kondenzátora priťahujú.

Zo zákona o zachovaní energie vyplýva, že práca, ktorú vykoná sila F pri priblížení dosiek o elementárnu dráhu $\mathrm{d}x$, sa rovná úbytku energie elektrického poľa, ktoré je prakticky celé uložené v objeme medzi doskami kondenzátora.



Obr. 105

Možno teda písať *(obr. 105)*:

$$F\,\mathrm{d}x = \frac{W_e}{V} \cdot S\,\mathrm{d}x$$

kde W_e je energia elektrického poľa v celom objeme dielektrika, V je objem dielektrika, takže $\frac{W_e}{V}$ je hustota energie elektrického poľa. Pre energiu elektrického poľa kondenzátora však platí vzťah $W_e = \frac{1}{2} CU^2$, takže

$$F.\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{2}C.U^2}{S.d} \cdot S\,\mathrm{d}x$$

kde sme objem vyjadrili vzťahom $V = Sd$. Pre hľadanú silu potom máme:

$$F = \frac{CU^2}{2d}$$

a po úprave

$$F = \frac{\frac{\varepsilon S}{d} \cdot U^2}{2d} = \frac{\varepsilon S.U^2}{2d^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S.U^2}{2d^2}$$

Keď dosadíme príslušné číselné hodnoty, dostaneme:

$$F = \frac{8{,}859 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{A^2 . kg^{-1} . m^{-3} . s^4} . 1 . 1000 . 10^{-4}\ \mathrm{m^2} . 1000^2\ \mathrm{V^2}}{2(1 . 10^{-3})^2\ \mathrm{m^2}} =$$

$$= \frac{8{,}859 . 10^{-7}\ \mathrm{N . m^2}}{2 . 10^{-6}\ \mathrm{m^2}} = 0{,}4428\ \mathrm{N}$$

b) Príklad možno riešiť aj priamym výpočtom hľadanej sily. Náboj $+Q$ na jednej doske pôsobí na náboj $-Q$ na druhej doske príťažlivou silou hodnoty

$$F = E_0 Q$$

kde E_0 je intenzita elektrického poľa budeného len nábojom $+Q$. Homogénne pole medzi doskami kondenzátora sa vyznačuje intenzitou $E = 2E_0$, pretože toto pole je budené ako nábojom $+Q$, tak aj nábojom $-Q$, a obidva náboje prispievajú k celkovému elektrickému poľu rovnakým dielom. Pretože ďalej $E = \sigma/\varepsilon$ (pozri príklad 523), možno písať

$$F = E_0 Q = \frac{E}{2} Q = \frac{\sigma}{2\varepsilon} Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S} = \frac{1}{2} \frac{CU^2}{d}$$

kde sme pri úprave výrazu pre silu F použili vzťahy $\sigma = Q/S$, $Q = CU$ a $C = \varepsilon S/d$.

531. Rovinný vzduchový kondenzátor kapacity $C_1 = 500\ \mathrm{pF}$ je nabitý na napätie $U_1 = 5000\ \mathrm{V}$. Dielektrikum kondenzátora tvorí doska z materiálu s permitivitou $\varepsilon = 5$. Aká práca je potrebná na odstránenie tejto dosky a ako sa zmení napätie na doskách kondenzátora odstránením izolačnej dosky z kondenzátora?

Riešenie:

Najprv zistíme, koľkokrát sa zmenší kapacita vytiahnutím dosky. Pretože relatívna permitivita je pomer kapacity kondenzátora s dielektrikom C_1 a bez dielektrika C_2, platí:

$$\varepsilon_r = \frac{C_1}{C_2}$$

t. j.

$$C_1 = \varepsilon_r . C_2$$

Keďže náboj na jednotlivých elektródach kondenzátorov ostáva aj po vytiahnutí izolačnej dosky rovnaký, platí

$$C_1 . U_1 = C_2 . U_2$$

a teda napätie na kondenzátore po vytiahnutí dosky bude

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = \varepsilon_r . U_1 = 5 . 5000 \text{ V} = 25\,000 \text{ V}$$

Prácu potrebnú na vytiahnutie izolačnej dosky určíme ako rozdiel energií elektrického poľa kondenzátora po a pred jej vytiahnutím, takže

$$A = \frac{1}{2} C_2 . U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 . U_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} C_1 U_1^2 . \varepsilon_r - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 (\varepsilon_r - 1) = \frac{1}{2} \cdot 500 . 10^{-12} \text{ F} . 5000^2 \text{ V}^2 (5 - 1) =$$

$$= 25 . 10^{-3} \text{ J}$$

532. Dve dosky kondenzátora s plošným obsahom $S = 500 \text{ cm}^2$ a vzdialené od seba $d = 1$ cm sú nabité na napätie $U_1 = 5000$ V. Akú prácu treba vykonať, ak chceme dosky oddialiť od seba na vzdialenosť $d' = 4$ cm?

Riešenie:

Hľadaná práca sa rovná rozdielu energií elektrického poľa kondenzátora pri vzdialenosti $d' = 4$ cm a pri vzdialenosti dosiek $d = 1$ cm. V jednotlivých prípadoch sú tieto energie dané vzťahmi

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 . U_1^2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 . U_2^2$$

Kapacitu C_2 vyjadríme pomocou C_1 a napätie U_2 pomocou U_1. Dostaneme:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d'} = \frac{\varepsilon_0 S}{4d} = \frac{C_1}{4}$$

Keďže náboje na elektródach sa pri zmene svojich vzdialeností nemenia, tak

$$C_1 . U_1 = C_2 . U_2$$

tak

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = U_1 \frac{C_1}{\frac{C_1}{4}} = 4 . U_1$$

Hľadaná práca je potom daná vzťahom

$$A = W_1 - W_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1}{4} (4U_1)^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 =$$

$$= \frac{16}{8} C_1 U_1^2 - \frac{1}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} C_1 U_1^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{d} . U_1^2 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}859 . 10^{-12}\ A^2 . kg^{-1} . m^{-3} . s^4 . 500 . 10^{-4}\ m^2}{0{,}01\ m} \cdot 5000^2 = 1{,}661 . 10^{-3}\ J$$

533. Kondenzátor, ktorý sa skladá z 2 vodivých dosiek, každá má plošný obsah 10 cm², vzdialených od seba 0,1 cm, je nabitý na 600 V. Ako sa zmení energia kondenzátora, keď objem medzi doskami, pôvodne vyplnený vzduchom, zaplníme olejom s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 3$ v prípade, že: a) kondenzátor je stále pripojený k zdroju napätia, b) kondenzátor po nabití a pred naliatím oleja odpojíme od zdroja napätia?

Riešenie:

Pre kapacitu doskového kondenzátora platí vzťah

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

Pre energiu kondenzátora možno písať

$$W_e = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} d$$

Po pripojení kondenzátora k zdroju napätia, keď je medzi doskami vzduch ($\varepsilon_r = 1$), má kondenzátor energiu

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{8{,}859 . 10^{-12} . 10 . 10^{-4} . 36 . 10^4}{1 . 10^{-3}}\ J =$$

$$= 15{,}93 . 10^{-7}\ J$$

Zmenu energie kondenzátora v uvedených prípadoch možno určiť takto:

a) $\varphi = \text{konšt}, \ \varepsilon_r = 3$

$$W_a = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \varphi^2 = 3 W_0 = 47{,}79 . 10^{-7}\ J$$

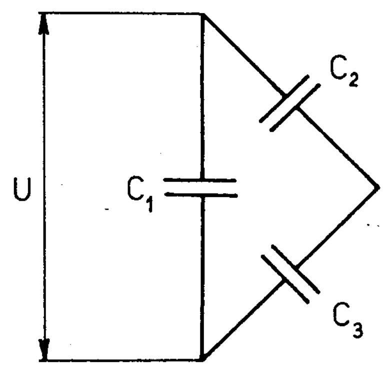
$$\Delta W = W_a - W_0 = 31{,}86 . 10^{-7}\ J$$

b) $Q = \text{konšt}, \; \varepsilon_r = 3$

$$W_b = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} d = \frac{1}{3} W_0 = 5{,}31 \, . \, 10^{-7} \text{ J}$$

$$\Delta W = W_b - W_0 = -10{,}62 \, . \, 10^{-7} \text{ J}$$

534. Kondenzátorovú batériu, zostavenú podľa *obr. 106*, kde $C_1 = C_2 = C_3 = 2 \, . \, 10^{-6}$ F pripojíme na elektrické napätie $U = 10$ V. Aká energia sa nazhromaždí v kondenzátorovej batérii?



Obr. 106

Riešenie:

Pre celkovú kapacitu kondenzátorovej batérie *(obr. 106)* možno písať

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}, \quad \text{t. j.} \quad C = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Celková energia, ktorá sa v kondenzátorovej batérii nazhromaždí, potom bude

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} U^2 = \frac{2 \, . \, 10^{-6} \text{ F} \, . \, 4 \, . \, 10^{-6} \text{ F}}{2 \, . \, 6 \, . \, 10^{-6} \text{ F}} \cdot 10^2 \text{ V} \doteq$$

$$\doteq 0{,}333 \, . \, 10^2 \text{ J}$$

Úlohy

535. Dva rovnaké náboje, uložené na malých guľôčkach, ktoré sú od seba vzdialené 10 cm, pôsobia na seba vo vákuu silou $4{,}9 \, . \, 10^{-6}$ N. Vypočítajte veľkosť uvedených nábojov!

[$Q = 23{,}36 \, . \, 10^{-9}$ C]

536. Dva náboje v prostredí s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 1$ pôsobia na seba vo vzdialenosti 11 cm takou istou silou ako v terpentíne vo vzdialenosti 7,4 cm.

Vypočítajte relatívnu permitivitu terpentínu!

[$\varepsilon_r' = 2{,}21$]

537. V rohoch rovnostranného trojuholníka sú umiestnené bodové náboje veľkosti e. Aký veľký bodový náboj máme umiestniť v strede trojuholníka, aby boli náboje v rovnováhe?

$$\left[Q = \frac{e}{\sqrt{3}} \right]$$

538. Aké veľké náboje Q treba umiestniť na dve guľôčky s hmotnosťami $m = 10$ g, aby elektrostatické sily, ktorými budú navzájom pôsobiť, kompenzovali gravitačné sily, ktorými guľôčky na seba pôsobia?

[$Q = 0{,}86 \, . \, 10^{-12}$ C]

539. Porovnajte elektrickú odpudivú a gravitačnú príťažlivú silu dvoch elektrónov!

[Elektrická odpudivá sila je $41{,}8 \, . \, 10^{47}$-krát väčšia než gravitačná príťažlivá sila.]

540. Aká je plošná hustota elektrického náboja na povrchu gule polomeru $r = 5$ cm, keď je nabitá elektrickým nábojom $Q = 0{,}1$ μC?

[$\sigma = 3{,}1832 \, . \, 10^{-6}$ C . m^{-2}]

541. Akú intenzitu má elektrické pole bodového náboja $Q = 144 \, . \, 10^{-6}$ C vo vzdialenosti $r = 6$; 12; 18 cm vo vákuu?

[$E_6 = 359{,}316 \, . \, 10^6$ V . m^{-1}; $E_{12} = 89{,}829 \, . \, 10^6$ V . m^{-1};
$E_{18} = 39{,}924 \, . \, 10^6$ V . m^{-1}]

542. Dva bodové náboje $Q_1 = 8$ μC, $Q_2 = 5$ μC sú vo vzdialenosti $d = 20$ cm.
a) V ktorom mieste na ich spojnici sa intenzita elektrického poľa rovná nule?
b) V ktorom mieste na ich spojnici sú potenciály budené oboma nábojmi rovnaké?

[a) Intenzita poľa je nulová vo vzdialenosti 11,17 cm od väčšieho náboja.
b) Potenciály sú rovnaké vo vzdialenosti 12,31 cm od väčšieho náboja.]

543. Aké veľké je napätie medzi dvoma bodmi A a B, ktoré sú vo vákuu v elektrostatickom poli náboja $Q = 5 \, . \, 10^{-7}$ C, a to tak, že bod A je od náboja Q vzdialený 2 cm a bod B 10 cm v tom istom smere?

[$U = 178{,}7 \, . \, 10^3$ V]

544. Nájdite výraz pre intenzitu elektrického poľa elektrického dipólu, ktorého moment má hodnotu p, vo vzdialenosti r a) v smere dipólového momentu,

b) v smere kolmom na dipólový moment! Predpokladáme, že $r \gg l$, kde l je vzájomná vzdialenosť elektrických nábojov, ktoré dipól vytvárajú.

$\left[\text{a) } E = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}; \quad \text{b) } E = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right]$

545. Vypočítajte hodnotu intenzity homogénneho elektrického poľa, ktoré pôsobí na elektrický dipól s momentom $p = 2 \cdot 10^{-10}$ C.m dvojicou síl, ktorej moment má maximálnu hodnotu $D = 2 \cdot 10^{-7}$ N.m!

[$E = 10^3$ V.m^{-1}]

546. Aký veľký musí byť polomer gule, aby sa na ňu zmestil náboj 1 C bez toho, aby vzniklo sršanie? (Maximálna intenzita poľa, pri ktorej ešte nevznikne sršanie vo vzduchu, je 25 kV.cm^{-1}.)

[$r = 59{,}9$ m]

547. Na aký absolútny potenciál by sa nabila Zem ($R = 6378$ km) nábojom 1 C?

[$\varphi = 1408$ V]

548. Aké veľké je napätie v homogénnom elektrickom poli intenzity $E =$ $= 150$ V.cm^{-1} medzi dvoma bodmi, ktorých vzdialenosť v smere siločiar je 6 cm?

[$U = 900$ V]

549. Aký veľký by musel byť polomer gule, ktorá by sa elektrickým nábojom $Q = 5 \cdot 10^{-6}$ C nabila na absolútny potenciál $\varphi = 100\,000$ V?

[$r = 0{,}449$ m]

550. Aký veľký je potenciál elektrického poľa vo vzdialenosti $a = 10$ cm od povrchu vodivej gule polomeru $r = 5$ cm, keď je na nej nahromadený elektrický náboj $Q = 2 \cdot 10^{-7}$ C?

[$\varphi = 11\,977$ V]

551. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa medzi dvoma súosovými valcovými plochami s kruhovým prierezom s polomermi r_0 a R_0, prakticky nekonečne dlhými, keď vnútorný valec je nabitý na potenciál φ_0 a vonkajší je uzemnený!

$$\left[E = \frac{\varphi_0}{r \ln \dfrac{R_0}{r_0}}\right]$$

552. Na vodiči ohnutom do tvaru kružnice polomeru R je uložený náboj Q. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa budeného týmto nábojom v strede kružnice, do ktorej je vodič ohnutý, ako aj v bode ležiacom na osi tejto kružnice vo vzdialenosti R od jej stredu!

$$\left[E_1 = 0;\ E_2 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 . R^2\sqrt{2}}\right]$$

553. Jednožilový kábel pozostáva z vodiča polomeru r_0 a kovového plášťa polomeru $4r_0$, pričom priestor medzi nimi je vyplnený dielektrikom. Intenzita elektrického poľa na povrchu vodiča je 30 kV.cm^{-1}. Vypočítajte intenzitu poľa pri plášti kábla!

$[E_{4r_0} = 0{,}75 . 10^6\ \mathrm{V.m^{-1}}]$

554. Poznáme potenciály φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 v štyroch blízkych bodoch, ktoré neležia v rovine. Ako určíme intenzitu poľa v prvom z týchto bodov, ktorý je od ostatných troch bodov známeho potenciálu vzdialený x_{12}, x_{13}, x_{14}?

$$\left[\boldsymbol{E} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_{12}} \boldsymbol{e}_{12} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{x_{13}} \boldsymbol{e}_{13} + \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{x_{14}} \boldsymbol{e}_{14},\right.$$

kde $\boldsymbol{e}_{12}$, $\boldsymbol{e}_{13}$, $\boldsymbol{e}_{14}$ sú jednotkové vektory smeru od 1. do 2., 3. a 4. bodu]

555. Bod A sa nachádza vo vzdialenosti d od nekonečne veľkej vodivej roviny nabitej elektrickým nábojom s plošnou hustotou σ a obklopenej vákuom. Aký je potenciál elektrického poľa v bode A vzhľadom na uvedenú rovinu?

$$\left[\varphi = -\frac{\sigma . d}{2\varepsilon_0}\right]$$

556. Povrch nekonečne dlhého valca, nachádzajúceho sa vo vákuu, je homogénne nabitý elektrickým nábojom tak, že na jeho jednotkovú dĺžku pripadá náboj q. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa vo vzdialenosti r od osi valca, keď jeho polomer je R!

$$\left[\text{pre } r > R \text{ sa } \boldsymbol{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r};\ \text{pre } r < R \text{ sa } \boldsymbol{E} = 0\right]$$

557. Aký je potenciál dosky plošného obsahu S nabitej elektrickým nábojom $+2e$, vzhľadom na dosku plošného obsahu S, nabitú nábojom $+e$, keď vzdialenosť oboch dosiek je d a medzi doskami je vákuum?

$$\left[\varphi = \frac{e . d}{2 . S . \varepsilon_0}\right]$$

558. Na guľovom vodiči s polomerom $R = 10$ cm je elektrický náboj $Q = 60\ \mu$C. Nájdite polomery ekvipotenciálnych hladín elektrického poľa, budeného týmto nábojom, ktorých potenciály sa od seba líšia o 10^5 V, keď ako prvú ekvipotenciálnu hladinu uvažujeme povrch vodiča!

$\left[r_1 = R,\ r_2 \doteq 1{,}02R,\ r_3 \doteq 1{,}04R,\ \dots\ r_n = \dfrac{5{,}4\,.\,10^6}{5{,}4\,.\,10^6 - n\,.\,10^5}\,R\right]$

559. Vypočítajte celkový náboj Zeme a plošnú hustotu náboja na jej povrchu, keď gradient potenciálu elektrického poľa zemského ovzdušia je na povrchu Zeme 100 $V\,.\,m^{-1}$ a keď polomer Zeme je 6378 km?

[$Q \doteq 4{,}5\,.\,10^5$ C; $\sigma \doteq 8{,}88\,.\,10^{-10}$ $C\,.\,m^{-2}$]

560. Vypočítajte energiu elektrického poľa gule s polomerom $R = 20$ cm nabitej nábojom $Q = 4\,.\,10^{-6}$ C za predpokladu, že je tento náboj rovnomerne rozložený v celom objeme gule a že guľa je vo vákuu!

[$W = 3{,}63$ J]

561. Elektródy kondenzátora sú od seba izolované porcelánovou doskou hrúbky 5 mm a vzduchovou vrstvou hrubou tiež 5 mm. Treba vypočítať intenzitu elektrického poľa vo vzduchu a v porceláne ($\varepsilon_r = 6$), keď potenciálový rozdiel elektród je 10 kV. Aké je napätie vo vzduchovej vrstve a porcelánovej doske?

[$E_1 = 1\,714\,285{,}8$ $V\,.\,m^{-1}$; $E_2 = 285\,714{,}2$ $V\,.\,m^{-1}$;
$U_1 = 8571{,}429$ V; $U_2 = 1428{,}571$ V]

562. Dve vodivé dosky rovinného kondenzátora sú navzájom vzdialené $d = 10{,}5$ mm. Medzi tieto dosky vložíme ďalšiu kovovú dosku hrúbky $\Delta = 0{,}5$ mm tak, že jej rovina je s obidvoma predchádzajúcimi doskami rovnobežná a jej vzdialenosť od bližšej dosky kondenzátora $d_1 = 4$ mm. Aký je potenciál kovovej dosky, keď potenciál bližšej dosky kondenzátora $\varphi_1 = +50$ V a potenciál druhej dosky kondenzátora $\varphi_2 = -60$ V?

[$\varphi = 6$ V]

563. Aká veľká sila pôsobí na elektrón v homogénnom elektrickom poli medzi doskami kondenzátora vzdialenými od seba $d = 1$ cm, keď napätie medzi doskami $U = 10\,000$ V?

[$F = 1{,}6\,.\,10^{-13}$ N]

564. Akú prácu musíme vynaložiť na prenesenie elektrického množstva $Q = 5$ C z bodu s potenciálom $\varphi_1 = -5$ V do bodu s potenciálom $\varphi_2 = +5$ V?

[$A = 50$ J]

565. Aká práca sa vykoná, keď sa náboj $Q = 4$ C posunie po dráhe, medzi koncovými bodmi ktorej je potenciálový rozdiel $U = 6$ V?

[$A = 24$ J]

566. Akú prácu vykonajú sily elektrického poľa, keď sa elektrický náboj $Q = 4$ C posunie v homogénnom elektrickom poli intenzity $E = 200\,000$ V.m^{-1} v smere siločiary o dráhu $l = 30$ cm?

[$A = 240\,000$ J]

567. Akú prácu treba vykonať, aby sa v homogénnom elektrickom poli intenzity $E = 200\,000$ V.m^{-1} posunul náboj $Q = 5$ C o dráhu $l = 0{,}15$ m v smere odchýlenom o uhol $\alpha = 45°$ od smeru poľa?

[$A = 106\,066$ J]

568. Aká veľká je potenciálna energia (vzhľadom na nekonečno) náboja $Q_2 = 2.10^{-7}$ C, ktorého vzdialenosť od bodového náboja $Q_1 = 3.10^{-7}$ C je $r = 4$ cm?

[$A = 0{,}013\,47$ J]

569. Akú hodnotu má moment elektrického dipólu, ktorý v elektrickom poli s intenzitou hodnoty $E = 10^3$ V.m^{-1} môže mať potenciálnu energiu maximálne $W = 10^{-5}$ J?

[$p = 10^{-8}$ C.m]

570. Koľkokrát väčšou silou sa priťahujú dosky kondenzátora v etylalkohole ($\varepsilon = 26\varepsilon_0$) než vo vákuu?

[$F' = 26F$]

571. Akú kapacitu má naša Zem, ak jej polomer $r = 6378$ km?

[$C = 710$ μF]

572. Akú kapacitu má teleso, ktoré sa nábojom $Q = 0{,}5$ C nabije na potenciál $\varphi = 3000$ V? Aký polomer má guľa rovnakej kapacity? (Obklopujúce prostredie je vákuum.)

[$C = 166$ μF; $R = 1495$ km]

573. Vodič kapacity $C = 1$ μF je nabitý nábojom $Q = 100.10^{-6}$ C. Aký je jeho potenciál?

[$\varphi = 100$ V]

574. Aká je kapacita doskového kondenzátora s plošným obsahom polepov $S = 200$ cm^2, keď medzi jeho polepmi je sklo hrúbky $d = 2$ mm s relatívnou permitivitou $\varepsilon_r = 7$?

[$C = 622{,}13.10^{-12}$ F]

575. Aký musí byť plošný obsah polepov rovinného kondenzátora s izolačnou sklenou vrstvou hrúbky 1 mm, aby mal kondenzátor kapacitu 150 pF? (Permitivita skla $\varepsilon = 7\varepsilon_0$.)

[$S = 24{,}188\ \mathrm{cm}^2$]

576. Leidenská fľaša má tieto rozmery: vonkajší priemer dna $d = 15$ cm, výška polepov $h = 20$ cm, hrúbka skla $s = 2$ mm. Vypočítajte jej kapacitu podľa vzorca pre rovinný kondenzátor! (Pretože hrúbka skla je vzhľadom na priemer fľaše malá, nie je potrebné používať presný vzorec pre kapacitu valcového kondenzátora.)

[$C = 3335 \,.\, 10^{-12}$ F]

577. Kondenzátor sa skladá z troch staniolových lístkov, z ktorých má každý plošný obsah 6 cm^2. Lístky sú od seba oddelené dvoma vrstvičkami sľudy, z ktorých každá má hrúbku 0,1 mm. Krajné lístky sú spolu vodivo spojené. Akú kapacitu má taký kondenzátor? (Relatívna permitivita sľudy $\varepsilon_r = 7$.)

[$C = 744$ pF]

578. Aká je kapacita kondenzátora zloženého z $n = 20$ dosiek, ktoré sú vzdialené $d = 1$ mm a prekrývajú sa na plošnom obsahu $S = 20\ \mathrm{cm}^2$? Dielektrikum je vákuum.

[$C = 336{,}6$ pF]

579. Batéria z dvoch za sebou spojených leidenských fliaš ($C_1 = 300$ pF, $C_2 = 500$ pF) je nabitá na napätie $U = 12\,000$ V. Vypočítajte napätie na prvej a druhej fľaši!

[$U_1 = 7500$ V; $U_2 = 4500$ V]

580. Kondenzátor kapacity $C = 1\ \mu$F je nabitý na potenciálový rozdiel $U_0 = 200$ V. Určite energiu elektrického poľa kondenzátora!

[$W = 0{,}02$ J]

581. Guľa polomeru R, nabitá nábojom Q, sa vyznačuje vo vákuu určitou potenciálnou energiou. Ako sa zmení potenciálna energia gule, keď ju ponoríme do tekutiny s relatívnou permitivitou ε_r?

$$\left[\Delta W = \frac{Q^2}{8 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, \varepsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\right]$$

582. Kondenzátory $C_1 = 1\ \mu$F, $C_2 = 10\ \mu$F sú zapojené do série. Na svorky kondenzátorovej batérie pripojíme napätie $U_0 = 200$ V. Aká je energia každého z kondenzátorov?

[$W' = 16{,}529 \cdot 10^{-3}$ J; $W'' = 1{,}653 \cdot 10^{-3}$ J]

583. Aká energia je nahromadená v 1 km^3 ovzdušia, keď gradient potenciálu elektrického poľa má hodnotu 10^4 V.m^{-1}?

[$W = 4{,}4295 \cdot 10^5$ J.km^{-3}]

13 ELEKTRICKÝ PRŮD

Úvod

a) *Elektrickým prúdom I* nazývame množstvo náboja, ktoré prejde prierezom vodiča za jednotku času, teda

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

kde dQ je elementárne elektrické množstvo, ktoré prešlo prierezom vodiča za elementárny čas dt.

b) Výraz

$$\mathrm{d}I = \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

vyjadruje množstvo prúdu, ktoré prejde za jednotku času cez plôšku dS na stranu jej orientácie, pričom $\boldsymbol{i}$ je *vektor hustoty prúdu.* Ak majú obidva vektory rovnaký smer, možno veľkosť hustoty prúdu počítať zo vzťahu

$$i = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$$

Keď je hustota v celom priereze S, cez ktorý preteká prúd I, rovnaká, platí:

$$i = \frac{I}{S}$$

c) Podľa *Ohmovho zákona* sa *elektrický prúd I, ktorý prechádza vodičom, rovná podielu potenciálového rozdielu $\varphi_1 - \varphi_2$ (napätia U) na koncoch vodiča a jeho elektrického odporu*

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

d) *Elektrický odpor vodiča* závisí od jeho geometrických rozmerov (dĺžky l, prierezu S) a špecifického odporu ϱ podľa vzťahu

$$R = \varrho \, \frac{l}{S}$$

e) Závislosť elektrického odporu vodiča od teploty sa pri nie veľmi širokom teplotnom rozsahu s dostatočnou presnosťou vyjadruje vzťahom

$$R_t = R_0 . [1 + \alpha(t - t_0)]$$

(R_t je odpor pri teplote t, R_0 odpor pri teplote t_0 a α teplotný súčiniteľ odporu).

f) *Elektromotorickým napätím* U_e (skratka EMN) nazývame hodnotu integrálu

$$U_e = \int \boldsymbol{E}_i . \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

kde $\boldsymbol{E}_i$ je intenzita poľa síl iného pôvodu ako elektrického a kde integráciu treba urobiť pozdĺž dráhy, na ktorej EMN určujeme. Vodič alebo sústava vodičov, v ktorých sa z akýchkoľvek príčin objavuje pole síl neelektrického pôvodu a ktoré sa vyznačujú nenulovým celkovým EMN, nazývame *zdrojom* EMN. Elektromotorické napätie otvoreného zdroja EMN (zdroj EMN, z ktorého sa neodoberá elektrický prúd) sa rovná jeho elektrickému napätiu.

g) Pri riešení zložitejších elektrických obvodov použijeme *Kirchhoffove zákony.*

Prvý hovorí: Algebraický súčet všetkých prúdov stretajúcich sa v *uzle* sa rovná nule, teda

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Druhý hovorí: Algebraický súčet elektromotorických napätí v ktorejkoľvek uzavretej časti siete sa rovná súčtu ohmických úbytkov napätí na jednotlivých odporoch tejto uzavretej časti, teda

$$\sum_{k=1}^{m} U_{ek} = \sum_{k=1}^{n} I_k . R_k$$

Pri riešení konkrétnych príkladov budeme zachovávať túto dohodu:

1. Zakreslíme šípky smeru prúdov tak, ako budú pravdepodobne tiecť. Keď výpočtom výjde prúd záporný, znamená to, že má opačný smer, ako sme zvolili.
2. Ľubovoľne zvolíme kladný smer obehu slučky.
3. Označíme smery EMN. V rovnici bude EMN kladné vtedy, keď je smer obehu slučky a smer elektromotorického napätia rovnaký.
4. Pri sčítavaní ohmických napätí bude kladné znamienko vtedy, keď smer obehu slučky a smer prúdu, ktorý ohmické napätie vyvoláva, budú súhlasné.

h) Pri zaraďovaní (spájaní) ohmických odporov do *série* pre výsledný odpor platí vzťah

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Pri zaraďovaní ohmických odporov *paralelne* pre výsledný odpor platí:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$$

t. j.

$$R=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}}$$

i) *Práca*, ktorá sa vykoná pri prechode elektrického prúdu I vodičom za elementárny čas $\mathrm{d}t$, keď na koncoch vodiča je napätie U, je daná vzťahom

$$\mathrm{d}A=U\,.\,I\,\mathrm{d}t$$

Pri konštantnom U a I možno pre prácu písať:

$$A=UIt$$

j) *Výkon* prúdu vo vodiči odporu R, cez ktorý preteká prúd I a na koncoch ktorého je napätie U, je daný vzťahom

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=U\,.\,I=\frac{U^2}{R}=I^2\,.\,R$$

k) Vodič, ktorým preteká prúd za čas t, ohrieva sa a zvyšuje svoju teplotu tak, akoby prijímal od okolia teplo Q, ktoré má podľa Joulovho—Lencovho zákona hodnotu

$$Q=UIt$$

l) Množstvo látky vylúčenej elektrolýzou na elektróde je podľa Faradayovho zákona dané vzťahom

$$m=A\,.\,Q=A\,.\,I\,.\,t$$

kde m je hmotnosť vylúčenej látky, Q náboj, ktorý prešiel elektrolytom, I pretekajúci prúd a t čas priebehu elektrolýzy. Elektrochemický ekvivalent látky A má rozmer $\mathrm{kg\,.\,A^{-1}\,.\,s^{-1}}$.

Keď elektrochemický ekvivalent látky nie je daný, vypočítame ho pomocou druhého Faradayovho zákona podľa vzorca

$$A=\frac{M_m}{v}\cdot\frac{1}{F}$$

kde $\frac{M_m}{v}$ je pomer hmotnosti mólu a valencie prvku, resp. hmotnosti mólu a valencie radikálu a $F=96\,494$ C je *Faradayov náboj.*

m) Svorkovým napätím U_s nazývame potenciálový rozdiel na svorkách galvanického článku (zdroja EMN), z ktorého sa odoberá prúd I, teda

$$U_s = U_e - R_i \, . \, I$$

kde U_e je elektromotorické napätie článku a R_i jeho vnútorný odpor.

n) Viac zdrojov EMN možno spájať do batérie. Pri sériovom spojení spájame vždy kladný pól jedného zdroja EMN so záporným pólom nasledujúceho zdroja EMN atď. Pre výsledné EMN, resp. výsledný vnútorný odpor takto vytvorenej batérie platí

$$U_e = U_{e1} + U_{e2} + U_{e3} + \dots; \quad R_i = R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + \dots$$

Paralelne spájame len rovnaké zdroje EMN. Výsledné EMN je to isté ako pri jednotlivých zdrojoch a vnútorný odpor batérie je $R_i^* = \dfrac{R_i}{n}$, kde R_i je vnútorný odpor jedného zdroja EMN a n je počet paralelne spojených zdrojov EMN.

Príklady

584. Aké množstvo elektrického náboja Q prejde vodičom za $t = 10$ s, keď a) prúd $I = 5$ A je stály, b) prúd rovnomerne rastie od nuly do 3 A?

Riešenie:

a) V súhlase s definíciou prúdu možno písať:

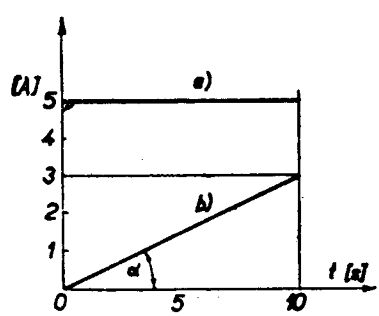
$$Q = I \, . \, t = 5 \text{ A} \, . \, 10 \text{ s} = 50 \text{ C}$$

b) Elementárny elektrický náboj dQ, ktorý pretečie vodičom za čas dt pri prúde I, je:

$$\mathrm{d}Q = I \, . \, \mathrm{d}t$$

kde $I = kt$ je lineárnou funkciou času *(obr. 107)*, pričom

$$k = \frac{3 \text{ A}}{10 \text{ s}} = 0{,}3 \text{ A} \, . \, \text{s}^{-1}$$



Obr. 107

Po dosadení do výrazu pre dQ dostaneme:

$$\mathrm{d}Q = k\,.\,t\,.\,\mathrm{d}t$$

a po integrácii

$$Q = k\int_0^{10} t\,.\,\mathrm{d}t = \frac{k}{2}\cdot[t^2]_0^{10} = \frac{0{,}3\ \mathrm{A}\,.\,\mathrm{s}^{-1}}{2}\cdot 10^2\ \mathrm{s}^2 = 15\ \mathrm{C}$$

585. Akumulátor sa nabíjal prúdom $I_n = 7$ A po dobu $t_n = 10$ hodín. Koľko hodín sa vybíjal, keď sa stále odoberal prúd $I_v = 0{,}5$ A a keď predpokladáme 100 % účinnosť akumulátora?

Riešenie:

Výpočet založíme na tom, že pri 100 % účinnosti akumulátora elektrický náboj dodaný akumulátoru pri nabíjaní dostaneme pri vybíjaní späť, teda

$$I_n\,.\,t_n = I_v\,.\,t_v$$

takže pre hľadaný čas vybíjania akumulátora máme:

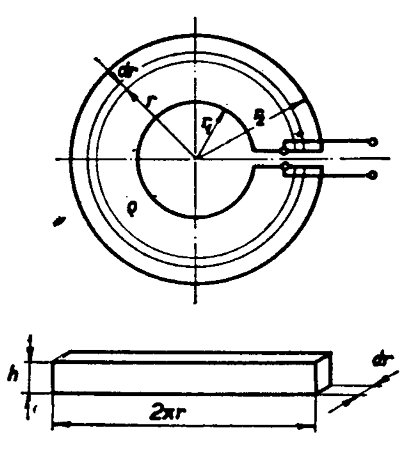
$$t_v = t_n\,\frac{I_n}{I_v} = 10\ \mathrm{h}\cdot\frac{7\ \mathrm{A}}{0{,}5\ \mathrm{A}} = 140\ \mathrm{h}$$

586. Z dosky veľmi malej hrúbky h z materiálu so špecifickým odporom ϱ vyrežeme rovinný prstenec tvaru medzikružia s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2. Aký je odpor tohto prstenca, keď

a) prstenec radiálne rozrežeme a prívodmi budú okraje rezu,
b) prívodmi prúdu budú obe ohraničujúce kružnice?

Riešenie:

a) Keď prstenec radiálne rozrežeme a prívodmi sú okraje rezu *(obr. 108)*,



Obr. 108

element vodiča naznačený na obrázku má dĺžku $2\pi r$ a jeho prierez je $h\,.\,dr$. Pre vodivosť elementu dG platí

$$dG = \frac{1}{dR} = \frac{1}{\varrho \dfrac{2\pi r}{h\,dr}} = \frac{h\,dr}{\varrho\,.\,2\pi r}$$

Integráciou pre celkovú vodivosť prstenca dostávame:

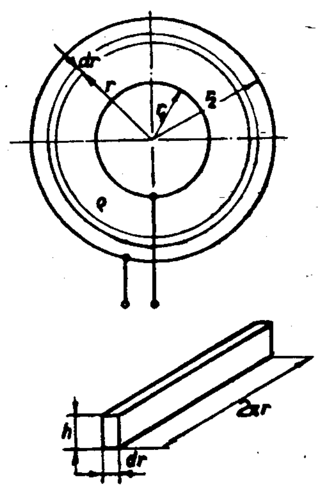
$$G = \frac{h}{2\pi\varrho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{h}{2\pi\varrho}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Odpor prstenca je potom prevrátená hodnota jeho celkovej vodivosti:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{2\pi\varrho}{h}\cdot\frac{1}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

b) Najprv zistíme odpor elementárneho medzikružia *(obr. 109)* ako odpor vodiča dĺžky dr a prierezu $2\pi r\,.\,h$:

$$dR = \varrho\frac{dr}{2\pi r\,.\,h}$$



Obr. 109

Celkový odpor dostaneme integráciou od r_1 po r_2:

$$R = \frac{\varrho}{2\pi h}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\varrho}{2\pi h}(\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\varrho}{2\pi h}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

P **587.** Vypočítajte hodnotu teplotného súčiniteľa odporu vodiča, ktorý sa skladá z hliníkového drôtu s odporom $R_{10} = 3\ \Omega(\alpha_1 = 4{,}2\,.\,10^{-3}\ K^{-1})$ a zo železného drôtu s odporom $R_{20} = 2\ \Omega(\alpha_2 = 6\,.\,10^{-3}\ K^{-1})$, ktoré sú zapojené za sebou. (Udané hodnoty odporov sa vzťahujú na teplotu 0 °C.)

Riešenie:

V sérii zapojené odpory hliníka R_{10} a železa R_{20} majú pri 0 °C výsledný odpor hodnoty R_0:

$$R_0 = R_{10} + R_{20}$$

Pri zvýšení teploty o Δt pre ten istý výsledný odpor možno písať:

$$R = R_1 + R_2$$

kde R_1 a R_2 sú odpory hliníkového a železného drôtu po zvýšení teploty o Δt. Možno teda písať:

$$R_0(1 + \alpha\ \Delta t) = R_{10}(1 + \alpha_1\ \Delta t) + R_{20}(1 + \alpha_2\ \Delta t)$$

$$R_0 + R_0\alpha\ \Delta t = R_{10} + R_{10}\alpha_1\ \Delta t + R_{20} + R_{20}\alpha_2\ \Delta t$$

Pretože súčet odporov $R_{10} + R_{20}$ na pravej strane sa rovná odporu R_0 na ľavej strane, možno ďalej písať:

$$R_0\alpha\ \Delta t = R_{10}\alpha_1\ \Delta t + R_{20}\alpha_2\ \Delta t$$

Z toho

$$\alpha = \frac{R_{10}\alpha_1 + R_{20}\alpha_2}{R_0} =$$

$$= \frac{3\ \Omega \,.\, 4{,}2 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} + 2\ \Omega \,.\, 6 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}}{(3 + 2)\ \Omega} = 4{,}92 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

588. Dve tyčinky rovnakého priemeru, jedna z uhlíka ($\varrho_u = 4 \,.\, 10^{-5}\ \Omega \,.\, \mathrm{m}$, $\alpha_u = -8 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$) a jedna zo železa ($\varrho_ž = 12 \,.\, 10^{-8}\ \Omega \,.\, \mathrm{m}$, $\alpha_ž = 6 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$) sú spojené za sebou. Pri akom pomere ich dĺžok odpor tejto kombinácie nezávisí od teploty?

Riešenie:

Pretože obe tyčinky sú zapojené do série, ich odpory sa sčítajú. Za predpokladu, že sa odpor teplotou nemení, možno napísať, že súčet odporov pri ľubovoľnej teplote sa rovná súčtu odporov pri teplote 0 °C (indexy u sú pre uhlík, ž pre železo), takže

$$R_u(1 + \alpha_u\ \Delta t) + R_ž(1 + \alpha_ž\ \Delta t) = R_u + R_ž$$

t. j.

$$R_u + R_ž + R_u\alpha_u\ \Delta t + R_ž\alpha_ž\ \Delta t = R_u + R_ž$$

Po zjednodušení rovnice odpory uhlíka R_u a železa $R_ž$ vyjadríme pomocou špecifických odporov ϱ_u, $\varrho_ž$, dĺžok l_u, $l_ž$ a prierezov S:

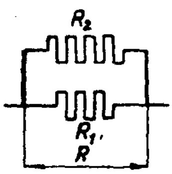
$$\varrho_u \frac{l_u}{S} \cdot \alpha_u . \Delta t = -\varrho_ž \cdot \frac{l_ž}{S} \cdot \alpha_ž . \Delta t$$

Z tejto rovnice vyjadríme pomer dĺžok

$$\frac{l_ž}{l_u} = -\frac{\varrho_u}{\varrho_ž} \cdot \frac{\alpha_u}{\alpha_ž} = -\frac{4.10^{-5}\,\Omega.\text{m}.(-8.10^{-3})\,\text{K}^{-1}}{12.10^{-8}\,\Omega.\text{m}.6.10^{-3}\,\text{K}^{-1}} = \frac{32.10^{-8}}{72.10^{-11}} \doteq 444$$

z ktorého vidíme, že tyčinka zo železa musí byť 444-krát dlhšia ako tyčinka z uhlíka.

589. Odporový etalón je vyhotovený tak, že jeho hodnota je 0,102 Ω. Pripojením vhodného paralelného odporu sa má adjustovať na presnú hodnotu 0,1 Ω. Aký veľký paralelný odpor bude na to potrebný?



Obr. 110

Riešenie:

Vyjdeme zo vzťahu pre paralelné zapojenie odporov, podľa ktorého v súhlase s označením na *obr. 110* platí:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Z toho

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}} = \frac{R . R_1}{R_1 - R} = \frac{0{,}1\,\Omega . 0{,}102\,\Omega}{0{,}102\,\Omega - 0{,}1\,\Omega} = 5{,}1\,\Omega$$

590. Odpor dvoch vodičov spojených paralelne je 1/7 Ω. Keď spojíme tieto vodiče za sebou, výsledný odpor je 7/10 Ω. Vypočítajte odpor každého vodiča!

Riešenie:

Pre paralelné zapojenie odporov R_1, R_2 platí vzťah

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{7}$$

a pre vodiče zapojené do série zase vzťah

$$R_1 + R_2 = \frac{7}{10}$$

Po úprave dostaneme pre R_2 kvadratickú rovnicu

$$10R_2^2 - 7R_2 + 1 = 0$$

ktorej riešenia sú:

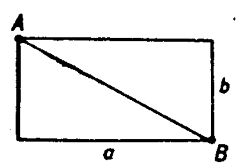
$$(R_2)_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \end{matrix} \right.$$

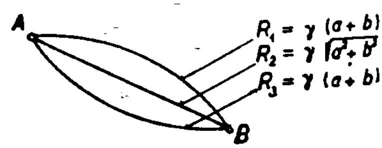
Pre R_1 dostávame opäť dva korene, a to $(R_1)_{1,2} = 0{,}2\ \Omega;\ 0{,}5\ \Omega$.
Hľadané odpory sú teda 0,2 Ω a 0,5 Ω.

591. Vypočítajte odpor drôtenej kostry, ktorá má tvar obdĺžnika so stranami a, b a jednej jeho diagonály, ak prúd prechádza od vrcholu A ku B. Odpor jednotkovej dĺžky použitého drôtu je γ!

Riešenie:

Pretože chceme vypočítať odpor medzi bodmi A, B, možno *obr. 111a* prekresliť tak, ako je to uvedené na *obr. 111b*.





Obr. 111a, b

Naznačené odpory R_1, R_2, R_3 sú vzájomne paralelne zapojené, takže výsledný odpor R bude:

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}$$

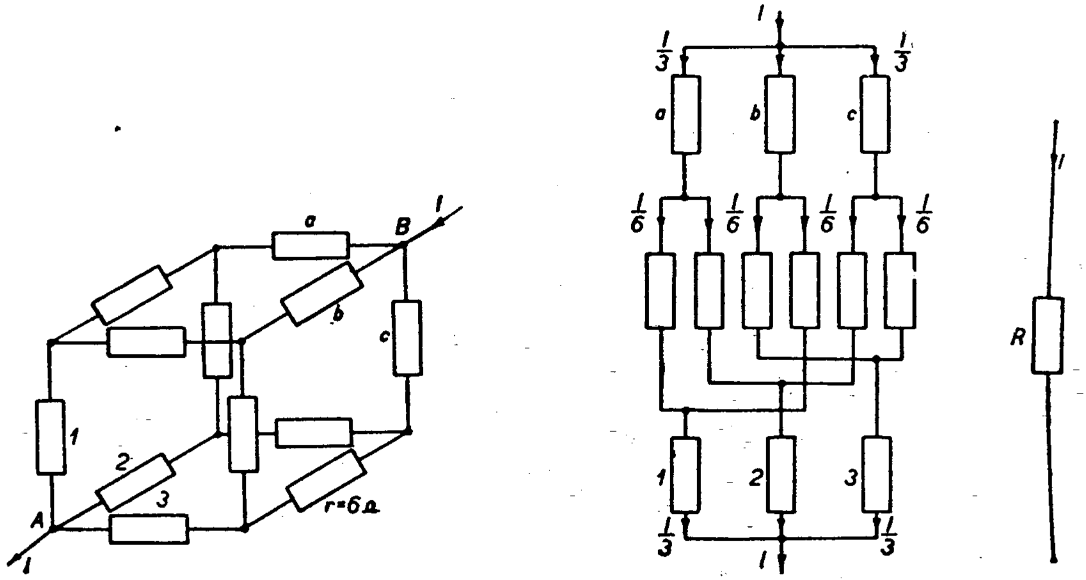
Keď odpory R_1, R_2, R_3 dosadíme do posledného vzťahu, vychádza:

$$R = \frac{\gamma\,.(a+b)\,.\,\gamma\,.\sqrt{a^2+b^2}\,.\,\gamma\,.(a+b)}{\gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2} + \gamma^2(a+b)^2 + \gamma^2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} = \gamma\,\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b) + 2\sqrt{a^2+b^2}}$$

592. Kostra kocky sa skladá z rovnakých odporov hodnoty $r = 6\ \Omega$ tak, že každá hrana kocky je jeden takýto odpor. Vypočítajte odpor R medzi protiľahlými rohmi AB kocky *(obr. 112)*!

Riešenie:

Kocka *(obr. 112a)* je priestorový útvar. Keď systém odporov z *obr. 112a* prekreslíme do roviny *(obr. 112b)*, vidíme, že dostaneme útvar symetrický čo do rozloženia odporov i čo do rozvetvenia prúdov. Prúd prichádzajúci do odporov a, b, c sa rozvetvuje (vzhľadom na rovnakú hodnotu jednotlivých odporov) trikrát $I/3$ a potom ďalej šesťkrát $I/6$. Pri výstupe z kocky sa prúdy obdobne spájajú na tri razy $I/3$.



Obr. 112a, b, c

Výpočet výsledného odporu medzi rohmi AB založíme na tom, že výkon ľubovoľného prúdu I, prechádzajúceho kombináciou odporov, má byť rovnako veľký ako výkon toho istého prúdu prechádzajúceho výsledným náhradným odporom R *(obr. 112c)*. Vzhľadom na to, že prúd $I/3$ prechádza celkove šiestimi odpormi a prúd $I/6$ tiež šiestimi odpormi *(obr. 112b)*, možno písať:

$$RI^2 = 6r\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6r\left(\frac{I}{6}\right)^2$$

t. j.

$$RI^2 = \frac{6rI^2}{9} + \frac{6rI^2}{36}$$

Z tejto rovnice pre výsledný odpor R dostávame

$$R = \frac{6}{9}\, r + \frac{6}{36}\, r = \frac{45}{54} \cdot 6\Omega = 5\ \Omega$$

593. V zapojení podľa *obr. 113* vypočítajte hodnotu prúdu I, keď $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_5 = 10\ \Omega$, $U_e = 24$ V. Vnútorný odpor zdroja zanedbajte!

Riešenie:

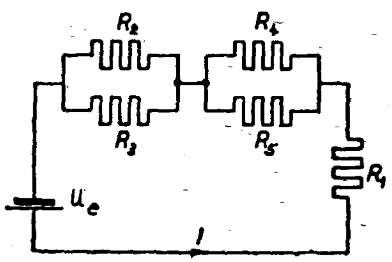
Zložíme jednotlivé skupiny paralelných odporov okruhu, čím dostaneme:

$$R' = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5\ \Omega \,.\, 10\ \Omega}{5\ \Omega + 10\ \Omega} = \frac{50}{15}\ \Omega = 3{,}33\ \Omega$$

$$R'' = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{10\ \Omega \,.\, 10\ \Omega}{10\ \Omega + 10\ \Omega} = \frac{100}{20}\ \Omega = 5\ \Omega$$

Odpory R', R'' a R_1 sú zapojené do série, a preto výsledný odpor okruhu

$$R = R' + R'' + R_1 = 3{,}33\ \Omega + 5\ \Omega + 10\ \Omega = 18{,}33\ \Omega$$



Obr. 113

Pre prúd I potom dostávame:

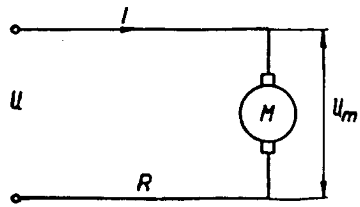
$$I = \frac{U_e}{R} = \frac{24\ \text{V}}{18{,}33\ \Omega} = 1{,}31\ \text{A}$$

594. Elektromotor na jednosmerný prúd odoberá prúd $I = 10$ A a potrebuje napätie $U_m = 220$ V. Aké napätie U treba pripojiť na začiatku vedenia, keď celkový odpor vedenia $R = 1\ \Omega$?

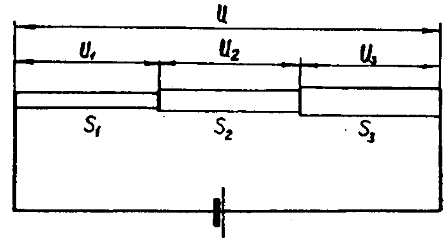
Riešenie:

Napätie pripojené na začiatku vedenia musí nahradiť nielen hodnotu, ktorú potrebuje motor, ale aj úbytok napätia, ktorý nastal na vedení s odporom R *(obr. 114).* Platí teda:

$$U = U_m + R \,.\, I = 220\ \text{V} + 1\ \Omega \,.\, 10\ \text{A} = 230\ \text{V}$$



Obr. 114



Obr. 115

595. Elektrický obvod sa skladá z troch vodičov rovnakej dĺžky, zhotovených z rovnakého materiálu, ktoré sú zapojené za sebou *(obr. 115)*. Prierezy vodičov sú: $S_1 = 1\ \mathrm{mm}^2$, $S_2 = 2\ \mathrm{mm}^2$, $S_3 = 3\ \mathrm{mm}^2$. Rozdiel potenciálov na koncoch obvodu $U = 12$ V. Určite úbytok napätia na každom vodiči!

Riešenie:

Treba určiť najprv odpor jednotlivých vodičov zo vzťahu medzi odporom, jeho geometrickými rozmermi (l, S) a špecifickým odporom (ϱ).

$$R_1 = \varrho \cdot \frac{l}{S_1}; \quad R_2 = \varrho \cdot \frac{l}{S_2}; \quad R_3 = \varrho \cdot \frac{l}{S_3}$$

Celkový odpor všetkých vodičov spojených do série

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{S_1} + \varrho \cdot \frac{l}{S_2} + \varrho \frac{l}{S_3} = \varrho \, . \, l\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) =$$

$$= \varrho l \, \frac{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}{S_1 \, . \, S_2 \, . \, S_3}$$

Každým vodičom *(obr. 115)* potečie prúd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U \, . \, S_1 \, . \, S_2 \, . \, S_3}{\varrho \, . \, l(S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)}$$

a úbytky napätia (ohmické úbytky) na jednotlivých vodičoch budú podľa Ohmovho zákona dané vzťahmi

$$U_1 = R_1 I = \frac{\varrho \, . \, l}{S_1} \cdot \frac{U_1 \, . \, S_1 S_2 S_3}{\varrho \, . \, l(S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3)} = \frac{1}{S_1} \cdot \frac{U_1 \, . \, S_1 S_2 S_3}{S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3}$$

$$U_1 = \frac{1}{1\ \mathrm{mm}^2} \cdot \frac{12\ \mathrm{V} \, . \, 1\ \mathrm{mm}^2 \, . \, 2\ \mathrm{mm}^2 \, . \, 3\ \mathrm{mm}^2}{1\ \mathrm{mm}^2 \, . \, 2\ \mathrm{mm}^2 + 1\ \mathrm{mm}^2 \, . \, 3\ \mathrm{mm}^2 + 2\ \mathrm{mm}^2 \, . \, 3\ \mathrm{mm}^2} = \frac{72\ \mathrm{V}}{11} = 6{,}545\ \mathrm{V}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{72}{11}\ \mathrm{V} = \frac{36}{11}\ \mathrm{V} = 3{,}273\ \mathrm{V}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{72}{11}\ \mathrm{V} = \frac{24}{11}\ \mathrm{V} = 2{,}182\ \mathrm{V}$$

596. Ako treba zapojiť dva články, z ktorých každý má elektromotorické napätie $U_e = 1{,}5$ V a vnútorný odpor $R_z = 1{,}4\ \Omega$, aby obvodom, ktorého odpor $R = 0{,}2\ \Omega$, pretekal čo najväčší prúd?

Riešenie:

Pri zapojení do série bude elektromotorické napätie celej batérie

$$U_b = 2\,.\,U_e$$

a vnútorný odpor batérie

$$R_{zb} = 2R_z$$

Preto prúd bude daný vzťahom

$$I = \frac{2\,.\,U_e}{2R_z + R} = \frac{2\,.\,15\ \text{V}}{2\,.\,1{,}4\ \Omega + 0{,}2\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

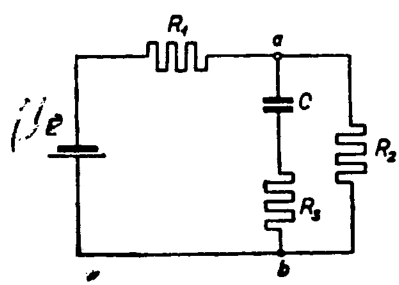
Pri paralelnom zapojení sú pomery takéto:

$$U_b = U_e; \quad R_{zb} = \frac{R_z}{2}$$

$$I = \frac{U_e}{\frac{R_z}{2} + R} = \frac{1{,}5\ \text{V}}{0{,}7\ \Omega + 0{,}2\ \Omega} = 1{,}66\ \text{A}$$

Je teda zrejmé, že pre splnenie podmienky uvedenej v príklade treba články zapojiť paralelne.

597. Na aké najväčšie napätie sa nabije kondenzátor C, ak je do siete podľa *obr. 116* zapojené stále elektromotorické napätie U_e?



Obr. 116

Riešenie:

Okruhom $U_e - R_1 - R_2$ prechádza prúd

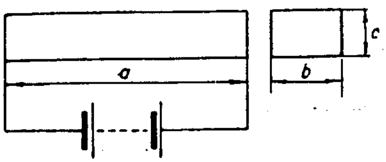
$$I = \frac{U_e}{R_1 + R_2}$$

ktorý na svorkách odporu R_2 (svorky $a - b$) vyvolá ohmické napätie

$$U = I \,.\, R_2 = U_e \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Na toto napätie sa nabije aj kondenzátor C, pretože odpor R_3 nevyvolá nijaký úbytok napätia, keďže kondenzátor C prerušuje prúdový okruh, takže medzi $a - b$ nepreteká prúd.

598. Hranol z retortového uhlia prierezu $b \times c = 3\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}$ a dĺžky $a = 10\ \text{cm}$ je pripojený na napätie $U = 10$ V *(obr. 117)*. Aká intenzita elektrického poľa a hustota elektrického prúdu je v hranole? (Špecifická vodivosť retortového uhlia $\gamma = \frac{1}{\varrho} = 160 \,.\, 10^2\ \Omega^{-1} \,.\, \text{m}^{-1}$.)



Obr. 117

Riešenie:

Intenzitu elektrického poľa vypočítame ako spád napätia pripadajúci na jednotku dĺžky

$$E = \frac{U}{a} = \frac{10\ \text{V}}{0{,}1\ \text{m}} = 100\ \text{V} \,.\, \text{m}^{-1}$$

Hustota prúdu je v zmysle definície daná vzťahom

$$i = \frac{I}{S} = \frac{I}{b \,.\, c}$$

Pre prúd možno písať

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{a}{b \,.\, c}} = \frac{\gamma U b c}{a}$$

Pre prúdovú hustotu potom dostaneme:

$$i = \frac{I}{b \,.\, c} = \frac{\gamma \,.\, U \,.\, b \,.\, c}{abc} = \frac{\gamma U}{a} = \frac{160 \,.\, 10^2\ \Omega^{-1} \,.\, \text{m}^{-1} \,.\, 10\ \text{V}}{0{,}10\ \text{m}} = 1{,}6 \,.\, 10^6\ \text{A} \,.\, \text{m}^{-2}$$

599. Koľko suchých batérií elektromotorického napätia $U_e = 4{,}5$ V s vnútorným odporom $R_i = 3\ \Omega$ treba zapojiť do série, aby v obvode zaradené relé s odporom $R = 3000\ \Omega$ pritiahlo kotvu, keď je na to potrebný prúd $I = 0{,}025$ A?

Riešenie:

Pre uvedený okruh možno podľa druhého Kirchhoffovho zákona písať:

$$n\,.\,U_e = I\,.\,R + I\,.\,n\,.\,R_i$$

a po úprave

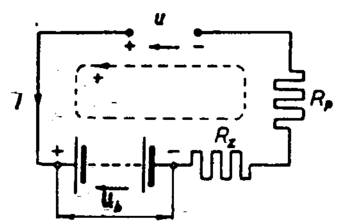
$$n\,.\,(U_e - IR_i) = I\,.\,R$$

t. j.

$$n = \frac{I\,.\,R}{U_e - I\,.\,R_i} = \frac{0{,}025\ \text{A}\,.\,3000\ \Omega}{4{,}5\ \text{V} - 0{,}025\ \text{A}\,.\,3\ \Omega} = \frac{75}{4{,}5 - 0{,}075} = 16{,}95$$

Na uvedený cieľ treba 17 suchých batérií.

600. Aký veľký odpor R_p treba zapojiť do série s akumulátorovou batériou, zloženou z $n = 20$ článkov elektromotorického napätia $U_e = 1{,}9$ V a vnútorného odporu $R_v = 0{,}01\ \Omega$, keď ju máme nabíjať jednosmerným prúdom s napätím $u = 110$ V a predpísaný nabíjací prúd $I = 4$ A *(obr. 118)*?



Obr. 118

Riešenie:

Pre EMN, resp. vnútorný odpor celej batérie možno písať:

$$U_b = n\,.\,U_e, \quad \text{resp.} \quad R_z = nR_v$$

Podľa druhého Kirchhoffovho zákona pre obvod na *obr. 118* platí:

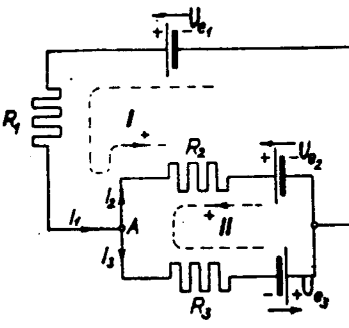
$$IR_z + IR_p = U - U_b$$

a odtiaľ pre hľadaný odpor dostávame:

$$R_p = \frac{U - U_b - IR_z}{I} = \frac{U - nU_e - I\,.\,nR_v}{I} =$$

$$= \frac{110\ \text{V} - 20\,.\,1{,}9\ \text{V} - 4\ \text{A}\,.\,20\,.\,0{,}01\ \Omega}{4\ \text{A}} = 17{,}8\ \Omega$$

601. Vypočítajte prúdy v jednotlivých vetvách okruhu podľa *obr. 119*, keď $E_1 = 12$ V, $E_2 = 4$ V, $E_3 = 6$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$!



Obr. 119

Riešenie:

Zvolíme kladný smer obehu slučky I aj II proti smeru pohybu hodinových ručičiek, ďalej zvolíme pravdepodobný smer prúdov I_1, I_2, I_3 a označíme kladný smer elektromotorických napätí tak, aby vyvolávali prúd v okruhu od kladného pólu k zápornému. Potom píšeme druhý Kirchhoffov zákon tak, že elektromotorické napätia aj prúdy sú kladné v smere zvoleného kladného obehu slučky, t. j.

slučka I

$$U_{e1} - U_{e2} = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

slučka II

$$U_{e2} + U_{e3} = R_3 I_3 - R_2 I_2$$

uzol A

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \text{(prvý Kirchhoffov zákon)}$$

Dosadíme numerické hodnoty:

slučka I

$$12 - 4 = 20 . I_1 + 12 . I_2$$

slučka II

$$4 + 6 = 10 . I_3 - 12 . I_2$$

Z rovnice pre slučku I vyjadríme prúd I_1 pomocou I_2, z rovnice pre slučku II vyjadríme prúd I_3 pomocou I_2:

$$I_1 = \frac{8 - 12 . I_2}{20} = 0{,}4 - 0{,}6\ I_2$$

$$I_3 = \frac{10 + 12\ I_2}{10} = 1 + 1{,}2\ I_2$$

a dosadíme do rovnice pre uzol A, čím dostaneme rovnicu pre neznámu I_2:

$$0{,}4\ \text{A} - 0{,}6\ I_2 - I_2 - (1\ \text{A} + 1{,}2\ I_2) = 0$$

Z toho

$$I_2 = -0{,}2143\ \text{A}$$

Záporné znamienko znamená, že v skutočnosti prúd I_2 tečie opačne, ako sme ho na začiatku zvolili. Ostatné prúdy vypočítame, keď za I_2 dosadíme do príslušných výrazov pre I_1, I_3, teda

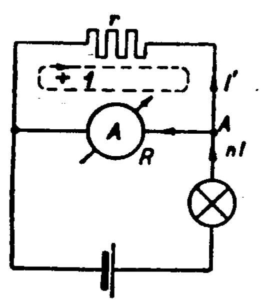
$$I_1 = 0{,}4\ \text{A} - 0{,}6\,.(-0{,}2143)\ \text{A} = 0{,}5286\ \text{A}$$
$$I_3 = 1\ \text{A} + 1{,}2\,.(-0{,}2143)\ \text{A} = 0{,}7429\ \text{A}$$

S **602.** Aký veľký má byť odpor bočníka, aby sa ním rozsah ampérmetra s vnútorným odporom $R = 0{,}2\ \Omega$ zväčšil 5-krát?

Riešenie:

Podľa *obr. 120* možno pre uzol A pomocou prvého Kirchhoffovho zákona písať:

$$nI = I + I'$$



Obr. 120

Pre slučku I podľa druhého Kirchhoffovho zákona platí vzťah

$$0 = RI - rI'$$

Z oboch rovníc po úprave vyplýva:

$$RI = r\,.\,I' = r(nI - I)$$
$$RI = I(n-1)r$$
$$R = (n-1)r$$
$$r = \frac{R}{n-1}$$

kde n vyjadruje, koľkokrát väčší prúd chceme merať, ako samotný prístroj znesie.

Preto potrebný bočník má odpor

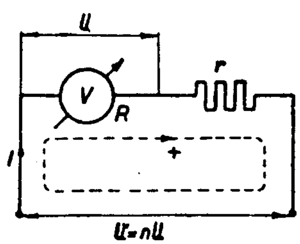
$$r = \frac{R}{n-1} = \frac{0{,}2\ \Omega}{5-1} = 0{,}05\ \Omega$$

603. Ako možno rozšíriť rozsah voltmetra s vnútorným odporom $R = 100\ \Omega$ a základným rozsahom $U = 10$ V na rozsah do $U' = 100$ V?

Riešenie:

Chceme merať n-krát väčšie napätie ($U' = n\,.\,U$) ako napätie U, ktoré voltmeter znesie. Na to potrebujeme zaradiť do série odpor r takej veľkosti, aby v súhlase s Ohmovým zákonom bola splnená rovnica *(obr. 121)*

$$n\,.\,U = I\,.\,r + I\,.\,R$$



Obr. 121

Pretože napätie U voltmetra s rozsahom 10 V a vnútorným odporom R môžeme vyjadriť z Ohmovho zákona vzťahom

$$U = R\,.\,I$$

možno ďalej písať:

$$n\,.\,R\,.\,I = I\,.\,r + I\,.\,R$$

a potom

$$r = (n-1)R$$

Pretože v našom prípade chceme rozsah voltmetra zväčšiť

$$n = \frac{U'}{U} = \frac{100}{10} = 10\text{-násobne}$$

je potrebný sériový odpor

$$r = (10-1)100\ \Omega = 900\ \Omega$$

604. Ruhstratov reostat s celkovým odporom R, na ktorom je napätie U, použijeme ako potenciometer na napájanie spotrebiča odporu r. Posunutie jazdca o vzdialenosť x pri celkovej vzdialenosti l spôsobí lineárnu zmenu odporu, teda

$$R_x = \frac{x}{l} \cdot R$$

Určite napätie na spotrebiči r ako funkciu pomeru $\frac{x}{l}$

$$U_x = f\left(\frac{x}{l}\right)$$

čiže ociachujte potenciometer tak, aby sme pri určitej polohe jazdca mohli poznať napätie na spotrebiči!

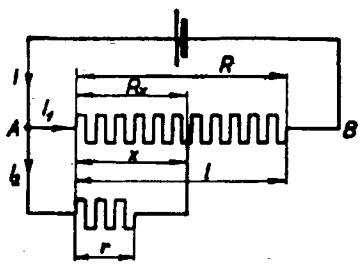
Riešenie:

Vzhľadom na označenie na *obr. 122* možno podľa Ohmovho a Kirchhoffových zákonov písať:

$$U = I_1 R_x + I(R - R_x)$$

$$0 = I_2 r - I_1 R_x$$

$$I = I_1 + I_2$$



Obr. 122

Z prvej rovnice vyjadríme I, z druhej I_2 a dosadíme do tretej. Dostaneme tak

$$I = \frac{U - I_1 R_x}{R - R_x}; \quad I_2 = \frac{I_1 R_x}{r}$$

$$\frac{U - I_1 R}{R - R_x} = I_1 + \frac{I_1 R_x}{r}$$

Z toho

$$I_1 = U \cdot \frac{r}{(r + R_x)(R - R_x) + R_x \, . \, r}$$

a potom

$$U_x = I_1 R_x = U \cdot \frac{r \, . \, R_x}{(r + R_x)(R - R_x) + R_x \, . \, r}$$

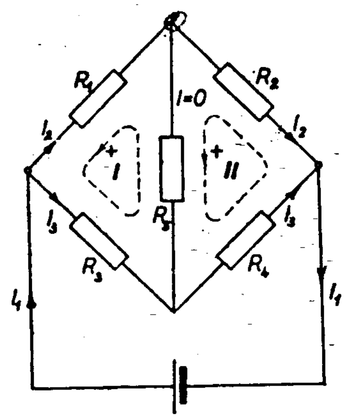
Keď dosadíme za R_x výraz $R \cdot \frac{x}{l}$, dostávame po úprave hľadaný vzťah

$$U_x = U \frac{r \frac{x}{l}}{r + R \frac{x}{l} - R \left(\frac{x}{l} \right)^2}$$

605. Akú podmienku musia spĺňať odpory R_1, R_2, R_3, R_4, aby vo Wheatstonovom mostíku odporom R_5 (v diagonále) neprechádzal elektrický prúd?

Riešenie:

Na okruhy I a II *(obr. 123)*, v ktorých zvolíme kladný smer obehu slučky proti



Obr. 123

smeru pohybu hodinových ručičiek, aplikujeme druhý Kirchhoffov zákon. Predpokladáme, že prúd cez odpor R_5 je nulový, t. j. $I = 0$. Potom

okruh I

$$0 = R_3 I_3 - R_1 I_2 + R_5 \, . \, 0$$

okruh II

$$0 = R_4 I_3 - R_2 I_2 + R_5 \, . \, 0$$

Z toho dostávame dve rovnice:

$$R_1 I_2 = R_3 I_3$$
$$R_2 I_2 = R_4 I_3$$

ktorých vzájomným vydelením dostaneme podmienku

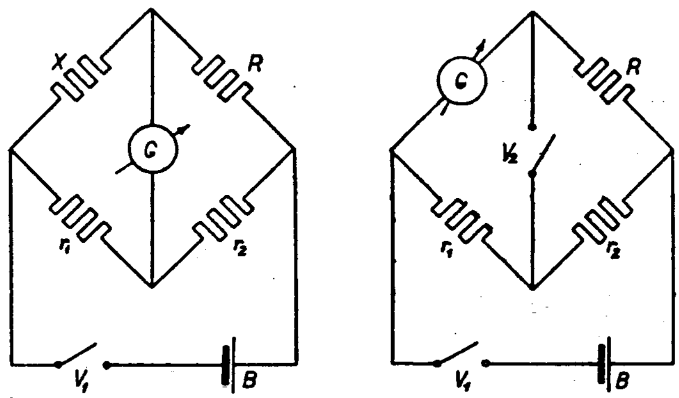
$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$$

pri ktorej odporom R_5 neprechádza prúd.

606. Ako zmerať odpor galvanometra R_G na Wheatstonovom mostíku (*obr. 124a*), keď nemôžeme použiť druhý galvanometer?

Riešenie:

Bežné zapojenie Wheatstonovho mostíka podľa *obr. 124a* zmeníme na zapojenie podľa *obr. 124b*, čiže galvanometer zapojíme tam, kde je obyčajne neznámy odpor X, a do diagonály umiestnime ďalší kľúč V_2.



Obr. 124a, b

Ak odpory r_1, r_2 zmeníme tak, aby sa výchylka galvanometra G pri zapnutí i vypnutí kľúča V_2 nezmenila, je jasné, že v diagonále niet prúdu, a teda platí (pozri predchádzajúci príklad)

$$\frac{R_G}{r_1}=\frac{R}{r_2}$$

Z toho pre odpor galvanometra vyplýva vzťah

$$R_G=R\,\frac{r_1}{r_2}$$

607. V škole je zapojených $n=20$ žiaroviek na sieťové napätie $U=220$ V. Každá má výkon $P=60$ W. Prípojka je dlhá $l=25$ m. Aký musí byť prierez S prípojky, aby úbytok napätia nepresahoval $p=1{,}5$ %? Vedenie je z medi.

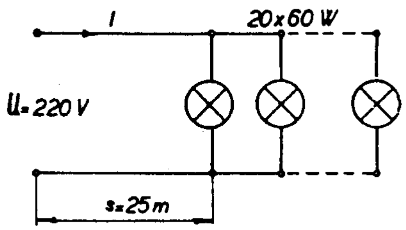
Riešenie:

Úbytok napätia ΔU na odpore R vedenia môžeme vyjadriť pomocou pretekajúceho prúdu takto:

$$\Delta U = R \, . \, I$$

Odpor vedenia počítame z dvojnásobnej dĺžky prípojky *(obr. 125)*:

$$R = \varrho \frac{2l}{S}$$



Obr. 125

kde l je dĺžka, S prierez a ϱ špecifický odpor vedenia. Pre prúd I možno písať:

$$I = \frac{P_c}{U} = \frac{n \, . \, P}{U}$$

kde P_c je celkový príkon všetkých spotrebičov, takže po dosadení pre úbytok napätia dostávame:

$$\Delta U = \varrho \frac{2l}{S} \cdot \frac{P \, . \, n}{U}$$

Úbytok ΔU možno vyjadriť aj pomocou percenta p úbytku vzťahom

$$\Delta U = U \cdot \frac{p}{100}$$

Keď obidve rovnice vyjadrujúce úbytok porovnáme, dostaneme:

$$\varrho \frac{2l}{S} \frac{P \, . \, n}{U} = U \frac{p}{100}$$

Z toho

$$S = \frac{\varrho \, . \, 2l \, . \, P \, . \, n}{U^2 \, . \, p} \cdot 100 =$$

$$= \frac{0{,}0178 \, . \, 10^{-6} \, \Omega \, . \, \mathrm{m} \, . \, 2 \, . \, 25 \, \mathrm{m} \, . \, 60 \, \mathrm{W} \, . \, 20}{220^2 \, \mathrm{V}^2 \, . \, 1{,}5} \cdot 100 =$$

$$= 1{,}47 \, . \, 10^{-6} \, \mathrm{m}^2 = 1{,}47 \, \mathrm{mm}^2$$

V praxi by sme zvolili prípojku s najbližším väčším vyrábaným prierezom 1,5 mm².

608. Odpor špirály v elektrickom variči $R = 16\ \Omega$. Vypočítajte čas, za ktorý začne vo variči vrieť $m = 600$ g vody, ktorá má pôvodnú teplotu $t_1^* = 10$ °C, keď účinnosť variča $\eta = 60$ % a keď napätie v elektrickej sieti $U = 120$ V!

Riešenie:

Množstvo tepla, ktoré potrebujeme na zohriatie 600 g vody o $\Delta t^* = 100\ °C - 10\ °C = 90\ °C$ pri 100 % účinnosti variča

$$Q' = c \,.\, m \,.\, \Delta t^*$$

kde c je špecifická tepelná kapacita vody. Pri 60 % účinnosti variča je celkové teplo, ktoré varič dodá, väčšie, a to

$$Q = \frac{Q'}{\eta} = \frac{c \,.\, m \,.\, \Delta t^*}{\eta}$$

Podľa Joulovho—Lencovho zákona možno pre Q súčasne písať

$$Q = U \,.\, I \,.\, t = U \cdot \frac{U}{R} \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Teda

$$\frac{c \,.\, m \,.\, \Delta t^*}{\eta} = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

Odkiaľ

$$t = \frac{c \,.\, m \,.\, \Delta t^* \,.\, R}{\eta \,.\, U^2} =$$

$$= \frac{4186\ \mathrm{J \,.\, kg^{-1} \,.\, K^{-1}} \,.\, 0{,}6\ \mathrm{kg} \,.\, 90\ \mathrm{K} \,.\, 16\ \Omega}{0{,}6 \,.\, 120^2\ \mathrm{V}^2} =$$

$$= 419\ \mathrm{s} \doteq 7\ \mathrm{min}$$

609. Keď svieti žiarovka pri $U = 120$ V, $P = 100$ W, odpor vlákna je desaťkrát väčší ako pri teplote 0 °C. Aký je odpor žiarovky pri teplote 0 °C a aký je teplotný súčiniteľ odporu, keď teplota žeravého vlákna $t = 2000$ °C a keď predpokladáme lineárnu teplotnú závislosť odporu?

Riešenie:

Vzorec pre výkon elektrického prúdu môžeme pomocou Ohmovho zákona upraviť takto:

$$P = UI = U \frac{U}{R_t} = \frac{U^2}{R_t}$$

Z toho odpor vlákna žiarovky v rozžeravenom stave

$$R_t = \frac{U^2}{P} = \frac{120^2\ \mathrm{V}^2}{100\ \mathrm{W}} = \frac{14\,400}{100}\ \Omega = 144\ \Omega$$

Pretože odpor vlákna pri 0 °C je 10-krát menší, platí

$$R_0 = \frac{R_t}{10} = \frac{144}{10}\ \Omega = 14{,}4\ \Omega$$

Teplotný súčiniteľ odporu α dostaneme zo známeho vzťahu medzi odporom R_t a R_0:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t)$$

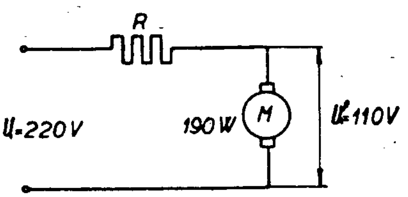
Keď uvážime, že $R_t = 10 \,.\, R_0$, dostaneme:

$$10R = R(1 + \alpha \,.\, 2000)$$

z čoho

$$\alpha = \frac{10 - 1}{2000\ \mathrm{K}} = 4{,}5 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$$

610. Vysávač prachu určený na napätie $U' = 110$ V a výkon $P = 190$ W chceme pripojiť na sieť s napätím $U = 220$ V. Aký veľký odpor R mu treba predradiť *(obr. 126)*?



Obr. 126

Riešenie:

Motorom vysávača smie prechádzať iba prúd

$$I = \frac{P}{U'}$$

ktorý má vyvolať na hľadanom odpore R úbytok napätia $R \,.\, I$, ktorý sa rovná rozdielu napätia v sieti U a pracovného napätia vysávača U', teda

$$U - U' = R \,.\, I$$

Po dosadení do tohto vzťahu dostaneme:

$$U - U' = R \cdot \frac{P}{U'}$$

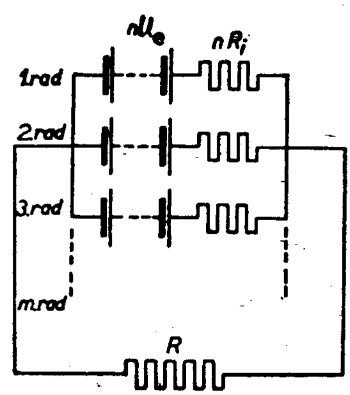
Z toho odpor

$$R = \frac{(U - U')U'}{P} = \frac{(220\ \text{V} - 110\ \text{V}) . 110\ \text{V}}{190\ \text{W}} = 63{,}68\ \Omega$$

611. Ako treba zapojiť $n^* = 24$ článkov s elektromotorickým napätím $U_e =$ $= 1{,}5$ V a s vnútorným odporom $R_i = 0{,}8\ \Omega$ do obvodu s odporom $R = 1{,}2\ \Omega$, aby bol výkon spotrebiča maximálny? Aký prúd tečie spotrebičom?

Riešenie:

Predpokladajme, že výsledná batéria bude pozostávať z m komplexov zapojených paralelne, pričom každý komplex sa bude skladať z n článkov zapojených sériove *(obr. 127)*. Neznáme čísla m a n bude treba určiť tak, aby bola splnená



Obr. 127

podmienka uvedená v príklade. Každý komplex bude potom mať elektromotorické napätie

$$U_{ev} = nU_e \tag{1}$$

a vnútorný odpor

$$R_i^* = nR_i$$

Keďže jednotlivé komplexy sú zapojené paralelne, aj výsledné elektromotorické napätie celej batérie bude dané vzťahom (1). Výsledný vnútorný odpor celej batérie však bude:

$$R_{iv} = \frac{R_i^*}{m} = \frac{nR_i}{m}$$

Uvedená batéria bude dodávať do obvodu prúd

$$I=\frac{U_{ev}}{R_{iv}+R}=\frac{nU_e}{\frac{nR_i}{m}+R}$$

Výkon spotrebiča možno vyjadriť vzťahom

$$P=RI^2=R\cdot\frac{U_{ev}^2}{(R_{iv}+R)^2}$$

Tento výkon bude maximálny pri takom odpore R, pre ktorý je splnená podmienka

$$\frac{dP}{dR}=0$$

teda

$$-2R\,\frac{U_{ev}^2}{(R_{iv}+R)^3}+\frac{U_{ev}^2}{(R_{iv}+R)^2}=0$$

Celú rovnicu vynásobíme výrazom $\frac{(R_{iv}+R)^2}{U_{ev}^2}$ a dostaneme:

$$\frac{-2R}{R_{iv}+R}+1=0$$

Z toho

$$R=R_{iv}$$

Vidíme, že výkon spotrebiča bude maximálny, keď

$$\frac{n\,.\,R_i}{m}=R$$

Ďalej vieme, že celkový počet článkov v batérii

$$mn=n^*$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva:

$$\frac{\frac{n^*}{m}\cdot R_i}{m}=R$$

odkiaľ

$$m=\sqrt{\frac{n^*R_i}{R}}=\sqrt{\frac{24\,.\,0{,}8}{1{,}2}}=\sqrt{16}=4$$

$$n=\frac{n^*}{m}=\frac{24}{4}=6$$

Potrebné je teda do štyroch radov zapojiť komplexy so 6 článkami. Prúd, ktorý v tomto prípade bude tiecť spotrebičom, bude

$$I=\frac{nU_e}{\frac{nR_i}{m}+R}=\frac{6\,.\,1{,}5\ \text{V}}{\frac{6\,.\,0{,}8\ \Omega}{4}+1{,}2\ \Omega}=3{,}75\ \text{A}$$

612. Koľko medi sa vylúči za 24 hodín z roztoku modrej skalice prúdom 100 A? (Elektrochemický ekvivalent medi $A=0{,}328\ \text{mg}\,.\,\text{A}^{-1}\,.\,\text{s}^{-1}$.)

Riešenie:

Dosadením do prvého Faradayovho zákona dostaneme:

$$m=A\,.\,I\,.\,t=0{,}328\ \text{mg}\,.\,\text{A}^{-1}\,.\,\text{s}^{-1}\,.\,100\ \text{A}\,.\,24\,.\,3600\ \text{s}=$$
$$=2833\,920\ \text{mg}=2{,}834\ \text{kg}$$

613. Poniklovanie kovového predmetu, ktorý má povrch 120 cm^2, trvalo 5 hodín pri elektrickom prúde 0,3 A. Nikel je dvojmocný. Vypočítajte hrúbku niklovej vrstvy!

Riešenie:

Použijeme Faradayov zákon

$$m=AIt$$

kde I je prúd, t čas, m hmotnosť vylúčenej látky, pričom A je elektrochemický ekvivalent látky. Možno ho vyjadriť vzťahom

$$A=\frac{M_m}{v\,.\,F}$$

kde M_m je hmotnosť 1 mólu, v valencia a F Faradayov náboj; podiel $\frac{M_m}{v}$ je chemický gramekvivalent látky.

Pre hmotnosť vylúčeného kovu platí:

$$m=\frac{M_m}{vF}\cdot I\,.\,t=\frac{58{,}69\ \text{g}}{2\,.\,9{,}65\,.\,10^4\ \text{C}}\cdot 0{,}3\ \text{A}\,.\,5\,.\,60\,.\,60\ \text{s}=\frac{316\,926\ \text{g}}{193\,000}=1{,}643\ \text{g}$$

Pretože hmotnosť m môžeme vyjadriť ako súčin známeho plošného obsahu S, hustoty ϱ a hľadanej hrúbky vrstvy d, platí

$$m = S \,.\, d \,.\, \varrho$$

takže pre hľadanú hrúbku dostaneme

$$d = \frac{m}{S \,.\, \varrho} = \frac{1{,}643 \text{ g}}{120 \text{ cm}^2 \,.\, 8{,}8 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3}} = 1{,}557 \,.\, 10^{-3} \text{ cm} = 15{,}5 \text{ μm}$$

614. Predmet s povrchom $S = 20$ dm^2 treba postriebriť vrstvou hrúbky $d = 0{,}2$ mm. Koľko striebra sa musí vylúčiť a ako dlho bude trvať pokovovanie, ak 1 dm^2 plochy možno zaťažiť prúdom 0,4 A?

Riešenie:

Najprv zistíme hmotnosť striebra, ktorá sa má vylúčiť. Pre ňu platí:

$$m = S \,.\, d \,.\, \varrho = 20 \text{ cm}^2 \,.\, 10^2 \,.\, 0{,}2 \,.\, 10^{-1} \text{ cm} \,.\, 10{,}5 \text{ g} \,.\, \text{cm}^{-3} =$$
$$= 420 \text{ g} = 420\,000 \text{ mg}$$

Čas pokovovania určíme podľa Faradayovho zákona zo vzťahu

$$t = \frac{m}{A \,.\, I} = \frac{420\,000 \text{ mg}}{1{,}118 \text{ mg} \,.\, \text{A}^{-1} \,.\, \text{s}^{-1} \,.\, 0{,}4 \text{ A} \,.\, \text{dm}^{-2} \,.\, 20 \text{ dm}^2} = 46\,958 \text{ s}$$

Úlohy

615. Aký elektrický náboj Q dodal galvanický článok pri odbere prúdu $I = 0{,}5$ A za čas $t = 20$ hodín?

[$Q = 36\,000$ C]

616. Vinutie elektrického zariadenia je zhotovené z vodiča prierezu S a má dodávať prúd $I = 3$ A. Aký musí byť prierez tohto vodiča, ak hustota tohto prúdu nesmie prekročiť hodnotu $i = 2{,}5 \,.\, 10^6$ A$\,.\,$m^{-2}?

[$S = 1{,}2$ mm^2]

617. Treba zostrojiť reostat s odporom 0,2 Ω. Materiál je nikelínový pásik šírky 10 mm a hrúbky 0,5 mm. Akú dĺžku pásika musíme použiť? ($\varrho = 4 \,.\, 10^{-7}$ Ω$\,.\,$m)

[$l = 2{,}5$ m]

618. Aký veľký je špecifický odpor vodiča prierezu 6 mm^2, keď sme na ňom pri dĺžke $l = 500$ m pri prechode prúdu $I = 6$ A namerali napätie $U = 14$ V?

[$\varrho = 0{,}028 \,.\, 10^{-6}$ Ω$\,.\,$m]

619. Na vytvorenie elektrického vedenia sme potrebovali 400 m medeného drôtu prierezu 6 mm^2. Aký odpor má vedenie?

[$R = 1{,}133$]

620. Medený drôt prierezu 0,1 mm^2 má hmotnosť 0,3 kg. Vypočítajte odpor tohto vodiča, keď špecifický odpor medi je $1{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \Omega \,.\, m$ a hustota $8{,}9 \,.\, 10^3\ kg \,.\, m^{-3}$!

[$R = 57{,}303\ \Omega$]

621. Aký je pomer tiaží medi a hliníka, keď z nich vyrobíme vodiče rovnakej dĺžky a odporu?

$$\left[\frac{G_{Cu}}{G_{Al}} \doteq 2:1\right]$$

622. Medené vedenie má prierez $S_1 = 25\ mm^2$. Aký prierez S_2 musí mať vedenie z hliníka, aby malo rovnaký odpor?

[$S_2 = 42{,}56\ mm^2$]

623. Medené vedenie má pri 15 °C odpor 21 Ω. Aký bude jeho odpor pri 30 °C?

[$R_t = 22{,}23\ \Omega$]

624. Aby mal elektrický varič žiadaný výkon, musí mať pri prevádzkovej teplote $t = 700$ °C odpor $R_t = 24\ \Omega$. Aký veľký odpor R musí mať varič pri teplote $t_0 = 20$ °C, keď $\alpha = 0{,}000\,02\ K^{-1}$?

[$R = 23{,}6\ \Omega$]

625. Akú teplotu má cievka navinutá z medeného drôtu dĺžky $l = 350$ m s prierezom $S = 1\ mm^2$, keď jej odpor nameraný pri prevádzke bol $R_t = 10{,}5\ \Omega$?

[$t = 215{,}08$ °C]

626. Vinutie elektromagnetu v dyname je vyrobené z medeného vodiča, ktorý má pri $t_1 = 10$ °C odpor $R_1 = 14{,}2\ \Omega$. Pri prevádzke sa odpor vinutia zväčšil na $R_2 = 16{,}5\ \Omega$. Na akú teplotu sa pritom zvýšila teplota vinutia?

[$t_2 = 51{,}91$ °C]

627. a) Aký je rozdiel medzi odporom telegrafného vedenia v lete a v zime, keď vodičom je železný drôt prierezu 10 mm^2 a keď máme na mysli teplotný rozdiel od −30 °C do +30 °C? Dĺžka drôtu v zime je 100 km. Špecifický odpor železa v zime $\varrho_0 = 8{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \Omega \,.\, m$, teplotný koeficient odporu $\alpha = 6 \,.\, 10^{-3}\ K^{-1}$.

b) Ako sa zmení výsledok, keď rešpektujeme predĺženie drôtu pri ohrievaní, pričom koeficient lineárnej teplotnej rozťažnosti železa $\alpha' = 12.10^{-6}\ K^{-1}$?

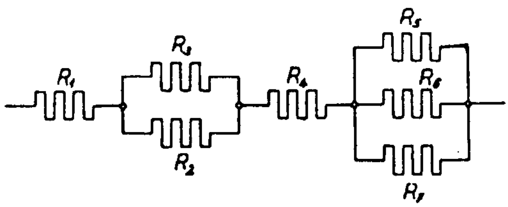
[$\Delta R = 313\ \Omega$; $\Delta R' = 0{,}63\ \Omega$]

628. Odpory $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$ sú zapojené a) sériovo, b) paralelne. Určite ich výsledný odpor!

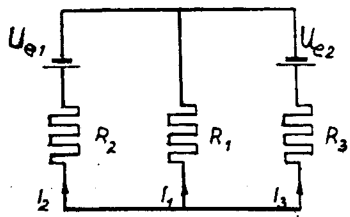
[$R' = 10\ \Omega$; $R'' = 0{,}48\ \Omega$]

629. Aký je výsledný odpor zapojenia podľa *obr. 128*, keď $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, $R_5 = R_6 = R_7 = 5\ \Omega$?

[$R = 120{,}76\ \Omega$]



Obr. 128



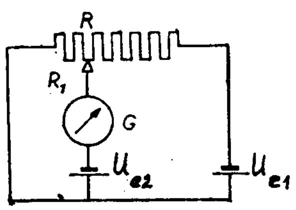
Obr. 129

630. Vypočítajte prúdy vo všetkých troch vetvách zapojenia na *obr. 129*, keď $U_{e1} = 2{,}1$ V, $U_{e2} = 1{,}9$ V, $R_1 = 45\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ a $R_3 = 10\ \Omega$!

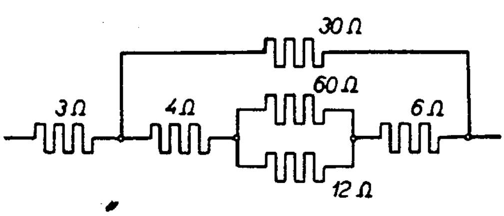
[$I_1 = -0{,}04$ A; $I_2 = 0{,}01$ A; $I_3 = 0{,}03$ A]

631. Aký veľký odpor R_1 musíme v zapojení na *obr. 130* nastaviť kontaktom na odpore $R = 10\ \Omega$, aby galvanometrom G neprechádzal prúd? Elektromotorické napätia sú $U_{e1} = 20$ V a $U_{e2} = 12$ V.

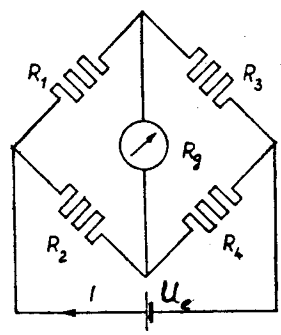
[$R_1 = 6\ \Omega$]



Obr. 130



Obr. 131



Obr. 132

632. Aký veľký je v obvode podľa *obr. 131* celkový odpor kombinácie?

[$R = 15\ \Omega$]

633. Vypočítajte prúd I, ktorý zo zdroja elektromotorického napätia $U_e = 4$ V odoberá Wheatstonov mostík, vyznačený na *obr. 132*, kde $R_1 = 70\ \Omega$,

$R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 90\ \Omega$ a $R_g = 10\ \Omega$!

[$I = 0{,}0548$ A]

634. Akumulátor s napätím 6 V v automobile dáva prúd brzdovým svetlám s odporom 12 Ω, klaxónu s odporom 2 Ω a reflektoru 1 Ω. Aký prúd sa bude celkove odoberať z akumulátora, keď všetky spotrebiče sú zapojené paralelne?

[$I = 9{,}5$ A]

635. Aké napätie musí mať zvončeková batéria, keď vedenie z medeného drôtu s priemerom 0,9 mm má dĺžku 85 m (dĺžka jedného prívodu od zdroja k zvončeku), odpor zvončeka je 6 Ω a potrebný prúd 0,35 A?

[$U = 3{,}69$ V]

636. Batéria z 50 za sebou zapojených článkov napája vonkajšiu sieť, pozostávajúcu zo železného drôtu dĺžky 20 km, prierezu 3 mm^2 a spotrebiča s odporom 90 Ω. Elektromotorické napätie a vnútorný odpor každého z článkov je 1,4 V a 0,4 Ω. Vypočítajte prúd, keď špecifický odpor železa je $8{,}7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$!

[$I = 101{,}45$ mA]

637. Póly Leclanchovho článku sú spojené cez odpor $R_0 = 3{,}5\ \Omega$. Vnútorný odpor článku $r_v = 0{,}5\ \Omega$ a jeho elektromotorické napätie $U_e = 1{,}5$ V. Aká je hodnota prúdu?

[$I = 0{,}375$ A]

638. Aký veľký úbytok napätia ΔU vzniká v dvojitom medenom vedení prierezu $S = 10$ mm^2, ktorým sa prenáša prúd $I = 5$ A do vzdialenosti $s = 500$ m od zdroja s napätím $U = 220$ V, a aké veľké je napätie na svorkách spotrebiča?

[$\Delta U = 8{,}5$ V; $U_s = 211{,}5$ V]

639. V medenom lane je $n = 7$ drôtov s priemerom $d = 1{,}7$ mm. a) Aký je odpor lana dĺžky $l = 1000$ m? b) Z lana sa zhotoví dvojvodičové vedenie s napätím $U_1 = 220$ V na začiatku. Aké bude napätie U_2 na konci linky, keď lanom prechádza prúd $I = 10$ A? c) Aký prúd I_k bude prechádzať lanom, keď na konci vedenia vznikne skrat?

[$R = 1{,}07\ \Omega$; $U_2 = 198{,}6$ V; $I_k = 102{,}81$ A]

640. Keď spojíme voltmeter do série s odporom $R = 10^4\ \Omega$ a keď ho pripojíme k zdroju napätia $U_e = 120$ V, ukáže napätie $U_1 = 50$ V. Keď spojíme voltmeter do série s neznámym odporom R_x, ukáže pri rovnakom napätí zdroja napätie $U_2 = 10$ V. Vypočítajte neznámy odpor!

[$R_x \doteq 78\,600\ \Omega$]

641. Dva voltmetre s rovnakým rozsahom, ale s rozličnými vnútornými odpormi, a to $R_1 = 17\,300\ \Omega$, $R_2 = 5200\ \Omega$, sú spojené za sebou a pripojené na 220 V. Aké budú výchylky na voltmetroch?

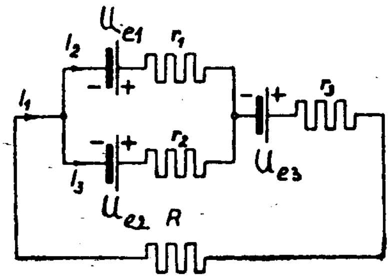
[$U_1 = 169$ V; $U_2 = 51$ V]

642. Soľný roztok s odporom $R_1 = 1\ \Omega$ je pripojený medenými drôtmi s celkovým odporom $R_2 = 2\ \Omega$ na Daniellov článok s EMN $U_e = 1{,}1$ V a vnútorným odporom $R_v = 0{,}5\ \Omega$. Aký prúd potečie obvodom a aké je svorkové napätie článku?

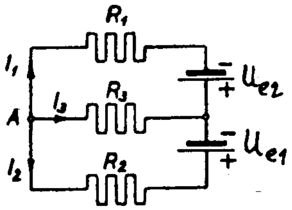
[$I = 0{,}314$ A; $U = 0{,}943$ V]

643. Tri galvanické články s elektromotorickými napätiami $U_{e1} = 1{,}3$ V, $U_{e2} = 1{,}5$ V, $U_{e3} = 2$ V majú vnútorné odpory $R_1 = R_2 = R_3 = 0{,}2\ \Omega$ a sú zapojené podľa *obr. 133*. Odpor $R = 0{,}55\ \Omega$. Určite prúdy I_1, I_2, I_3!

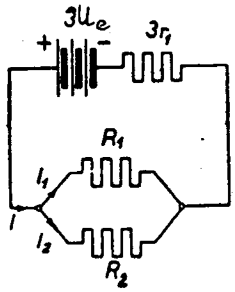
[$I_1 = 4$ A; $I_2 = 1{,}5$ A; $I_3 = 2{,}5$ A]



Obr. 133



Obr. 134



Obr. 135

644. Aké prúdy pretekajú v jednotlivých odporoch v zapojení podľa *obr. 134*, keď $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$, $U_{e1} = 4{,}5$ V, $U_{e2} = 2$ V? Aké napätie je na odpore R_3?

[$I_1 = 0{,}789$ A; $I_2 = -1{,}278$ A; $I_3 = 0{,}486$ A; $U_3 = 1{,}944$ V]

645. Nájdite prúdy vo vetvách zapojenia podľa *obr. 135*, keď EMN jedného článku $U_e = 1{,}5$ V a keď sú v sérii tri články! Vnútorný odpor jedného článku $R_i = 0{,}5\ \Omega$. Odpory vetiev sú: $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$.

[$I = 1$ A; $I_1 = 3/4$ A; $I_2 = 1/4$ A]

646. Miliampérmeter so stupnicou s $d = 100$ dielikmi, s vnútorným odporom $R = 10\ \Omega$, pre $I' = 10$ mA sa má použiť a) ako voltmeter do $U = 300$ V, b) ako ampérmeter do $I = 20$ A. Aký bude potrebný predradený odpor, resp. bočník?

$$\left[r = 29\,990\ \Omega;\ r' = \frac{10}{1999}\ \Omega \right]$$

647. Ampérmeter má odpor 0,02 Ω a meria prúdy do 1,2 A. Aký má byť odpor bočníka, aby sme ním mohli merať prúdy do 6 A?

[$r = 0{,}005\ \Omega$]

648. Voltmeter s vnútorným odporom 3000 Ω má rozsah do 150 V a stupnicu rozdelenú na 150 dielikov. Aký prúd tečie voltmetrom pri plnej výchylke a aký predradený odpor musíme zapojiť, aby sa rozsah prístroja zväčšil na 600 V? Aké napätie bude prislúchať dieliku stupnice?

[$I = 0{,}05$ A; $r = 9000\ \Omega$; 4 V]

649. Aký náboj prejde vodičom odporu $R = 10\ \Omega$ za $t = 20$ s, keď medzi jeho koncami je potenciálový rozdiel $U = 12$ V? Akú prácu vykoná prúd?

[$Q = 24$ C; $A = 288$ J]

650. V byte svietime žiarovkou 25 W denne 4 hodiny. Koľko zaplatíme za mesiac za elektrickú energiu, keď 1 kWh stojí 80 halierov a počítame s 30-dňovým mesiacom?

[2,40 Kčs]

651. Koľko tepla vyvinie varič pripojený na napätie 120 V, ak ním prechádza 3 hodiny prúd 8,3 A?

[$Q = 10\,757$ kJ]

652. Dve žiarovky, jedna s $P_1 = 100$ W, druhá s $P_2 = 60$ W, sú zapojené na rovnaké napätie U. Čo platí pre ich odpory?

[$R_1 = 0{,}6 \,.\, R_2$]

653. Ako dlho bol zapnutý elektrický varič s výkonom 600 W, keď elektromer udáva spotrebu 1,8 kWh?

[$t = 3$ h]

654. Aký veľký výkon musí mať elektrický varič, aby zohrial 2 litre vody 10 °C teplej na 100 °C za 25 minút, keď sa na ohrievanie využije len 70 % varičom vyvinutého tepla?

[$P = 717{,}6$ W]

655. Aký musí byť odpor spotrebiča, aby v ňom za každú hodinu vzniklo 3684 kJ tepla pri napätí 220 V?

[$R = 46{,}7\ \Omega$]

656. Aký prúd prechádza elektrickým varičom na napätie $U = 120$ V, keď za

$t = 3$ h sa 25 litrov vody ohrialo o $\Delta t^* = 50$ °C a účinnosť variča je 100 %?

[$I = 4{,}037$ A]

657. Vypočítajte účinnosť elektrického variča, ktorý ohreje 1 liter vody z 18 °C do varu za 11 minút, keď ním pri napätí 220 V prechádza prúd 3 A!

[$\eta = 78{,}5$ %]

658. Zistite výkon neznámeho elektromotora na jednosmerný prúd bez použitia wattmetra! Motor bol 10 minút zapojený a elektromer ukázal spotrebu 0,1 kWh.

[$P = 0{,}6$ kW]

659. Elektromotor má výkon $P = 1{,}1$ kW. Prechádza ním pri napätí $U = 120$ V prúd $I = 10$ A. Aká je jeho účinnosť η? Koľko zaplatíme za spotrebu prúdu za 8 hodín, keď 1 kWh stojí 40 halierov?

[$\eta = 92$ %; 3,84 Kčs]

660. Aký veľký prúd odoberá zo siete motor s výkonom 5,9 kW pri napätí 220 V, ak je naplno zaťažený a jeho účinnosť je 82 %?

[$I = 32{,}6$ A]

661. Elektromotor je pripojený na sieť s napätím $U = 440$ V a odoberá prúd $I = 20$ A. Aký je príkon motora a koľko bude stáť pohon s týmto motorom za $t = 5$ h, keď 1 kWh elektrickej energie stojí 20 halierov?

[$P_0 = 8{,}8$ kW; 8,8 Kčs]

662. Na jednosmernú elektrickú sieť s napätím 220 V je pripojený odpor 100 Ω. Aký je potrebný výkon a koľko litrov vody 18 °C teplej by sa teoreticky priviedlo do varu za 1 hodinu?

[$P = 484$ W; $V = 5{,}076$ l]

663. Dovolené zaťaženie odporu $R = 2000\ \Omega$ je podľa údaja výrobcu $P = 4$ W. Aký prúd môže prechádzať odporom?

[$I = 0{,}042$ A]

664. Koľko stojí zohriatie 1 litra vody z 10 °C na 100 °C, keď 1 kWh stojí 80 halierov a účinnosť zariadenia je 90 %?

[9,3 hal]

665. Ako treba zapojiť 48 rovnakých článkov (každý s vnútorným odporom 0,2 Ω) do batérie, aby na vonkajšom odpore 2,4 Ω bol maximálny výkon?

[Tak, aby sa vnútorný odpor článkov rovnal vonkajšiemu, t. j. vtedy, keď sú dva články zapojené paralelne a 24 takýchto dvojíc je v sérii.]

666. Koľko medi sa vylúči elektrolyticky z roztoku modrej skalice za 24 hodín prúdom $I = 100$ A?

[$m = 2{,}83$ kg]

667. Aký veľký prúd I pretekal elektrolytom $CuSO_4$, keď sa za 15 minút vylúčili 3 g medi?

[$I = 10{,}16$ A]

668. 25 lyžíc, z ktorých každá má povrch 0,8 dm^2, treba elektrolyticky postriebriť tak, aby strieborný povlak každej lyžice mal hmotnosť 5 g. Dovolená prúdová hustota je 0,3 $A.dm^{-2}$. Akým prúdom treba pokovovať a ako dlho?

[$I = 6$ A; $t = 5$ h 10 min 34 s]

669. Predmet, ktorý chceme postriebriť, má povrch $S = 200$ cm^2. Postriebrujeme ho prúdom $I = 0{,}5$ A. Za aký čas bude vrstva striebra hrubá $h = 0{,}02$ cm?

[$t = 20$ h 50 min]

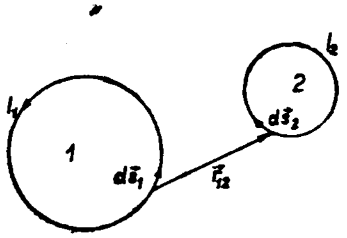
14 MAGNETICKÉ POLE ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCIA

Úvod

a) Silu $\boldsymbol{F}_{12}$, ktorou na seba pôsobia dva uzavreté vodiče, cez ktoré preteká prúd, možno podľa *Ampéra* vypočítať zo vzťahu *(obr. 136)*

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint\oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{r}_{12})}{r^3}$$

pričom $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ $A^{-2}.kg.m.s^{-2}$ je *permeabilita vákua*, I_1, I_2 sú prúdy vo vodičoch, $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$, $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ elementy vodičov a $\boldsymbol{r}_{12}$ je polohový vektor elementu druhého



Obr. 136

vodiča vzhľadom na element prvého vodiča. Pritom integráciu treba vykonať cez celý obvod oboch vodičov.

b) *Magnetická indukcia*, budená prúdom I v mieste s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ vo vákuu, je určená vzťahom

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

ktorý matematicky vyjadruje *Biotov—Savartov—Laplaceov zákon.*

c) Na element d$\boldsymbol{s}$ prúdovodiča, ktorým preteká prúd I, pôsobí magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$ silou

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

Na elektrický náboj Q, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $\boldsymbol{v}$ v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, pôsobí magnetické pole silou

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

d) Súvis medzi vektorom magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ a vektorom *intenzity magnetického poľa* $\boldsymbol{H}$ je daný vzťahom

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

kde μ je permeabilita látky;

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\varkappa}{\mu_0}\right) = \mu_0 \,.\, \mu_r$$

$\varkappa$ je *magnetická susceptibilita* prostredia, μ_r relatívna *permeabilita* prostredia.

e) *Magnetický indukčný tok* cez nejakú plochu je

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

kde $\boldsymbol{B}$ je magnetická indukcia a d$\boldsymbol{S}$ vektor prislúchajúci elementárnej ploche veľkosti dS.

Ak vektor $\boldsymbol{B}$ je kolmý na plochu dS (rovnobežný s jej vektorom d$\boldsymbol{S}$), možno písať:

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}S$$

Ak má magnetická indukcia B v každom mieste plochy S aj rovnakú hodnotu, platí:

$$\Phi = B \,.\, S$$

f) Kedykoľvek je uzavretá integračná dráha spriahnutá s uzavretým vodičom elektrického prúdu, platí rovnica prietoku:

$$\oint \boldsymbol{B}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = N\mu_0 I$$

kde d$\boldsymbol{s}$ je element dráhy, I intenzita prúdu vo vodiči, μ_0 permeabilita vákua (ak je vodič vo vákuu) a N vyjadruje, koľkokrát je integračná dráha spriahnutá s vodičom.

Rovnicu prietoku možno písať aj v tvare

$$\oint \boldsymbol{H}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = NI$$

kde $\boldsymbol{H}$ je intenzita magnetického poľa. Hodnotu uvedeného integrálu nazývame aj magnetomotorickou silou.

g) *Magnetický odpor* R_m magnetického obvodu počítame podľa Hopkinsovho vzorca

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}$$

kde μ je permeabilita prostredia, z ktorého je magnetický obvod vytvorený, l dĺžka obvodu, S jeho prierez.

h) Keď sa pohybuje vodič dĺžky l rýchlosťou v v homogénnom magnetickom poli kolmo na magnetickú indukciu $\boldsymbol{B}$, *indukuje* sa v ňom *elektromotorické napätie*, dané vzťahom

$$U_i = Blv$$

Všeobecne sa v uzavretom vodiči indukuje EMN vždy, keď sa mení indukčný tok, pretekajúci plochou obopnutou vodičom. Pritom sa toto indukované elektromotorické napätie rovná zápornej hodnote časovej zmeny magnetického indukčného toku cez plochu vodiča:

$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Pri používaní tohto vzorca treba v súhlase s jeho odvodením magnetický indukčný tok rátať ako kladný, keď tečie na tú stranu plochy ohraničenej vodičom, z ktorej sa obiehanie vodiča pri počítaní EMN U_i javí v kladnom zmysle (proti pohybu hodinových ručičiek). Ak tomu tak nie je, indukčný tok je záporný.

i) *Samoindukčné elektromotorické napätie* U_L, indukované vo vodiči časovou zmenou prúdu I, počítame podľa vzťahu

$$U_L = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

pričom L je indukčnosť vodiča, v ktorom samoindukcia nastala. Počítame ho zo vzorca

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

pretože L je vlastne konštantou úmernosti medzi magnetickým tokom Φ cez plochu obopnutú vodičom a prúdom I, ktorý vodičom preteká.

j) Pre elektromotorické napätie U_{12} indukované vo vodiči 2, nachádzajúcom sa v blízkosti vodiča 1, v ktorom nastala časová zmena prúdu I_1, platí:

$$U_{12} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

pričom L_{12} je *vzájomná indukčnosť*, vlastne konštanta úmernosti medzi magnetickým indukčným tokom Φ_{12}, ktorý v dôsledku prúdu I_1 vo vodiči 1 prechádza cez plochu ohraničenú vodičom 2, a prúdom I_1. Preto

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

Podobne sa v dôsledku vzájomnej indukcie vo vodiči 1 pri zmene prúdu vo vodiči 2 indukuje EMN

$$E_{21} = -L_{21} \cdot \frac{dI_2}{dt}; \quad L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

pričom

$$L_{12} = L_{21} = L_{mn}$$

k) *Energiu magnetického poľa* elektrického prúdu I, pretekajúceho vodičom, ktorého indukčnosť je L, počítame podľa vzťahu

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

l) *Objemová hustota energie* magnetického poľa, t. j. energia pripadajúca na jednotkový objem magnetického poľa, sa dá vyjadriť vzťahom

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

kde H je intenzita magnetického poľa v danom mieste a μ je permeabilita prostredia, v ktorom sa pole vytvára.

Pre energiu magnetického poľa v konečnom objeme V možno potom písať

$$W = \int_0^V \frac{1}{2} \mu H^2 \, dV$$

m) *Magnetický moment prúdovej slučky*, ktorou tečie prúd I, je vo vákuu daný vzťahom

$$\boldsymbol{M} = \mu_0 I \boldsymbol{S}$$

kde μ_0 je permeabilita vákua a $\boldsymbol{S}$ je vektor kolmý na rovinu slučky a smerujúci na tú stranu tejto roviny, z ktorej sa pretekanie prúdu I slučkou javí proti pohybu hodinových ručičiek.

n) Bodové magnetické póly s magnetickými množstvami m_1 a m_2 vo vzájomnej vzdialenosti r pôsobia na seba vo vákuu silou

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^3} \boldsymbol{r}_{12}$$

kde význam symbolov je analogický ako pri Coulombovom zákone pre elektrické náboje.

o) Pojem *magnetický dipól* sa zavádza analogicky ako pojem elektrický dipól. Je to sústava dvoch rovnako veľkých magnetických pólov opačného znamienka s fiktívnymi magnetickými množstvami $-m$ a $+m$, vzdialených od seba l, pričom l je podstatne menšie ako vzdialenosť r, v ktorej magnetické pole dipólu skúmame. Magnetický moment dipólu definujeme vzťahom

$$\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{l}$$

p) Ak sa objekt s magnetickým momentom $\boldsymbol{M}$ nachádza v homogénnom magnetickom poli s intenzitou $\boldsymbol{H}$, potom toto pole pôsobí na objekt dvojicou síl, ktorá má tendenciu otočiť magnetický moment objektu do smeru siločiar magnetického poľa a ktorej otáčavý moment je

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}$$

Potenciálna energia objektu s magnetickým momentom $\boldsymbol{M}$ v mieste magnetického poľa s intenzitou $\boldsymbol{H}$ je daná vzťahom

$$W = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}$$

Príklady

670. Určite magnetickú indukciu a intenzitu magnetického poľa vo vzdialenosti $a = 5$ cm od veľmi dlhého priameho vodiča, keď ním preteká prúd $I = 5$ A!

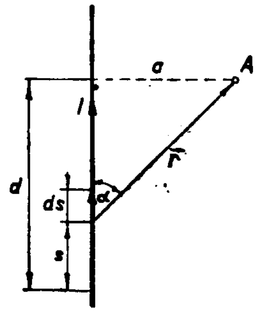
Riešenie:

Vychádzame z definície magnetickej indukcie:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Keďže ide teoreticky o nekonečne dlhý vodič, v súhlase s označením na *obr. 137* možno pre hodnotu indukcie písať:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds \,.\sin \alpha}{r^2}$$



Obr. 137

Z *obr. 137* vidieť, že

$$s = d - a \operatorname{cotg} \alpha$$

takže

$$ds = \frac{a}{\sin^2 \alpha} \, d\alpha$$

Ďalej

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}$$

takže pre hodnotu magnetickej indukcie dostaneme:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\dfrac{a}{\sin^2 \alpha} \, d\alpha \,.\sin \alpha}{\dfrac{a^2}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^{\pi} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Keď dosadíme dané hodnoty jednotlivých veličín, dostaneme:

$$B = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7} \text{ A}^{-2}.\text{kg}.\text{m}.\text{s}^{-2}.5 \text{ A}}{2\pi \,.\, 0{,}05 \text{ m}} = 200 \,.\, 10^{-7} \text{ T}$$

Intenzita magnetického poľa v mieste A potom bude:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi a} = \frac{5 \text{ A}}{2\pi \,.\, 0{,}05 \text{ m}} = \frac{100}{2\pi} \text{ A}\,.\,\text{m}^{-1} = 15{,}915 \text{ A}\,.\,\text{m}^{-1}$$

Indukcia a intenzita poľa sú kolmé na nákresňu a smerujú v mieste A za ňu.

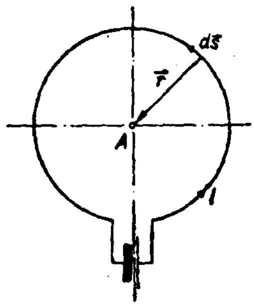
Č

671. Určite indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede kruhového vodiča s polomerom $R = 5$ cm, keď ním preteká prúd $I = 5$ A!

Riešenie:

Magnetická indukcia v bode A *(obr. 138)* od elementu vodiča d**s** je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$



Obr. 138

Keďže vektor d**s** a polohový vektor **r** zvierajú vždy uhol 90°, možno písať:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}s \, . \, r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{r^2}$$

a magnetická indukcia v bode A od celého vodiča bude mať hodnotu

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi r} \mathrm{d}s = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

a smeruje kolmo pred nákresňu.

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$B = \frac{4\pi \, . \, 10^{-7} \, \mathrm{A}^{-2} . \mathrm{kg} . \mathrm{m} . \mathrm{s}^{-2} . 5 \, \mathrm{A}}{2 \, . \, 0{,}05 \, \mathrm{m}} = 0{,}2\pi \, . \, 10^{-4} \, \mathrm{Wb} . \mathrm{m}^{-2} = 628{,}319 \, . \, 10^{-7} \, \mathrm{T}$$

Intenzita magnetického poľa v mieste A teda bude

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I}{2r} = \frac{5 \, \mathrm{A}}{2 \, . \, 0{,}05 \, \mathrm{m}} = 50 \, \mathrm{A} . \mathrm{m}^{-1}$$

672. Vypočítajte hodnotu magnetickej indukcie v strede A závitu tvaru štvorca so stranou $a = 10$ cm, ktorým preteká prúd $I = 5$ A!

Riešenie:

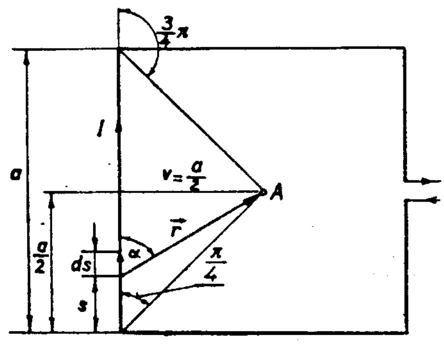
Vychádzame opäť zo všeobecného vzťahu pre magnetickú indukciu v mieste A

s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$ od elementu vodiča d$\boldsymbol{s}$. Platí:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Ak uhol, ktorý zvierajú vektory d$\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{r}$, označíme α, bude platiť

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{r \,.\sin\alpha \,.\mathrm{d}s}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\sin\alpha \,\mathrm{d}s}{r^2}$$



Obr. 139

Z *obr. 139* vidieť, že

$$s = \frac{a}{2} - v \,.\mathrm{cotg}\,\alpha$$

$$\mathrm{d}s = \frac{v}{\sin^2\alpha} \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{a \,\mathrm{d}\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{r}; \quad r = \frac{v}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

a tak príspevok k celkovej indukcii od jednej strany a štvorcového vodiča má hodnotu

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\sin\alpha \dfrac{a \,.\mathrm{d}\alpha}{2\sin^2\alpha}}{\dfrac{a^2}{4\sin^2\alpha}} = \frac{2\mu_0}{4\pi a} I \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} [-\cos\alpha]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq \frac{\sqrt{2} \,.\mu_0 \,.I}{2\pi \,.a}$$

Vzhľadom na symetriu možno pre celkovú indukciu písať:

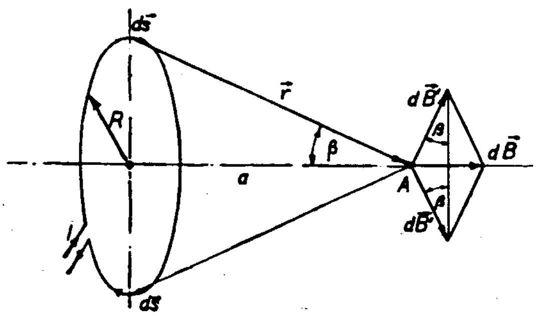
$$B_A = 4 \,.B = 4 \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

takže po dosadení známych údajov napokon dostávame:

$$B_A = \frac{2\sqrt{2}\,.\,4\pi\,.\,10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}.5\ A}}{\pi\,.\,0{,}1\ \mathrm{m}} = 0{,}56\,.\,10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Smer indukcie je kolmý na nákresňu a smeruje za ňu.

673. Vodičom kruhového tvaru s polomerom $R = 10$ cm preteká prúd $I = 2$ A. Vypočítajte indukciu magnetického poľa v mieste A *(obr. 140)* na osi uvedeného kruhového vodiča vo vzdialenosti $a = 10$ cm od jeho stredu!



Obr. 140

Riešenie:

Opäť vyjdeme zo vzťahu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0 I\ \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{4\pi\,.\,r^3}$$

Pretože vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ zvierajú vždy uhol 90° *(obr. 140)*, platí

$$\mathrm{d}B' = \frac{\mu_0 I\ \mathrm{d}s r \sin 90°}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0\,.\,I\,.\,\mathrm{d}s}{4\pi r^2}$$

Uvedený výraz platí pre veľkosť magnetickej indukcie od elementu v hornej časti vodiča. Pretože vektor indukcie od elementu symetricky uloženého v dolnej časti vodiča je rovnako veľký a symetrický s predošlým vektorom, pre veľkosť výslednej indukcie od oboch elementov *(obr. 140)* platí vzťah

$$\mathrm{d}B = 2\ \mathrm{d}B' \sin\beta = \frac{\mu_0 I\ \mathrm{d}s \sin\beta}{2\pi r^2}$$

Z *obr. 140* je zrejmý aj smer výslednej indukcie.

Výslednú indukciu od celého vodiča dostaneme integráciou, pričom použijeme vzťahy zrejmé z obrázku:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2}\,; \quad \sin\beta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

Potom

$$B=\frac{\mu_0 . I . \sin\beta}{2\pi r^2}\int_0^{\pi R} \mathrm{d}s=\frac{\mu_0 . I . \sin\beta}{2\pi r^2}\cdot \pi R=$$

$$=\frac{\mu_0 I \dfrac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}}{2(R^2+a^2)}\cdot R=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$B=\frac{4\pi . 10^{-7}\ \mathrm{A}^{-2} . \mathrm{kg} . \mathrm{m} . \mathrm{s}^{-2} . 2\ \mathrm{A} . 0{,}1^2\ \mathrm{m}^2}{2(0{,}1^2\ \mathrm{m}^2+0{,}1^2\ \mathrm{m}^2)^{3/2}}=4{,}444 . 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

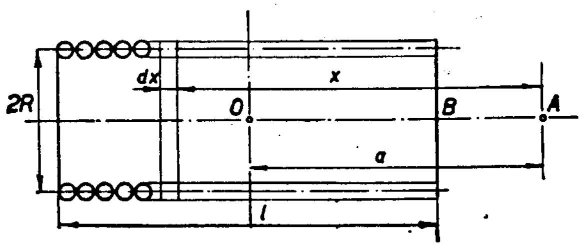
674. Vypočítajte indukciu a intenzitu magnetického poľa v strede (miesto O) a na konci (miesto B) solenoidu dĺžky $l=1$ m, s počtom závitov $z=2000$ a polomerom $R=2$ cm, keď závitmi preteká prúd $I=5$ A!

Riešenie:

Podľa výsledného vzťahu pre magnetickú indukciu kruhového vodiča (pozri príklad 673) element hrúbky dx, meranej v smere osi, prispieva v ľubovoľnom bode A na osi k magnetickej indukcii hodnotou

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 . I . R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{z}{l}\,\mathrm{d}x$$

kde x je vzdialenosť elementu dx od bodu A meraná na osi solenoidu *(obr. 141)* a $\frac{z}{l}$ je počet závitov pripadajúcich na jednotkovú dĺžku solenoidu. Celý solenoid



Obr. 141

vzbudzuje teda v bode A na osi, ktorého vzdialenosť od stredu solenoidu je a, magnetickú indukciu hodnoty

$$B=\int_{-(l/2)+a}^{(l/2)+a}\frac{\mu_0 . I . R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\cdot\frac{z}{l}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\mu_0 . I . z}{2l}\cdot\left[\frac{\dfrac{l}{2}-a}{\sqrt{R^2+\left(-\dfrac{l}{2}+a\right)^2}}+\frac{\dfrac{l}{2}+a}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{l}{2}+a\right)^2}}\right]$$

Keď do vzorca pre indukciu B vo všeobecnom mieste dosadíme $a = 0$, resp. $a = \frac{l}{2}$, dostaneme výrazy pre B v miestach 0, resp. B.

a) $a = 0$

$$B = \frac{\mu_0 . I . z}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}} =$$

$$\frac{4\pi . 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}}.5\ \mathrm{A}.2000}{1\ \mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2.0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}} \doteq 4\pi . 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{z . I}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}} = \frac{5\ \mathrm{A}.2000}{1\ \mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{2.0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}} = 10^4\ \mathrm{A.m^{-1}}$$

b) $a = \frac{l}{2}$

$$B = \frac{\mu_0 . I . z}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} =$$

$$= \frac{4\pi . 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{2}}.5\ \mathrm{A}.2000}{2.1\ \mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}} \doteq \frac{2\pi}{10^3}\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} = 2\pi . 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$H = \frac{I . z}{2l\sqrt{1 + \left(\frac{R}{l}\right)^2}} = \frac{5\ \mathrm{A}.2000}{2.1\ \mathrm{m}\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}02\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{m}}\right)^2}} \doteq 0{,}5 . 10^4\ \mathrm{A.m^{-1}}$$

Vidno, že v prípade b) majú B a H približne polovičné hodnoty ako v prípade a).

675. Plášťom nekonečne dlhého rotačného valca preteká v smere osi valca elektrický prúd. Vypočítajte intenzitu magnetického poľa vo všeobecnom bode vnútri valca!

Riešenie:

Počítajme intenzitu magnetického poľa v ľubovoľne zvolenom bode P *(obr. 142)*. Dvoma blízkymi rovinami, prechádzajúcimi bodom P a rovnobežnými s osou valca, vytvoríme na plášti valca dva prúdové elementy tvaru nekonečne dlhých pásov so šírkami dl_1 a dl_2, ktorých príspevky dH_1 a dH_2 k celkovej intenzite magnetického poľa možno vyjadriť pomocou vzorcov, platných pre magnetické pole v okolí nekonečne dlhého priameho prúdovodiča. Potom

$$\mathrm{d}H_1 = \frac{\mathrm{d}I_1}{2\pi r_1}; \quad \mathrm{d}H_2 = \frac{\mathrm{d}I_2}{2\pi r_2} \tag{1}$$

kde význam symbolov r_1 a r_2 je zrejmý z obrázku a $\mathrm{d}I_1$ a $\mathrm{d}I_2$ predstavujú prúdy, tečúce pásmi. Platí

$$\mathrm{d}l_1 = r_1\,\mathrm{d}\varphi; \quad \mathrm{d}l_2 = r_2\,\mathrm{d}\varphi$$

a (2)

$$\mathrm{d}I_1 = k\,\mathrm{d}l_1; \quad \mathrm{d}I_2 = k\,.\mathrm{d}l_2$$

kde k je konštanta úmernosti. Po dosadení vzťahov (2) do (1) dostávame

$$\mathrm{d}H_1 = \frac{\mathrm{d}I_1}{2\pi r_1} = \frac{k}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi$$

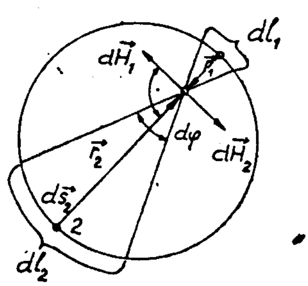
(3)

$$\mathrm{d}H_2 = \frac{\mathrm{d}I_2}{2\pi r_2} = \frac{k}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi$$

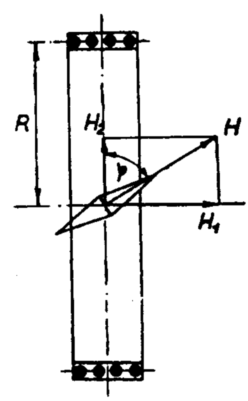
Keďže prúdy $\mathrm{d}I_1$ a $\mathrm{d}I_2$ majú ten istý smer, vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_1$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2$ budú mať v bode P smer práve opačný. Zo vzťahu (3) je zrejmé, že ich hodnoty sú rovnaké, takže

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{H}_2 = 0$$

To platí pre ľubovoľnú dvojicu pásových prúdových elementov, vymedzených dvoma blízkymi rovinami prechádzajúcimi cez bod P. Bod P sme zvolili tiež celkom ľubovoľne. Z toho je zrejmé, že vnútri valca je magnetické pole všade nulové.



Obr. 142



Obr. 143

676. Tangentová buzola so $z = 5$ závitmi a polomerom $R = 10$ cm je uložená v zemskom magnetickom poli, ktorého horizontálna zložka intenzity má hodnotu $H_2 = 15{,}76\ \mathrm{A.m^{-1}}$, tak, že smer horizontálnej zložky intenzity poľa spadá do roviny závitov buzoly. Po zapnutí prúdu sa magnetka vychýli zo svojej pôvodnej polohy o uhol $\varphi = 45°$. Vypočítajte prúd, ktorý tečie závitmi buzoly!

Riešenie:

Keď cievkou buzoly prechádza prúd, pôsobí na magnetku okrem horizontálnej zložky intenzity zemského magnetizmu H_2 aj magnetické pole H_1, vyvolané elektrickým prúdom prechádzajúcim cievkou buzoly *(obr. 143)*.

Intenzita tohto magnetického poľa H_1 má smer kolmý na rovinu závitov, a teda kolmý aj na horizontálnu zložku intenzity zemského magnetického poľa H_2. Magnetka sa postaví do smeru intenzity výsledného poľa H.

Vychýli sa teda zo svojej polohy o uhol φ, pre ktorý platí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_1}{H_2}$$

V príklade 674 sme pre intenzitu poľa vnútri cievky ($a = 0$) odvodili vzťah

$$H = \frac{I \cdot z}{l\sqrt{1 + \left(\frac{2R}{l}\right)^2}} = \frac{I \cdot z}{\sqrt{l^2 + (2R)^2}}$$

Pre veľmi krátku cievku možno l^2 popri $(2R)^2$ zanedbať. Potom

$$H_1 = \frac{z \cdot I}{2R}$$

kde z je počet závitov cievky, I prúd prechádzajúci cievkou buzoly a R polomer cievky.

Pre hľadaný prúd I potom dostávame:

$$I = \frac{2H_2R \operatorname{tg} \varphi}{z} = \frac{2 \cdot 15{,}76 \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot \operatorname{tg} 45°}{5} = 0{,}636\ \mathrm{A}$$

677. Aký je magnetický indukčný tok Φ cez plochu závitu tvaru pravouhlého trojuholníka, ktorý je umiestnený v magnetickom poli s indukciou, ktorá sa mení so vzdialenosťou podľa vzťahu $B = \frac{A}{x}$ *(obr. 144)*, keď strany $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 10$ cm a $A = 10^{-4}\ \mathrm{Wb} \cdot \mathrm{m}^{-1}$? Dané magnetické pole je kolmé na rovinu xy, ako aj na rovinu trojuholníka.

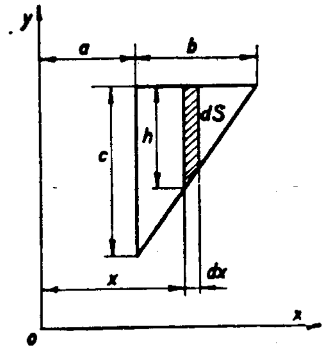
Riešenie:

Keďže magnetická indukcia sa od miesta k miestu mení, vyjdeme zo vzťahu

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Vektor **B** a vektor d**S** (kolmý na plochu trojuholníka) sú rovnobežné, takže

$$d\Phi = B\,.\,dS\,.\cos 0° = B\,.\,dS$$



Obr. 144

Keďže $B = \frac{A}{x}$ a $dS = h\,dx$ *(obr. 144)*, možno písať:

$$d\Phi = \frac{A}{x} \cdot h\,.\,dx$$

Veličinu h zistíme z úmery

$$h : c = (a + b - x) : b$$

t. j.

$$h = \frac{c(a + b - x)}{b}$$

takže

$$d\Phi = \frac{A}{x} \cdot \frac{c(a + b - x)}{b}\,dx$$

Celkový indukčný tok plochou trojuholníka bude:

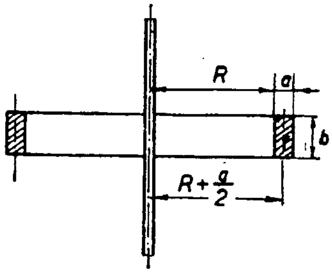
$$\Phi = \int_a^{(a+b)} \frac{A}{x} \cdot \frac{c(a+b-x)}{b}\,dx = \frac{Ac(a+b)}{b}\int_a^{a+b}\frac{dx}{x} - \frac{Ac}{b}\int_a^{a+b} dx =$$

$$= \frac{Ac(a+b)}{b}\ln\frac{a+b}{a} - \frac{Ac}{b}\,b = Ac\left(\frac{a+b}{b}\ln\frac{a+b}{b} - 1\right) =$$

$$= 10^{-4}\ \mathrm{Wb.m^{-1}}.0{,}1\ \mathrm{m}\left(\frac{0{,}08\ \mathrm{m} + 0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}1\ \mathrm{m}} \cdot 2{,}3\log\frac{0{,}08\ \mathrm{m} + 0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}08\ \mathrm{m}} - 1\right) =$$

$$= 0{,}458\,.\,10^{-5}\ \mathrm{Wb}$$

678. Aký je magnetický indukčný tok cez plochu prierezu obruče z oceľoliatiny podľa *obr. 145* ($a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $R = 49$ cm), keď priamym vodičom v strede obruče tečie pri skrate prúd $I = 300$ A a keď v celom reze obruče považujeme intenzitu magnetického poľa za rovnakú, rovnajúcu sa intenzite v strede rezu?

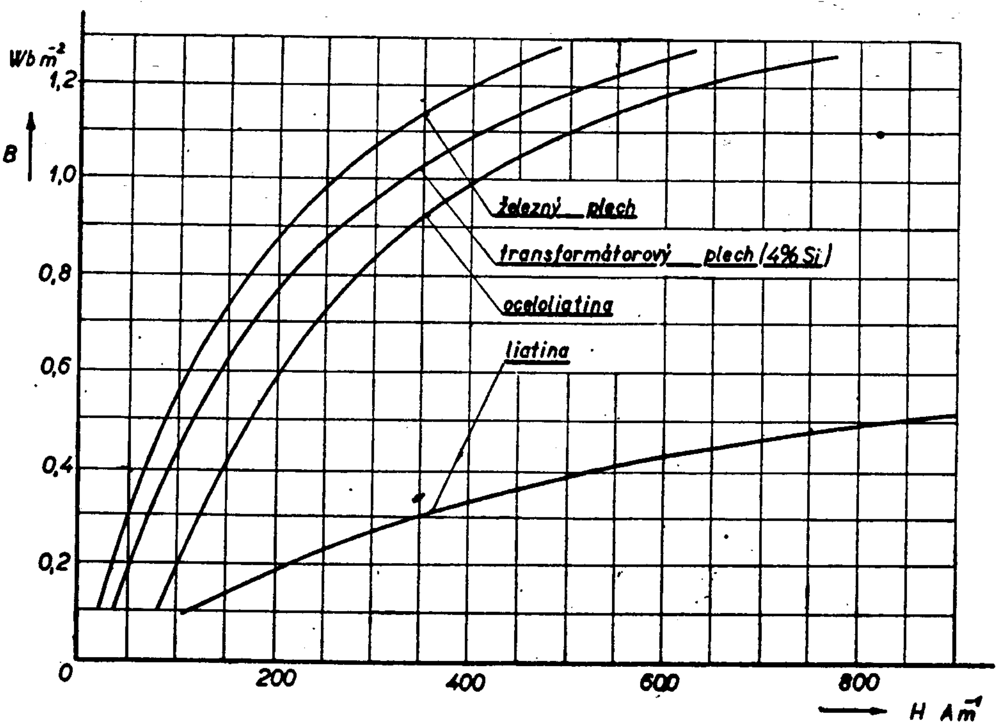


Obr. 145

Riešenie:

Intenzita magnetického poľa v okolí vodiča, cez ktorý preteká prúd I vo vzdialenosti polomeru strednej siločiary oceľovej obruče hodnoty $\left(R + \frac{a}{2}\right)$ je:

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\left(R + \frac{a}{2}\right)} = \frac{300\ \text{A}}{2\pi(0{,}49\ \text{m} + 0{,}01\ \text{m})} = 95{,}54\ \text{A}\,.\,\text{m}^{-1}$$



Obr. 146

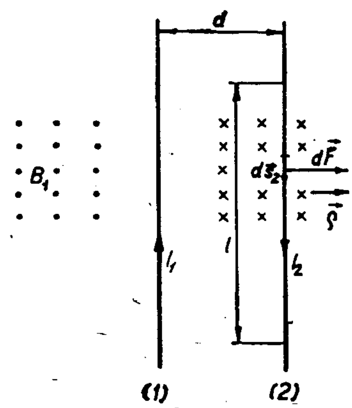
Pri tejto intenzite vzniká v oceli magnetická indukcia $B \doteq 0{,}2$ T, čo nájdeme z magnetizačnej krivky príslušného materiálu (pozri *obr. 146*). Potom magnetický indukčný tok

$$\Phi = B \,.\, S = 0{,}2\ \mathrm{T} \,.\, 0{,}02\ \mathrm{m} \,.\, 0{,}03\ \mathrm{m} = 1{,}2 \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

679. Dvoma dlhými, priamymi, navzájom rovnobežnými vodičmi tečú rovnaké prúdy rôznych smerov $I = 400$ A. Vzdialenosť medzi vodičmi $d = 30$ cm. Nájdite veľkosť a smer sily pôsobiacej na $l = 10$ m dĺžky každého z vodičov!

Riešenie:

Príklad môžeme riešiť *(obr. 147)* ako výpočet sily pôsobiacej na vodič dĺžky l,



Obr. 147

keď v ňom preteká prúd I_2 a je v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$, vyvolanom prúdom I_1 vo vodiči 1. Pre tento prípad je sila pripadajúca na element dĺžky $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ daná vzťahom

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{B}_1$$

Vieme, že magnetická indukcia v okolí veľmi dlhého vodiča (pozri príklad 670) má hodnotu

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

Vektorový súčin vo vzorci pre silu môžeme vyčísliť, pričom uvážime, že kruhové magnetické siločiary v okolí vodiča 1 sú na vodič 2 v skutočnosti kolmé, teda navzájom kolmé sú aj $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ a $\boldsymbol{B}_1$, takže

$$\boldsymbol{F} = \int_0^l (I_2\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{B}_1) = \int_0^l I_2 \,.\, \mathrm{d}s_2 \,.\, B_1 \,.\, \sin 90° \,.\, \boldsymbol{\varrho} = \mu_0 I_1 I_2 \cdot \frac{l}{2\pi d} \cdot \boldsymbol{\varrho}$$

kde $\boldsymbol{\varrho}$ je jednotkový vektor v smere sily.

Keďže $I_1 = I_2 = 400$ A, po dosadení číselných hodnôt aj ostatných veličín dostávame:

$$F = 4\pi \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}} \,.\, 400\ \mathrm{A} \,.\, 400\ \mathrm{A} \cdot \frac{10\ \mathrm{m}}{2\pi \,.\, 0{,}3\ \mathrm{m}} = 1{,}066\ \mathrm{N}$$

Smer sily a jej jednotkového vektora je daný smerom výsledku vektorového súčinu:

$$I_2 \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{B}_1$$

t. j. sila je kolmá na vektor d$\boldsymbol{s}$ aj $\boldsymbol{B}_1$. Smer sily je taký, že sa sila snaží obidva vodiče od seba oddialiť *(obr. 147).*

680. Akou silou je vytláčaný vodič účinnej dĺžky $s = 30$ cm z homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 0{,}8$ T, keď ním preteká prúd $I = 150$ A a keď je uložený kolmo na smer indukcie magnetického poľa?

Riešenie:

Sila, ktorou magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí na vodič dĺžky d$\boldsymbol{s}$, cez ktorý preteká prúd I, je daná vzťahom

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

Keď je priamy vodič postavený kolmo na homogénne magnetické pole, pre veľkosť sily dostávame vzťah

$$F = B \,.\, I \,.\, s$$

Po dosadení príslušných číselných hodnôt

$$F = 0{,}8\ \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} \cdot 150\ \mathrm{A} \,.\, 0{,}30\ \mathrm{m} = 36\ \mathrm{N}$$

681. V homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 2000 \,.\, 10^{-4}$ T je plochá obdĺžniková cievka s 50 závitmi. Rozmery cievky sú: $a = 3$ cm, $b = 2$ cm. Magnetické pole je rovnobežné s kratšou stranou cievky. Aký veľký je moment dvojice síl pôsobiacich na cievku, keď ňou tečie prúd $I = 4$ A?

Riešenie:

Sila pôsobiaca na jednotlivé úseky vodiča je

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

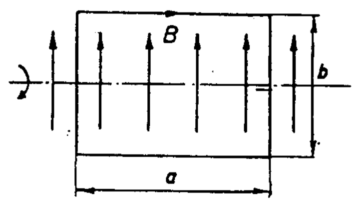
Na vodiče dĺžky b, pretože sú v smere poľa, nepôsobí nijaká sila, na vodiče dĺžky a pôsobia rovnaké sily opačných smerov, čím vzniká dvojica síl otáčajúca cievkou okolo osi O *(obr. 148)*, prechádzajúcej stredom strán b.

Sila spôsobiaca na vodič dĺžky a, kolmý na smer magnetickej indukcie B, má hodnotu

$$F = BIa$$

a sila na 50 takých vodičov bude:

$$F_{50} = 50 \,.\, B \,.\, I \,.\, a$$



Obr. 148

Veľkosť momentu dvojice síl je daná súčinom jednej sily a kolmej vzdialenosti oboch síl, teda v našom prípade

$$D = F_{50} \,.\, b = 50 \,.\, B \,.\, I \,.\, a \,.\, b$$

Po dosadení číselných hodnôt

$$D = 50 \,.\, B \,.\, I \,.\, a \,.\, b = 50 \,.\, 2000 \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{T} \,.\, 4\ \mathrm{A} \,.\, 0{,}03\ \mathrm{m} \,.\, 0{,}02\ \mathrm{m} =$$

$$= 240 \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{N \,.\, m} = 0{,}024\ \mathrm{N \,.\, m}$$

682. Aký veľký otáčavý moment pôsobí na závit polomeru $r = 6$ cm, cez ktorý preteká prúd $I = 50$ A, keď sa nachádza v magnetickom poli intenzity $H = 477\,480\ \mathrm{A \,.\, m^{-1}}$ tak, že a) jeho rovina je rovnobežná so smerom poľa b) normála na jeho rovinu zviera so smerom poľa uhol $\beta = 30°$?

Riešenie:

Vyjdeme zasa zo vzťahu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

resp. zo vzťahu

$$\mathrm{d}F = I \,.\, \mathrm{d}s \,.\, B \sin \alpha$$

Keďže $\mathrm{d}s \,.\, \sin \alpha = \mathrm{d}x$ *(obr. 149a)*, možno ďalej písať:

$$\mathrm{d}F = I \,.\, B \,.\, \mathrm{d}x$$

Pretože rovnako veľká sila opačného smeru pôsobí na druhý element ds, symetricky položený vzhľadom na os O, cez ktorý preteká prúd opačného smeru, celkove na oba elementy (mechanicky vzájomne spojené) pôsobí elementárna dvojica síl s momentom

$$\mathrm{d}D = \mathrm{d}F \,.\, y = I \,.\, B \,.\, y \,.\, \mathrm{d}x = I \,.\, B \,.\, \mathrm{d}S$$

kde $\mathrm{d}S = y\ \mathrm{d}x$ je elementárna plocha (na *obr. 149a* vyšrafovaná).

Obr. 149a, b

Otáčavý moment síl pôsobiacich na celý závit dostaneme integráciou:

$$D = I \,.\, B \,.\, S = \mu_0 \,.\, H \,.\, I \,.\, S$$

kde S je plocha ohraničená celým vodičom. Odvodený výraz platí pre prípad, keď rovina závitu má smer magnetickej indukcie. Keď vektor indukcie $\boldsymbol{B}$ zviera s vektorom plochy závitu $\boldsymbol{S}$ (je vždy kolmý na samotnú plochu) uhol β *(obr. 149b)*, vektor indukcie rozložíme do smeru vektora plochy $\boldsymbol{B}_s$ a do smeru samotnej plochy ($\boldsymbol{B}_\parallel$). Zložka $\boldsymbol{B}_s$ vyvoláva silové účinky, ktoré pôsobia na závit tlakom zo všetkých strán, takže nemajú otáčavý účinok. Pre veľkosť zložky $\boldsymbol{B}_\parallel$ platí:

$$|\boldsymbol{B}_\parallel| = \mathrm{B} \sin \beta$$

a ak dosadíme namiesto B do výrazu D, získaného predtým, dostaneme:

$$D = I \,.\, S \,.\, B \sin \beta = \mu_0 HIS \sin \beta$$

Keď dosadíme číselné hodnoty príslušných veličín, v jednotlivých prípadoch dostaneme:

a) $D = \mu_0 HIS = 4\pi \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2} \,.\, kg \,.\, m \,.\, s^{-2}} \,.\, 6000 \,.\, \dfrac{10^3}{4}\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \,.\, 50\ \mathrm{A} \,.\, \pi \,.\, 0{,}06^2\ \mathrm{m^2} =$

$= 0{,}339\ \mathrm{N \,.\, m}$

b) $D = \mu_0 \,.\, HIS \sin \beta =$

$= 4\pi \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2} \,.\, kg \,.\, m \,.\, s^{-2}} \,.\, 600 \cdot \dfrac{10^3}{4\pi}\,\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 50\ \mathrm{A} \,.\, \pi \,.\, 0{,}06^2\ \mathrm{m^2} \,.\, 0{,}5 =$

$= 0{,}169\ \mathrm{N \,.\, m}$

683. Vodič tvaru dvoch kruhových závitov s polomermi $R = 5$ cm je uložený v magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}6$ T kolmo na smer indukcie. Aké je elektromotorické napätie, ktoré sa v tomto vodiči indukuje, keď magnetické pole za 0,5 s rovnomerne vymizne?

Riešenie:

Pretože indukované elektromotorické napätie sa podľa indukčného zákona rovná záporne vzatej zmene magnetického toku za jednotku času, bude:

$$U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi - \Phi_0}{\Delta t}$$

Po uplynutí času Δt sa $\Phi = 0$. Na začiatku, t. j. keď sú závity ešte v magnetickom poli, platí:

$$\Phi_0 = n \,.\, S \,.\, B$$

kde n je počet závitov, S plocha jedného závitu, takže

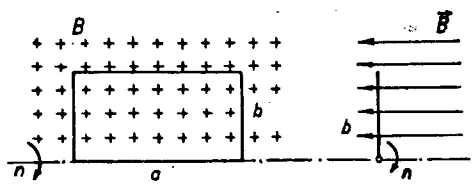
$$\Phi_0 = 2\pi \,.\, R^2 \,.\, B = 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}05^2\ \mathrm{m}^2 \,.\, 0{,}6\ \mathrm{Wb} \,.\, \mathrm{m}^{-2} = 0{,}009\ 42\ \mathrm{Wb}$$

Pre elektromotorické napätie napokon dostávame:

$$U_i = -\frac{(0 - 0{,}009\ 42)\ \mathrm{Wb}}{0{,}5\ \mathrm{s}} = 0{,}018\ 84\ \mathrm{V}$$

684. Aké stredné elektromotorické napätie sa indukuje za pol otáčky v obdĺžnikovom závite, ktorý sa otáča okolo steny a, kolmej na magnetické pole s intenzitou $H = 4 \,.\, 10^5\ \mathrm{A} \,.\, \mathrm{m}^{-1}$ frekvenciou $f = 30\ \mathrm{s}^{-1}$ *(obr. 150)*?

a = 0,3 m
b = 0,2 m



Obr. 150

Riešenie:

Pol otáčky sa vykoná za čas

$$t = \frac{1}{2}\,T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{2f}$$

Za tento čas sa zmení indukčný tok z hodnoty Φ_m na hodnotu $-\Phi_m$, teda o hodnotu

$$\Delta \Phi = \Phi_m - (-\Phi_m) = 2\Phi_m$$

takže podľa indukčného zákona pre hľadané elektromotorické napätie dostaneme

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{2\Phi_m}{0 - \frac{1}{2f}} = 4f \,.\, \Phi_m$$

Pretože $\Phi_m = B_m \,.\, S$, kde $S = a \,.\, b$, platí

$$U_i = 4fB_m ab = 4fab\mu_0 H =$$

$$= 4 \,.\, 30\ \mathrm{s^{-1}} \,.\, 0{,}3\ \mathrm{m} \,.\, 0{,}2\ \mathrm{m} \,.\, 4\pi \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}} \,.\, \mathrm{kg} \,.\, \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s^{-2}} \,.\, 4 \,.\, 10^5\ \mathrm{A} \,.\, \mathrm{m^{-1}} = 3{,}6\ \mathrm{V}$$

685. Na bubne otáčajúcom sa v magnetickom poli je v jednom žliabku 20 vodičov dĺžky $s = 20$ cm zapojených do série. Bubon má priemer $d = 10$ cm a otáča sa v magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}7$ T frekvenciou $f = 1300\ \mathrm{min^{-1}}$. Aké maximálne elektromotorické napätie sa bude indukovať v celom vinutí? Treba určiť aj smer elektromotorického napätia, keď sa bubon otáča doprava a smer poľa je zvislý.

Riešenie:

Vyjdeme zo vzťahu

$$U_i = B \,.\, s \,.\, v$$

ktorý udáva indukované EMN vo vodiči pohybujúcom sa kolmo na smer indukcie B v homogénnom poli rýchlosťou v. Pretože vodiče sú usporiadané po obvode bubna, rýchlosť vodiča sa rovná obvodovej rýchlosti bubna priemeru d pri rovnomernom kruhovom pohybe:

$$v = \frac{\pi\, df}{60} = \frac{3{,}14 \,.\, 0{,}1\ \mathrm{m} \,.\, 1300\ \mathrm{min^{-1}}}{60} = 6{,}807\ \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s^{-1}}$$

takže maximálne elektromotorické napätie, indukované v jednom vodiči, bude:

$$U_{i1} = B \,.\, s \,.\, v = 0{,}8\ \mathrm{Wb} \,.\, \mathrm{m^{-2}} \,.\, 0{,}2\ \mathrm{m} \,.\, 6{,}8\ \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s^{-1}} = 1{,}089\ \mathrm{V}$$

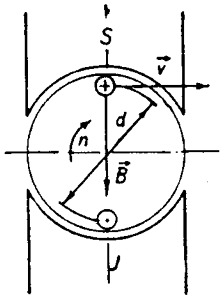
Pretože vodiče sú zapojené do série, a to tak, aby sa EMN sčítali, celkové maximálne elektromotorické napätie, ktoré dynamo produkuje, je:

$$U_i = 20 \,.\, U_{i1} = 20 \,.\, 1{,}089\ \mathrm{V} = 21{,}78\ \mathrm{V}$$

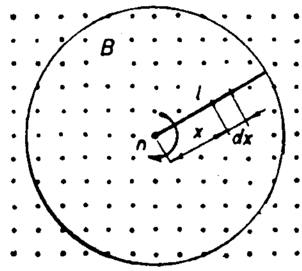
Smer elektromotorického napätia určíme ako smer výsledného vektora z vektorového súčinu

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Smer EMN v jednotlivých vodičoch je potom taký, ako je naznačené na *obr. 151.* Pritom krížik označuje prúd tečúci vo vodičoch v smere kolmom na nákresňu, bodka označuje prúd tečúci od nákresne.



Obr. 151



Obr. 152

686. Aké EMN sa indukuje v priamom vodiči dĺžky $l = 15$ cm, keď vodič rotuje v homogénnom magnetickom poli indukcie $B = 0{,}5$ T, v rovine kolmej na smer poľa okolo osi idúcej jeho koncovým bodom s počtom otáčok $f = 60\ \mathrm{s}^{-1}$?

Riešenie:

Použijeme indukčný zákon vo forme

$$U_i = B \,.\, x \,.\, v$$

kde B je magnetická indukcia, x dĺžka vodiča, v rýchlosť vodiča.

Ako vidno na *obr. 152*, element vodiča dĺžky dx, vo vzdialenosti x od osi otáčania a pri otáčkach f má rýchlosť, ktorá sa rovná obvodovej rýchlosti kruhového pohybu, ktorý element vykonáva, teda

$$v = 2\pi x f$$

Preto EMN indukované v uvedenom elemente bude:

$$dU_i = B \,.\, v \,.\, dx = B \,.\, 2\pi x f \, dx$$

a pre EMN indukované v celom vodiči dĺžky l dostávame:

$$U_i = 2\pi f B \int_0^l x \, dx = \pi \,.\, f \,.\, B \,.\, l^2 =$$

$$= 3{,}14 \,.\, 60\ \mathrm{s}^{-1} \,.\, 5000 \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{Wb} \,.\, \mathrm{m}^{-2} \,.\, 0{,}15^2\ \mathrm{m}^2$$

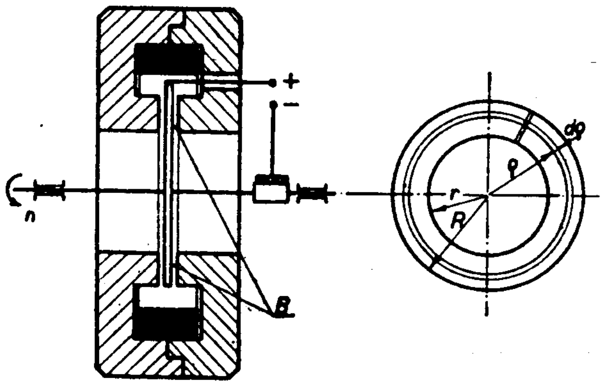
$$U_i = 2{,}1206\ \mathrm{V}$$

687. Vypočítajte, aké elektromotorické napätie sa indukuje na Forbesovom stroji, čo je kovový kotúč, otáčajúci sa v homogénnom magnetickom poli, vytvorenom osobitným magnetom. Magnetická indukcia je homogénna v mieste označenom B, teda od vzdialenosti $r = 5$ cm do $R = 15$ cm od osi kotúča a má hodnotu $B = 1$ T. Kotúč sa otáča frekvenciou $f = 2000\ \mathrm{min}^{-1}$.

Riešenie:

V kotúči predpokladáme radiálne vodiče, v ktorých sa v dôsledku pohybu (rýchlosťou v) v magnetickom poli indukcie B indukuje EMN *(obr. 153)*. Toto EMN v elemente vodiča dĺžky $d\varrho$ je:

$$dU_i = B \, . \, v \, . \, d\varrho$$



Obr. 153

Vyjadrime rýchlosť v elementu vo vzdialenosti ϱ od osi pomocou počtu otáčok za minútu f:

$$v = \frac{2\pi\varrho f}{60}$$

Potom

$$dU_i = \frac{2\pi\varrho \, . \, f}{60} \cdot B \, . \, d\varrho$$

a elektromotorické napätie od celého vodiča dĺžky $l = R - r$ bude:

$$U_i = \frac{2\pi f}{60} B \int_r^R \varrho \, . \, d\varrho = \frac{2\pi f B}{60} \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_r^R = \frac{\pi}{60} Bf(R^2 - r^2)$$

Po dosadení číselných hodnôt príslušných veličín

$$U_i = \frac{\pi}{60} \cdot 1 \text{ T} \, . \, 2000 \text{ s}^{-1} \, (0{,}15^2 \text{ m}^2 - 0{,}05^2 \text{ m}^2) = 2{,}094 \text{ V}$$

688. Štvorcový rám z medeného drôtu sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}2$ T. Prierez drôtu je $S_d = 2$ mm^2, plošný obsah štvorcového rámu $S_r = 25$ cm^2. Normála k ploche rámu je rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie. Aké množstvo elektrického náboja prejde vodičom rámu pri vypnutí poľa?

Riešenie:

Vyjdeme zo vzťahu, vyjadrujúceho všeobecne zákon elektromagnetickej indukcie

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Keď tento výraz vydelíme elektrickým odporom okruhu R, dostávame

$$\frac{U_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

Pretože podiel $\frac{U_i}{R}$ predstavuje prúd I prechádzajúci vodičom,

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

Pre element náboja dQ, ktorý prejde okruhom pri zmene indukčného toku o $d\Phi$, dostaneme potom

$$dQ = I\,dt = -\frac{d\Phi}{R}$$

Celkový náboj, ktorý pri zmene toku z $\Phi = B.S_r$ na $\Phi = 0$ prejde vodičom, bude teda

$$Q = \int_{\Phi = BS_r}^{\Phi = 0} -\frac{d\Phi}{R} = \frac{B.S_r}{R}$$

Pre elektrický odpor uvedeného vodiča dĺžky $4a$ a prierezu S_d (a je dĺžka strany štvorcového vodiča) platí

$$R = \frac{\varrho_{Cu}.l}{S_d} = \frac{\varrho_{Cu}4a}{S_d} = \frac{\varrho_{Cu}4\sqrt{S_r}}{S_d}$$

Pre hľadaný elektrický náboj potom dostaneme

$$Q = \frac{B.S_r}{\dfrac{\varrho_{Cu}.4\sqrt{S_r}}{S_d}} = \frac{B.S_d\sqrt{S_r}}{4\varrho_{Cu}} = \frac{0{,}2\ \text{T}.2.10^{-6}\ \text{m}^2.\sqrt{25.10^{-4}\ \text{m}^2}}{4.0{,}017.10^{-6}\ \Omega.\text{m}} = 0{,}294\ \text{C}$$

689. Nájdite indukčnosť uzavretej cievky prstencovitého tvaru, ktorej závity sú navinuté na železné jadro, keď počet závitov $z = 1000$, prierez jadra $S_1 = 25\ \text{cm}^2$, stredný priemer jadra $d = 20$ cm, prúd $I = 1$ A a permeabilita, ktorá odpovedá tomuto prúdu, $\mu = 700\ \mu_0$!

Riešenie:

Na výpočet indukčnosti potrebujeme poznať najprv hodnotu intenzity magnetického poľa H, ktoré je vytvorené cievkou s počtom závitov z a polomerom r, keď závitmi prechádza prúd I. Vyjdeme z rovnice prietoku, pričom uvážime, že integračná dráha je spriahnutá s vodičom z-krát. Preto

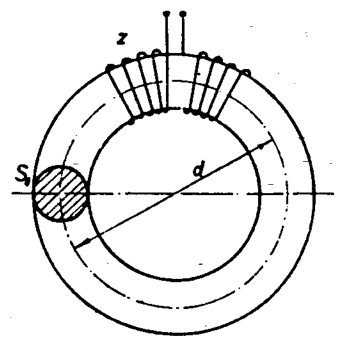
$$zI = \oint H . \mathrm{d}s$$

kde integráciu treba vykonať po celej uzavretej strednej siločiare magnetického obvodu. Po integrácii po kružnici polomeru $r = \frac{d}{2}$ dostávame *(obr. 154)*

$$zI = 2\pi r H$$

odkiaľ

$$H = \frac{zI}{2\pi r} = \frac{100.1\ \mathrm{A}}{2\pi . 0{,}1\ \mathrm{m}} = \frac{5}{\pi} \cdot 10^3\ \mathrm{A.m^{-1}}$$



Obr. 154

Magnetický indukčný tok Φ cez plochu závitu bude

$$\Phi = LI$$

Z toho pre hľadanú indukčnosť dostávame

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{BS}{I} = \frac{Bz . S_1}{I} = \frac{\mu H z S_1}{I}$$

kde B je magnetická indukcia, S celkový plošný obsah, ktorým tok prechádza, S_1 plošný obsah jedného závitu, z počet závitov. Magnetickú indukciu B sme vyjadrili ako súčin intenzity magnetického poľa H a permeability $\mu = \mu_0 . \mu_r$. Po dosadení číselných hodnôt jednotlivých veličín dostaneme:

$$L = \frac{\mu_0 \mu H z S_1}{I} =$$

$$= \frac{4\pi . 10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}}.700 \cdot \frac{5}{\pi} \cdot 10^3\ \mathrm{A.m^{-1}}.1000.25.10^{-4}\ \mathrm{m^2}}{1\ \mathrm{A}} =$$

$$= 4.7.5.25.10^{-3}\ \mathrm{H} = 3{,}50\ \mathrm{H}$$

690. Vypočítajte elektromotorické napätie, ktoré sa indukuje v cievke s indukčnosťou $L = 0{,}06$ H, keď v nej prúd rovnomerne rastie tak, že sa za každú sekundu zväčší o $\Delta I = 10$ A!

Riešenie:

Pre samoindukčné EMN platí vzťah

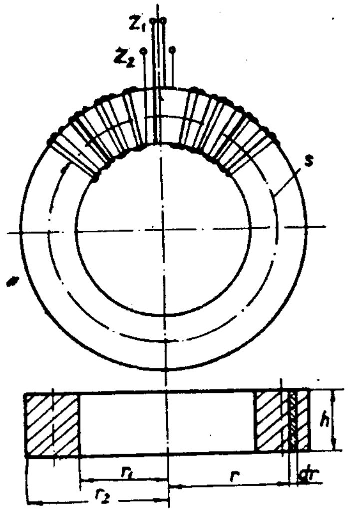
$$U_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \quad \text{resp.} \quad U_i = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Keď dosadíme príslušné číselné hodnoty, dostaneme:

$$U_i = -0{,}06\ \mathrm{H}\,\frac{10\ \mathrm{A}}{1\ \mathrm{s}} = -0{,}6\ \mathrm{V}$$

Záporné znamienko vo výsledku znamená, že U_i má opačný smer ako prúd.

691. Odvoďte vzťah pre vzájomnú indukčnosť kruhovej cievky s jadrom obdĺžnikového prierezu *(obr. 155)*, ak na jadre je jedno vinutie s počtom závitov z_1 a tesne na ňom druhá cievka s počtom závitov z_2!



Obr. 155

Riešenie:

Vyjdeme z rovnice prietoku pre prípad, že cievkou so z_1 závitmi prechádza prúd I, t. j.

$$\oint H \,.\, \mathrm{d}s = z_1 \,.\, I_1$$

Integrovať musíme pozdĺž celej strednej magnetickej siločiary, ktorá má tvar kružnice. Preto

$$\oint H \,.\, \mathrm{d}s = H \,.\, 2\pi r$$

Pre intenzitu magnetického poľa na ľubovoľnej siločiare jadra *(obr. 155)* potom možno písať

$$H = \frac{z_1 \,.\, I_1}{2\pi r}$$

Indukčný tok, ktorý prechádza elementárnou plôškou prierezu jadra $\mathrm{d}S = h \,.\, \mathrm{d}r$, môžeme považovať za homogénny, takže

$$\mathrm{d}\Phi = B \,.\, \mathrm{d}S = \mu_0 \mu_r \,.\, H \,.\, h \,.\, \mathrm{d}r = \mu_0 \,.\, \mu_r \frac{z_1 I_1}{2\pi r} h \,.\, \mathrm{d}r$$

Indukčný tok celým obdĺžnikovým prierezom jadra potom je:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} z_1 I_1 h \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2} z_1 I_1 h \,.\, \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Celý indukčný tok pretína z_2 závitov druhej cievky, takže celkový tok cez druhú cievku

$$\Phi_{12} = \Phi \,.\, z_2 = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} h z_1 z_2 I_1 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

a hľadaná vzájomná indukčnosť oboch cievok v zmysle jeho definície bude daná vzťahom

$$L_{mn} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} z_1 z_2 h \ln \frac{r_2}{r_1}$$

692. Aká je energia magnetického poľa prúdu $I = 2$ mA, keď prúd preteká cievkou dĺžky $l = 50$ cm, ktorá má $z = 10\,000$ závitov s priemerom $d = 6$ cm?

Riešenie:

Pre energiu magnetického poľa elektrického prúdu platí vzťah

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Ako vidieť, na výpočet tejto energie potrebujeme poznať indukčnosť L cievky, ktorá je daná vzťahom

$$L = \frac{\Phi_c}{I}$$

kde Φ_c je celkový indukčný tok cez všetky závity cievky, keď nimi tečie prúd I. Avšak

$$\Phi_c = z\Phi = zBS = z\mu_0 HS$$

kde Φ je indukčný tok cez plochu jedného závitu a H intenzita magnetického poľa, ktorú kvôli jednoduchosti považujeme v reze každého závitu za rovnakú. Pre ňu potom zo zákona prietoku vyplýva vzťah

$$Hl = zI$$

t. j.

$$H = \frac{zI}{l}$$

takže

$$L = \frac{\Phi_c}{I} = \frac{z\mu_0 HS}{I} = \frac{\mu_0 z^2 S}{l} =$$

$$= \frac{4\pi.10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}}.10\,000^2 \cdot \dfrac{\pi 0{,}06^2\ \mathrm{m^2}}{4}}{0{,}5\ \mathrm{m}} = 0{,}71\ \mathrm{H}$$

Pre hľadanú energiu magnetického poľa potom dostaneme:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}71\ \mathrm{H}.0{,}002^2\ \mathrm{A}^2 \doteq 1{,}42.10^{-6}\ \mathrm{J}$$

693. Aká je objemová hustota energie magnetického poľa v strede solenoidu dĺžky $l = 2$ m, s počtom závitov $z = 4000$, ktorými preteká prúd $I = 10$ A?

Riešenie:

Ak predpokladáme, že $l \gg R$, kde R je polomer solenoidu, možno pre indukciu magnetického poľa v strede solenoidu (viď príklad 674) písať

$$B = \frac{\mu_0 zI}{l}$$

takže pre intenzitu magnetického poľa v strede solenoidu dostaneme

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{zI}{l} = \frac{4.10^3.10\mathrm{A}}{2\ \mathrm{m}} = = 2.10^4\ \mathrm{A.m^{-1}}$$

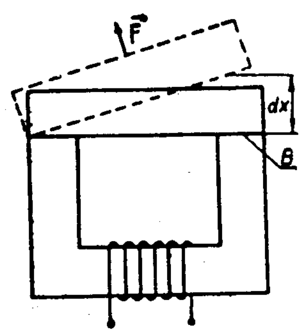
Objemová hustota energie magnetického poľa v strede solenoidu potom je

$$w_m = \frac{1}{2}\,\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\,4\pi\,.\,10^{-7}\ \mathrm{A^{-2}.kg.m.s^{-2}}.4\,.\,10^8\ \mathrm{A^2.m^{-2}} = 251\ \mathrm{J.m^{-3}}$$

694. Odvoďte vzťah pre nosnosť elektromagnetu a zistite ju pre prípad, že prierez železa je $6 \times 4\ \mathrm{cm^2}$ a magnetická indukcia v styčnej ploche $B = 0{,}3$ T!

Riešenie:

Keď vzďaľujeme kotvu od pólu magnetu po dráhe dx *(obr. 156)* a keď súčasne zväčšujeme prúd v cievke tak, aby sa magnetický indukčný tok v obvode nemenil,



Obr. 156

nemení sa ani sila F, ktorou je kotva priťahovaná k pólu a ktorú pri pohybe premáhame, takže konáme prácu

$$\mathrm{d}A = F\,.\,\mathrm{d}x$$

Aby sa magnetický indukčný tok pri zväčšení strednej dĺžky siločiary o dĺžku dx nemenil, bolo treba magnetomotorickú silu zväčšiť o hodnotu rovnajúcu sa $H\,.\,\mathrm{d}x$. Energia magnetického poľa sa pritom vo vzduchovej medzere zväčší. Pre energiu magnetického poľa platí vzťah

$$W_m = \frac{1}{2}\,LI^2$$

Keďže

$$L = \frac{\Phi_L}{I}$$

kde $\Phi_L = z\Phi$ je celkový indukčný tok cez všetky závity cievky a Φ je indukčný tok cez plochu jedného závitu dostaneme:

$$W_m = \frac{1}{2}\,LI^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_L}{I}\cdot I^2 = \frac{1}{2}\,Iz\Phi$$

Rovnica prietoku poskytuje vzťah

$$H.x = I.z$$

kde x je dĺžka siločiary, takže ďalej možno písať:

$$W_m = \frac{1}{2} Hx\Phi$$

Spomenuté zväčšenie energie magnetického poľa v dôsledku zväčšenia magnetomotorickej sily o hodnotu $H.dx$ je:

$$dW = \frac{H\,dx\Phi}{2}$$

a po úprave

$$dW = \frac{B^2.S.dx}{2\mu_0}$$

kde sme položili

$$\Phi = B.S; \quad H = \frac{B}{\mu_0}$$

B je v tomto prípade magnetická indukcia vo vzduchovej medzere stýčnej plochy.

Zákon o zachovaní energie v tomto prípade vyžaduje, aby sa práca vynaložená na vzdialenie kotvy rovnala zväčšeniu energie magnetického poľa, teda

$$F.dx = \frac{B^2.S}{2\mu_0} dx$$

Odtiaľ pre nosnú silu dostávame vzťah

$$F = \frac{B^2.S}{2\mu_0}$$

kde S je stýčná plocha (prierez) pólu (pri podkovovitom magnete plošný obsah oboch pólov). Po dosadení číselných hodnôt bude:

$$F = \frac{0{,}3^2\,T^2 \cdot 24.10^{-4}\,m^2}{2.4\pi.10^{-7}\,A^{-2}.kg.m.s^{-2}} = \frac{0{,}09.24}{25{,}12} \cdot 10^3\,N \doteq 86\,N$$

695. Aký veľký je magnetický odpor magnetického obvodu z liatiny s rozmermi $r = 15$ cm a $S = 5$ cm^2 *(obr. 157)*, ak cievkou so $z = 200$ závitmi tečie prúd $I = 3$ A?

Riešenie:

Z rovnice prietoku pre náš prípad *(obr. 157)* platí:

$$H \cdot 2\pi r = I \cdot z$$

takže pre intenzitu poľa vyvolanú v jadre prúdom I, tečúcim cievkou so z závitmi, dostaneme:

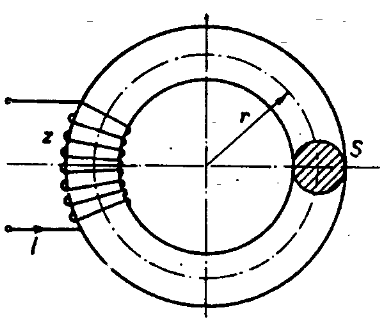
$$H = \frac{I \cdot z}{2\pi r} = \frac{3\ \mathrm{A} \cdot 200}{0{,}942\ \mathrm{m}} = 637\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

Tejto intenzite na magnetizačnej krivke liatiny na *obr. 146* odpovedá magnetická indukcia $B = 0{,}46$ T.

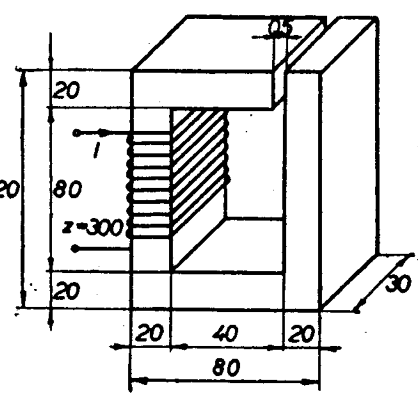
Magnetický odpor obvodu dostaneme podľa Hopkinsovho vzorca:

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{s}{S} = \frac{1}{\frac{B}{H}} \cdot \frac{2\pi r}{S} = \frac{H}{B} \cdot \frac{2\pi r}{S} =$$

$$= \frac{637\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot 2\pi \cdot 0{,}15\ \mathrm{m}}{0{,}46\ \mathrm{T} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 2{,}6089 \cdot 10^6\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{Wb}^{-1}$$



Obr. 157



Obr. 158

696. Aký prúd musí tiecť cievkou s počtom závitov $z = 300$, navinutých na jadre z transformátorového plechu (4 % Si) s medzerou $\delta = 0{,}5$ mm *(obr. 158)*, aby v ňom vznikol magnetický indukčný tok $\Phi = 0{,}000\,66$ Wb? (Rozmery na *obr. 158* sú v mm.)

Riešenie:

Najprv určíme magnetickú indukciu:

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{0{,}000\,66}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 1{,}1\ \mathrm{T}$$

Z magnetizačnej krivky transformátorového plechu *(obr. 146)* prislúcha indukcii $B = 1{,}1$ T intenzita magnetického poľa $H_ž \doteq 400$ A.m^{-1}.

Vo vzduchovej medzere

$$H_{vzd} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi . 10^{-7}} \cdot B = \frac{1{,}1}{4\pi . 10^{-7}} = 8{,}75 \ .10^5 \ \text{A.m}^{-1}$$

Rovnica prietoku bude mať pre náš prípad tvar

$$I . z = H_ž . l_ž + H_{vzd} . \delta$$

Z toho

$$I = \frac{H_ž . l_ž + H_{vzd} . \delta}{z}$$

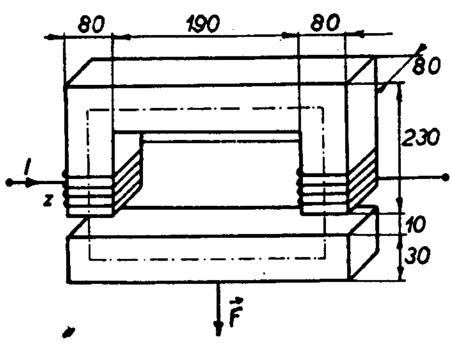
kde $l_ž$ je dĺžka strednej siločiary v transformátorovom plechu, t. j.

$$l_ž = [2.(40 + 20) + 2(80 + 20) - 0{,}5] . 10^{-3} = 319{,}5 . 10^{-3} \ \text{m}$$

teda

$$I = \frac{400 \ \text{A.m}^{-1} . 319{,}5 . 10^{-3} \ \text{m} + 8{,}75 . 10^5 \ \text{A.m}^{-1} . 0{,}5 . 10^{-3} \ \text{m}}{300} = 1{,}884 \ \text{A}$$

697. Podkovovitý elektromagnet rozmerov podľa *obr. 159* má pritiahnuť kotvu, ktorá nesie náklad tiaže $F = 2500$ N zo vzdialenosti $\delta = 1$ cm. Aký prúd I musí tiecť v magnetizačnej cievke s počtom závitov $z = 500$? (Rozmery na *obr. 159* sú v mm.)



Obr. 159

Riešenie:

Zo vzťahu, ktorý sme odvodili v príklade 694 pre nosnú silu

$$F = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot S$$

vyjadríme magnetickú indukciu:

$$B = \sqrt{\frac{2\mu_0 . F}{S}} = \sqrt{\frac{2 . 4\pi . 10^{-7} . 2500}{2 . 80 . 80 . 10^{-6}}}\ \mathrm{Wb . m^{-2}} \doteq 0{,}7\ \mathrm{T}$$

Na dosiahnutie tejto indukcie v železe je potrebná intenzita magnetického poľa (pozri krivku pre železný plech na *obr. 146*)

$$H_ž = 140\ \mathrm{A . m^{-1}}$$

Vo vzduchovej medzere je na dosiahnutie indukcie potrebná intenzita magnetického poľa

$$H_{\mathrm{vzd}} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi . 10^{-7}} \cdot B \doteq 8 . 10^5 . B = 8 . 0{,}7 . 10^5 . \mathrm{A . m^{-1}} = 5{,}6 . 10^5\ \mathrm{A . m^{-1}}$$

Z rovnice prietoku pre náš prípad vyplýva vzťah

$$I . z = H_ž . l_ž + H_{\mathrm{vzd}} . l_{\mathrm{vzd}}$$

pričom dĺžka strednej siločiary vo vzduchu

$$l_{\mathrm{vzd}} = 2 . 10 . 10^{-3}\ \mathrm{m} = 20 . 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

a v železe

$$l_ž = [2 . (190 + 80) + 2 . 230] . 10^{-3}\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}$$

takže

$$I = \frac{H_ž . l_ž + H_{\mathrm{vzd}} . l_{\mathrm{vzd}}}{z} =$$

$$= \frac{140\ \mathrm{A . m^{-1}} . 1\ \mathrm{m} + 5{,}6 . 10^5\ \mathrm{A . m^{-1}} . 20 . 10^{-3}\ \mathrm{m}}{500} = 22{,}68\ \mathrm{A}$$

698. Nájdite intenzitu a potenciál magnetického poľa magnetického dipólu s momentom hodnoty M v mieste vzdialenom od dipólu r *(obr. 160)*!

Riešenie:

Potenciál magnetického poľa magnetického dipólu možno určiť analogicky, ako sme postupovali pri výpočte potenciálu elektrického poľa elektrického dipólu (viď príklad 512). Daný je vzťahom

$$\varphi = \frac{M \cos \alpha}{4\pi\mu_0 r^2}$$

Pre hodnoty zložiek H_r a H_α intenzity magnetického poľa $\boldsymbol{H}$ možno na základe súvisu medzi intenzitou a potenciálom $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\ \varphi$ písať

$$H_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2M \cos \alpha}{4\pi \mu_0 r^3} = \frac{M \cos \alpha}{2\pi \mu_0 r^3}$$

$$H_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \varphi}{r\, \partial \alpha} = \frac{M \sin \alpha}{4\pi \mu_0 r^3}$$

Pre hodnotu výslednej intenzity magnetického poľa H potom platí

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_\alpha^2} = -\frac{M}{4\pi \mu_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}$$

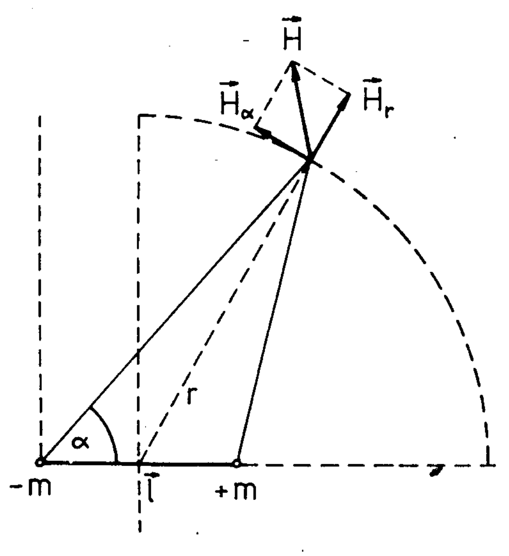
Úlohu magnetického dipólu pomerne dobre spĺňa magnet, ktorého rozmery sú malé v porovnaní so vzdialenosťami, v ktorých magnetické pole magnetu určujeme. Pri magnetických meraniach sú zaujímavé najmä dve miesta, v ktorých magnetické pole určujeme, a to:

a) *prvá Gaussova poloha*, keď $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$:

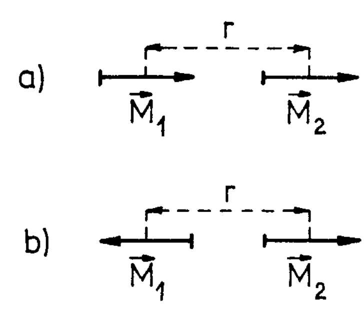
$$H = \frac{M}{2\pi \mu_0 r^3}$$

b) *druhá Gaussova poloha*, keď $\alpha = \frac{\pi}{2}$, resp. $\alpha = \frac{3\pi}{2}$:

$$H = \frac{M}{4\pi \mu_0 r^3}$$



Obr. 160



Obr. 161

699. Dva magnetické dipóly s momentmi $\boldsymbol{M}_1$ a $\boldsymbol{M}_2$ sú vo vzdialenosti r od seba. Nájdite ich potenciálnu energiu, keď momenty majú smer tej istej priamky a sú orientované a) súhlasne, b) navzájom opačne *(obr. 161)*!

Riešenie:

Potenciálna energia dipólu s magnetickým momentom $\boldsymbol{M}_1$ v magnetickom poli dipólu s momentom $\boldsymbol{M}_2$ je

$$W_m = -\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2$$

Keďže v tomto prípade sa (viď príklad 698)

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\boldsymbol{M}_2}{2\pi\mu_0 r^3}$$

potom

a) $W_m = -\dfrac{\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2}{2\pi\mu_0 r^3} = -\dfrac{M_1 M_2}{2\pi\mu_0 r^3}$

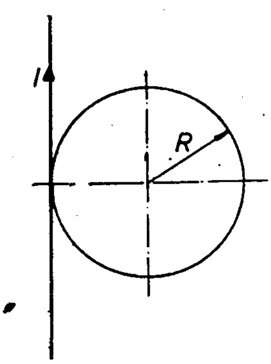
b) $W_m = \dfrac{\boldsymbol{M}_1 \cdot \boldsymbol{M}_2}{2\pi\mu_0 r^3} = \dfrac{M_1 M_2}{2\pi\mu_0 r^3}$

Je zrejmé, že prípad a) odpovedá minimu energie a prípad b) maximu energie.

Úlohy

700. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 10$ A, vytvára v určitom mieste kruhový závit s polomerom $R = 4{,}28$ cm, ležiaci v rovine preloženej prúdovodičom *(obr. 162)*. Vypočítajte indukciu magnetického poľa v strede uvedeného závitu!

$$\left[B = \frac{\mu_0 I(\pi - 1)}{2\pi R} = 10^{-4}\ \text{T}\right]$$



Obr. 162

701. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 10$ A, vytvára v určitom mieste kruhový závit s polomerom $R = 4{,}28$ cm, ležiaci tak, že normála na rovinu závitu je rovnobežná s priamou časťou vodiča *(obr. 162)* s tým rozdielom, že kruhová časť vodiča je otočená okolo vodorovnej osi o 90°. Vypočítajte smer a veľkosť indukcie magnetického poľa v strede uvedeného závitu!

[cotg $\alpha = \pi$, $\alpha = 17° \, 40'$, kde α je uhol medzi rovinou kruhového závitu a $\boldsymbol{B}$;

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sqrt{1 + \pi^2} = 1{,}54 \, . \, 10^{-4}$ T]

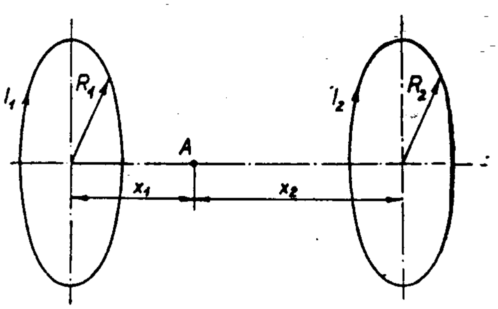
702. Vypočítajte indukciu magnetického poľa budeného dvoma priamymi, nekonečne dlhými rovnobežnými vodičmi, vzdialenými od seba $a = 10$ cm, ktorými prechádza rovnaký prúd $I = 2$ A v tom istom smere, vo vzdialenosti $a_1 = 4$ cm od prvého, na spoločnej kolmej spojnici oboch vodičov!

[$B = 3{,}333 \, . \, 10^{-6}$ T]

703. Vypočítajte intenzitu magnetického poľa vyvolaného úsekom priameho vodiča, ktorým preteká prúd $I = 10$ A, a to v bode nachádzajúcom sa vo vzdialenosti 5 cm kolmo od stredu tohto úseku vodiča! Dĺžka vodiča je taká, že ju vidieť z bodu, v ktorom intenzitu magnetického poľa počítame pod zorným uhlom 60°. Prostredie okolo vodiča je vákuum.

[$H = 15{,}9$ A . m^{-1}; smer kolmý na rovinu preloženú uvažovaným bodom a vodičom]

704. Dvoma vodičmi kruhového tvaru s polomermi $R_1 = 10$ cm, $R_2 = 15$ cm preteká prúd $I_1 = 2$ A, $I_2 = 5$ A, takže vo svojom okolí budia magnetické pole.



Obr. 163

Vypočítajte intenzitu magnetického poľa v bode A na osi týchto kruhových vodičov *(obr. 163)*, keď $x_1 = 5$ cm, $x_2 = 10$ cm!

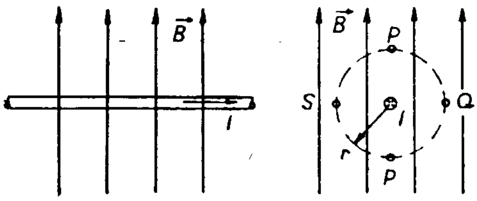
[$H = 2{,}44$ A . m^{-1}]

705. Aká je veľkosť intenzity magnetického poľa, z ktorého je vodič dĺžky $l = 50$ cm, ktorým preteká prúd $I = 10$ A, postavený kolmo na indukčné čiary, vytláčaný silou $F = 1$ N?

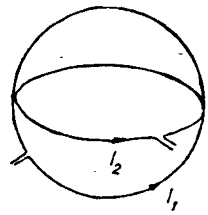
[$H = 159{,}3 \, . \, 10^3$ A . m^{-1}]

706. Dlhý priamy vodič, ktorým tečie prúd $I = 100$ A, sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 20.10^{-4}$ T, podľa *obr. 164.* Aká je indukcia výsledného magnetického poľa v bodoch P, Q, R, S, ktoré ležia na kružnici s polomerom $r = 1$ cm, obklopujúcej priamy vodič?

[$B_Q = 0$; $B_S = 40.10^{-4}$ T; $B_P = B_R = \sqrt{2}.B = 28{,}3.10^{-4}$ T]



Obr. 164



Obr. 165

707. Dva kruhové vodiče, každý z nich s polomerom 5 cm, sú upevnené tak, že majú spoločný stred a ich roviny zvierajú pravý uhol *(obr. 165).* Vypočítajte smer a veľkosť intenzity magnetického poľa v strede závitov, keď prúdy pretekajúce vodičmi sú $I_1 = 3$ A a $I_2 = 4$ A!

[tg $\alpha = I_2/I_1 = 1{,}33$, $\alpha = 54° 20'$, keď α je uhol medzi rovinou kruhového závitu, ktorým preteká prúd I_2 a $\boldsymbol{H}$; $H = 50$ A.m^{-1}]

708. Na obvode kotúča s polomerom 10 cm je rovnomerne rozložený náboj 10^{-8} C. Kotúč sa otáča okolo osi prechádzajúcej jej stredom frekvenciou 100 s^{-1}. Vypočítajte veľkosť intenzity magnetického poľa v strede kotúča!

[$H = 5.10^{-8}$ A.m^{-1}]

709. Dva veľmi dlhé priame paralelné vodiče sú od seba vzdialené $d = 10$ cm. Prúdy tečúce vodičmi, $I_1 = 10$ A a $I_2 = 20$ A, majú rovnaký smer. Vypočítajte veľkosť a smer intenzity magnetického poľa v rovine vodičov, a to v strede medzi vodičmi!

[$H = 63{,}69$ A.m^{-1}; smer $\boldsymbol{H}$ je kolmý na rovinu preloženú vodičmi]

710. Magnetka, ktorá sa môže voľne otáčať v horizontálnej rovine, sa nachádza súčasne v magnetickom poli Zeme s horizontálnou zložkou intenzity H_z a v magnetickom poli s intenzitou H, ktorá spadá do horizontálnej roviny a je kolmá na H_z. Vypočítajte uhol, ktorý bude magnetka v ustálenej polohe zvierať so smerom H_z, keď $H/H_z = \sqrt{3}$!

[$\alpha = 30°$]

711. Akú hodnotu má prúd tečúci dlhým priamym vodičom, keď vo vzdialenosti 20 cm od jeho osi sa vo vákuu zistila indukcia $B = 15.10^{-4}$ T?

[$I = 1500$ A]

712. Tenkou cievkou so $z = 3000$ závitmi, s priemerom $d = 5$ cm a dĺžkou $l = 20$ cm preteká prúd $I = 20$ A. Aká je energia magnetického poľa budeného prúdom v cievke?

[$W_m = 22{,}2$ J]

713. Určite magnetickú indukciu v strede solenoidu, ktorý má celkový počet závitov $z = 20$, dĺžku $l = 10$ cm a prechádza ním prúd $I = 5$ A! Aký je celkový indukčný tok pretekajúci závitmi solenoidu, keď prierez solenoidu $S = 6$ cm^2?

[$B = 1112{,}068.10^{-6}$ T; $\Phi = 6{,}672.10^{-7}$ Wb]

714. Akou silou sa priťahujú dva rovnobežné vodiče, z ktorých jeden je veľmi dlhý a preteká cezeň prúd $I_1 = 250$ A a druhý má dĺžku $s = 20$ cm a preteká ním prúd $I_2 = 300$ A, keď vzájomná vzdialenosť oboch vodičov $a = 1$ cm a vodiče sú vo vákuu?

[$F = 0{,}3$ N]

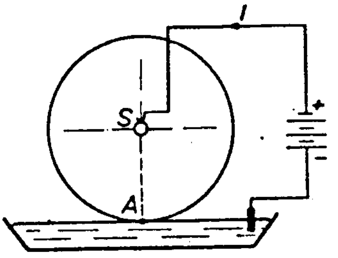
715. Priamy vodič dĺžky 10 cm, cez ktorý preteká prúd 10 A, je uložený v magnetickom poli s indukciou $B = 1$ T kolmo na smer indukcie. Aká sila pôsobí na tento vodič?

[$F = 1$ N]

716. V homogénnom magnetickom poli s indukciou horizontálneho smeru je kolmo na indukčné čiary uložený v horizontálnom smere vodič tiaže $G = 1$ N.cm^{-1}. Týmto vodičom tečie prúd $I = 1$ A. Akú hodnotu má mať indukcia magnetického poľa, aby uvažovaný vodič nepadal, ale sa vznášal?

$$\left[B = \frac{G}{I} = 100 \text{ T}\right]$$

717. Medený kruhový kotúč s polomerom $R = 10$ cm sa dotýka hladiny ortute, naliatej do nádoby. Ortuť v nádobe a kontakt na osi kotúča sú pripojené na



Obr. 166

batériu akumulátorov *(obr. 166)*. Aký je otáčavý moment síl, pôsobiacich na kotúč, keď sa nachádza v homogénnom magnetickom poli kolmom na rovinu kotúča s indukciou $B = 0,2$ T a keď vytvoreným elektrickým obvodom tečie prúd $I = 1$ A? Akým smerom sa bude kotúč otáčať, keď magnetická indukcia smeruje za rovinu obrázka?

$\left| D = \frac{IBR^2}{2} = 0,01 \text{ N.m} \right.$; kotúč sa bude otáčať v smere proti pohybu hodinových ručičiek $\Big|$

718. Elektromotor s výkonom 10 kW má v každom okamihu $z = 200$ vodičov (dĺžka každého vodiča je 40 cm) v magnetickom poli statora s indukciou $B = 0,6$ T. Rotor, na ktorom sú vodiče umiestené, koná $f = 1450$ otáčok za minútu a jeho priemer je $d = 40$ cm. Aký veľký musí byť za týchto okolností prúd vo vodičoch, aby mal elektromotor uvedený výkon?

[$I = 7,125$ A]

719. V homogénnom magnetickom poli indukcie $B = 2$ T sa pohybuje rýchlosťou $v = 10 \text{ m.s}^{-1}$ kolmo na indukčné čiary vodič s ohmickým odporom $R_v = 0,1\ \Omega$ a dĺžkou $l = 30$ cm. Konce vodiča sú pripojené na odpor $R = 0,4\ \Omega$. Vypočítajte, aký výkon je potrebný na pohyb vodiča!

[$P = 72$ W]

720. Magnetická indukcia homogénneho magnetického poľa je 15 T. Určite tok indukčných čiar cez plochu 1 dm^2, ktorej normála zviera so smerom indukcie magnetického poľa uhol $\alpha = 30°$!

[$\Phi = 0,130$ Wb]

721. Na liatinovom prstenci s vnútorným priemerom $d_1 = 30$ cm, vonkajším priemerom $d_2 = 40$ cm, obdĺžnikového prierezu $S = 30 \text{ cm}^2$ je navinutá cievka so $z = 500$ závitmi. Aký veľký je magnetický indukčný tok v prstenci, keď cievkou preteká prúd $I = 1$ A?

[$\Phi = 11,1 \,.\, 10^{-4}$ Wb]

722. Určite tok magnetických indukčných čiar v železe prierezu $S = 4 \text{ cm}^2$, ktorého relatívna permeabilita $\mu_r = 5000$, keď intenzita magnetického poľa $H = 15\,916 \text{ A.m}^{-1}$!

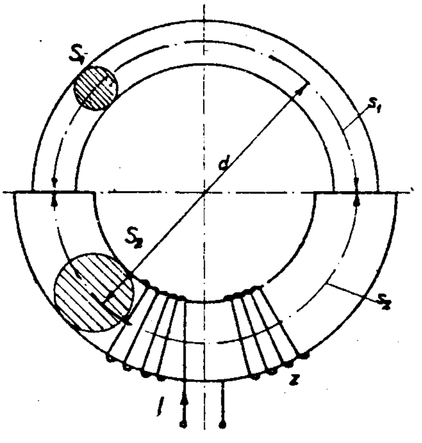
[$\Phi = 4 \,.\, 10^{-2}$ Wb]

723. Aká veľká je energia homogénneho magnetického poľa magnetickej indukcie $B = 10$ T, keď sa toto pole vytvorilo vo vzduchovej medzere rozmerov

$0{,}2\ \mathrm{m} \times 0{,}2\ \mathrm{m} \times 0{,}01\ \mathrm{m}$?

[$A = 15{,}93 \,.\, 10^3$ J]

724. Kruhový magnetický obvod z ocele navrhli pre magnetický tok $\Phi = 1{,}5 \,.\, 10^{-3}$ Wb z dvoch častí odlišného prierezu, a to $S_1 = 1{,}25 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$ a $S_2 = 1{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$. Magnetický obvod má tvar podľa *obr. 167*. Na krúžku priemeru



Obr. 167

0,318 m je navinutá cievka s počtom závitov $z = 200$. Aký prúd I musí cievkou pretekať, aby sa vytvoril žiadaný indukčný tok Φ, keď materiál je oceľoliatina?

[$I = 2{,}575$ A]

725. Na oceľovom jadre tvaru anuloidu s dĺžkou strednej siločiary $s = 0{,}628$ m a so stálym prierezom $S = 0{,}0012\ \mathrm{m}^2$ je navinutých $z = 100$ závitov. Aký veľký je magnetizačný prúd I potrebný na vytvorenie magnetického indukčného toku $\Phi = 1{,}4 \,.\, 10^{-3}$ Wb?

[$I = 2{,}512$ A]

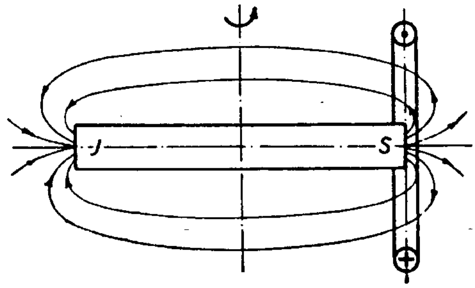
726. Na oceľovom jadre so stálym prierezom, s dĺžkou strednej siločiary $s = 0{,}625$ m a so vzduchovou medzerou $\delta = 0{,}003$ m je navinutých $z = 100$ závitov. Určite prúd I potrebný na vytvorenie magnetickej indukcie $B = 1$ T!

[$I = 26{,}5$ A]

727. V homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}2$ T sa v rovine kolmej na $\boldsymbol{B}$ rovnomerne otáča vodivá tyč dĺžky $l = 10$ cm. Os otáčania je kolmá na tyč a prechádza koncovým bodom tyče. Vypočítajte frekvenciu otáčania tyče, keď sa v nej indukuje EMN hodnoty $U_i = 0{,}628$ V!

$$\left[f = \frac{U_i}{\pi B l^2} = 10^2\ \mathrm{s}^{-1}\right]$$

728. Tyčový magnet s indukčným tokom $\Phi = 0{,}0015$ Wb cez svoj koncový prierez sa otáča podľa *obr. 168* okolo zvislej osi tak, že indukčný tok pretína cievku



Obr. 168

s počtom závitov $z = 10\,000$. Jednu polovicu otáčky vykoná magnet za čas $t = 0{,}02$ s. Nájdite strednú hodnotu elektromotorického napätia indukovaného v cievke!

[$U_i = 1500$ V]

729. Elektromagnet s počtom závitov $z = 1000$ sa napája prúdom $I = 0{,}5$ A, odpor jeho vinutia $R = 10\ \Omega$, magnetická indukcia v železnom jadre $B = 1{,}2$ T, prierez tohto jadra $S = 100\ \text{cm}^2$. Aké samoindukčné elektromotorické napätie vznikne, keď sa prúd preruší na 0,01 sekundy?

[$U_i = 1200$ V]

730. Nájdite samoindukčné EMN v cievke s indukčnosťou $L = 0{,}06$ H, keď v nej prúd rovnomerne rastie tak, že za každú sekundu sa prúd zmení o 11 000 A!

[$U_L = 660$ V]

731. Kruhový vodič s polomerom R je (v pokoji) v magnetickom poli v polohe kolmej na indukčné čiary. Indukcia B magnetického poľa sa s časom lineárne zmenšuje. V čase $t = 0$ indukcia $B = B_0$, v čase $t = t_1$ sa $B = 0$. Aké EMN sa indukuje vo vodiči?

$$\left[U_i = \frac{\pi \,.\, R^2 \,.\, B_0}{t_1}\right]$$

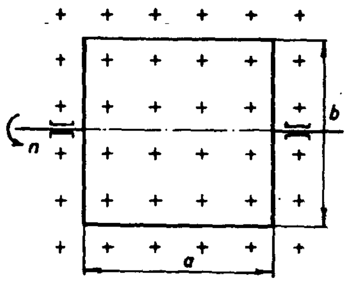
732. Vodič dĺžky 30 cm sa pohybuje kolmo na smer homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 0{,}55$ T rýchlosťou $v = 8\ \text{m}\,.\,\text{s}^{-1}$. Aké elektromotorické napätie sa indukuje vo vodiči?

[$U_i = 1{,}32$ V]

733. Uzavretý obdĺžnikový závit z medeného drôtu s prierezom $S = 5\ \text{mm}^2$ a rozmermi $a \times b = 20\ \text{cm} \times 30\ \text{cm}$ sa nachádza v homogénnom magnetickom poli vzduchovej medzery elektromagnetu. Aký prúd bude prechádzať závitom, keď ho vytiahneme z magnetického poľa rýchlosťou $v = 20$ m.s^{-1} kolmo na pole $B = 0,5$ T tak, že vektor rýchlosti je v smere strany a?

[$I = 883,3$ A]

734. Aké stredné elektromotorické napätie sa indukuje za pol otáčky obdĺžnikového závitu s rozmermi $a = 25$ cm, $b = 30$ cm okolo osi vedenej stredmi



Obr. 169

dlhších strán kolmo na magnetické pole *(obr. 169)*, keď sa závit otáča frekvenciou $f = 1200$ min^{-1} v magnetickom poli intenzity $H = 47,3 . 10^4$ A.m^{-1}?

[$U_i = 3,6$ V]

735. Dva priame veľmi dlhé rovnobežné vodiče sa nachádzajú v určitej vzdialenosti od seba. Vodičmi pretekajú prúdy $I_1 = 40$ A a $I_2 = 30$ A v rovnakých smeroch. Na zväčšenie vzájomnej vzdialenosti vodičov na trojnásobok treba vykonať určitú prácu. Vypočítajte časť tejto práce, ktorá pripadá na jednotkovú dĺžku vodiča!

[$A = 26,3 . 10^{-5}$ J.m^{-1}]

736. Aká veľká sila drží kotvu na póloch podkovovitého elektromagnetu, ktorého jeden pól má plošný obsah $S = 0,01$ m^2, keď magnetická indukcia v medzere medzi kotvou a pólmi $B = 1,2$ T?

[$F = 11\ 459$ N]

737. Odvoďte vzorec pre indukčnosť prstencovej cievky so železným jadrom obdĺžnikového prierezu, tvaru ako na *obr. 155*, s jedným vinutím s počtom závitov z!

$$\left[L = \frac{\mu_0 . \mu_r}{2\pi} z^2 . h . \ln \frac{r_2}{r_1}\right]$$

738. Vzájomná indukčnosť dvoch cievok je $L_{mn} = 10$ mH. V prvej cievke sa prúd mení podľa vzťahu $I = I_0 \sin \omega t$, pričom $I_0 = 20$ A a $T = 0,02$ s. Určite:

a) závislosť od času toho EMN, ktoré sa indukuje v druhej cievke,

b) vrcholovú hodnotu tohto EMN!

[$U_i = 62{,}8 \cos 100\,\pi t$; $U_0 = 62{,}8$ V]

739. Magnetický dipól, ktorého moment má hodnotu $M = 1{,}257 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg \,.\, s^{-2} \,.\, A^{-1}}$, sa môže voľne otáčať v homogénnom magnetickom poli s intenzitou hodnoty $H = 1000\ \mathrm{A \,.\, m^{-1}}$ okolo osi kolmej na smer intenzity poľa. Akú maximálnu hodnotu môže dosiahnuť otáčavý moment dvojice síl, ktorou magnetické pole na dipól pôsobí, a aká je minimálna hodnota potenciálnej energie, ktorou sa môže dipól v tomto magnetickom poli vyznačovať?

[$D = 1{,}257 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{N \,.\, m}$; $W_m = -1{,}257 \,.\, 10^{-8}$ J]

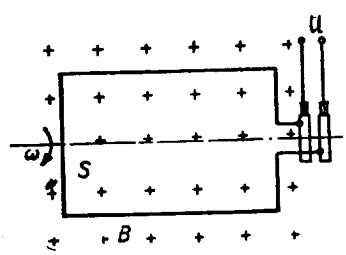
740. Aká je potenciálna energia dvoch rovnakých magnetických dipólov s momentom hodnoty $M = 1{,}5 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \,.\, kg \,.\, s^{-2} \,.\, A^{-1}}$, keď sú vzájomne vzdialené $r = 0{,}01$ m a keď ich magnetické momenty spadajúce do dvoch rovnobežných priamok sú orientované a) paralelne, b) antiparalelne?

[$W_{\uparrow\uparrow} \doteq -0{,}6 \,.\, 10^8$ eV; $W_{\uparrow\downarrow} = 0{,}6 \,.\, 10^8$ eV]

15 PREMENNÉ PRÚDY ELEKTROMAGNETICKÉ KMITY A VLNY

Úvod

a) Vznik striedavého indukovaného elektromotorického napätia (EMN) si obyčajne vysvetľujeme na jednoduchom zariadení, v ktorom má vodič tvar obdĺžnika plošného obsahu S a otáča sa konštantnou uhlovou rýchlosťou ω v magnetickom poli s indukciou $\boldsymbol{B}$ okolo osi spájajúcej stredy protiľahlých strán *(obr. 170)*. Pritom rotačná os je kolmá na smer magnetickej indukcie $\boldsymbol{B}$ aj na os cievky.



Obr. 170

Pre okamžitú hodnotu *striedavého elektromotorického napätia* U, indukovaného v takomto obdĺžnikovom ráme, platí vzťah

$$U = U_0 \,.\, \sin \omega t$$

kde ω je uhlová rýchlosť rotujúceho rámu (súčasne aj kruhová frekvencia indukovaného EMN) a U_0 maximálna hodnota EMN. Táto je daná vzťahom

$$U_0 = \Phi . \omega$$

kde Φ značí maximálnu hodnotu magnetického indukčného toku prechádzajúceho plochou rámu, teda $\Phi = B . S$.

b) Okamžitá hodnota prúdu I, vyvolaného vo vodiči striedavým elektromotorickým napätím, je daná vzťahom

$$I = I_0 . \sin (\omega t - \varphi)$$

kde φ je *fázové posunutie* medzi napätím a prúdom, ktoré závisí od druhu spotrebiča (záťaže).

c) *Výkon P striedavého harmonického prúdu* je daný vzťahom

$$P = U . I . \cos \varphi$$

kde U je efektívna hodnota napätia na koncoch vodiča, I efektívna hodnota prúdu prechádzajúceho vodičom a cos φ *účinník spotrebiča*, t. j. kosínus fázového posunutia medzi napätím a prúdom.

d) *Efektívnu hodnotu napätia* U, resp. prúdu I vypočítame z ich maximálnych hodnôt U_0, resp. I_0 podľa vzťahu

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

e) *Združené napätie* U_z trojfázového prúdu vypočítame z fázového napätia U_f pri *zapojení do hviezdy* podľa vzťahu

$$U_z = U_f \sqrt{3}$$

Príslušné hodnoty prúdu spĺňajú pri tomto zapojení vzťah

$$I_z = I_f$$

Naproti tomu pri *zapojení do trojuholníka* platia vzťahy

$$U_z = U_f; \quad I_z = I_f . \sqrt{3}$$

f) Pre *výkon trojfázového prúdu* bez ohľadu na spôsob zapojenia spotrebiča platí vzťah

$$P = \sqrt{3} . U_z . I_z . \cos \varphi$$

kde U_z, I_z sú združené hodnoty napätia a prúdu (ich efektívne hodnoty) a cos φ je účinník spotrebiča.

g) Pretože okamžitú hodnotu elektromotorického napätia

$$U = U_0 . \sin \omega t$$

môžeme nahradiť komplexným výrazom

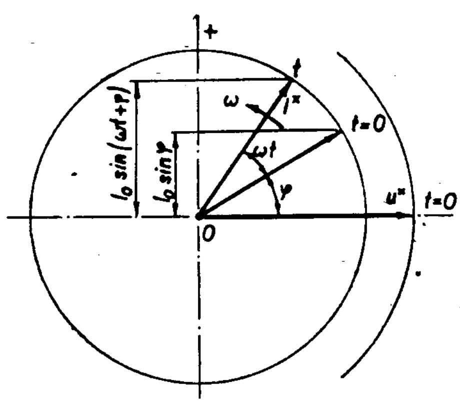
$$U^* = U_0 . \cos \omega t + \mathrm{i} . U_0 . \sin \omega t$$

a zobraziť ju v komplexnej rovine, okamžitú hodnotu EMN možno zobraziť ako *rotujúci vektor.* To platí o všetkých harmonicky sa meniacich veličinách, a to bez ohľadu na to, či sa menia podľa sin ωt alebo cos ωt. Z týchto úvah sa vyvinulo grafické znázorňovanie harmonicky sa meniacich veličín, ktorých dôležitejšie pravidlá si ozrejmíme v tomto prípade:

Majme striedavý prúd

$$I = I_0 . \sin (\omega t + \varphi)$$

Možno ho znázorniť vektorom, ktorý má konštantnú absolútnu hodnotu I_0, v čase $t = 0$ má vzhľadom na vodorovnú os sklon pod uhlom φ (fázové posunutie) a rotuje uhlovou rýchlosťou ω okolo osi prechádzajúcej začiatkom O kolmo na nákresňu, pričom za kladný smer považujeme smer proti pohybu hodinových ručičiek. Okamžitá hodnota prúdu v určitom časovom okamihu sa potom rovná kolmému priemetu tohto vektora na zvislú os *(obr. 171).*



Obr. 171

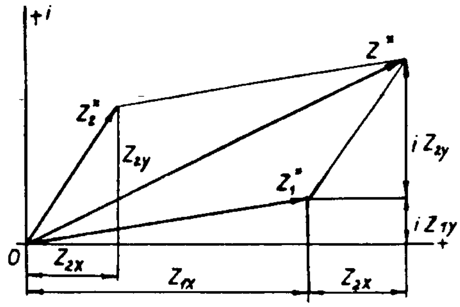
Okamžitá hodnota napätia

$$U = U_0 . \sin \omega t$$

sa zobrazí v čase $t = 0$ ako vektor konštantnej veľkosti $\boldsymbol{u}_0$ v smere vodorovnej osi. Aj vektor $\boldsymbol{u}^*$ rotuje uhlovou rýchlosťou ω, pričom $\boldsymbol{I}^*$ zachováva vzhľadom na $\boldsymbol{u}^*$ stály fázový posun φ.

Pretože komplexné výrazy sčítame tak, že osobitne sčítame ich reálne a osobitne ich imaginárne zložky, výsledný komplexný výraz má reálnu časť zloženú z reálnych častí zložiek a imaginárnu časť z imaginárnych častí zložiek. Preto *výsledný vektor* $\boldsymbol{Z}^*$ *z dvoch rotujúcich vektorov* $\boldsymbol{Z}_1^*$ a $\boldsymbol{Z}_2^*$ dostaneme v určitom okamihu bežným sčítaním oboch vektorov *(obr. 172)*:

$$\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z}_1^* + \boldsymbol{Z}_2^* = Z_{1x} + \mathrm{i}\,.\,Z_{1y} + Z_{2x} + \mathrm{i}\,.\,Z_{2y} = (Z_{1x} + Z_{2x}) + \mathrm{i}(Z_{1y} + Z_{2y})$$



Obr. 172

h) Keď striedavé napätie

$$U = U_0 . \sin \omega t$$

je vnútené sériovému okruhu s ohmickým odporom R, indukčnosťou L a kapacitou C, okruhom preteká prúd s maximálnou hodnotou

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

pričom prúd je vzhľadom na napätie fázovo oneskorený o fázový uhol φ, ktorý vyplýva zo vzťahu

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Okamžitá hodnota prúdu tečúceho takýmto okruhom je daná vzťahom

$$I = I_0 . \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_0}{Z} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Veličina

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

sa nazýva *impedancia* (zdanlivý odpor).

Keď je v okruhu iba ohmický odpor $R(L=0,\ C \to \infty)$, potom

$$Z=R\,; \quad \varphi=0^\circ\,; \quad I=\frac{U_0}{R}\cdot\sin\omega t$$

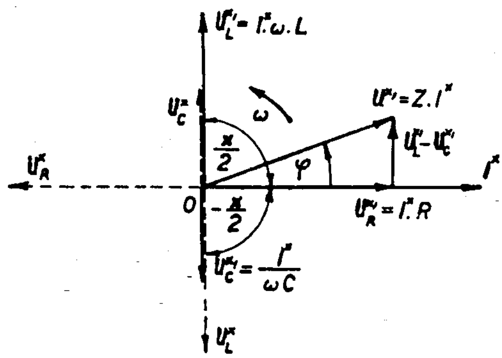
Keď je v okruhu iba indukčnosť $L(R=0,\ C\to\infty)$, potom

$$Z=\omega L\,; \quad \varphi=90^\circ\,; \quad I=\frac{U_0}{\omega L}\cdot\sin\,(\omega t-\varphi)$$

Keď je v okruhu iba kapacita $C(R=0,\ L=0)$, potom

$$Z=\frac{1}{\omega C}\,; \quad \varphi=-90^\circ\,; \quad I=U_0\,.\,\omega C\,.\sin\,(\omega t+\varphi)$$

Na *obr. 173* sú graficky znázornené vektory napätia (úbytky) na R, L, C, teda U_R^*, U_L^*, U_C^* (čiarkované), aj vektory svorkových napätí $U_R^{*\prime}$, $U_L^{*\prime}$, $U_C^{*\prime}$ spotrebovaných na premáhanie uvedených napätí (plné čiary).



Obr. 173

Potom impedancia okruhu a tangens výsledného fázového posunu spĺňajú vzťahy (pozri naznačený trojuholník na *obr. 173*)

$$Z^2\,.\,I^2=I^2\,.\,R^2+I^2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{I\,.\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{I\,.\,R}=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

i) Keď okruhom pozostávajúcim z cievky s indukčnosťou L, z kondenzátora s kapacitou C a ohmického odporu R, zapojenými do série, preteká prúd takej kruhovej frekvencie ω_r, pri ktorej

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{1}$$

hovoríme, že v sériovom okruhu dochádza k *rezonancii*, a ω_r nazývame *rezonančnou kruhovou frekvenciou*. Prúd v sériovom obvode je pri rezonancii maximálny a je daný vzťahom

$$I_r = \frac{U}{R}$$

Odpor celého okruhu sa rovná ohmickému odporu okruhu.

j) Medzi prúdmi, napätiami a počtom závitov *primárneho vinutia* I_1, U_1, z_1 a *sekundárneho vinutia* I_2, U_2, z_2 v transformátoroch platia vzťahy

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

k) Zariadenia, v ktorých dochádza k periodickej zmene elektrického prúdu, ako aj k periodickej premene elektrického poľa na pole magnetické a naopak, nazývame *elektromagnetické oscilátory* alebo *oscilačné okruhy*. Periodické procesy, ktoré sa v nich realizujú, označujeme ako *elektromagnetické kmity*. Pre periódu T elektromagnetických kmitov v oscilačnom okruhu, zloženom z ohmického odporu R, cievky indukčnosti L a kondenzátora kapacity C, platí vzťah

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{CL} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$$

Ak ohmický odpor okruhu je natoľko malý, že

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}$$

periódu kmitov možno počítať podľa vzťahu

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Keď sa ohmický odpor nerovná nule, kmity budú tlmené. Pritom napätie na doskách kondenzátora sa mení s časom podľa vzťahu

$$U = U_0 e^{-bt} \cos \omega t$$

kde sa čas počíta od okamihu najväčšieho napätia na doskách. Pritom

$$b = \frac{R}{2L}$$

nazývame *koeficientom útlmu* a $\delta = bT$ *logaritmickým dekrementom útlmu*.

l) Štyri *Maxwellove rovnice*, ktoré v diferenciálnom tvare vyjadrujú vlastnosti štyroch vektorov $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, charakterizujúcich elektrické a magnetické polia, majú takýto tvar

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho\,; \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,; \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Doplňajú ich rovnice

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E}\,; \quad \boldsymbol{B} = \mu_r \mu_0 \boldsymbol{H}\,; \quad \boldsymbol{i} = \gamma \boldsymbol{E}$$

Z 3. a 4. Maxwellovej rovnice vyplýva záver, že magnetické pole meniace sa s časom je súčasne aj elektrickým poľom meniacim sa s časom a naopak. Takéto polia sú vlastne len jedným poľom, ktoré sa nazýva *elektromagnetické pole.* Jeho vlastnosti vyjadrujú uvedené štyri Maxwellove rovnice.

m) Objemovú hustotu energie elektromagnetického poľa vyjadruje vzťah

$$w = \frac{1}{2}\,\varepsilon_r \varepsilon_0 H^2 + \frac{1}{2}\,\mu_r \mu_0 H^2$$

n) Z Maxwellových rovníc bezprostredne vyplýva možnosť existencie *elektromagnetických vĺn.* Na ich opis používame analogické veličiny ako u mechanických vĺn, t. j. vlnovú dĺžku λ, frekvenciu f, periódu T, ktorých súvis s rýchlosťou šírenia vĺn je rovnaký ako u mechanických vĺn:

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

Podobne ako u mechanických vĺn sa stretávame aj u elektromagnetických vĺn s *odrazom, lomom* a *interferenciou.*

V prípade, že rýchlosť pohybu zdroja vlnenia, resp. pozorovateľa sú malé v porovnaní s rýchlosťou svetla vo vákuu, platí pre elektromagnetické vlny *Dopplerov princíp* v rovnakom znení ako pre mechanické vlny. V opačnom prípade treba použiť vzťahy, vyplývajúce zo špeciálnej teórie relativity.

o) Maxwellove rovnice sú invariantné vzhľadom na Lorentzove transformácie, ktoré v špeciálnej teórii relativity umožňujú prechod z jednej inerciálnej sústavy do druhej. V špeciálnom prípade majú Lorentzove transformácie tvar

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \tag{1}$$

Transformácie (1) umožňujú prechod z nečiarkovanej inerciálnej sústavy do čiarkovanej, ktorá sa pohybuje vzhľadom na nečiarkovanú sústavu konštantnou rýchlosťou hodnoty v pozdĺž spoločnej osi x, pričom súradnice y a z obidvoch sústav sú navzájom rovnobežné. Čas t je meraný hodinami, ktoré sú v pokoji v nečiarkovanej sústave a čas t' je meraný hodinami, ktoré sú v pokoji v čiarkovanej sústave.

p) *Poyntingov—Umovov vektor* elektromagnetického vlnenia je daný vzťahom $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$. Pre hybnosť, pripadajúcu na jednotkový objem elektromagnetického poľa, platí vzťah

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{s}}{c^2} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}{c^2}$$

Pre celkovú hybnosť elektromagnetického poľa možno písať

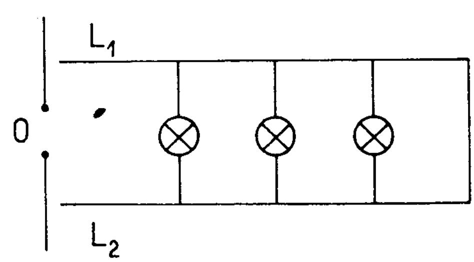
$$\boldsymbol{P} = \int \boldsymbol{p} \, d\tau = \frac{1}{c^2} \int \boldsymbol{s} \, d\tau = \frac{1}{c^2} \int (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \, d\tau$$

r) Elektromagnetické vlnenie, ktoré na nejaké teleso dopadá, pôsobí na toto teleso *tlakom* $\boldsymbol{\Pi}$, pre ktorý platí vzťah

$$\boldsymbol{\Pi} S = -\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

kde S je plošný obsah plochy, na ktorú vlnenie dopadá, a $-d\boldsymbol{P}/dt$ je úbytok hybnosti elektromagnetickej vlny pri jej interakcii s telesom.

s) Elektromagnetické vlny, ktoré sa šíria vzduchom, vákuom alebo iným nevodivým prostredím, označujeme ako voľné vlny. Okrem nich existujú vlny po drôte, ktoré sa šíria pozdĺž drôtov. Možno ich laboratórne demonštrovať pomocou *Lecherových drôtov*, znázornených na *obr. 174*. Zariadenie pozostáva z Hertzovho oscilátora O, v ktorého blízkosti sú umiestené 2 rovnobežné drôty L_1 a L_2, na jednom konci navzájom vodivo spojené. Elektromagnetické kmity, vyrobené oscilátorom O, sa v podobe vĺn šíria pozdĺž obidvoch drôtov, na uzavretom konci Lecherovho systému sa odrážajú, čo má za následok vznik stojatého elektromagnetického vlnenia. Existenciu týchto stojatých vĺn možno dokázať a ich vlnovú dĺžku λ možno zmerať, ak na vhodné miesta medzi drôty pripojíme malé žiarovky.

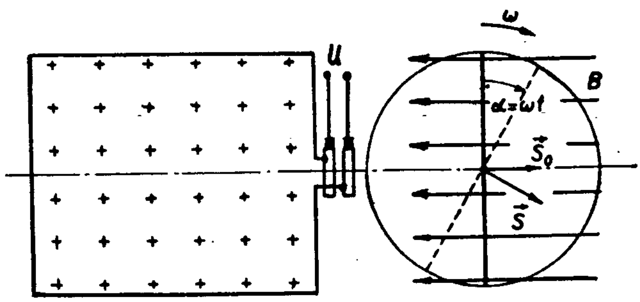


Obr. 174

V miestach uzlov žiarovky nesvietia, v miestach kmitien sa rozsvietia najintenzívnejšie. Vzdialenosť dvoch susedných uzlov alebo dvoch susedných kmitien je $\lambda/2$.

Príklady

741. Drôtený rám ohraničujúci plochu $S = 100\ \text{cm}^2$ sa otáča okolo svojej osi v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}05$ T a koná $f = 300$ otáčok za sekundu *(obr. 175)*. Určite indukované EMN v ráme pri uhloch $\alpha = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360°$!



Obr. 175

Riešenie:

Magnetický indukčný tok, prechádzajúci v určitom okamihu plochou závitu, je daný vzťahom

$$\Phi = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{S} = B \,.\, S \,.\cos \omega t$$

pričom ω je uhlová rýchlosť otáčania rámu.

Podľa indukčného zákona možno však pre indukované EMN písať vzťah

$$U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B \,.\, S \,.\, \omega \,.\sin \omega t$$

Keďže $\omega = 2\pi f$ a $\omega t = \alpha$,

$$U = 2\pi \,.\, f \,.\, B \,.\, S \,.\sin \alpha$$

a po dosadení daných číselných hodnôt dostávame:

$$U = 2\pi \,.\, 300\ \text{s}^{-1} \,.\, 0{,}05\ \text{T} \,.\, 100 \,.\, 10^{-4}\ \text{m}^2 \,.\sin \alpha = 0{,}943\ \text{V} \sin \alpha$$

Keď za α dosadíme uvedené uhly, dostaneme príslušné hodnoty EMN:

$U_0 \;= 0{,}942 \,.\sin 0° = 0$ V
$U_{45} = 0{,}942 \,.\sin 45° = 0{,}667$ V
$U_{90} = 0{,}942 \,.\sin 90° = 0{,}942$ V
$U_{135} = 0{,}942 \,.\sin 135° = 0{,}667$ V
$U_{180} = 0{,}942 \,.\sin 180° = 0$ V
$U_{225} = 0{,}942 \,.\sin 225° = -0{,}667$ V
$U_{270} = 0{,}942 \,.\sin 270° = -0{,}942$ V
$U_{315} = 0{,}942 \,.\sin 315° = -0{,}667$ V
$U_{360} = 0{,}942 \,.\sin 360° = 0$ V

742. V krátkej cievke s plošným obsahom rezu $S = 0{,}5\ \mathrm{m^2}$ a s počtom závitov $z = 60$ sa v sínusovo meniacom magnetickom poli s frekvenciou $f = 10^6\ \mathrm{s^{-1}}$ indukuje elektromotorické napätie maximálnej hodnoty $U_0 = 30\ \mathrm{mV}$. Aká je maximálna hodnota magnetickej indukcie v mieste cievky?

Riešenie:

Pre striedavé EMN indukované v poli s celkovým tokom maximálnej hodnoty Φ_{cm} a pri kruhovej frekvencii ω platí:

$$U = \Phi_{cm} . \omega . \sin \omega t = U_0 . \sin \omega t$$

kde

$$U_0 = \Phi_{cm} . \omega = \Phi_m . z . 2\pi . f$$

je amplitúda tohto striedavého EMN. Pritom maximálna hodnota celkového toku bola vyjadrená pomocou počtu závitov a maximálneho toku pre jeden závit Φ_m:

$$\Phi_{cm} = \Phi_m . z$$

Z rovnice pre amplitúdu striedavého EMN možno vypočítať Φ_m:

$$\Phi_m = \frac{U_0}{2\pi f . z}$$

a ďalej určiť hľadanú maximálnu indukciu podľa vzťahu

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{U_0}{2\pi . f . z . S} = \frac{30 . 10^{-3}\ \mathrm{V}}{2\pi . 10^6\ \mathrm{s^{-1}} . 60 . 0{,}5\ \mathrm{m^2}} =$$

$$= 1{,}59 . 10^{-10}\ \mathrm{T}$$

743. V jadre transformátora vzniká pôsobením elektrického prúdu v primárnom vinutí magnetický indukčný tok maximálnej hodnoty $\Phi_m = 2 . 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$. Aká je efektívna hodnota elektromotorického napätia, ktoré sa indukuje v sekundárnom vinutí so $z = 100$ závitmi, keď indukčný tok sa mení frekvenciou $f = 50\ \mathrm{s^{-1}}$?

Riešenie:

Pre maximálnu hodnotu EMN, ktoré sa indukuje v z závitoch pri frekvencii f a maximálnej hodnote magnetického toku jedným závitom Φ_m, sme v príklade 742 odvodili vzťah

$$U_0 = \Phi_m . z . 2\pi . f$$

Z toho efektívna hodnota EMN

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \frac{\Phi_m . z . 2\pi f}{\sqrt{2}} \doteq 4{,}44 . f . \Phi_m . z = 4{,}44 . 50\ \mathrm{s^{-1}} . 2 . 10^{-3}\ \mathrm{Wb} . 100 = 44{,}4\ \mathrm{V}$$

744. Vypočítajte prácu striedavého prúdu $I = I_0 . \sin \omega t$ vo vodiči s ohmickým odporom R za jednu periódu T!

Riešenie:

Pre výkon jednosmerného prúdu platí:

$$P' = U . I$$

kde U je napätie, I prúd. Pretože pri striedavom prúde sa sínusovo mení prúd aj napätie, okamžitá hodnota výkonu je daná vzťahom

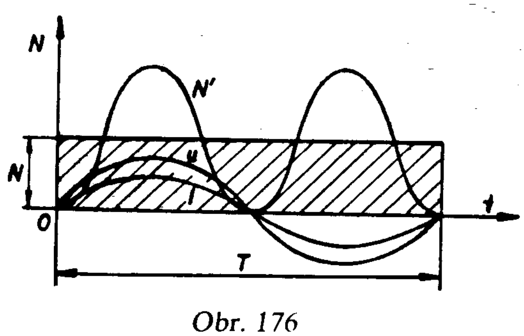
$$P' = U_0 . \sin \omega t . I_0 . \sin \omega t = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = R I_0^2 . \sin^2 \omega t$$

lebo napätie a prúd pri ohmickej záťaži nie sú fázovo posunuté a okrem toho $U_0 = R . I_0$. Priemerný výkon striedavého prúdu P je stredná hodnota menlivého výkonu za jednu periódu, takže vzhľadom na *obr. 176* možno pre P písať:

$$TP = \int_0^T R I_0^2 \sin^2 \omega t . \mathrm{d}t = R I_0^2 \cdot \frac{T}{2}$$

$$P = \frac{R I_0^2}{2} = R \cdot \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = R . I_{ef}^2$$

kde $I_{ef} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ je efektívna hodnota prúdu, kým I_0 je jeho maximálna hodnota.



Obr. 176

Prácu vykonanú za jednu periódu T dostaneme v zmysle definície práce ako súčin priemerného výkonu a periódy T, čiže

$$A_T = R . I_{ef}^2 . T$$

745. Zvončekový transformátor dodáva prúd $I_2 = 200$ mA pri napätí $U_2 = 4$ V. Aký je prúd I_1 v primárnom vinutí, keď je naň pripojené napätie $U_1 = 220$ V a keď zanedbávame prípadné straty?

Riešenie:

Keď neberieme do úvahy straty, práca prúdu v primárnom a v sekundárnom vinutí za ten istý čas t je rovnaká, teda

$$U_1 . I_1 . t = U_2 . I_2 . t$$

Z toho

$$I_1 = I_2 \frac{U_2}{U_1} = 200 . 10^{-3}\ \text{A}\ \frac{4\ \text{V}}{220\ \text{V}} = \frac{0,8}{220}\ \text{A} = 0,0036\ \text{A}$$

746. Aký prúd potrebuje elektromotor na striedavý prúd výkonu $P = 2,2$ kW pri napätí $U = 220$ V, keď účinník $\cos\varphi = 0,88$ a účinnosť elektromotora $\eta = 0,89$?

Riešenie:

Pre príkon striedavého prúdu platí vzťah

$$P_p = UI \cos\varphi$$

takže pre účinnosť možno písať

$$\eta = \frac{P_v}{P_p}$$

kde P_v je výkon stroja, P_p príkon.

Pre hľadaný prúd potom vyplýva vzťah

$$I = \frac{P_v}{\eta U \cos\varphi} = \frac{2200\ \text{W}}{0,89 . 220\ \text{V} . 0,88} = 12,77\ \text{A}$$

747. Kondenzátor kapacity C má v čase $t = 0$ potenciál V_0. Vybíjame ho cez odpor R. Aký je časový priebeh prúdu?

Riešenie:

Pre vyznačený okruh napíšeme druhý Kirchhoffov zákon, pričom jediným zdrojom napätia je kondenzátor kapacity C, nabitý nábojom Q. Ohmický úbytok napätia nastane na odpore R prechodom prúdu I. Preto

$$U_C = I . R$$

čiže

$$\frac{Q}{C} - I . R = 0$$

Derivovaním tejto rovnice podľa času dostávame:

$$\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{C} - R \cdot \frac{dI}{dt} = 0$$

Keďže Q je náboj na doskách kondenzátora,

$$-\frac{dQ}{dt}=I$$

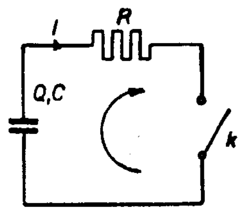
a preto

$$\frac{I}{C}+R\cdot\frac{dI}{dt}=0$$

Riešením tejto diferenciálnej rovnice je výraz

$$I=K\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

kde K je integračná konštanta. Určíme ju na základe podmienky, že na začiatku



Obr. 177

vybíjania kondenzátora, teda po stlačení kľúča *k (obr. 177)*, mal kondenzátor ešte potenciál φ_0, teda pre $t=0$ sa $\frac{Q}{C}=\varphi_0$. Keď to dosadíme do pôvodnej rovnice, dostávame:

$$\varphi_0-I\,.\,R=0$$

$$\varphi_0-R\,.\,K\,.\,e^{-\frac{t}{RC}}=0$$

a pre $t=0$

$$\varphi_0-R\,.\,K=0$$

t. j.

$$K=\frac{\varphi_0}{R}$$

Časový priebeh prúdu v uvedenom okruhu je potom daný vzťahom

$$I=\frac{\varphi_0}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}=I_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

748. Dosky kondenzátora kapacity $C=0{,}1\ \mu F$ sú nabité na určitý potenciálový rozdiel. Za aký čas sa kondenzátor vybije do polovice, keď spojíme dosky vodičom s odporom $R=2\,.\,10^6\ \Omega$?

Riešenie:

Pre tento okruh podobne ako v predošlom príklade platí vzťah

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

Keďže však $I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ (Q značí náboj na elektródach kondenzátora, preto záporné znamienko), možno písať

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR}Q$$

a po úprave

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{CR}\mathrm{d}t$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme:

$$\ln Q = -\frac{1}{CR}t + \ln Q_0$$

Pre časovú závislosť náboja na elektródach kondenzátora vyplýva:

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

kde Q_0 je maximálny náboj, t. j. náboj, ktorý obsahujú elektródy kondenzátora v čase $t = 0$. Pre hľadaný čas t^*, za ktorý sa kondenzátor vybije do polovice, bude sa $Q = \frac{Q_0}{2}$, takže

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\frac{t^*}{CR}}$$

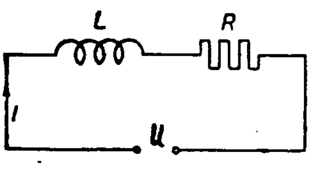
t. j.

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t^*}{CR}}$$

a teda

$$t^* = CR \ln 2 = 0{,}1 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{F} \,.\, 2 \,.\, 10^{6}\ \Omega \,.\, 2{,}3 \log 2 \doteq 0{,}14\ \mathrm{s}$$

749. Ako sa mení s časom prúd I vo vodiči s odporom R a indukčnosťou L, keď ho pripojíme na zdroj stáleho napätia U?



Obr. 178

Riešenie:

Pre okruh naznačený na *obr. 178* použijeme druhý Kirchhoffov zákon, pričom uvážime, že EMN sa indukuje zmenou magnetického toku v cievke podľa zákona

$$U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Teda:

$$U + U_L = RI$$

$$U - L\frac{dI}{dt} = RI$$

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + RI - U = 0$$

Keď poslednú rovnicu derivujeme podľa času, dostávame:

$$L \cdot \frac{d^2I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} = 0$$

Všeobecné riešenie tohto typu diferenciálnej rovnice je

$$I = C_1 . e^{\alpha_1 t} + C_2 . e^{\alpha_2 t}$$

kde C_1, C_2 sú integračné konštanty a α_1, α_2 korene charakteristickej rovnice

$$L\alpha^2 + R\alpha + 0 = 0$$

teda

$$\alpha_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{R}{L} \end{cases}$$

Riešenie má potom tvar

$$I = C_1 + C_2\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Integračné konštanty zistíme z dvoch hraničných podmienok, a to

pre $t = 0$; $I = 0 \ldots 0 = C_1 + C_2$

pre $t = \infty$; $I = \dfrac{U}{R} \ldots \dfrac{U}{R} = C_1 + 0$

Z uvedených dvoch rovníc pre C_1, C_2 vyplýva:

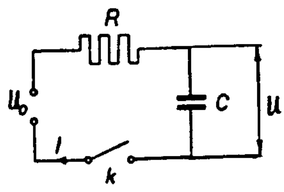
$$C_1 = \frac{U}{R}$$

$$C_2 = -C_1 = -\frac{U}{R}$$

a tak po dosadení konštánt konečný tvar riešenia bude

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

750. Za aký čas od začiatku nabíjania kondenzátora C cez odpor R v zapojení podľa *obr. 179* dosiahne napätie na doskách kondenzátora hodnotu U, keď zapojením kľúča k uložíme na svorky sériového zapojenia odporu a kondenzátora stále napätie U_0?



Obr. 179

Riešenie:

Podľa druhého Kirchhoffovho zákona možno pre uvedený okruh v každom okamihu písať vzťah

$$\frac{Q}{C} + U_0 = IR$$

kde Q je okamžitá hodnota náboja na elektródach kondenzátora. Keďže $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, po úprave dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR} Q - \frac{U_0}{R} \tag{1}$$

Keď zavedieme substitúciu

$$\frac{Q}{CR} + \frac{U_0}{R} = x$$

bude:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{CR} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = CR \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

takže po dosadení do rovnice (1) dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{CR} x$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme:

$$x = k\, e^{-\frac{t}{CR}}$$

t. j.

$$\frac{Q}{CR}+\frac{U_0}{R}=k\ e^{-\frac{t}{CR}}$$

Integračnú konštantu k určíme z podmienky, že v čase $t=0$ platí $Q=0$, takže

$$k=\frac{U_0}{R}$$

Keďže $\frac{Q}{C}=-U$ je okamžité napätie na kondenzátore, ktoré pôsobí proti napätiu U_0, potom

$$-U+U_0=U_0\ e^{-\frac{t}{CR}}$$

t. j.

$$e^{-\frac{t}{CR}}=\frac{U_0-U}{U_0}$$

takže pre hľadaný čas t, v ktorom je na kondenzátore napätie U, platí

$$t=CR\ \ln\frac{U_0}{U_0-U}$$

751. Aký prúd bude prechádzať cez okruh, v ktorom sú do série zapojené: ohmický odpor $R=10\ \Omega$, kondenzátor kapacity $C=2\ \mu F$ a indukčná cievka indukčnosti $L=0{,}1$ H, keď je okruh pripojený na striedavé napätie $U=220$ V s frekvenciou $f=50\ s^{-1}$?

Riešenie:

Zdanlivý odpor okruhu pozostávajúceho z ohmického odporu R, indukčnosti L a kapacity C pri kruhovej frekvencii ω je:

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

a tak podľa Ohmovho zákona prechádzajúci prúd pri $\omega=2\pi.f=2\pi.50\ s^{-1}=$ $=314\ s^{-1}$ bude mať efektívnu hodnotu

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=$$

$$=\frac{220\ V}{\sqrt{10^2\ \Omega^2+\left(314\ s^{-1}.0{,}1\ H-\frac{1}{314\ s^{-1}.2.10^{-6}\ F}\right)^2}}=0{,}1409\ A$$

752. Tlmivkou a kondenzátorom ($C = 10\ \mu F$), ktoré sú spojené za sebou, prechádza prúd $I = 1$ A. Pripojené sú na sieť s napätím $U = 120$ V a frekvenciou $f = 50\ s^{-1}$. Ohmický odpor tlmivky $R = 120\ \Omega$. Vypočítajte indukčnosť tlmivky!

Riešenie:

Zo vzťahu

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

možno vyjadriť hľadanú indukčnosť

$$L = \frac{\sqrt{\frac{U^2}{I^2} - R^2} + \frac{1}{\omega C}}{\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{120^2\ V^2}{1^2\ A^2} - 120^2\ \Omega^2} + \frac{1}{314\ s^{-1} . 10 . 10^{-6}\ F}}{314\ s^{-1}} = 1{,}013\ H$$

753. Aká má byť kapacita kondenzátora, keď sa jeho kapacitný odpor má rovnať $X = 500\ \Omega$ pri prúde s frekvenciou a) $50\ s^{-1}$, b) $50\ 000\ s^{-1}$?

Riešenie:

Kapacitný odpor X vyjadríme pomocou kapacity C a kruhovej frekvencie $\omega = 2\pi f$, t. j.

$$X = \frac{1}{\omega C}$$

a vypočítame hľadanú kapacitu

$$C = \frac{1}{X\omega} = \frac{1}{2\pi f X}$$

Pre jednotlivé frekvencie vychádza potom kapacita takto:

$$C_{50} = \frac{1}{2\pi . 50\ s^{-1} . 500\ \Omega} = 6{,}37 . 10^{-6}\ F = 6{,}37\ \mu F$$

$$C_{50\,000} = \frac{1}{2\pi . 50\ 000\ s^{-1} . 500\ \Omega} = 6{,}37 . 10^{-9}\ F = 0{,}006\ 37\ \mu F$$

754. Kondenzátor kapacity $C = 16\ \mu F$ a ohmický odpor $R = 200\ \Omega$, zapojené do série, sú pripojené na striedavú sieť s napätím $U = 220$ V a frekvenciou $f = 50\ s^{-1}$. Určite impedanciu obvodu, pretekajúci prúd, fázové posunutie medzi napätím a prúdom v obvode, napätie na kondenzátore a napätie na ohmickom odpore!

Riešenie:

Použijeme vzťahy platné pre striedavý okruh s uvedenými prvkami zapojenými do série:

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}=\sqrt{200^2\ \Omega^2+\left(\frac{1}{2\pi\,.\,50\ \mathrm{s}^{-1}\,.\,16\,.\,10^{-6}\ \mathrm{F}}\right)^2}=282{,}1\ \Omega$$

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{220\ \mathrm{V}}{282\ \Omega}=0{,}779\ \mathrm{A}$$

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{200\ \Omega}{282\ \Omega}=0{,}709;\quad \varphi=44°50'$$

$$U_C=\frac{I}{\omega C}=\frac{0{,}78\ \mathrm{A}}{2\pi\,.\,50\ \mathrm{s}^{-1}\,.\,16\,.\,10^{-6}\ \mathrm{F}}=155{,}149\ \mathrm{V}$$

$$U_R=IR=0{,}78\ \mathrm{A}\,.\,200\ \Omega=155{,}973\ \mathrm{V}$$

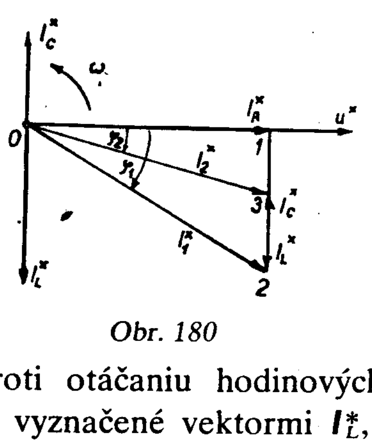
755. Spotrebič s príkonom $P=3\ \mathrm{kW}$ a účinníkom $\cos\varphi_1=0{,}6$ je pripojený na elektrickú sieť s napätím $U=220\ \mathrm{V}$ a frekvenciou $50\ \mathrm{s}^{-1}$.

a) Aký veľký kondenzátor treba pripojiť paralelne k svorkám spotrebiča, aby sme účinník zvýšili na $\cos\varphi_2=0{,}9$?

b) Aký by musel byť kondenzátor, aby nenastalo fázové posunutie, teda aby $\cos\varphi_2=1$?

Riešenie:

Ohmická zložka prúdu prechádzajúceho spotrebičom I_R nemá vzhľadom na napätie U fázové posunutie, a preto ju označujeme vektorom $\boldsymbol{I}_R^*$, spadajúcim do smeru vektora napätia $\boldsymbol{u}^*$ *(obr. 180)*. Keď za kladný smer fázového posunutia



Obr. 180

budeme považovať smer proti otáčaniu hodinových ručičiek, samoindukčná a kapacitná zložka prúdu sú vyznačené vektormi $\boldsymbol{I}_L^*$, $\boldsymbol{I}_C^*$. Výsledný vektor pred pripojením kondenzátora bude $\boldsymbol{I}_1^*$, po pripojení $\boldsymbol{I}_2^*$.

Medzi pôvodnou polohou výsledného vektora prúdu $\overline{12}$ a novou $\overline{13}$ platí vzťah *(obr. 177)*

$$\overline{23}=\overline{12}-\overline{13}$$

teda o veľkostiach vektorov musí platiť:

$$I_C = I_R \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi_1 - I_R \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi_2$$

$$\frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2)$$

a z toho

$$C = \frac{P}{\omega U^2} \cdot (\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2)$$

a) Pretože $\cos\varphi_1 = 0{,}6$ odpovedá $\mathrm{tg}\,\varphi_1 = 1{,}3333$ a pri $\cos\varphi_2 = 0{,}9$ sa $\mathrm{tg}\,\varphi_2 = 0{,}4843$, pre veľkosť kapacity potrebného kondenzátora dostávame:

$$C = \frac{3000\ \mathrm{W}}{2\pi\,.\,50\ \mathrm{s}^{-1}\,.\,220^2\ \mathrm{V}^2} \cdot (1{,}333 - 0{,}4843) = 167{,}592\,.\,10^{-6}\ \mathrm{F}$$

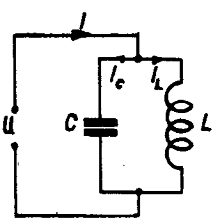
b) Ak chceme fázové posunutie vyrovnať na $\cos\varphi_2 = 1$, dosadíme do odvodeného vzťahu $\mathrm{tg}\,\varphi_2 = 0$, takže potom

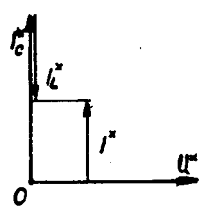
$$C = \frac{N}{\omega U^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{3000\ \mathrm{W}}{2\pi\,.\,50\ \mathrm{s}^{-1}\,.\,220^2\ \mathrm{V}^2} \cdot 1{,}3333 = 263{,}19\,.\,10^{-6}\ \mathrm{F}$$

756. Aký prúd preteká obvodom zloženým z indukčnosti $L = 4$ H a z kapacity $C = 16\ \mu$F, ktoré sú zapojené paralelne a pripojené k zdroju striedavého prúdu s napätím $U = 220$ V a frekvenciou $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$?

Riešenie:

Uvedený obvod je znázornený na *obr. 181a* a jeho vektorový diagram na *obr. 181b*.





Obr. 181a, b

Prúd v cievke sa oneskoruje o 90° za napätím U, kým prúd v kondenzátore predbieha svorkové napätie o 90°. Z vektorového diagramu potom vyplýva veľkosť vektorov

$$I = I_C - I_L$$

Pretože však

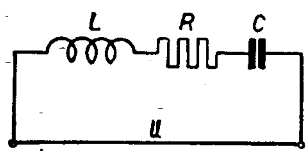
$$I_C = \frac{U}{\dfrac{1}{\omega C}}; \quad I_L = \frac{U}{\omega L}$$

bude:

$$I = U\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) =$$

$$= 220\ \mathrm{V}\left(2\pi . 50\ \mathrm{s}^{-1} . 16 . 10^{-6}\ \mathrm{F} - \frac{1}{2 . \pi . 50\ \mathrm{s}^{-1} . 4\ \mathrm{H}}\right) = 0{,}93\ \mathrm{A}$$

757. Sériový rezonančný obvod, pozostávajúci z cievky s ohmickým odporom $R = 0{,}2\ \Omega$, indukčnosťou $L = 50\ \mu\mathrm{H}$ a z kondenzátora s kapacitou $C = 300\ \mathrm{pF}$, je pripojený na napätie $U = 4\ \mathrm{V}$ *(obr. 182)*. Nájdite rezonančnú frekvenciu, rezonančný prúd a napätie na indukčnosti a kapacite pri rezonancii!



Obr. 182

Riešenie:

Pre rezonančnú frekvenciu platí vzťah

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 . 10^{-6}\ \mathrm{H} . 300 . 10^{-12}\ \mathrm{F}}} = 1{,}299 . 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$$

Pri rezonancii je prechádzajúci prúd taký, aký by bol v okruhu len s ohmickým odporom pri danom napätí, teda

$$I_r = \frac{U}{R} = \frac{4\ \mathrm{V}}{0{,}2\ \Omega} = 20\ \mathrm{A}$$

Napätie na indukčnosti a kapacite dostávame podľa Ohmovho zákona pre striedavý prúd:

$$U_L = I_r \omega_r L = 20\ \mathrm{A} . 2\pi . 1{,}299 . 10^6\ \mathrm{s}^{-1} . 50 . 10^{-6}\ \mathrm{H} = 8{,}165 . 10^3\ \mathrm{V}$$

$$U_C = I_r \cdot \frac{1}{\omega_r . C} = 20\ \mathrm{A}\ \frac{1}{2\pi . 1{,}3 . 10^6\ \mathrm{s}^{-1} . 300 . 10^{-12}\ \mathrm{F}} = 8{,}165 . 10^3\ \mathrm{V}$$

758. Oscilačný okruh pozostáva z cievky s indukčnosťou $L = 0{,}07$ H a doskového kondenzátora s plošným obsahom $S = 0{,}45\ \mathrm{m}^2$, pričom dosky sú od seba oddelené parafínovým papierom ($\varepsilon = 2\varepsilon_0$) hrúbky $d = 0{,}1$ mm. Aká je maximálna hodnota a perióda oscilujúceho prúdu, keď sme pred vznikom oscilácií nabili kondenzátor na napätie $U_0 = 100$ V a keď ohmický odpor okruhu je zanedbateľne malý?

Riešenie:

Použitím druhého Kirchhoffovho zákona možno pre tento okruh písať rovnicu

$$RI = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

ktorá vzhľadom na to, že $R = 0$, bude mať tvar

$$0 = U - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Ale $U = \dfrac{Q}{C}$, takže

$$0 = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Ak predchádzajúcu rovnicu derivujeme podľa času, môžeme ju potom vzhľadom na vzťah $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I$ upraviť na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 I$$

pričom sme označili $\dfrac{1}{LC} = \omega^2$. Riešením uvedenej diferenciálnej rovnice je vzťah

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

kde I_0 je vrcholová hodnota (amplitúda) oscilujúceho prúdu a φ je fázová konštanta. Obidve tieto veličiny možno určiť zo začiatočných podmienok. Keďže pre $t = 0$ sa $I = 0$, $U = U_0$, z rovnice (2) vyplýva, že $\varphi = 0$. Z rovnice (1) zase vyplýva

$$0 = U_0 - L\omega I_0$$

t. j.

$$I_0 = \frac{U_0}{L\omega} = \frac{U_0}{L\sqrt{\dfrac{1}{LC}}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Keďže kapacita doskového kondenzátora je $C = \varepsilon S/d$, bude

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{\varepsilon S}{Ld}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{2.8{,}85.10^{-12}.0{,}45}{0{,}07.0{,}0001}}\ \mathrm{A} \doteq 0{,}107\ \mathrm{A}$$

Pre periódu netlmených oscilácií tohoto okruhu platí vzťah

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{L\varepsilon S}{d}} = 2.3{,}14\sqrt{\frac{0{,}07.2.8{,}85.10^{-12}.0{,}45}{0{,}0001}}\ \mathrm{s} \doteq$$

$$\doteq 4{,}7.10^{-4}\ \mathrm{s}$$

759. Vypočítajte, aký je vzájomný pomer energie magnetického poľa oscilačného okruhu a energie jeho elektrického poľa v časovom okamihu $t = T/8$ s, keď T je perióda oscilácií!

Riešenie:

Pre napätie na kondenzátore oscilačného okruhu platí vzťah

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Náboj na elektródach kondenzátora s kapacitou C súvisí s napätím vzťahom $Q = C.U$, takže

$$\mathrm{d}Q = C.\mathrm{d}U$$

Platí však $\mathrm{d}Q = I.\mathrm{d}t$, takže

$$I\,\mathrm{d}t = C.\mathrm{d}U$$

alebo

$$I = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -C.U_0.\omega.\sin \omega t$$

Energia magnetického poľa je daná vzťahom

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LC^2U_0\omega^2 \sin^2 \omega t$$

a energia elektrického poľa zase vzťahom

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 \cos^2 \omega t$$

Hľadaný pomer uvedených energií je

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{LC\omega^2 \sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t$$

Keďže však

$$\operatorname{tg} \omega t = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad LC = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

bude

$$\frac{W_m}{W_e} = \frac{1}{\omega^2}\,\omega^2 . 1^2 = 1$$

760. Oscilačný okruh pozostáva z kondenzátora s kapacitou $C = 0{,}3\ \mu F$ a z cievky s indukčnosťou $L = 5 . 10^{-3}$ H.

Vypočítajte:

a) pri akom logaritmickom dekremente útlmu amplitúda napätia na elektródach kondenzátora poklesne za čas $t = 10^{-3}$ s na tretinu,

b) aký veľký bude pritom ohmický odpor okruhu!

Riešenie:

a) Keď predpokladáme, že ohmický odpor bude pomerne malý, môžeme zistiť periódu oscilácií podľa vzťahu

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{5 . 10^{-3}\ \mathrm{H} . 0{,}3 . 10^{-6}\ \mathrm{F}} = 2{,}425 . 10^{-4}\ \mathrm{s} \tag{1}$$

Napätie na kondenzátore sa mení podľa vzťahu

$$U = U_0\, e^{-bt} \cos \omega t = U_0\, e^{\frac{\delta}{T} t} \cos \omega t$$

Amplitúda napätia sa s časom mení podľa vzťahu

$$U_1 = U_0\, e^{\frac{\delta}{T} t}$$

Logaritmovaním dostaneme

$$\frac{\delta}{T}\, t = \ln \frac{U_0}{U_1}$$

takže pre δ v súhlase s požiadavkou a) príkladu bude platiť

$$\delta = \frac{T \ln \dfrac{U_0}{U_1}}{t} = \frac{2{,}425 . 10^{-4}\ \mathrm{s} . 2{,}3 \log 3}{10^{-3}\ \mathrm{s}} = 0{,}234$$

b) Ohmický odpor okruhu vypočítame z koeficientu útlmu b, ktorý je daný výrazom

$$b=\frac{R}{2L}$$

Odtiaľ pre hľadané R dostaneme

$$R=b2L=\frac{\delta}{T}2L=\frac{0{,}234}{2{,}425\,.\,10^{-4}\ \mathrm{s}}2\,.\,5\,.\,10^{-3}\ \mathrm{H}=9{,}68\ \Omega$$

Keď tento odpor dosadíme do vzorca pre periódu tlmených kmitov, dostávame

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}=$$

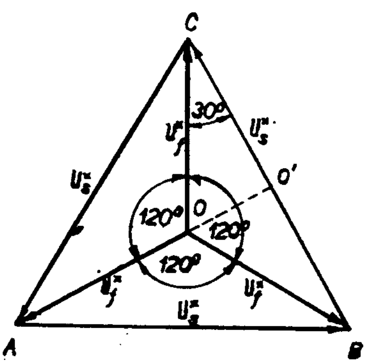
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{5\,.\,10^{-3}\ \mathrm{H}\,.\,0{,}3\,.\,10^{-6}\ \mathrm{F}}-\left(\frac{9{,}68\ \Omega}{2\,.\,5\,.\,10^{-3}\ \mathrm{H}}\right)^2}}=2{,}425\,.\,10^{-4}\ \mathrm{s} \qquad (2)$$

Keď porovnáme výrazy (1) a (2), vidíme, že vplyv nami zisteného odporu na periódu oscilácií je zanedbateľný.

761. Aké je fázové napätie pri spojení cievok generátora trojfázového prúdu do hviezdy, keď združené napätie je 220 V?

Riešenie:

Pretože cievky generátora sú vzájomne mechanicky pootočené o 120°, aj elektromotorické napätia v nich indukované sú vzájomne elektricky pootočené o 120°. Keď napätia na fázach $\boldsymbol{u}_f^*$ (fázové napätie) zobrazíme ako rotujúce vektory, budú tiež pootočené o 120°. Združené napätie $\boldsymbol{u}_z^*$ je rozdiel dvoch vektorov fázových napätí, a preto $\boldsymbol{u}_z^*$ je vektor spájajúci konce vektorov $\boldsymbol{u}_f^*$.



Obr. 183

Na *obr. 183* vidíme, že z trojuholníka *OO'C* možno písať pre veľkosť vektorov:

$$\frac{U_z}{2} = U_f \cos 30°$$

$$\frac{U_z}{2} = U_f \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Potom

$$U_f = \frac{U_z}{\sqrt{3}} = \frac{220 \text{ V}}{1{,}732\,05} = 127{,}017 \text{ V}$$

762. V prívodnom vedení trojfázovej elektrickej piecky na napätie 3 × 380 V, zapojenej do trojuholníka, bol nameraný prúd $I_z = 6$ A. Zistite hodnoty:

a) fázového prúdu,
b) odporu jednej fázy,
c) príkonu piecky!

Riešenie:

a) Vzťah medzi fázovým a združeným prúdom pri zapojení do trojuholníka je analogický so vzťahom medzi napätiami pri zapojení do hviezdy, teda

$$I_f = \frac{I_z}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3{,}464 \text{ A}$$

b) Pretože pri zapojení do trojuholníka

$$U_f = U_z$$

potom

$$R_f = \frac{U_f}{I_f} = \frac{380 \text{ V}}{\cancel{2{,}47} \text{ A}} = 109{,}7\ \Omega$$

3,464

c) Príkon počítame z privádzaných hodnôt dosadených do vzťahu pre výkon trojfázového prúdu. Ten odvodíme ako trojnásobok výkonu jednej fázy, teda

$$P = 3\, U_f I_f \cos \varphi$$

Tento vzťah sa obyčajne používa v tom tvare, v ktorom sú všetky hodnoty združené, teda napr. pre zapojenie do hviezdy

$$P = 3 \frac{U_z}{\sqrt{3}} \cdot I_z . \cos \varphi = \sqrt{3} \,.\, U_z I_z \cos \varphi$$

To isté vychádza pre zapojenie do trojuholníka, teda

$$P = 3\, U_z \frac{I_z}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3}\, U_z I_z . \cos \varphi$$

V našom prípade

$$P=\sqrt{3}\,.\,380\text{ V}\,.\,6\text{ A}\,.\,1=3949\text{ W}=3{,}949\text{ kW}$$

763. Aký účinník má trojfázový motor, ktorý spotrebuje $P_p=200$ kW pri združenom napätí $U_z=6000$ V a prúde $I_z=23{,}4$ A? Aké napätie pripadá na jednu fázu, keď je vinutie motora zapojené do hviezdy?

Riešenie:

Účinník zistíme zo vzorca pre výkon trojfázového prúdu motora

$$P=\sqrt{3}\,U_zI_z\,.\cos\varphi$$

kde U_z, I_z sú združené hodnoty napätia a prúdu, $\cos\varphi$ účinník motora. Potom

$$\cos\varphi=\frac{P}{\sqrt{3}\,.\,U_zI_z}=\frac{200\,.\,1000\text{ W}}{1{,}732\,05\,.\,6000\text{ V}\,.\,23{,}4\text{ A}}=0{,}8224$$

Pre vzťah fázového a združeného napätia pri zapojení do hviezdy platí:

$$U_f=\frac{U_z}{\sqrt{3}}=\frac{6000}{1{,}732\,05}=3464{,}10\text{ V}$$

764. Dokážte, že z Maxwellových rovníc bezprostredne vyplýva existencia elektromagnetického vlnenia!

Riešenie:

Predpokladajme, že $\boldsymbol{i}=0$, $\varrho=0$. Maxwellove rovnice potom možno napísať v tvare

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0;\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0;\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Parciálnym derivovaním poslednej rovnice podľa času dostaneme

$$\operatorname{rot}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

z čoho pri použití 3. Maxwellovej rovnice dostávame

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}\operatorname{rot}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\Delta\boldsymbol{E})=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}\Delta\boldsymbol{E}$$

t. j.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} \Delta \boldsymbol{E} \tag{1}$$

lebo podľa 1. Maxwellovej rovnice div $\boldsymbol{E} = 0$. Symbolom Δ sme označili Laplaceov operátor, pre ktorý platí $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Podobne parciálnym derivovaním 3. Maxwellovej rovnice podľa času dostaneme

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = -\text{rot}\, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

z čoho použitím 4. Maxwellovej rovnice dostaneme

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = -\text{rot}\, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}\, \text{rot rot}\, \boldsymbol{B} =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} (\text{grad div}\, \boldsymbol{B} - \Delta \boldsymbol{B}) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} \Delta \boldsymbol{B}$$

t. j.

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} \Delta \boldsymbol{B} \tag{2}$$

lebo div $\boldsymbol{B} = 0$.

Rovnica (1) a (2) sú diferenciálne rovnice elektromagnetického vlnenia. Rovnica (1), resp. (2) je vlnovou rovnicou elektrického, resp. magnetického rozruchu, ktorý sa šíri v nevodivom prostredí rýchlosťou

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

ako to vyplýva z porovnania rovníc (1) a (2) so všeobecnou vlnovou rovnicou (pozri str. 143).

765. Aká musí byť frekvencia vysielača elektromagnetických vĺn, aby ich vlnová dĺžka vo vode, ktorej relatívna permitivita $\varepsilon_r = 81$ a relatívna permeabilita $\mu_r \doteq 1$, bola $\frac{1}{3}$ m?

Riešenie:

Keďže

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

potom

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}}$$

kde sme pre rýchlosť šírenia elektromagnetických vĺn napísali vzťah vyplývajúci pre ňu z vlnovej rovnice (viď príkl. 764).

Keďže $\mu_r \doteq 1$ a $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=c$, kde c je rýchlosť elektromagnetického vlnenia vo vákuu, pre f dostávame

$$f=\frac{1}{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=\frac{c}{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{3\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}}{\frac{1}{3}\ \mathrm{m}\cdot\sqrt{81}}=10^8\ \mathrm{s^{-1}}=10^8\ \mathrm{Hz}$$

766. Pohyb blížiacej sa rakety sa sleduje radarovým prístrojom, ktorý pracuje s frekvenciou $f_0=120$ MHz. Zložením elektromagnetických vĺn vysielaných radarom a odrazených od rakety vznikajú rázy s frekvenciou $f_r=450$ Hz. Vypočítajte rýchlosť pohybu rakety!

Riešenie:

Rýchlosť rakety v je v porovnaní s rýchlosťou šírenia elektromagnetických vĺn c veľmi malá, takže možno použiť nerelativistický postup.

Frekvencia f' raketou prijímaných vĺn súvisí s frekvenciou f_0 podľa Dopplerovho princípu vzťahom

$$f'=\frac{c-v}{c}\cdot f_0$$

Raketou odrazené vlny s frekvenciou f' registruje prijímač na Zemi (preň je raketa pohybujúci sa zdroj elektromagnetických vĺn) ako elektromagnetické vlny s frekvenciou f, pre ktorú platí

$$f=\frac{c}{c+v}f'=\frac{c-v}{c+v}f_0$$

Frekvencia rázov potom je

$$f_r=f_0-f=1-\frac{c-v}{c+v}f_0=\frac{2v}{c+v}f_0$$

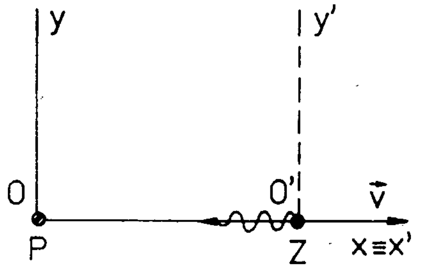
Pre rýchlosť pohybu rakety dostávame

$$v=\frac{cf_r}{2f_0-f_r}=\frac{3\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}\,.\,450\ \mathrm{s^{-1}}}{240\,.\,10^6\ \mathrm{s^{-1}}-450\ \mathrm{s^{-1}}}=562{,}5\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}=2020\ \mathrm{km\,.\,h^{-1}}$$

767. Použitím Lorentzových transformácií odvoďte vzťah charakterizujúci Dopplerov jav pri veľkých rýchlostiach vzájomného pohybu medzi zdrojom a prijímačom elektromagnetických vĺn!

Riešenie:

Zdrojmi elektromagnetických vĺn môžu byť aj mikročastice, ktoré sa pohybujú veľkými rýchlosťami, porovnateľnými s rýchlosťou svetla. Úvahy o Dopplerovom jave treba v takomto prípade vykonať relativisticky, t. j. použitím Lorentzových transformácií.



Obr. 184

Spojme s prijímačom elektromagnetických vĺn P začiatok O nečiarkovanej inerciálnej sústavy a so zdrojom elektromagnetických vĺn Z začiatok O' čiarkovanej inerciálnej sústavy *(obr. 184)*. Osi x a x' uložme do smeru vektora konštantnej rýchlosti v, ktorou sa čiarkovaná sústava, t. j. zdroj Z pohybuje oproti nečiarkovanej sústave, t. j. prijímaču P. Predpokladajme, že sme stopky merajúce čas t i stopky merajúce čas t' stlačili v okamihu, keď začiatky obidvoch súradnicových sústav navzájom splývali. Potom $t'=0$, $x'=0$ odpovedá $t=0$, $x=0$.

Pre hodnotu intenzity elektrického poľa rovinnej elektromagnetickej vlny, vyslanej zdrojom Z k prijímaču P, možno v čiarkovanej sústave písať

$$E(x', t') = A \cos \omega' \left(t' + \frac{x'}{c}\right) \tag{1}$$

kde ω' je kruhová frekvencia elektromagnetickej vlny vo vzťažnej sústave spojenej so zdrojom Z, t. j. kruhová frekvencia elektromagnetických oscilácií zdroja.

Podľa princípu relativity majú fyzikálne zákony rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavách. V nečiarkovanej sústave možno preto pre uvažovanú elektromagnetickú vlnu písať

$$E(x, t) = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{2}$$

kde ω je kruhová frekvencia elektromagnetickej vlny v nečiarkovanej sústave, t. j. registrovaná prijímačom P. Povnicu (2) možno dostať z rovnice (1), ak pomocou

Lorentzových transformácií prejdeme od x', t' ku x, t. Dostaneme

$$E(x, t) = A \cos\left[\omega'\left(\frac{t - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{x - vt}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right)\right], \quad \text{kde } \beta = \frac{v}{c}$$

čo možno ľahko upraviť na tvar

$$E(x, t) = A \cos\left[\omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t + \frac{x}{c}\right)\right] \tag{3}$$

Rovnica (3) opisuje z hľadiska nečiarkovanej sústavy tú istú vlnu ako rovnica (2), preto musí platiť

$$\omega = \omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{4}$$

Ak prejdeme od kruhovej frekvencie ω k obyčajnej frekvencii f a ak označíme frekvenciu f' elektromagnetickej vlny vo vzťažnej sústave zdroja Z symbolom f_0, tak

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \tag{5}$$

Vzťah (5) charakterizuje Dopplerov jav pri veľkých rýchlostiach, t. j. v rámci špeciálnej teórie relativity.

Hodnota rýchlosti v zdroja elektromagnetických vĺn oproti prijímaču môže byť kladná i záporná. Pri vzďaľovaní zdroja od prijímača je $v > 0$, takže podľa (5) je $f < f_0$. Pri približovaní zdroja k prijímaču je $v < 0$ a $f > f_0$.

V prípade, že $v \ll c$, možno vzťah (5) upraviť takto:

$$f = f_0 \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^{1/2}} \doteq f_0 \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}}{1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c}} \doteq f_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c}\right) \doteq f_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) = f_0 \frac{c - v}{c} \tag{6}$$

keď sme zanedbali malé veličiny vyššieho rádu vzhľadom na $\frac{v}{c}$ ako malú veličinu prvého rádu. Vzťah (6) charakterizuje Dopplerov jav v klasickej fyzike.

768. Zariadenie pevne spojené so Zemou registruje posun vlnovej dĺžky spektrálnej čiary H_α elektromagnetického vlnenia vysielaného hviezdou o $\Delta\lambda = 0{,}05\,.\,10^{-9}$ m smerom k väčším vlnovým dĺžkam. Vypočítajte rýchlosť, ktorou sa hviezda vzďaľuje od Zeme, keď vlnová dĺžka spektrálnej čiary H_α má vo vzťažnej sústave spojenej so zdrojom elektromagnetických vĺn hodnotu $\lambda_0 = 656{,}279\,.\,10^{-9}$ m!

Riešenie:

Podľa predchádzajúceho príkladu je súvis medzi frekvenciami spektrálnej čiary vzťahovanými na Zem, resp. na hviezdu daný vzťahom

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}}$$

kde v je hľadaná rýchlosť. Keďže $\lambda = c/f$ a $\lambda_0 = c/f_0$, potom sa

$$\lambda_0 = \lambda\sqrt{\frac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}}$$

a po úprave dostaneme

$$v = c\,\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2+\lambda_0^2}$$

Keďže $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 656{,}329\,.\,10^{-9}$ m, platí

$$v = 3\,.\,10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}\,\frac{(656{,}329)^2\,.\,10^{-18}-(656{,}279)^2\,.\,10^{-18}}{(656{,}329)^2\,.\,(656{,}279)^2\,.\,10^{-36}} \doteq 2\,.\,10^4\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

769. Nájdite vzťah medzi Poyntingovým—Umovovým vektorom elektromagnetického vlnenia a medzi objemovou hustotou energie elektromagnetického vlnenia!

Riešenie:

Predpokladajme, že $\boldsymbol{i} = 0$. Posledné dve Maxwellove rovnice majú potom tvar

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}$$

Násobme teraz skalárne prvú rovnicu vektorom $\boldsymbol{H}$ a druhú vektorom $\boldsymbol{E}$. Dostaneme

$$\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\boldsymbol{H} . \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{E} . \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$$

Po sčítaní rovníc a zmene znamienka bude platiť

$$-\left(\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{H} . \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} . \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$$

čo možno ďalej písať v tvare

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\, \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 + \frac{1}{2}\, \mu_0 \mu_r H^2\right) = \operatorname{div}\, (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$$

t. j.

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \operatorname{div}\, (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})$$

Na ľavej strane rovnice je úbytok energie elektromagnetického poľa z jednotkového objemu za jednotku času. Pravá strana rovnice udáva množstvo elektromagnetickej energie, ktoré za jednotku času vyžiarilo z jednotkového objemu cez povrch tohto objemu do okolia. Odvodená rovnica vyjadruje zákon zachovania energie pre uvedený konkrétny prípad.

770. Rovinná elektromagnetická vlna, ktorej hybnosť pripadajúca na jednotkový objem má hodnotu $p = 0{,}1 . 10^{-10}\ \mathrm{kg} . \mathrm{m}^{-2} . \mathrm{s}^{-1}$, dopadá kolmo na rovinný povrch dokonale odrážajúceho zrkadla. Vypočítajte tlak, ktorým elektromagnetická vlna pôsobí na zrkadlo!

Riešenie:

Pre tlak elektromagnetického vlnenia Π platí vzťah

$$\Pi S = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}$$

kde S je plošný obsah plochy, na ktorú vlnenie dopadá, a $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$ je zmena hybnosti elektromagnetického vlnenia za jednotku času. V našom prípade zrejme bude

$$\left| -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \right| = 2P = 2pcS$$

kde c je rýchlosť postupu vlnenia. Možno preto písať

$$|\Pi| S = 2pcS$$

t. j.

$$|\Pi| = 2pc = 2 \,.\, 0{,}1 \,.\, 10^{-10}\ \mathrm{kg\,.\,m^{-2}\,.\,s^{-1}\,.\,3\,.\,10^{8}\ m\,.\,s^{-1}} = 0{,}6 \,.\, 10^{-2}\ \mathrm{N\,.\,m^{2}}$$

771. Stojaté elektromagnetické vlny na Lecherových drôtoch majú vo vzduchu vlnovú dĺžku λ. Zistite, ako sa táto vlnová dĺžka zmení, keď Lecherove drôty ponoríme do destilovanej vody ($\varepsilon_r = 81$)!

Riešenie:

Pre vlnovú dĺžku elektromagnetického vlnenia platí vzťah

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

Vo vzduchu sa $\varepsilon_r \doteq 1$, $\mu_r \doteq 1$, takže pre vlnovú dĺžku λ_0 vo vzduchu možno písať

$$\lambda_0 = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Pre vodu sa $\varepsilon_r = 81$ a $\mu_r \doteq 1$, takže pre vlnovú dĺžku λ_1 vo vode dostávame

$$\lambda_1 = \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9} \frac{1}{f} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Vzájomný súvis vlnových dĺžok vo vode a vo vzduchu potom je

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{1}{9}, \quad \text{t. j.} \quad \lambda_1 = \frac{1}{9} \lambda_0$$

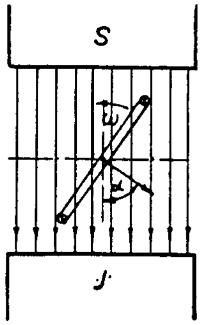
Úlohy

772. V magnetickom poli s indukciou $B = 50 \,.\, 10^{-4}$ T sa otáča s frekvenciou $f = 3000\ \mathrm{min}^{-1}$ vodič, ktorý pozostáva zo $z = 400$ závitov a má tvar obdĺžnika šírky $a = 0{,}15$ m a dĺžky $b = 0{,}2$ m. Aká je maximálna hodnota EMN, ktoré sa vo vodiči indukuje?

[$U_0 = 18{,}849$ V]

773. Cievka tvaru obdĺžnika s rozmermi $2{,}0 \times 2{,}5\ \mathrm{cm}^2$ so 100 závitmi sa rovnomerne otáča v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0{,}1$ T okolo osi kolmej na smer poľa *(obr. 185)* tak, že sa v nej indukuje EMN s amplitúdou $U_0 = 1{,}57$ V. Aká je uhlová rýchlosť otáčania cievky?

[$\omega = 314\ \mathrm{s}^{-1}$]



Obr. 185

774. S akým účinníkom pracuje elektrický stroj, keď vydáva prúd 109 A pri 220 V a keď wattmeter ukazuje príkon $P = 20$ kW?

[cos $\varphi = 0{,}834$]

775. Aké je efektívne napätie striedavého prúdu, keď jeho vrcholová hodnota $U_0 = 170$ V?

[$U = 120{,}226$ V]

776. Vypočítajte výkon striedavého prúdu v spotrebiči, keď ampérmeter ukazuje, že pretekajúci prúd $I = 2$ A a voltmeter pripojený na svorky spotrebiča ukazuje napätie $U = 110$ V! Predpokladajte, že fázové posunutie prúdu vzhľadom na napätie je cos $\varphi = 0{,}8$.

[$P = 0{,}176$ kW]

777. Vypočítajte, aký prúd odoberá zo striedavej elektrickej siete s napätím $U = 220$ V jednofázový elektromotor výkonu $P = 1{,}47$ kW, ktorého cos $\varphi = 0{,}8$ a účinnosť $\eta = 90$ %!

[$I = 9{,}2866$ A]

778. Motor na trojfázový striedavý prúd je pripojený na sieťové napätie $U_z = 380$ V. a) Aké je napätie medzi vodičom a nulovým bodom vinutia? b) Aký je prúd v cievke motora, keď prúd v prívode $I_z = 6$ A?

[a) $U_f = 219{,}393$ V; b) $I_f = 6$ A]

779. Aký výkon má trojfázový motor s údajmi $U = 380$ V, $I = 30$ A, cos $\varphi =$ $= 0{,}8$, $\eta = 0{,}85$?

[$P = 13{,}4$ kW]

780. Trojfázový generátor na napätie $U = 6300$ V produkuje prúd $I = 200$ A pri cos $\varphi = 0{,}8$. Aký je jeho výkon?

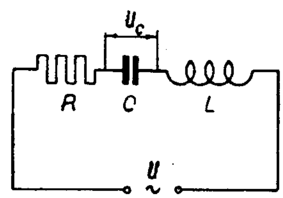
[$P = 1745{,}907$ kW]

781. Trojfázový motor, ktorého cievky sú zapojené do trojuholníka, je pripojený na sieť s napätím $U_z = 220$ V, $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$ a pracuje s výkonom $P = 27{,}1$ kW pri účinníku $\cos\varphi = 0{,}75$. Účinnosť motora $\eta = 90$ %. Aký prúd je v prívodných vodičoch (združený prúd I_z)?

[$I_z = 105{,}231$ A]

782. Vypočítajte efektívne napätie na svorkách kondenzátora v zapojení podľa *obr. 186*, keď $U = 220$ V, $R = 10\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F, $L = 2$ H, $\omega = 2\pi . 50\ \mathrm{s}^{-1}$!

[$U_C = 274$ V]



Obr. 186

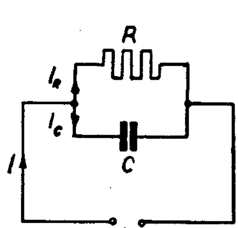
783. Sériový obvod zložený z kondenzátora kapacity $C = 8\ \mu$F a cievky s indukčnosťou $L = 2$ H a s ohmickým odporom $R = 30\ \Omega$ je pripojený k zdroju s napätím $U = 110$ V a frekvenciou $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Určite impedanciu celého obvodu, prúd v obvode, napätie na kondenzátore a cievke a účinník obvodu!

[$Z = 232\ \Omega$; $I = 0{,}47$ A; $U_C = 187$ V; $U_L = 295$ V; $\cos\varphi = 0{,}129$]

784. Cievka s indukčnosťou $L = 0{,}5$ H je zapojená do série s ohmickým odporom $R = 157\ \Omega$ a celok je pripojený k sieti s napätím $U = 220$ V a frekvenciou $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Stanovte impedanciu tejto kombinácie, fázové posunutie medzi napätím a intenzitou, intenzitu pretekajúceho prúdu, napätia na cievke a na odpore!

[$Z = 221{,}999\ \Omega$; $\cos\varphi = 0{,}707$; $\varphi = 45°$; $I = 0{,}9909$ A;
$U_L = 155{,}586$ V; $U_R = 155{,}586$ V]

785. Ohmický odpor $R = 3\ \Omega$ a kondenzátor C, ktorého kapacitancia pri $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$ je $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 5\ \Omega$, sú zapojené paralelne, ako vidno na *obr. 187a*, a pripojené k zdroju striedavého napätia $U = 10$ V a frekvencie $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$. Určite



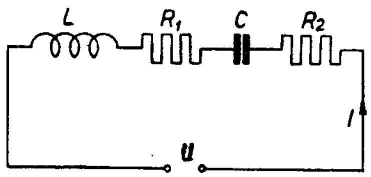
Obr. 187a, b

zdanlivý odpor celého obvodu, prúd v obvode, prúd v kondenzátore a fázové posunutie medzi napätím a prúdom!

[$Z = 2{,}57\ \Omega$; $I = 3{,}89$ A; $I_R = 3{,}33$ A; $I_C = 2$ A; $\operatorname{tg} \varphi = 0{,}6 \Rightarrow \varphi = 31°$]

786. Aký prúd preteká obvodom znázorneným na *obr. 188*, keď $L = 9$ H, $R_1 = 200\ \Omega$, $C = 1\ \mu$F, $R_2 = 58\ \Omega$, $U = 220$ V, $f = 50\ s^{-1}$?

[$I = 0{,}5$ A]



Obr. 188

787. Cievkou s indukčnosťou $L = 0{,}25$ H tečie prúd $I = I_0 \sin \omega t$, kde $I_0 = 1$ A a $\omega = 3140\ s^{-1}$. Nájdite maximálnu hodnotu indukovaného EMN, ktoré sa v cievke indukuje!

[$U_0 = 785$ V]

788. Aká musí byť maximálna hodnota striedavého indukčného toku v jadre transformátora pri frekvencii $f = 50\ s^{-1}$, aby sa v jednom závite sekundárneho vinutia cievky indukovalo elektromotorické napätie s efektívnou hodnotou $U_{ef} = 0{,}25$ V?

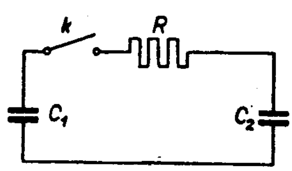
[$\Phi_m = 1{,}126 \cdot 10^{-3}$ Wb]

789. Primárne vinutie transformátora má $z_1 = 880$ závitov, sekundárne $z_2 = 1200$ závitov. Aké napätie sa indukuje v sekundárnom vinutí, keď primárne vinutie je pripojené na napätie $U_1 = 220$ V?

[$U_2 = 300$ V]

790. Batéria do série zapojených kondenzátorov C_1, C_2 *(obr. 189)* má v čase $t = 0$ napätie U_0. Aký bude časový priebeh prúdu, keď zapojíme kľúč k?

$$\left[I = \frac{U_0}{R} \cdot \exp\left(- \frac{C_1 + C_2}{C_1 . C_2 . R}\, t \right) \right]$$



Obr. 189

791. Kondenzátor s kapacitou $C = 1{,}5 \,.\, 10^{-6}$ F je nabitý na napätie $U = 500$ V a je súčasťou okruhu s indukčnosťou $L = 5 \,.\, 10^{-5}$ H. Aká bude vrcholová hodnota netlmeného oscilujúceho prúdu a za aký čas narastie prúd z nulovej hodnoty na maximum?

$$\left[I_0 = U\sqrt{\frac{C}{L}} = 8{,}5 \text{ A}; \ t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{LC} = 1{,}36 \,.\, 10^{-4} \text{ s} \right]$$

792. Cievku s indukčnosťou $L = 1$ H s ohmickým odporom $R = 1\ \Omega$ pripojíme v čase $t = 0$ na konštantné napätie U. Nájdite čas, v ktorom dosiahne prúd, pretekajúci okruhom, ustálenú hodnotu s presnosťou 1 ‰!

$[t_0 = 6{,}9 \text{ s}]$

793. Elektromagnetický oscilátor je zdrojom elektromagnetických vĺn s frekvenciou $f = 300$ MHz. Nájdite vlnovú dĺžku elektromagnetických vĺn, keď prostredie, ktorým sa šíria, má relatívnu permitivitu $\varepsilon_r = 25$ a relatívnu permeabilitu $\mu_r \doteq 1$!

$[\lambda = 0{,}2 \text{ m}]$

794. Aká je hodnota objemovej hustoty hybnosti elektromagnetických vĺn, ktoré pri kolmom dopade na dokonale odrážajúce zrkadlo pôsobia naň tlakom 10^{-2} Pa?

$[p = 0{,}167 \,.\, 10^{-10} \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}]$

795. Elektromagnetické vlnenie, ktorého hybnosť pripadajúca na jednotkový objem má hodnotu $p = 0{,}1 \,.\, 10^{-10}$ kg.m^{-2}.s^{-1}, dopadá kolmo na dokonale pohlcujúcu rovinu. Aký je tlak elektromagnetického vlnenia na túto rovinu?

$[|\Pi| = 0{,}3 \,.\, 10^{-2} \text{ Pa}]$

796. Na akej frekvencii pracuje radar, keď sledujeme pohyb lietadla pohybujúceho sa rýchlosťou $v = 1000$ km.h^{-1} smerom k radaru a keď radarom vysielané elektromagnetické vlny a lietadlom odrážané vlny sa skladajú vo výsledné vlnenie vyznačujúce sa rázmi s frekvenciou $f_r = 500$ Hz?

$[f_0 = 270 \text{ MHz}]$

16 MIKROFYZIKA NIEKTORÝCH ELEKTRICKÝCH JAVOV

Úvod

1. Príčinou elektrickej vodivosti v kovoch je existencia *vodivostných elektrónov*, ktoré podľa predstáv klasickej elektrónovej teórie konajú chaotický pohyb v objeme kovu. Rýchlosti elektrónov pri tomto chaotickom pohybe závisia od

teploty kovu a sú pri izbovej teplote rádu 10^5 až 10^6 m.s^{-1}. Elektrické pole, ktoré v kove vytvoríme vonkajším zásahom, spôsobuje, že sa okrem neusporiadaného pohybu vodivostných elektrónov realizuje i usporiadaný pohyb v smere pôsobiaceho elektrického poľa, čím vzniká elektrický prúd. Rýchlosť elektrónov pri tomto usporiadanom pohybe je veľmi malá v porovnaní s rýchlosťami vodivostných elektrónov pri chaotickom pohybe a je rádu 10^{-3} až 10^{-5} m.s^{-1}.

a) Vodivostné elektróny sú v kove stále pod vplyvom periodického kryštálového poľa kladných iónov mriežky. Aby sme pri matematických úvahách v klasickej elektrónovej teórii nemuseli uvažovať kryštálové pole a mohli pracovať len s vonkajším elektrickým poľom, ktorého intenzitu spravidla poznáme, zavádzame pojem *efektívnej hmotnosti* m^* vodivostného elektrónu v kove. Elektrón reaguje v kryštáli na vonkajšie elektrické pole rovnako, ako by na to isté elektrické pole reagoval voľný elektrón hmotnosti m^* vo vákuu. Veličinu $f = m_0/m^*$, kde m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu, označujeme ako koeficient voľnosti.

b) Magnetické pole, ktorého indukcia spadá do roviny doskového vodiča a má nenulovú zložku v smere kolmom na smer elektrického prúdu, tečúceho po dĺžke vodiča, pôsobí na vodivostné elektróny silou podľa vzťahu $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. To vedie k rozostúpeniu elektrónov pozdĺž šírky vodiča, k vzniku elektrického poľa kolmého na smer elektrického prúdu, a tým aj k elektrickému napätiu pozdĺž šírky vodiča. Toto napätie označujeme ako *Hallovo napätie* a proces, pri ktorom vzniká, sa volá *Hallov jav.*

c) Konštantné vonkajšie elektrické pole vyvoláva v kove konštantný elektrický prúd. Podľa predstáv klasickej elektrónovej teórie je to tak preto, lebo vodivostné elektróny sa pri svojom pohybe cez kryštálovú mriežku ustavične zrážajú s iónmi mriežky a odovzdávajú im svoju kinetickú energiu, ktorú pôsobením vonkajšieho elektrického poľa na voľnej dráhe medzi dvoma po sebe idúcimi zrážkami získali. V dôsledku toho sa zvyšuje vnútorná energia kryštálu kovu, a tým aj jeho teplota.

2. V kvantovej teórii sú stavy vodivostných elektrónov kvantované. Pri teplote $T = 0$ K elektróny zapĺňajú kvantové stavy, ktorým prislúchajú hybnosti menšie ako určitá hybnosť p_F, nazývaná *Fermiho hybnosť*, pre ktorú platí vzťah

$$p_F = h\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} \tag{1}$$

kde n je koncentrácia elektrónov, t. j. počet vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme kovu, h je Planckova konštanta. Hybnosť, určená vzťahom (1), je maximálna hybnosť, ktorú môže mať elektrón pri $T = 0$ K. Energia elektrónu odpovedajúca tejto hybnosti sa nazýva *Fermiho energia* a platí pre ňu vzťah

$$W_F = \frac{p_F^2}{2m^*} = \frac{h^2}{2m^*}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}$$

kde m^* je efektívna hmotnosť elektrónu.

3. Podľa *pásmovej teórie* existujú pre elektróny v kryštáli pásma dovolených a pásma zakázaných energií. Z praktického hľadiska delíme energetické pásma na tieto skupiny:

a) *Pásma patriace elektrónom pevne viazaným na materské jadrá atómov;* sú pomerne úzke a na prenos elektrického náboja prakticky nemajú vplyv.

b) *Valenčné pásmo* je súbor pásiem, ktorých kvantové stavy obsadzujú elektróny vytvárajúce chemické väzby.

c) *Vodivostné pásmo* je súbor pásiem, v ktorých sa nachádzajú elektróny uvoľnené materskými jadrami atómov, t. j. vodivostné elektróny.

Medzi valenčným a vodivostným pásmom je *zakázané pásmo.* Tieto tri pásma, t. j. valenčné, vodivostné a zakázané pásmo, svojou polohou a vzájomným rozmiestnením majú rozhodujúci vplyv na elektrické vlastnosti kryštálov.

Pásmové spektrum kvantových stavov poskytuje jednoduchú klasifikáciu kryštálov z hľadiska ich elektrických vlastností.

Nevodiče sú tuhé látky, ktoré sa vyznačujú len prázdnymi a elektrónmi úplne obsadenými pásmami dovolených energií.

Vodiče sú tuhé látky, ktoré majú jedno pásmo len čiastočne zaplnené elektrónmi.

Polovodiče sú tuhé látky, ktoré sa nevodičom podobajú obsadením pásiem elektrónmi, ale zakázané pásmo medzi valenčným a vodivostným pásmom má šírku nie väčšiu ako asi 2 eV.

Koncentrácia vodivostných elektrónov vo vodivostnom pásme čistého polovodiča je vyjadrená vzťahom

$$n = 2\,\frac{(2\pi m^* kT)^{3/2}}{h^3}\,\mathrm{e}^{-\Delta W/2kT}$$

kde m^* je efektívna hmotnosť elektrónu, k Boltzmannova konštanta, T absolútna teplota, h Planckova konštanta a ΔW šírka zakázaného pásma polovodiča.

Príklady

797. Odvoďte vzťah, vyjadrujúci Ohmov zákon, vychádzajúc z modelových predstáv klasickej elektrónovej teórie o pomeroch v kovovom vodiči!

Riešenie:

Pod vplyvom vonkajšieho elektrického poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}$ získava vodivostný elektrón s nábojom $-e$ zrýchlenie

$$\boldsymbol{a} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m^*} \qquad (1)$$

kde m^* je efektívna hmotnosť elektrónu. Na voľnej dráhe dosiahne elektrón, ktorý mal na začiatku voľnej dráhy nulovú rýchlosť, maximálnu rýchlosť

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{a}\tau = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m^*}\tau \tag{2}$$

kde τ je čas voľného pohybu elektrónu medzi dvoma po sebe nasledujúcimi zrážkami. Stredná rýchlosť usporiadaného pohybu vodivostných elektrónov predstavujúceho elektrický prúd potom je

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{2m^*}\tau \tag{3}$$

Pre hustotu takto vzniknutého elektrického prúdu možno písať

$$\boldsymbol{i} = -ne\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \tag{4}$$

kde n je počet vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme. Ak za $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ dosadíme vzťah (3), bude

$$\boldsymbol{i} = \frac{ne^2\tau}{2m^*}\boldsymbol{E} = \gamma\boldsymbol{E} \tag{5}$$

kde

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{2m^*} \tag{6}$$

je špecifická elektrická vodivosť vodiča. Vzťah (5) vyjadruje Ohmov zákon v elementárnom tvare. V integrálnom tvare ho dostaneme, ak vzťah (5) zapíšeme takto:

$$i\varrho = \gamma E\varrho \tag{7}$$

kde ϱ je jednotkový vektor v smere intenzity elektrického poľa. Keď rovnicu (7) skalárne vynásobíme jednotkovým vektorom ϱ a dosadíme do nej $i = I/S$, $E = u/l$, kde I je elektrický prúd, S plocha prierezu vodiča, u napätie na vodiči dĺžky l, potom

$$\frac{I}{S} = \gamma\frac{u}{l}; \quad I = \frac{u}{\frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}} = \frac{u}{R} \tag{8}$$

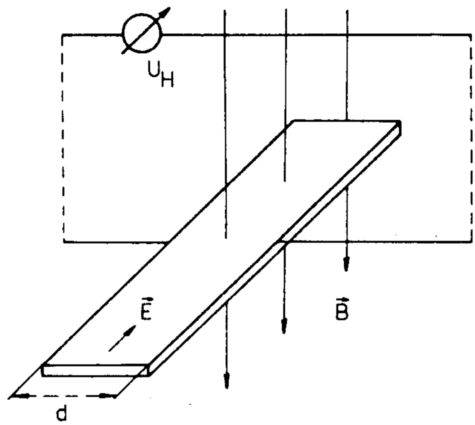
lebo $R = \frac{1}{\gamma}\frac{l}{S}$ je odpor vodiča. Vzťah (8) vyjadruje Ohmov zákon v integrálnom tvare.

798. Ak na kovový vodič tvaru doštičky, ktorým tečie elektrický prúd v smere dĺžky, pôsobíme magnetickým poľom kolmým na plochu doštičky, vytvorí sa pozdĺž šírky doštičky elektrické napätie. Na základe predstáv klasickej elektrónovej teórie odvoďte vzťah pre Hallovo napätie!

Riešenie:

Pri súčasnom pôsobení homogénneho elektrického poľa s intenzitou $\boldsymbol{E}$ v smere dĺžky doštičky a homogénneho magnetického poľa s indukciou $\boldsymbol{B}$ v smere kolmom na plochu doštičky *(obr. 190)* je sila pôsobiaca na vodivostný elektrón s elektrickým nábojom $-e$ daná vzťahom

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} - e(\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{B})$$



Obr. 190

kde $\boldsymbol{v}_s$ je stredná rýchlosť usporiadaného pohybu, predstavujúceho elektrický prúd, vyvolaný elektrickým poľom s intenzitou $\boldsymbol{E}$. Časť sily $-e\boldsymbol{E}$ zapríčiňuje vznik elektrického prúdu. Časť sily $\boldsymbol{F}_H = -e(\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{B})$ spadá do roviny doštičky a je kolmá na $\boldsymbol{v}_s$, t. j. na smer, v ktorom tečie elektrický prúd. Spôsobuje teda vznik Hallovho napätia v smere šírky doštičky. Veličina

$$\boldsymbol{E}_H = \frac{\boldsymbol{F}_H}{-e} = \boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{B}$$

predstavuje intenzitu Hallovho poľa. Keďže $\boldsymbol{v}_s = -\frac{1}{ne}\,\boldsymbol{i}$ (viď príklad 797), potom

$$\boldsymbol{E}_H = -\frac{1}{ne}(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}) = R_H(\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}) = -R_H(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{i})$$

kde $R_H = -1/ne$ je *Hallova konštanta.* Keďže $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{B}$, potom pre $E_H = |\boldsymbol{E}_E|$ dostávame

$$E_H = -R_H iB$$

a pre Hallovo napätie platí

$$U_H = -E_H d = -R_H iBd$$

kde d je šírka doštičky.

799. Pri prechode elektrického prúdu kovovým vodičom dochádza k premene elektrickej energie vodivostných elektrónov, získanej účinkom vonkajšieho elektrického poľa, na vnútornú energiu kryštálovej mriežky kovu, čím sa vodič ohrieva. Na základe predstáv klasickej elektrónovej teórie nájdite vzťah vyjadrujúci rýchlosť tejto energetickej premeny, t. j. výkon elektrického prúdu!

Riešenie:

Pri pohybe na voľnej dráhe v elektrickom poli s intenzitou E získa vodivostný elektrón kinetickú energiu

$$W_0 = \frac{1}{2} m^* v_m^2 = \frac{1}{2} m^* \left(\frac{Ee\tau}{m^*}\right)^2 = \frac{E^2 e^2 \tau^2}{2m^*} \tag{1}$$

kde m^* je efektívna hmotnosť vodivostných elektrónov. Pri úprave vzťahu (1) sme použili pre v_m vzťah napísaný v príklade 797. Kinetická energia vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme kovu je potom

$$W_1 = nW_0 = \frac{ne^2\tau^2}{2m^*} E^2$$

kde n je počet vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme.

Pre výkon, ktorý charakterizuje rýchlosť premeny energie elektrického prúdu na vnútornú energiu vodiča, vzťahovaný na jednotkový objem vodiča, platí vzťah

$$P_1 = \frac{W_1}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{2m^*} E^2 = \gamma E^2$$

kde γ je špecifická elektrická vodivosť vodiča. Keďže $\gamma E = i$ a $i = I/S$, možno písať

$$P_1 = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{I}{\gamma S}\right)^2 = \frac{I^2}{\gamma S^2}$$

Výkon elektrického prúdu, ktorý pripadá na celý objem vodiča dĺžky l a prierezu S, je daný vzťahom

$$P = \frac{I^2}{\gamma S^2} lS = I^2 \frac{l}{\gamma S} = I^2 R = UI$$

Analogicky s mechanickou interakciou, kde súčin výkonu a času, $Pt = A$, vyjadruje prácu, je zvykom aj pri elektrickom prúde výraz

$$A = Pt = UIt$$

označovať ako prácu elektrického prúdu.

800. Vypočítajte čas, ktorý uplynie medzi dvoma po sebe nasledujúcimi zrážkami vodivostných elektrónov v striebre! Špecifická elektrická vodivosť striebra $\gamma = 67{,}1.10^6\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, Hallova konštanta $R_H = -0{,}864.10^{-10}\ m^3.A^{-1}.s^{-1}$ a koeficient voľnosti $f = 1$!

Riešenie:

Pre veličiny, ktoré sú číselne dané, platia v klasickej elektrónovej teórii vzťahy

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{2m^*}; \quad R_H = -\frac{1}{ne}; \quad f = \frac{m_0}{m^*}$$

Z nich pre hľadané τ vyplýva

$$\tau = \frac{2m^*}{ne^2} = -\frac{2m^*\gamma}{\frac{1}{R_H}e} = \frac{2m_0\gamma R_H}{fe}$$

kde $m_0 \doteq 9{,}11.10^{-31}$ kg je pokojová hmotnosť elektrónu. Po dosadení číselných hodnôt bude

$$\tau = -\frac{2.9{,}11.10^{-31}\ kg.67{,}1.10^6\ kg^{-1}.m^{-3}.s^3.A^2.(-0{,}864.10^{-10}\ m^3.A^{-1}.s^{-1})}{1.1{,}6.10^{-19}\ A.s} =$$

$$= 6{,}6.10^{-14}\ s$$

801. Medenou doštičkou šírky $d = 5$ cm tečie v smere dĺžky prúd s hustotou $i = 5\ A.mm^{-2}$. Pri pôsobení magnetického poľa indukcie $B = 1$ T orientovaného kolmo na plochu doštičky sa pozdĺž šírky doštičky vytvorí Hallovo napätie $U_H = 12{,}4\ \mu V$. Nájdite strednú rýchlosť vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme medi!

Riešenie:

Podľa predstáv klasickej elektrónovej teórie (príklad 797) sa

$$v_s = \frac{1}{ne}i = -R_H i$$

Keďže $R_H = U_H/iBd$ (viď príklad 798), potom

$$v_s = -R_H i = \frac{U_H}{Bd} = \frac{12{,}4.10^{-6}\ V}{1\ T.5.10^{-2}\ m} = 2{,}48.10^{-4}\ m.s^{-1}$$

Pre počet vodivostných elektrónov v jednotkovom objeme dostávame

$$n = -\frac{1}{R_H} = \frac{iBd}{eU_H} = \frac{5.10^6\ A.m^{-2}.1\ T.5.10^{-2}\ m}{1{,}6.10^{-19}\ A.s.12{,}4.10^{-6}\ V} =$$

$$= 1{,}26.10^{29}\ m^{-3}$$

802. Aká je Fermiho energia medi za predpokladu, že ku koncentrácii vodivostných elektrónov prispieva každý atóm medi jedným elektrónom a že koeficient voľnosti medi je $f=0{,}67$?

Riešenie:

Pre Fermiho energiu platí vzťah

$$W_F = \frac{h^2}{2m^*}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3} \qquad (1)$$

kde $m^* = m_e/f$ a $m_e = 9{,}11\,.\,10^{-31}$ kg. Kilomólová hmotnosť medi je $M_{Cu} = 63{,}55$ kg.kmol^{-1}, hustota medi je $\varrho_{Cu} = 8{,}93\,.\,10^{-3}$ kg.m^{-3} a Avogadrova konštanta je $N_A = 6{,}02\,.\,10^{26}$ kmol^{-1}, takže pre koncentráciu vodivostných elektrónov v medi možno písať

$$n = \frac{N\varrho_{Cu}}{M_{Cu}} = \frac{6{,}02\,.\,10^{26}\,.\,8{,}93\,.\,10^{-3}}{63{,}55}\ \mathrm{m}^{-3} \doteq 8{,}5\,.\,10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Po dosadení príslušných hodnôt do vzťahu (1) bude

$$W_F = \frac{(6{,}63\,.\,10^{-34})^2\,.\,0{,}67}{2\,.\,9{,}11\,.\,10^{-31}}\left(\frac{3\,.\,8{,}5\,.\,10^{28}}{8\,.\,3{,}14}\right)^{2/3}\cdot\frac{1}{1{,}6\,.\,10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 4{,}7\ \mathrm{eV}$$

kde sme využili vzťah 1 J = $(1/1{,}6\,.\,10^{-19})$ eV.

803. Nájdite maximálnu hodnotu rýchlosti vodivostných elektrónov v medi pri $T = 0$ K, keď Fermiho energia v medi $W_F = 4{,}7$ eV a keď koeficient voľnosti medi $f = 0{,}67$!

Riešenie:

Maximálna hodnota hybnosti elektrónov pri $T = 0$ K je $p_F = m^* v_m$, kde v_m je maximálna rýchlosť pri $T = 0$ K. Súvis medzi p_F a W_F je daný vzťahom

$$W_F = \frac{p_F^2}{2m^*}$$

z čoho $p_F = \sqrt{2m^* W_F}$. Pre v_m možno potom písať

$$v_m = \frac{1}{m^*}\,p_F = \sqrt{\frac{2W_F}{m^*}} = \sqrt{\frac{2\,.\,4{,}7\,.\,1{,}6\,.\,10^{-19}\,.\,0{,}67}{9{,}11\,.\,10^{-31}}} = 10{,}5\,.\,10^5\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

804. Optickými meraniami sa zistilo, že čistý polovodič má pri $t = 20$ °C šírku zakázaného pásma $\Delta W = 2$ eV. Vypočítajte, koľkokrát sa zvýši koncentrácia vodivostných elektrónov vo vodivostnom pásme, ak sa teplota polovodiča zmení z 20 °C na 320 °C!

Riešenie:

Ak predpokladáme, že pri zmene teploty sa ΔW nemení, potom pre koncentráciu elektrónov pri teplotách T_1 a T_2 možno písať

$$n_1 = 2\,\frac{(2\pi m^* k T_1)^{3/2}}{h^3}\,\mathrm{e}^{-\Delta W/kT_1}$$

$$n_2 = 2\,\frac{(2\pi m^* k T_2)^{3/2}}{h^3}\,\mathrm{e}^{-\Delta W/kT_2}$$

odkiaľ vyplýva

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\Delta W}{2k}\cdot\frac{T_2 - T_1}{T_1 . T_2}\right) =$$

$$= \left(\frac{593}{293}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{2 . 1{,}6 . 10^{-19}}{2 . 1{,}38 . 10^{-23}}\cdot\frac{300}{293 . 593}\right) = 1{,}4 . 10^9$$

805. Aká je šírka zakázaného pásma čistého polovodiča, keď sa koncentrácia vodivostných elektrónov pri zmene teploty z 20 °C na 220 °C zväčší $(1{,}55 . 10^4)$-krát?

Riešenie:

Pri analogickom postupe ako v predchádzajúcom príklade možno pre hľadané ΔW napísať vzťah

$$\Delta W = 2k\,\frac{T_1 . T_2}{T_2 - T_1}\ln\left[\frac{n_2}{n_1}\cdot\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= 2 . 1{,}38 . 10^{-23}\,\frac{293 . 493}{200}\ln\left[1{,}55 . 10^4 \cdot \left(\frac{293}{493}\right)^{3/2}\right] =$$

$$= 1{,}76 . 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1{,}1\ \mathrm{eV}$$

Úlohy

806. Akú maximálnu energiu má vodivostný elektrón v medi pri elektrickom prúde, ktorý vyvoláva vonkajšie elektrické pole s intenzitou $E = 1\ \mathrm{V . m^{-1}}$, keď špecifická elektrická vodivosť medi je $\gamma = 64{,}5 . 10^6\ \Omega^{-1} . \mathrm{m}^{-1}$, Hallova konštanta medi je $R_H = -0{,}7 . 10^{-10}\ \mathrm{m^3 . A^{-1} . s^{-1}}$ a koeficient voľnosti medi je $f = 0{,}67$?

$[W = 3{,}1 . 10^{-16}\ \mathrm{eV}]$

807. Medenou doštičkou šírky 1 cm a hrúbky 0,5 mm preteká elektrický prúd $I = 10$ A. Po vložení do homogénneho magnetického poľa, ktorého indukcia je rovnobežná s hrúbkou vzorky, bolo na vzorke pozdĺž šírky namerané Hallovo napätie $U_H = 10\ \mu V$. Vypočítajte Hallovu konštantu medi a indukciu použitého magnetického poľa!

[$R_H \doteq 7{,}3 \,.\, 10^{-11}\ C^{-1} \,.\, m^3$; $B = 6{,}85\ T$]

808. Vypočítajte koncentráciu vodivostných elektrónov a Hallovu konštantu striebra, keď predpokladáme, že každý atóm striebra prispieva do súboru vodivostných elektrónov jedným elektrónom!

[$n = 5{,}86 \,.\, 10^{28}\ m^{-3}$; $R_H = -1{,}06 \,.\, 10^{-10}\ C^{-1} \,.\, m^3$]

809. Nájdite Fermiho energiu sodíka a tejto energii odpovedajúcu rýchlosť vodivostných elektrónov v sodíku, keď koeficient voľnosti sodíka je $f = 1{,}67$!

[$W_F \doteq 5{,}2\ eV$; $v \doteq 1{,}7 \,.\, 10^6\ m \,.\, s^{-1}$]

810. Čistý polovodič má pri teplote 20 °C šírku zakázaného pásma $\Delta W = 0{,}7\ eV$. Ako sa zmení koncentrácia vodivostných elektrónov v polovodiči, keď sa jeho teplota zvýši na 120 °C?

$\left[\dfrac{n_2}{n_1} = 53\right]$

D ELEKTROMAGNETICKÉ ŽIARENIE

Pod pojem elektromagnetické žiarenie zahrňujeme široký okruh objektívnych realít, akými sú rozhlasové a televízne vlny, tepelné žiarenie, svetlo (infračervené, viditeľné, ultrafialové), röntgenové žiarenie a γ-žiarenie. V tejto časti sa zaoberáme predovšetkým takými jeho vlastnosťami, ktoré sa dajú vysvetliť predpokladom, že elektromagnetické žiarenie má vlnový charakter. V kapitole o fotometrii sledujeme javy súvisiace s energetickou stránkou svetla, v kapitolách geometrická, resp. vlnová optika skúmame javy, pri ktorých je vlnová dĺžka elektromagnetického žiarenia zanedbateľne malá, resp. porovnateľná s rozmermi zariadení, ktorými vlastnosti tohoto žiarenia sledujeme. Vlastnosti elektromagnetického žiarenia, ktoré dokumentujú jeho korpuskulárny charakter, sú sledované predovšetkým v časti E. V tejto časti uvádzame len niekoľko príkladov a úloh súvisiacich so žiarením čierneho telesa.

17 FOTOMETRIA

Úvod

a) Zdroj svetla vysiela na všetky strany svetelné žiarenie s určitou energiou. *Tokom žiarenia* Φ_e, nazývame tú svetelnú (vo všeobecnosti žiarivú) energiu, ktorá prejde nejakou plôškou za jednotku času.

Svetelným tokom Φ nazývame tok žiarenia vnímaný a zhodnotený normálnym ľudským okom. *Svetelná účinnosť žiarenia* K je pomer svetelného toku Φ k prislúchajúcemu toku žiarenia Φ_e cez istú plochu.

Svetelný tok, ktorý vysiela svetelný zdroj do plného priestorového uhla, nazýva sa *celková svietivosť svetelného zdroja*.

b) Keď bodový svetelný zdroj vysiela do priestorového uhla $d\omega$ svetelný tok $d\Phi$, podiel

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

sa nazýva *smerová svietivosť zdroja* v príslušnom smere. Celkový svetelný tok zdroja

$$\Phi = \int_0^{4\pi} I \, d\omega$$

Celkový svetelný tok zdroja, ktorého smerová svietivosť je na všetky strany rovnaká, je potom

$$\Phi = 4\pi I$$

c) *Intenzitou osvetlenia (osvetlením)* E plôšky dS nazývame podiel svetelného toku dΦ, dopadajúceho na túto plôšku, a veľkosti tejto plôšky:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}$$

Keď na plôšku dS dopadajú svetelné lúče z bodového zdroja svietivosti I, vzdialeného od plôšky na vzdialenosť r, a keď svetelné lúče dopadajú na plôšku pod uhlom α, intenzita osvetlenia plôšky je určená vzťahom

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$$

Príklady

811. V premietacom prístroji sa používa žiarovka, ktorá vydáva celkový svetelný tok $\Phi_0 = 4800$ lm. Pri premietaní je projekčné plátno tvaru obdĺžnika so stranami $a = 2$ m, $b = 1{,}5$ m rovnomerne osvetlené a intenzita jeho osvetlenia $E = 4$ lx. Aká časť svetelného toku, ktorý žiarovka vyšle, dopadne na projekčné plátno?

Riešenie:

V mieste, kde je intenzita osvetlenia E luxov, dopadne na plochu dS svetelný tok

$$d\Phi = E \, dS$$

a na plochu S svetelný tok

$$\Phi = \int_S E \, dS$$

Keď predpokladáme, že intenzita osvetlenia je na celej ploche plátna všade rovnaká, platí $E =$ konšt a

$$\Phi = ES$$

kde S je plošný obsah premietacieho plátna.

Z celkového svetelného toku Φ_0, vyslaného žiarovkou, dopadne na plátno časť

$$u = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

a po dosadení číselných hodnôt dostávame výsledok

$$u = \frac{4.2.1,5}{4800} = 0,0025, \quad \text{t. j.} \quad 0,25\ \%$$

812. Stena je osvetlená dvoma rovnakými sviečkami, postavenými vedľa seba a vzdialenými od steny $d = 1$ m. Vypočítajte, o akú vzdialenosť máme priblížiť ku stene druhú sviečku, keď jednu zahasíme, aby stena bola rovnako osvetlená ako predtým!

Riešenie:

Pre intenzitu osvetlenia plochy bodovým zdrojom platí vzťah

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha$$

Pretože obe sviečky sú od steny rovnako vzdialené na vzdialenosť d, majú rovnakú svietivosť I a svetelné lúče dopadajú na stenu kolmo, celková intenzita osvetlenia plochy od oboch sviečok bude daná vzťahom

$$E_0 = \frac{2I}{d^2}$$

Po zhasnutí jednej sviečky treba druhú posunúť do takej vzdialenosti x, aby intenzita osvetlenia steny bola rovnaká ako predtým, teda aby bol splnený vzťah

$$\frac{2I}{d^2} = \frac{I}{x^2}$$

odkiaľ

$$x = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$x = 0,7 \text{ m}$$

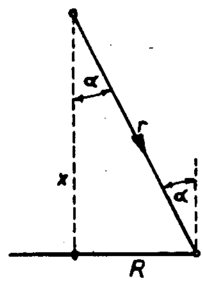
Sviečku treba posunúť k stene o 30 cm.

813. Uprostred nad kruhovou doskou stola polomeru $R = 1$ m je zavesený zdroj svetla. Vypočítajte, do akej výšky ho treba posunúť, aby intenzita osvetlenia okraja stola bola najväčšia!

Riešenie:

Keď je svetelný zdroj vo vzdialenosti r od okraja kruhovej dosky stola a uhol dopadu svetla je α *(obr. 191)*, intenzita osvetlenia v ktoromkoľvek mieste okraja stola je daná vzťahom

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}$$



Obr. 191

Nech je svetelný zdroj vo výške $h = x$ nad stredom stola, potom

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

takže

$$E = \frac{Ix}{(\sqrt{x^2 + R^2})^3}$$

Keď má byť intenzita osvetlenia maximálna, musí byť splnený vzťah

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0$$

čo vedie k rovnici

$$\frac{1}{(\sqrt{x^2 + R^2})^3} - \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2 + R^2})^5} = 0$$

Po úprave a riešení tejto rovnice dostávame:

$$x = \pm \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Lampu treba posunúť do výšky 70 cm nad stred stola.

814. Stôl je osvetlený dvoma žiarovkami, ktoré sú umiestnené na povale vo vzájomnej vzdialenosti $d = 1$ m, vo výške $h = 2$ m nad rovinou stola. Vypočítajte, aká bude intenzita osvetlenia

a) v bodoch pod zdrojmi svetla,

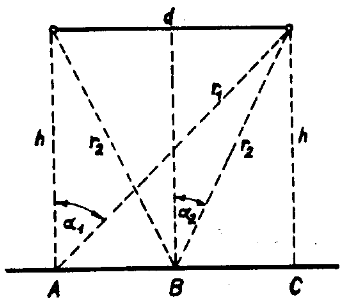
b) uprostred medzi týmito bodmi,

keď svietivosť každej žiarovky $I_0 = 200$ cd!

Riešenie:

Intenzita osvetlenia E v ktoromkoľvek bode stola sa bude rovnať súčtu intenzít osvetlenia od jednotlivých zdrojov, teda

$$E = E_1 + E_2 \tag{1}$$



Obr. 192

V prípade a) podľa označenia zrejmého z *obr. 192* platí:

$$E_1 = \frac{I_0}{h^2}; \quad E_2 = \frac{I_0 \cos \alpha_1}{r_1^2}$$

Keďže

$$\cos \alpha_1 = \frac{h}{r_1}; \quad r_1 = \sqrt{d^2 + h^2}$$

rovnica (1) bude mať tvar

$$E = \frac{I_0}{h^2} + \frac{I_0 h}{(\sqrt{d^2 + h^2})^3}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$E = 86 \text{ lx}$$

b) bod B, ležiaci uprostred medzi bodmi A a C, a body, v ktorých sú umiestnené obe žiarovky, tvoria rovnoramenný trojuholník so stranami r_2, r_2 a d. V tomto trojuholníku platí:

$$\cos \alpha_2 = \frac{h}{r_2}; \quad r_2 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}$$

a pre intenzity osvetlenia od jednotlivých zdrojov svetla dostaneme:

$$E_1 = E_2 = \frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}}$$

Po dosadení do rovnice (1) pre celkovú intenzitu osvetlenia v bode B dostaneme vzťah

$$E = 2E_1 = 2\,\frac{I_0 h}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^3}}$$

Napokon po dosadení číselných hodnôt bude:

$$E = 2E_1 = 2\,\frac{200\ \mathrm{cd}\,.\,2\ \mathrm{m}}{\sqrt{\left(4\mathrm{m}^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2\right)^3}} = 91{,}3\ \mathrm{cd}\,.\,\mathrm{m}^{-2} = 91{,}3\ \mathrm{lx}$$

Úlohy

815. Vypočítajte, aké je osvetlenie roviny v mieste, na ktoré zo svetelného zdroja svietivosti $I = 50$ cd, vzdialeného od tohto miesta $r = 4$ m, dopadajú svetelné lúče pod uhlom $\alpha = 25°$!

[$E = 2{,}83$ lx]

816. Nad stredom stola tvaru štvorca visí vo výške $h = 1$ m lampa svietivosti $I = 30$ cd. Vypočítajte, aká bude intenzita osvetlenia stola a) v jeho strede, b) v jednotlivých jeho rohoch, keď strana štvorcového stola je 2 m!

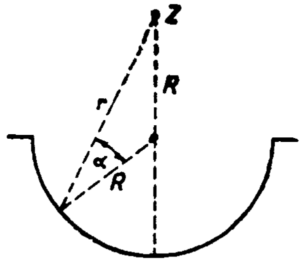
$$\left[E_1 = 30\ \mathrm{lx};\ E_2 = \frac{10\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{lx}\right]$$

817. Vypočítajte, aký svetelný tok dopadá zo zdroja svietivosti $I = 200$ cd na plochu s plošným obsahom $S = 10\ \mathrm{cm}^2$, postavenú kolmo na smer dopadajúceho svetla vo vzdialenosti $d = 2$ m od zdroja!

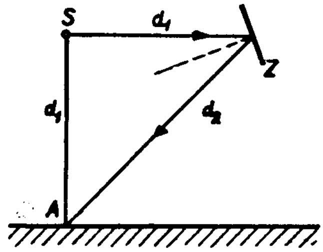
[$\Phi = 0{,}05$ lm]

818. Nad polguľou s polomerom $R = 1$ m vo výške, ktorá sa rovná priemeru gule, je bodový svetelný zdroj *(obr. 193)*. Nech má na všetky strany rovnakú svietivosť a vysiela do svojho okolia celkový svetelný rok 600 lúmenov. Vypočítajte, aká je intenzita osvetlenia v tom bode vnútorného povrchu polgule, na ktorý dopadá svetelný lúč pod uhlom $\alpha = 30°$!

[$E = 13{,}8$ lx]



Obr. 193



Obr. 194

819. Bodový svetelný zdroj S osvetľuje vodorovnú rovinu. Určite, ako sa zmení intenzita osvetlenia v bode A, v ktorom lúč dopadá na rovinu kolmo, keď zo strany k zdroju postavíme rovinné zrkadlo tak, aby bolo od zdroja S rovnako vzdialené ako rovina. Zrkadlo odráža svetelný lúč do bodu A. Predpokladáme, že zrkadlo odráža svetlo úplne *(obr. 194)*.

$$\left[\frac{E}{E_0} = 1{,}12\right]$$

18 GEOMETRICKÁ OPTIKA

Úvod

a) *Zákon odrazu svetla*

Svetelný lúč dopadajúci na rozhranie dvoch prostredí sa odráža tak, že ostáva v rovine dopadu a zviera s kolmicou dopadu uhol α', rovnajúci sa uhlu α, ktorý zviera dopadajúci lúč s kolmicou dopadu. Rovina dopadu je určená dopadajúcim lúčom a kolmicou dopadu.

b) *Zákon lomu svetla*

Keď svetelný lúč vniká do iného prostredia, ostáva v izotropnom prostredí v rovine dopadu, no od svojho pôvodného smeru sa odchýli. Keď je uhol dopadu α_1 a uhol lomu lúča α_2, podiel

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = n_{12}$$

nezávisí od uhla dopadu a nazýva sa *relatívny index lomu. Absolútnym indexom lomu* prostredia n nazývame podiel

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = n$$

kde α_0 je uhol dopadu vo vákuu a α uhol lomu lúča v danom prostredí.

Súvis medzi relatívnym indexom lomu dvoch prostredí a ich absolútnymi indexmi lomu dáva rovnica

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

Z dvoch prostredí považujeme za opticky hustejšie to, ktorého absolútny index lomu je väčší.

Pri postupe svetelného lúča z prostredia opticky hustejšieho do redšieho je uhol lomu väčší ako uhol dopadu.

Hraničným uhlom nazývame ten uhol dopadu ε, ktorému prislúchajúci uhol lomu je 90°. Pre hraničný uhol platí podmienka

$$\sin \varepsilon = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

kde n_2 je index lomu druhého (redšieho) a n_1 prvého (hustejšieho) prostredia. Ak je uhol dopadu väčší ako hraničný uhol, lúč nevniká do druhého prostredia a nastáva *úplný odraz.*

Keď svetelný lúč prechádza *hranolom*, vystupuje z neho po dvojnásobnom lome odklonený od pôvodného smeru o uhol δ *(deviačný).* Tento uhol bude najmenší, keď lomený lúč vnútri hranola prechádza kolmo na os uhla φ, zovretého stenami hranola. Vzťah medzi minimálnou deviáciou δ, lámavým uhlom hranola φ a indexom lomu udáva rovnica

$$n = \frac{\sin \dfrac{\varphi + \delta}{2}}{\sin \dfrac{\varphi}{2}}$$

Index lomu látky je pre rôzne farby, t. j. pre svetlo rôznej vlnovej dĺžky, rôzny.

c) *Guľové zrkadlo* a *guľové lámové plochy* sú také prvky optického zobrazovania, ktoré pomocou odrazu, resp. lomu svetelných lúčov idúcich v úzkom priestore v blízkosti osi priraďujú každému bodu ako svetelnému zdroju určitý bod ako obraz zdroja, priamke priamku a rovine rovinu. Osou zrkadla alebo guľovej lámavej plochy nazývame priamku prechádzajúcu stredom krivosti zrkadla alebo guľovej lámavej plochy a jej vrcholom. Obraz prislúchajúci bodu ležiacemu na osi v nekonečne sa nazýva obrazové ohnisko F', bod na optickej osi, ktorého obraz je v nekonečne, je predmetové ohnisko F.

1. *Zobrazovacia rovnica* pre guľové zrkadlo má tvar

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

kde a je vzdialenosť predmetu, b vzdialenosť obrazu od vrcholu zrkadla a f je vzdialenosť ohniska od vrcholu zrkadla. Pre ňu platí:

$$f = \frac{r}{2}$$

Polomer krivosti guľovej plochy dutého zrkadla označujeme číslom kladným, vydutého číslom záporným.

2. Pre zobrazovanie pomocou guľovej lámavej plochy s polomerom r, oddeľujúcej prostredie s indexom lomu n_1 od prostredia s indexom lomu n_2, platí rovnica

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

a pre vzdialenosť jej obrazového ohniska F', resp. predmetového ohniska F od vrcholu platí rovnica

$$f' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}; \quad f = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}$$

Bočné zväčšenie guľového zrkadla, resp. guľovej lámavej plochy, definované ako podiel dĺžky obrazu y' a predmetu y, sa vypočíta zo vzťahov

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

kde x a x' sú vzdialenosti predmetu a obrazu od predmetového a obrazového ohniska. Platí pre ne:

$$x = a - f; \quad x' = b - f'$$

Pri guľových zrkadlách predmetové a obrazové ohnisko splýva, teda

$$f = f'$$

Pre voľbu znamienok vzdialeností platí táto dohoda:

aa) vzdialenosti zdroja (predmetu) od vrcholu zrkadla alebo guľovej lámavej plochy priradíme kladné znamienko v zmysle proti postupu svetla dopadajúceho na guľovú plochu;

bb) vzdialenosti obrazu od vrcholu zrkadla alebo guľovej lámavej plochy priradíme kladné znamienko v zmysle postupu svetla, ktoré sa na guľovej lámavej ploche odrazí, alebo lomí;

cc) polomer guľovej odrážajúcej i lámavej plochy označujeme takým znamienkom, akoby stred guľovej plochy bol obrazom;

dd) dĺžke úsečky kolmej na os priradíme kladné znamienko, keď je nad osou.

d) *Šošovkou* nazývame opticky priehľadné prostredie, ohraničené dvoma guľovými plochami alebo jednou guľovou plochou a rovinou.

Tenkou šošovkou nazývame šošovku, ktorej hrúbka d je zanedbateľne malá ($d \doteq 0$) v porovnaní s polomermi krivosti guľových plôch, ktoré ohraničujú šošovku.

Zobrazovacia rovnica pre tenkú šošovku, obklopenú zo všetkých strán rovnakým prostredím, je:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n_r-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

kde n_r je relatívny index lomu prostredia šošovky vzhľadom na jej okolie, r_1, r_2 sú polomery guľových plôch ohraničujúcich šošovku. Vzdialenosť predmetu a a obrazu b meriame od stredu šošovky.

Predmetová i ohnisková vzdialenosť takejto šošovky je rovnaká a je určená vzťahom

$$D=\frac{1}{f}=(n_r-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

Veličina D sa nazýva *optická mohutnosť* šošovky.

Bočné zväčšenie tenkej šošovky sa vypočíta pomocou vzťahov

$$Z=\frac{y'}{y}=-\frac{b}{a}=-\frac{x'}{f}=-\frac{f}{x}$$

Zobrazovacia rovnica šošovky v ohniskových súradniciach má tvar

$$xx'=f^2$$

kde

$$x=a-f; \quad x'=b-f$$

Hrubou šošovkou nazývame šošovku, ktorej hrúbka d nie je zanedbateľná v porovnaní s polomermi krivosti guľových plôch, ktoré ohraničujú šošovku. Zobrazovanie takouto šošovkou je úplne určené polohou hlavných rovín a ohniskovou vzdialenosťou.

Vzdialenosti predmetovej hlavnej roviny od predného vrcholu šošovky V, resp. obrazovej hlavnej roviny od zadného vrcholu šošovky V' sú dané vzťahmi

$$h=-\frac{n_r-1}{n_r}\cdot\frac{d}{r_2}f; \quad h'=-\frac{n_r-1}{n_r}\cdot\frac{d}{r_1}f$$

Vzdialenosť predmetového ohniska od predmetovej hlavnej roviny, ako aj obrazového ohniska od obrazovej hlavnej roviny je rovnaká a vypočíta sa pomocou rovnice

$$D=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{(n_r-1)^2}{n_r}\cdot\frac{d}{r_1r_2}$$

e) *Centrovaná sústava šošoviek* sa skladá z dvoch alebo viacerých šošoviek, ktoré majú spoločnú optickú os. Optická mohutnosť centrovanej sústavy dvoch tenkých šošoviek, ktoré sú od seba vzdialené na vzdialenosť v, je daná vzťahom

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}$$

kde f_1, f_2 sú ohniskové vzdialenosti šošoviek tvoriacich sústavu.

f) *Uhlovým zväčšením* optického prístroja nazývame podiel

$$\gamma = \frac{u'}{u} \qquad \gamma = \frac{\mathrm{tg}\,\sigma'}{\mathrm{tg}\,\sigma} \text{ pre malé } \sphericalangle \ \frac{\sigma'}{\sigma}$$

kde u' je zorný uhol, pod ktorým vidíme predmet prístrojom, a u zorný uhol, pod ktorým vidí voľné oko predmet vo vzdialenosti oku najprimeranejšej *(konvenčnej)*.

1. *Uhlové zväčšenie* lupy je dané vzťahom

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{l}{f}$$

keď sa obraz vytvorí v nekonečne alebo

$$\gamma = \frac{l}{f} + 1$$

keď sa obraz javí oku v konvenčnej vzdialenosti l.

2. *Mikroskop* je centrovaná optická sústava, zložená z objektívu a okulára. Objektív vytvorí obraz predmetu y' obvykle v ohniskovej rovine okulára a okulárom vytvorený obraz v nekonečne sa pozoruje neakomodovaným okom.

Mikroskopom dosiahnuté zväčšenie

$$\gamma = \gamma_1 . \gamma_2$$

kde $\gamma_1 = \frac{\Delta}{f_1}$ je bočné zväčšenie objektívu a $\gamma_2 = \frac{l}{f_2}$ zväčšenie okulára ako lupy. Δ je *optický interval* mikroskopu, ktorý predstavuje vzdialenosť medzi obrazovou ohniskovou rovinou objektívu a predmetovou ohniskovou rovinou okulára.

Rozlišovaciu schopnosť mikroskopu d posudzujeme podľa najmenšej vzdialenosti dvoch bodov, ktorú ešte pri pozorovaní mikroskopom rozoznáme. Keď pozorujeme vo svetle vlnovej dĺžky λ, je splnený vzťah

$$d \geqq \frac{\lambda}{2n \sin u}$$

kde n je index lomu prostredia, v ktorom je pozorovaný predmet, a u uhol medzi osou a krajným lúčom, vystupujúcim z pozorovaného bodu do prednej šošovky objektívu.

Výraz

$$A = n \sin u$$

sa nazýva aj *číselná apertúra*.

3. *Hvezdársky ďalekohľad* (Keplerov) je centrovaná sústava objektívu a okulára, ktorej optický interval je nulový. Objektív a okulár sú spojné šošovky. Zväčšenie takéhoto ďalekohľadu

$$\gamma = \frac{f_1}{f_2}$$

kde f_1 je ohnisková vzdialenosť objektívu a f_2 okulára.

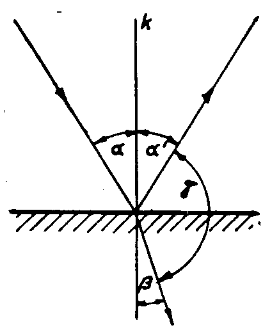
Príklady

820. Na sklenú doštičku s indexom lomu $n = 1{,}5$ dopadá svetelný lúč. Pod akým uhlom dopadol, keď lomený lúč zviera s odrazeným lúčom na rozhraní uhol $\gamma = 60°$?

Riešenie:

Keď svetelný lúč dopadá na rozhranie pod uhlom α, odráža sa pod uhlom $\alpha' = \alpha$ a láme sa pod uhlom β, pre ktorý podľa zákona lomu platí:

$$\sin \alpha = n \sin \beta \qquad (1)$$



Obr. 195

Odrazený lúč zviera s lomeným uhlom uhol γ, preto podľa *obr. 195* je splnená rovnica

$$\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$$

a po dosadení do rovnice (1) zrejme platí:

$$\sin \alpha = n \sin [2R - (\alpha + \gamma)] = n \sin (\alpha + \gamma)$$

a ďalej

$$\sin \alpha = n(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) \tag{2}$$

Keď obe strany rovnice (2) vydelíme $\cos \alpha$ a rovnicu riešime pre $\operatorname{tg} \alpha$, pre hľadaný uhol dopadu vyplýva vzťah

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{n \sin \gamma}{1 - n \cos \gamma}$$

Keď sem dosadíme číselné hodnoty, dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{3}{2} \sin 60°}{1 - \frac{3}{2} \cos 60°} = 3\sqrt{3}$$

odkiaľ

$$\alpha = 79° \, 06'$$

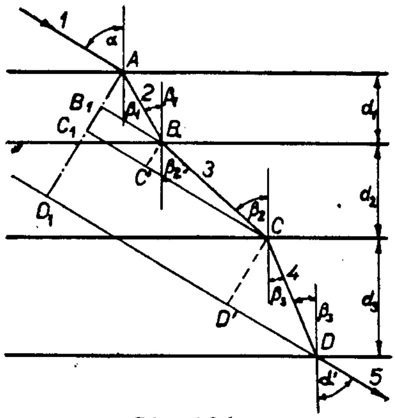
* **821.** Svetelný lúč, postupujúci najprv vo vzduchu, prechádza postupne troma rôznymi prostrediami, ktoré sú oddelené rovnobežnými rovinnými rozhraniami, a po prechode nimi vystupuje znova do vzduchu. Dokážte, že lúč vystupujúci po lome do vzduchu bude vzhľadom na dopadajúci len posunutý a určite veľkosť tohto posunutia! Indexy lomu jednotlivých prostredí sú: $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 1{,}3$, $n_3 = 1{,}4$, hrúbky príslušných planparalelných vrstiev $d_1 = 2$ cm, $d_2 = 3$ cm, $d_3 = 4$ cm. Na prvé rozhranie dopadá lúč pod uhlom $\alpha = 60°$.

Riešenie:

Podľa označenia z *obr. 196* pre lom na prvom prostredí platí:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n_0} \tag{1}$$

kde n_0 je index lomu vzduchu.



Obr. 196

Na druhé prostredie dopadá lúč pod uhlom β_1 a láme sa pod uhlom β_2. Podľa zákona lomu preto bude:

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{2}$$

a podobne pre lom na treťom prostredí platí:

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2} \tag{3}$$

Keď predpokladáme, že lúč vystupuje do vzduchu pod uhlom α', podľa zákona lomu

$$\frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha'} = \frac{n_0}{n_3} \tag{4}$$

Vynásobením rovníc (1) až (4) a po úprave dostávame:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 1$$

čo znamená, že $\alpha = \alpha'$.

Svetelný lúč po lome vychádza len posunutý.

Z rovníc (1) až (3) po dosadení príslušných číselných hodnôt pre indexy lomu ľahko určíme príslušné uhly

$$\beta_1 = 35°\,16'; \quad \beta_2 = 41°\,46'; \quad \beta_3 = 38°\,13' \tag{5}$$

Celkové posunutie vystupujúceho lúča (5) vzhľadom na dopadajúci (1) je podľa *obr. 196* dané vzťahom

$$x = \overline{AD_1} = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} \tag{6}$$

Ale

$$\overline{AB_1} = \overline{AB} \sin(\alpha - \beta_1), \quad \text{kde} \quad \overline{AB} = \frac{d_1}{\cos \beta_1}$$

$$\overline{B_1C_1} = \overline{BC'} = \overline{BC} \sin(\alpha - \beta_2), \quad \text{kde} \quad \overline{BC} = \frac{d_2}{\cos \beta_2}$$

a

$$\overline{C_1D_1} = \overline{CD'} = \overline{CD} \sin(\alpha - \beta_3), \quad \text{kde} \quad \overline{CD} = \frac{d_3}{\cos \beta_3}$$

takže po dosadení do rovnice (6) pre celkové posunutie dostávame:

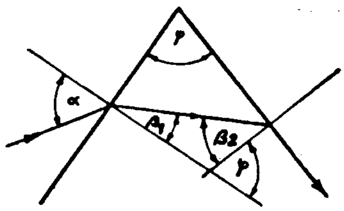
$$x=\frac{d_1 \sin(\alpha-\beta_1)}{\cos\beta_1}+\frac{d_2 \sin(\alpha-\beta_2)}{\cos\beta_2}+\frac{d_3 \sin(\alpha-\beta_3)}{\cos\beta_3}$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$x=\frac{2\sin(60°-35°\,16')}{\cos 35°\,16'}+\frac{3\sin(60°-41°\,46')}{\cos 41°\,46'}+\frac{4\sin(60°-38°\,13')}{\cos 38°\,13'}=$$

$$=4{,}8 \text{ cm}$$

822. Svetelný lúč dopadá na prednú stenu optického hranola pod takým vhodným uhlom α, že po lome hranolom prechádzajúci lúč dopadá na zadnú stenu práve pod hraničným uhlom a neláme sa. Vypočítajte, aký je index lomu skla, z ktorého je hranol zhotovený, keď lámavý uhol je φ!



Obr. 197

Riešenie:

Podľa označenia na *obr. 197* platí

$$\beta_1+\beta_2=\varphi \tag{1}$$

Pre lom na prednej stene platí podľa zákona lomu vzťah

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}=n \tag{2}$$

a vzhľadom na podmienku, že uhol β_2 je hraničný, pre lom na zadnej stene možno písať:

$$\sin\beta_2=\frac{1}{n} \tag{3}$$

Podľa rovnice (1)

$$\cos\varphi=\cos(\beta_1+\beta_2)=\cos\beta_1\cos\beta_2-\sin\beta_1\sin\beta_2$$

Keď sem dosadíme za $\sin\beta_1$ a $\sin\beta_2$ z rovníc (2) a (3) a pomocou trigonometrických vzťahov nájdeme príslušné vzťahy pre $\cos\beta_1$ a $\cos\beta_2$:

$$\cos \beta_1 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}; \quad \cos \beta_2 = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

dostaneme:

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} - \frac{\sin \alpha}{n^2}$$

Po úprave dostaneme rovnicu

$$n^4(\cos^2 \varphi - 1) + n^2(1 + \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \varphi = 0$$

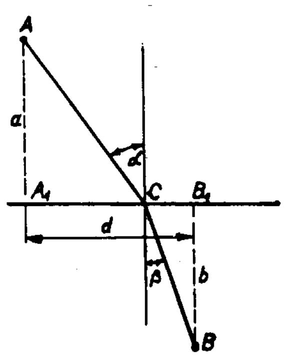
odkiaľ po jej riešení vyplýva pre hľadaný index lomu vzťah

$$n = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}}{\sin \varphi}$$

823. Dve rôzne optické prostredia s indexmi lomu n_1 a n_2 sú oddelené rovinným rozhraním. Určite, ktorým smerom má postupovať svetelný lúč, aby z daného bodu A v prvom prostredí dospel do bodu B v prostredí druhom v čo najkratšom čase!

Riešenie:

Predpokladajme, že svetelný lúč bude postupovať cestou ABC *(obr. 198)*, kde C je bod ležiaci na spoločnom rozhraní obidvoch prostredí. Keď si tento bod zvolíme za začiatok pravouhlej súradnicovej sústavy s osou x v rozhraní, bod A



Obr. 198

bude mať súradnice (x, a) a bod B súradnice $(d - x, b)$, keď sme stálu vzdialenosť pätky kolmice A a B, t. j. vzdialenosť A_1B_1 označili d. Keď sú rýchlosti svetla v jednotlivých prostrediach v_1, v_2, čas potrebný na prebehnutie dráhy AC je daný vzťahom

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}$$

a čas potrebný na prebehnutie dráhy CB vzťahom

$$t_2 = \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v^2}$$

Celkový čas

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v^2}$$

má byť minimálny, čo bude splnené, keď

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Po príslušnej derivácii máme:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0 \qquad (1)$$

Ako je zrejmé z *obr. 198*,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin\alpha \quad \text{a} \quad \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = \sin\beta \qquad (2)$$

kde α, resp. β predstavujú uhly, pod ktorými svetelný lúč dopadá na rozhranie, resp. sa na ňom láme. Po dosadení vzťahov (2) do rovnice (1) dostávame:

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0$$

odkiaľ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \quad \text{ale} \quad \frac{v_1}{v_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$$

čiže

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

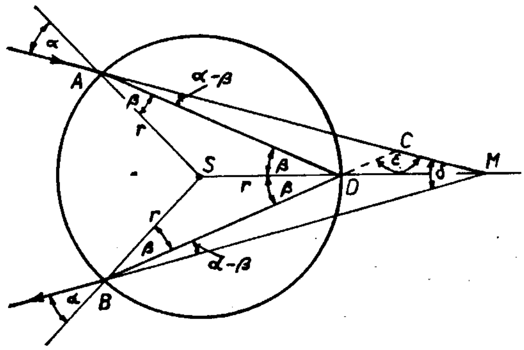
To je známy zákon lomu. Svetlo pri prechode z jedného prostredia do druhého prejde v najkratšom čase dráhu spĺňajúcu podmienky zákona lomu.

ζ **824.** Svetelný lúč dopadá zo vzduchu na vodnú kvapku tvaru gule, láme sa do nej a po odraze v kvapke vystupuje z nej von. Vypočítajte, pod akým uhlom má lúč dopadnúť, aby odchýlka vystupujúceho lúča červenej farby bola vzhľadom na dopadajúci lúč maximálna! Aká bude táto odchýlka? Index lomu vodnej kvapky pre červenú farbu $n_č = 1{,}331$.

Riešenie:

Z *obr. 199* ľahko zistíme, že uhol α, pod ktorým lúč vystupuje z kvapky do vzduchu, je rovnaký ako uhol, pod ktorým vstupuje zo vzduchu do kvapky. Keď celkovú odchýlku vstupujúceho a vystupujúceho lúča označíme δ, vyplýva preň z ΔBCM vzťah

$$\delta = 2R - (\alpha - \beta + \varepsilon) \tag{1}$$



Obr. 199

Pre uhol ε z ΔADC zasa máme:

$$2R - \varepsilon + \alpha - \beta + 2R - 2\beta = 2R$$

Keď za ε dosadíme do rovnice (1) a upravíme, dostávame:

$$\delta = 4\beta - 2\alpha \tag{2}$$

Keď má byť tento uhol minimálny, musí byť splnená podmienka

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$$

čo vedie k rovnici

$$4\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = 0 \tag{3}$$

Podľa zákona lomu $\sin\alpha = n \sin\beta$. Keď obe strany tejto rovnice derivujeme podľa α, po úprave máme vzťah

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}$$

a po dosadení do rovnice (3)

$$2\cos\alpha = n\cos\beta$$

Riešením rovníc

$$2 \cos \alpha = n \cos \beta$$

a

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

určíme uhol α. Keď obe rovnice umocníme na druhú a sčítame, dostaneme:

$$4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = n^2$$

odkiaľ po úprave

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{4 - n^2}}{3}$$

Po dosadení číselnej hodnoty $n_č = 1{,}331$ pre hľadaný uhol dopadu vychádza hodnota

$$\alpha = 59° \; 32' \; 17''$$

Červený lúč sa láme pod uhlom $\beta_č$, ktorý vyhovuje rovnici

$$\sin \beta_č = \frac{\sin \alpha}{n_č}$$

odkiaľ po dosadení dostaneme

$$\beta_č = 40° \; 21' \; 40''$$

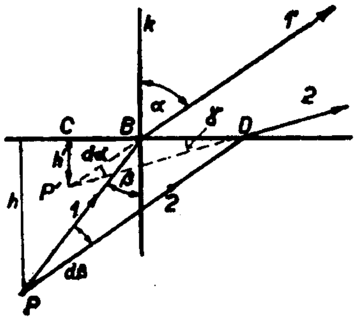
Pre odchýlku lúča červenej farby vychádza z rovnice (2) hodnota

$$\delta = 4\beta_č - 2\alpha = 42° \; 22' \; 06''$$

825. Pozorovateľ stojí na okraji vodného bazénu, v ktorom je hĺbka vody $h = 2{,}81$ m, a pozoruje predmet ležiaci na jeho dne. V akej hĺbke h' sa vytvorí obraz pozorovaného predmetu, keď smer, v ktorom pozorovateľ pozoruje obraz, zviera s kolmicou na hladinu vody uhol $\alpha = 60°$?

Riešenie:

Vyberme zo zväzku lúčov dva (1), (2), ktoré spolu zvierajú malý uhol $d\beta$ a vychádzajú z predmetu P. Po lome na rozhraní vody a vzduchu vstupujú do oka *(obr. 200)*. Lomené lúče (1') a (2'), dopadajúce do oka zo zdanlivého obrazu P, zvierajú uhol $d\alpha$.



Obr. 200

Podľa označenia na *obr. 200* platí:

$$\overline{BP'} = \frac{h'}{\cos\alpha} \tag{1}$$

$$\overline{BP} = \frac{h}{\cos\beta} \tag{2}$$

V trojuholníku BDP' podľa sínusovej vety platí:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} = \frac{\sin \mathrm{d}\alpha}{\sin\gamma} \tag{3}$$

a pretože $\sin \mathrm{d}\alpha \doteq \mathrm{d}\alpha$, $\gamma = R - (\alpha + \mathrm{d}\alpha)$ a $\sin\gamma = \sin[R - (\alpha + \mathrm{d}\alpha)] = \cos(\alpha + \mathrm{d}\alpha) \doteq \cos\alpha$, možno rovnicu (3) prepísať do tvaru

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP'}} \doteq \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$

Analogickým postupom z trojuholníka BDP vyplýva:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BP}} \doteq \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} \tag{5}$$

Keď vydelíme rovnicu (4) rovnicou (5) a výsledok porovnáme s výrazom $\frac{\overline{BP}}{\overline{BP'}}$, vyplývajúcim z rovníc (1) a (2), dostaneme vzťah

$$\frac{h'\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{h\,\mathrm{d}\beta}{\cos^2\beta} \tag{6}$$

Podiel $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\beta}$ určíme zo zákona lomu. Derivovaním rovnice $\sin\alpha = n\sin\beta$ podľa uhla α dostávame:

$$\cos\alpha = n\cos\beta\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}$$

odkiaľ

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = n\,\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

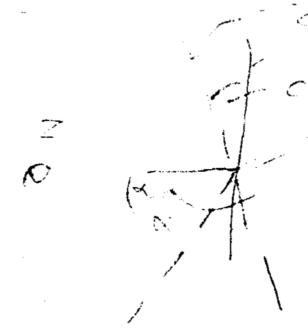
Po dosadení tohto výrazu do rovnice (6) dostávame pre zdanlivú hĺbku vzťah

$$h' = \frac{h}{n} \cdot \frac{\cos^3\alpha}{\cos^3\beta} \tag{7}$$

Neznámy uhol β určíme zo zákona lomu

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

odkiaľ po úprave dostaneme:



$$\cos\beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}$$

Pre zdanlivú hĺbku h' zo vzťahu (7) potom vyplýva:

$$h' = hn^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)^3$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$h' = 2{,}81\ \text{m} \,.\, 1{,}33^2\left(\frac{\cos 60°}{\sqrt{1{,}33^2 - \sin^2 60°}}\right)^3 = 0{,}6\ \text{m}$$

826. Na rovinné zrkadlo dopadá zo svetelného zdroja kolmo svetelný lúč tak, že po odraze vytvorí na tienidle, ktoré je vzdialené od zrkadla $d = 5$ m a je rovnobežné so zrkadlom, svetelnú stopu. Zrkadlo uvedieme do rovnomerného otáčavého pohybu okolo zvislej osi tak, že za každú sekundu vykoná 10 otáčok. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa bude pohybovať svetelná stopa na tienidle a aká bude táto rýchlosť v tom mieste tienidla, ktoré je k zrkadlu najbližšie!

Riešenie:

Keď sa zrkadlo otáča so stálou frekvenciou f, jeho uhlová rýchlosť je stála a rovná sa

$$\omega = 2\pi f$$

Ak uhol dopadu α svetelného lúča meriame od kolmice dopadu, je v základnej polohe $\alpha = 0$. Po stočení zrkadla o uhol $\alpha = \omega t$ z tejto polohy lúč dopadajúci pod uhlom α sa odchýli o uhol $2\alpha = 2\omega t$ a svetelná stopa na tienidle sa posunie o vzdialenosť x, pre ktorú podľa *obr. 201* platí:

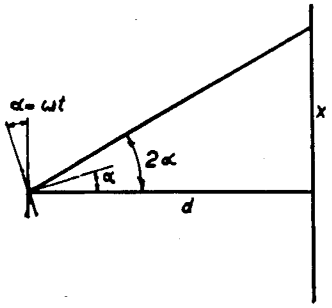
$$x = d\ \mathrm{tg}\ 2\omega t$$

Okamžitá rýchlosť svetelnej stopy

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\omega d}{\cos^2 2\omega t}$$

Keď je svetelná stopa v najbližšom mieste k zrkadlu, dopadá svetelný lúč pod uhlom $\alpha = k2\pi$, kde $k = 0, 1, 2 \dots$ a jej rýchlosť v tomto mieste

$$v = 200\pi \text{ m.s}^{-1} = 628 \text{ m.s}^{-1}$$



Obr. 201

827. Sviečka stojí 60 cm pred dutým zrkadlom. Keď ju priblížime k zrkadlu o 10 cm, zväčší sa vzdialenosť obrazu od zrkadla o 80 cm. Aká je ohnisková vzdialenosť zrkadla?

Riešenie:

Keď použijeme zrkadlovú rovnicu v tvare

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

v prvej polohe je splnená rovnica

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \qquad (1)$$

a v druhej polohe

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{b+80} = \frac{1}{f} \qquad (2)$$

Porovnaním rovníc (1) a (2) dostaneme vzťah

$$\frac{1}{60} + \frac{1}{b} = \frac{1}{50} + \frac{1}{b+80}$$

odkiaľ po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$b^2 + 80b - 24\,000 = 0$$

ktorej vyhovuje riešenie $b_1 = 120$, $b_2 = -200$.

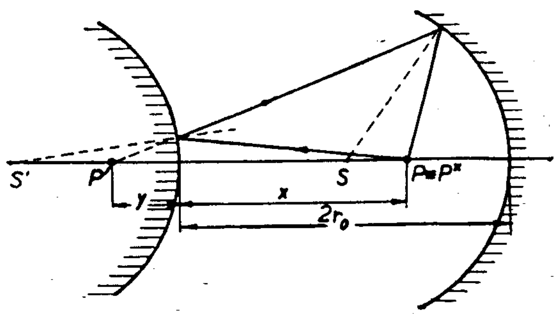
Spätným dosadením do jednej z rovníc (1) alebo (2) dostávame dve riešenia pre hľadanú ohniskovú vzdialenosť:

$$f_1 = 40\ \text{cm}; \quad f_2 = 85{,}7\ \text{cm}$$

828. Vypuklé a duté zrkadlo s rovnakými polomermi krivosti r_0 sú postavené proti sebe zrkadliacimi plochami tak, že ich optické osi splývajú a ich vzájomná vzdialenosť $d = 2r_0$. Do ktorého bodu ležiaceho na spoločnej osi zrkadiel treba umiestniť bodový zdroj svetla, aby sa z neho vychádzajúce lúče po odraze na vypuklom a potom na dutom zrkadle znova stretli v tomto bode?

Riešenie:

Svietiaci bod zobrazíme najprv vypuklým zrkadlom a takto vytvorený obraz zobrazíme dutým zrkadlom a vyjadríme podmienku, aby výsledný obraz padol do toho istého bodu, kde bol svietiaci predmet.



Obr. 202

Keď svietiaci predmet *P (obr. 202)* uložíme do vzdialenosti $a = x$ pred vypuklé zrkadlo, obraz P', vytvorený vypuklým zrkadlom, bude virtuálny vo vzdialenosti $b = -y$ $(y > 0)$ od vrcholu zrkadla a pre zobrazenle platí rovnica

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{r_0} \tag{1}$$

Vzdialenosť obrazu P, vytvoreného vypuklým zrkadlom, od vrcholu dutého zrkadla bude $a_2 = 2r_0 + y$. Keď výsledný obraz P^* má byť zase v mieste P, musí byť jeho obrazová vzdialenosť meraná od vrcholu dutého zrkadla

$$b_2 = 2r_0 - x$$

a podľa zrkadlovej rovnice zrejme platí:

$$\frac{1}{2r_0 + y} + \frac{1}{2r_0 - x} = \frac{2}{r_0} \tag{2}$$

Riešenie rovníc (1) a (2) vedie ku kvadratickej rovnici

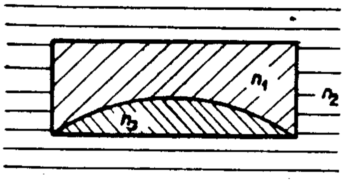
$$2x^2 - 2r_0 x - r^2 = 0$$

ktorej korene sú: $x_1 = 1{,}35 r_0$, $x_2 = -0{,}35 r_0$.

Fyzikálne vyhovuje iba prvé riešenie.

Zdroj má byť vzdialený od vypuklého zrkadla vo vzdialenosti $v = 1{,}35 r_0$.

829. Tenká, ploskodutá šošovka je ponorená vo vodorovnej polohe do vody tak, že priestor pod ňou je vyplnený vzduchom *(obr. 203)*. Celková optická mohutnosť tejto optickej sústavy $D = -2{,}6$ dioptrií. Určte polomer krivosti šošovky!



Obr. 203

Riešenie:

Ide o centrovanú optickú sústavu, skladajúcu sa z dvoch tesne k sebe priložených šošoviek. Optická mohutnosť takejto sústavy sa rovná súčtu optických mohutností šošoviek tvoriacich sústavu *(obr. 203)*.

Prvá šošovka je zo skla, ploskodutá, vo vodnom prostredí. Jej optická mohutnosť

$$D_1 = \frac{1}{f_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{1}$$

kde n je relatívny index lomu skla a vody. Keď n_1, n_2 sú absolútne indexy lomu skla a vody,

$$n = \frac{n_1}{n_2}$$

Pretože ide o ploskodutú šošovku, $r_1 = -r_0$, $r_2 = \infty$ a podľa rovnice (1) potom platí

$$D_1 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right)$$

Druhá šošovka je ploskovypuklá, vzdušná, vo vodnom prostredí. Jej polomery krivosti sú: $r_1 = r_0$, $r_2 = \infty$ a optická mohutnosť bude:

$$D_2 = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0}$$

kde n_3 je absolútny index lomu vzduchu.

Optická mohutnosť celej sústavy

$$D = D_1 + D_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(-\frac{1}{r_0}\right) + \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\frac{1}{r_0}$$

Po úprave dostaneme:

$$D = \frac{n_3 - n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{r_0}$$

odkiaľ pre hľadaný polomer krivosti šošovky platí:

$$r_0 = \frac{n_3 - n_1}{n_2} \cdot \frac{1}{D}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame

$$r_0 = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{-2{,}6} = 0{,}1442 \text{ m} = 14{,}42 \text{ cm}$$

830. Dokážte, že najmenšia vzdialenosť medzi predmetom a jemu prislúchajúcim obrazom pri spojnej šošovke s ohniskovou vzdialenosťou f sa $v = 4f$!

Riešenie:

Podmienkou, aby vzdialenosť predmetu a obrazu $v = d + b$ bola minimálna, je, aby sa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a + b) = 0 \tag{1}$$

kde a je vzdialenosť predmetu a b vzdialenosť obrazu od šošovky. Zo šošovkovej rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

vyplýva pre b vzťah

$$b = \frac{af}{a - f}$$

Pre vzdialenosť obrazu a predmetu v potom dostaneme:

$$v = a + b = a + \frac{af}{a - f} = \frac{a^2}{a - f} \tag{2}$$

Z podmienky minima (1) vyplýva:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{a^2}{a-f}\right)}{\mathrm{d}a}=\frac{2a(a-f)-a^2}{(a-f)^2}=0$$

odkiaľ po úprave, za predpokladu, že $a \neq f$, dostávame rovnicu

$$a^2-2af=0$$

ktorej riešením je $a=2f$.

Pomocou druhej derivácie sa ľahko presvedčíme, že hodnota $a=2f$ vyhovuje podmienke minima.

Z rovnice (2) pre najmenšiu vzdialenosť obrazu a predmetu vyplýva

$$v=a+b=4f$$

831. Zdroj svetla je vo vzdialenosti L od tienidla. Túto vzdialenosť nemeníme. Vypočítajte, do akej vzdialenosti od zdroja treba umiestniť tenkú spojnú šošovku s ohniskovou vzdialenosťou f, aby sa na tienidle vytvoril reálny obraz zdroja! Určite podmienku, kedy je to možné!

Riešenie:

Pretože vzdialenosť tienidla od svetelného zdroja L je známa, predmetu vo vzdialenosti a od šošovky odpovedá obraz vo vzdialenosti $b=L-a$. Po dosadení do šošovkovej rovnice máme:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{L-a}=\frac{1}{f}$$

a riešením tejto rovnice pre a vyplýva vzťah

$$a=\frac{L\pm\sqrt{L^2-4Lf}}{2}$$

Keď diskriminant $L^2-4Lf>0$, čo je zaiste splnené, keď $L>4f$, existujú dve rôzne polohy šošovky, pri ktorých na tienidle pri stálej vzdialenosti predmetu a tienidla vznikne ostrý obraz. Sú to tieto polohy:

$$a_1=\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}-f}$$

$$a_2=\frac{L}{2}-\sqrt{\frac{L^2}{4}-f}$$

Keď $L=4f$, existuje iba jedna taká poloha

$$a=\frac{L}{2}$$

a keď $L<4f$, neexistuje ani jedna.

832. Bodový predmet, umiestnený na optickej osi spojnej šošovky, približuje sa k šošovke stálou rýchlosťou v_1. Akou rýchlosťou sa bude pritom pohybovať jeho obraz?

Riešenie:

Keď vzdialenosť predmetu x meriame od predmetového ohniska, možno šošovkovú rovnicu písať v tvare

$$xx'=f^2 \tag{1}$$

Okamžitá rýchlosť obrazu v_2 je daná prvou deriváciou jeho dráhy podľa času, teda

$$v_2=\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}$$

Podľa rovnice (1) $x'=\frac{f^2}{x}$, a preto

$$v_2=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f^2}{x}\right)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{f^2}{x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Po krátkej úprave, ak ešte uvážime, že $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ predstavuje okamžitú rýchlosť predmetu v_1, platí:

$$v_2=-\frac{x'}{x}v_1$$

833. Vnútri sklenej gule polomeru $r_0=10$ cm je bublinka vzduchu. Pozorovateľovi hľadiacemu v smere osi guľovej lámavej plochy sa zdá, že bublinka je na tejto osi vo vzdialenosti $b_0=2{,}5$ cm od povrchu gule. Zistite, v akej skutočnej vzdialenosti od povrchu gule sa bublinka nachádza!

Riešenie:

Pre lom na guľovej ploche polomeru r, oddeľujúcej dve prostredia s absolútnymi indexmi lomu n_1 a n_2, platí rovnica

$$\frac{n_1}{a}+\frac{n_2}{b}=\frac{n_2-n_1}{r} \tag{1}$$

Predmet sa nachádza v skle. Hľadáme jeho vzdialenosť od vrcholu guľovej plochy. K lomu dochádza na vypuklej guľovej ploche, pričom svetelný lúč prechádza zo skla s indexom lomu $n_1 = n$ do vzduchu s indexom lomu $n_2 = 1$. Vytvorený obraz je virtuálny.

Keď rešpektujeme známu znamienkovú dohodu, možno písať:

$$b = -b_0; \quad r = -r_0$$

a po dosadení do rovnice (1) dostaneme:

$$\frac{n}{a} - \frac{1}{b_0} = -\frac{1-n}{r_0}$$

odkiaľ riešením máme

$$a = \frac{n r_0 b_0}{r + b_0(n-1)}$$

a po dosadení číselných hodnôt dostávame pre hľadanú skutočnú vzdialenosť predmetu hodnotu

$$a = \frac{1{,}5 \,.\, 10 \,.\, 2{,}5}{10 + 2{,}5 \,.\, 0{,}5}\ \text{cm} = 3{,}3\ \text{cm}$$

834. Sklená tyč s indexom lomu $n = \frac{3}{2}$ je na oboch koncoch ohraničená guľovými plochami s rovnakými polomermi r_0. Dĺžka tyče je $3r_0$. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od vrcholu zadnej guľovej plochy sa vytvorí obraz bodového zdroja, nachádzajúceho sa na optickej osi vo vzdialenosti r_0 pred prednou guľovou plochou!

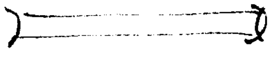
Riešenie:

Výsledný obraz bodového zdroja dostaneme postupným zobrazením predmetu prvou a druhou guľovou plochou. Obraz vytvorený prvým zobrazovacím zariadením považujeme za predmet pre druhé zariadenie, ktoré potom vytvorí hľadaný obraz.

Pre lom na guľovej ploche polomeru r, oddeľujúcej dve prostredia s absolútnymi indexmi lomu n_1 a n_2, platí rovnica

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r} \qquad (1)$$

Lom na prvej guľovej ploche nastáva zo vzduchu do skla na dutej guľovej ploche, preto $n_1 = 1$, $n_2 = n$, $r = r_0$; a keďže $a = r_0$, po dosadení do rovnice (1) máme:



$$\frac{1}{r_0}+\frac{n}{b}=\frac{n-1}{r_0}$$

odkiaľ

$$b=r_0\frac{n}{n-2}$$

Vzdialenosť obrazu vytvoreného prvou guľovou plochou od vrcholu druhej guľovej plochy je

$$a'=3r_0-b=2r_0\frac{n-3}{n-2}$$

Lom na zadnej guľovej ploche nastáva zo skla do vzduchu na vypuklej guľovej ploche, preto $n_1=n$, $n_2=1$, $r=-r_0$ a po dosadení do rovnice (1), keď vzdialenosť obrazu vytvoreného druhou guľovou plochou od vrcholu druhej guľovej plochy označíme b', máme:

$$\frac{n}{2r_0\dfrac{n-3}{n-2}}+\frac{1}{b'}=-\frac{1-n}{r_0}$$

odkiaľ

$$b'=2r_0\frac{n-3}{n^2-6n+6}$$

a po dosadení za $n=\frac{3}{2}$ dostávame:

$$b'=4r_0$$

835. Zistite, aká má byť hrúbka sklenej dvojvypuklej šošovky, aby sa vo vzduchu správala ako rozptylka! Polomery guľových plôch ohraničujúcich šošovku sú $r_1=r_2=1$ cm.

Riešenie:

Pre optickú mohutnosť hrubej šošovky, z oboch strán obklopenej rovnakým prostredím, platí rovnica

$$D=\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{d}{r_1r_2}$$

Šošovka sa bude správať ako rozptylka, keď tento výraz bude záporný. Pretože $n>1$, $r_1>0$, $r_2>0$, bude to splnené len vtedy, keď

$$\frac{(n-1)^2}{n}\cdot\frac{d}{r_1r_2}>(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

Po úprave tejto nerovnosti dostaneme nerovnosť

$$\frac{n-1}{n} d > r_1 + r_2$$

odkiaľ pre hľadanú hrúbku vyplýva podmienka

$$d > \frac{n}{n-1} (r_1 + r_2)$$

Po dosadení známych číselných hodnôt

$$d > \frac{1,5}{1,5-1} (1+1) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$\alpha > 6 \text{ cm}$$

836. Centrovaná optická sústava sa skladá z dvoch tenkých šošoviek s optickými mohutnosťami $D_1 = 2$ dioptrie, $D_2 = 5$ dioptrií, vzdialených od seba $d = 10$ cm. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od stredu prvej šošovky sa nachádza obrazové ohnisko tejto sústavy!

Riešenie:

Bod ležiaci na osi danej sústavy, vzdialený od prvej šošovky a_1, zobrazí sústava do bodu na optickej osi vo vzdialenosti b_2 od druhej šošovky. Keď zobrazujeme postupne tak, že predmet zobrazíme najprv prvou šošovkou a takto vytvorený obraz považujeme za predmet pre druhú šošovku, ktorá ho zobrazí do výsledného obrazu, možno pre lom na prvej šošovke písať:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$$

Odtiaľ pre vzdialenosť prvou šošovkou vytvoreného obrazu od jej vrcholu vyplýva vzťah

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} \tag{1}$$

Pre lom na druhej šošovke platí:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} \tag{2}$$

kde a_2 je vzdialenosť prvou šošovkou vytvoreného obrazu od druhej šošovky. Podľa vzťahu (1) zrejme platí:

$$a_2 = d - b_1 = d - \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}$$

a po úprave dostaneme:

$$a_2 = \frac{d - f_1 - \frac{df_1}{a_1}}{1 - \frac{f_1}{a_1}}$$

Podľa rovnice (2) pre vzdialenosť b_2 vyplýva vzťah

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1 - \frac{f_1}{a_1}}{d - f_1 - \frac{df_1}{a_1}} \tag{3}$$

Obrazové ohnisko sústavy je obrazom bodu ležiaceho na osi v nekonečne. Keď jeho vzdialenosť od druhej šošovky označíme f_0, vyplýva $a_1 = \infty$, $b_2 = f_0$ a po dosadení do rovnice (3) a po úprave dostávame:

$$f_0 = \frac{f_2(f_1 - d)}{f_1 + f_2 - d}$$

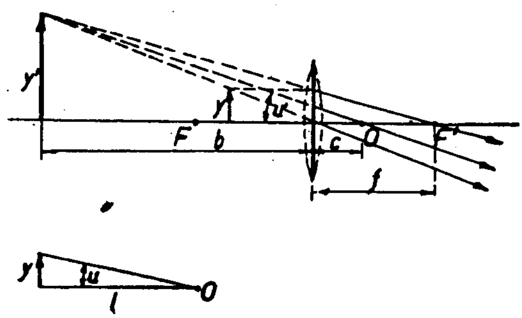
Keď sem dosadíme číselné hodnoty, máme:

$$f_0 = \frac{\frac{1}{5}\,\text{m}\left(\frac{1}{2}\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m}\right)}{\frac{1}{2}\,\text{m} + \frac{1}{5}\,\text{m} - 0{,}1\,\text{m}} = 0{,}133\,\text{m}$$

Vzdialenosť obrazového ohniska od stredu prvej šošovky

$$v = d + f_0 = 0{,}233\,\text{m}$$

837. Lupa s ohniskovou vzdialenosťou $f = 5$ cm vytvorí obraz predmetu vo vzdialenosti $|b| = 40$ cm od lupy. Aké zväčšenie lupa poskytuje, keď oko je od nej vo vzdialenosti $|c| = 2$ cm?



Obr. 204a, b

Riešenie:

Lupou vytvorený obraz je priamy, virtuálny a zväčšený; príslušný predmet sa nachádza medzi ohniskom a lupou. Hľadané zväčšenie (uhlové) lupy je

$$\gamma = \frac{u'}{u}$$

kde u' je uhol, pod ktorým sa javí oku O obraz, vytvorený lupou (pozri *obr. 204a*) a u je uhol, pod ktorým vidí voľné oko predmet v konvenčnej vzdialenosti l *(obr. 204b).* Podľa *obr. 204* možno písať

$$u' \doteq \operatorname{tg} u' = \frac{y'}{|b| + |c|}$$

$$u \doteq \operatorname{tg} u = \frac{y}{l}$$

Pre zväčšenie potom dostávame

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{l}{|b| + |c|} \tag{1}$$

Bočné zväčšenie y'/y šošovky určíme z rovnice

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{f} = -\frac{b - f}{f} = -\frac{-40\ \text{cm} - 5\ \text{cm}}{5\ \text{cm}}$$

a po dosadení do rovnice (1) dostávame pre zväčšenie lupy hodnotu

$$\gamma = 9 \cdot \frac{25\ \text{cm}}{40\ \text{cm} + 2\ \text{cm}} = 5{,}36$$

838. Ohnisková vzdialenosť objektívu mikroskopu $f_1 = 3$ mm, okulára $f_2 = 3$ cm, dĺžka celého mikroskopu $v = 16$ cm. Určite, do akej vzdialenosti pred objektív treba umiestniť predmet, aby oko mohlo obraz v mikroskope jasne pozorovať v konvenčnej vzdialenosti $l_0 = 25$ cm!

Riešenie:

Objektív vytvorí obraz predmetu, ktorý je pred ním vo vzdialenosti d, vo vzdialenosti b_1 od objektívu. Podľa šošovkovej rovnice je splnený vzťah

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} \tag{1}$$

Objektívom vytvorený obraz nachádzajúci sa vo vzdialenosti

$$a_2 = v - b_1 \tag{2}$$

od okulára zobrazí okulár tak, že ho oko priložené tesne k okuláru vidí jasne v konvenčnej vzdialenosti l_0. Tento obraz je virtuálny a je vzdialený od okulára na vzdialenosť

$$b_2 = -l_0 \tag{3}$$

Zo šošovkovej rovnice pre okulár

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f_2}$$

a po dosadení vzťahov (2) a (3) vypočítame

$$b_1=v-\frac{l_0 f_2}{l_0+f_2}$$

a po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$b_1=13{,}32\ \text{cm}$$

Pomocou rovnice (1) pre hľadanú vzdialenosť predmetu od objektívu vyplýva vzťah

$$d=\frac{b_1 f_1}{b_1-f_1}$$

a po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$d=3{,}07\ \text{mm}$$

Úlohy

839. Vypočítajte, o aký uhol sa odkloní od svojho pôvodného smeru svetelný lúč, postupujúci z vody a) do skla, b) do vzduchu, keď uhol dopadu lúča je 15°, 75°!

[a) $\Delta\alpha_1=1°\,42'$; $\Delta\alpha_2=15°\,51'$; b) $\Delta\alpha_1=5°\,11'$; uhol $\varepsilon=48°\,35'$ je hraničný]

840. Pod akým uhlom má dopadnúť svetelný lúč na sklenú dosku s indexom lomu $n=1{,}57$, aby odrazený a lomený lúč boli navzájom kolmé?

[$\alpha=57°\,30'$]

841. Pod akým uhlom má dopadnúť svetelný lúč na rozhranie skla a vzduchu, aby už nevnikol do vzduchu?

[$\varepsilon=41°\,49'$]

842. Svetelný lúč dopadá na planparalelnú sklenú dosku hrúbky $d=10$ cm pod uhlom $\alpha=70°$. Vypočítajte, o koľko sa svetelný lúč posunie, keď index lomu skla $n=1{,}5$!

[$x=6{,}65$ cm]

843. Pod sklenou doskou hrúbky $h=12$ cm je drobná minca a pozorovateľ ju pozoruje v smere kolmom na povrch sklenej dosky. V akej vzdialenosti od oka sa vytvorí obraz mince, keď oko pozorovateľa je vo výške $H = 10$ cm nad horným povrchom dosky?

[$x = 18$ cm]

844. Na hranol s lámavým uhlom $\varphi = 54°$ dopadá monochromatický lúč, pre ktorý je index lomu skla, z ktorého je hranol zhotovený, $n = 1{,}63$. Aká je minimálna odchýlka lúča po lome?

[$\delta = 41° \, 31'$]

845. Optický hranol, ktorého lámavý uhol je 50°, má minimálnu deviáciu 35°. Aký bude uhol minimálnej deviácie, keď hranol ponoríme do vody?

[$\delta = 10° \, 55'$]

846. Na sklený hranol s indexom lomu $n = \sqrt{2}$ dopadá svetelný lúč v rovine kolmej na prednú lámavú stenu. Vypočítajte, aký má byť lámavý uhol hranola, aby na zadnej stene nedošlo k lomu!

[$\varphi = 45°$]

847. Dve rovinné żrkadlá zvierajú uhol γ. Na jedno zo zrkadiel dopadá svetelný lúč, ktorý leží v rovine kolmej na priesečnicu oboch zrkadiel. Lúč sa odrazí na prvom, potom na druhom zrkadle a odchýli sa od pôvodného smeru o uhol φ. Aký je tento uhol? Závisí od uhla dopadu?

[$\varphi = 2\gamma$]

848. V akej výške nad vodorovnou rovinou je oblak, ktorý pozorujeme zo skaly výšky $h = 76$ m, vo výškovom uhle $\alpha = 56°$, a jeho obraz v pokojnej hladine jazera ležiaceho pri skale, v hĺbkovom uhle $\beta = 58°$?

[$x = 2000$ m]

849. a) Bodový zdroj svetla je umiestnený na optickej osi dutého zrkadla. Jeho vzdialenosť od vrcholu zrkadla sa rovná $\frac{3}{2}$ polomeru zrkadla. Určite polohu obrazu!

b) Bodový zdroj svetla sa nachádza na osi vypuklého zrkadla vo vzdialenosti, ktorá sa rovná n-násobku jeho ohniskovej vzdialenosti. Určite polohu obrazu!

$$\left[b = \frac{3}{4}r; \; b = \frac{nf}{n+1}\right]$$

850. Duté sférické zrkadlo má polomer krivosti 56 cm. Do akej vzdialenosti od vrcholu zrkadla treba umiestniť predmet, aby jeho obraz bol

a) reálny, štyrikrát zväčšený,
b) virtuálny, štyrikrát zväčšený?
Nájdite polohu obrazu!

[$a = 35$ cm; $b = 140$ cm; $a' = 21$ cm; $b' = -84$ cm]

851. Predmet výšky 15 mm je vo vzdialenosti 32 cm od vrcholu dutého zrkadla, ktorého polomer krivosti je 48 cm. Kde bude jeho obraz a aký bude veľký?

[Obraz bude prevrátený, skutočný, veľkosti 45 mm, vo vzdialenosti 96 cm od zrkadla]

852. Zrkadlový galvanometer má duté zrkadielko. Vo vzdialenosti $l = 1$ m od neho sa nachádza vodorovná stupnica a pod ňou osvetlená štrbina. Vypočítajte, aký polomer má zrkadielko, keď sa na stupnici vytvoril reálny obraz štrbiny! Do akej vzdialenosti na stupnici sa posunie svetelná stopa, keď sa zrkadielko vychýli o malý uhol φ?

[$r = 1$ m; $d \doteq 2l\varphi$]

853. Do akej vzdialenosti od dutého zrkadla sa má postaviť pozorovateľ, aby virtuálny obraz svojho oka videl v konvenčnej vzdialenosti $l = 24$ cm? Ohnisková vzdialenosť zrkadla $f = 16$ cm.

[$a = 8$ cm]

854. Duté a vypuklé zrkadielko s rovnakou ohniskovou vzdialenosťou $f = 20$ cm sú postavené oproti seba tak, že ich optické osi splývajú a ich vzájomná vzdialenosť $l = 50$ cm. Vo vzdialenosti $a = 30$ cm od dutého zrkadla leží bodový svietiaci predmet. Kde vznikne jeho obraz a) po odraze najprv na dutom, potom na vypuklom zrkadle, b) po odraze najprv na vypuklom, potom na dutom zrkadle?

[a), b) 30 cm od dutého zrkadla]

855. Nádoba naplnená ortuťou sa otáča okolo zvislej osi stálou uhlovou rýchlosťou ω. Povrch ortuti vytvorí duté zrkadlo. Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť tohto zrkadla!

$$\left[f = \frac{g}{2\omega^2}\right]$$

856. Aká je ohnisková vzdialenosť tenkej spojnej šošovky a aké zväčšenie poskytuje, keď predmet vzdialený od nej 20 cm sa zobrazí za šošovkou vo vzdialenosti 35 cm?

[$f = 12{,}73$; $\gamma = -1{,}75$]

857. Spojná šošovka, ktorej ohnisková vzdialenosť $f = 42$ cm, vytvára 3-krát zväčšený virtuálny obraz predmetu. Nájdite polohu predmetu a obrazu!

[$a = 28$ cm; $b = -84$ cm]

858. Tenká dvojvypuklá šošovka optickej mohutnosti D vytvorí obraz so zväčšením γ. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od šošovky má byť predmet a kde sa vytvorí príslušný obraz!

$$\left[a = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{1}{D};\ b = \frac{1-\gamma}{D}\right]$$

859. Vypočítajte, aký má byť index lomu skla dvojvypuklej šošovky s rovnakými polomermi krivosti, aby sa jej ohniská nachádzali práve v stredoch krivosti šošovky!

[$n = 1{,}5$]

860. Lúče zbiehajúce sa do nejakého bodu P sa rozptylkou zachytia skôr, ako by do tohto bodu došli. Nájdite výpočtom polohu obrazu, keď rozptylka je vo vzdialenosti $a_0 = 9$ dm pred bodom P! Optická mohutnosť rozptylky $D = -\dfrac{10}{6}$ dioptrií.

[$b = -1{,}8$ m]

861. Sklená plankonvexná šošovka s polomerom krivosti $r_1 = 14$ cm vytvorí obraz predmetu vo vzdialenosti od šošovky o 105 cm menšej, ako je vzdialenosť predmetu od šošovky. Aká je vzdialenosť predmetu od šošovky?

[$a = 140$ cm, 21 cm; $b = 35$ cm, -84 cm]

862. Optická mohutnosť sklenej dvojvypuklej šošovky vo vzduchu $D_1 = 12$ dioptrií. Aká bude jej optická mohutnosť, keď šošovku ponoríme do vody?

[$D_2 = 3$ dioptrie]

863. Tenká sklená dvojvypuklá šošovka vytvorí obraz predmetu vo vzdialenosti 10 cm od šošovky. Keď ponoríme predmet aj šošovku do vody bez toho, že by sme medzi nimi zmenili vzdialenosť, vytvorí sa obraz vo vzdialenosti 60 cm od šošovky. Aká je ohnisková vzdialenosť šošovky vo vzduchu?

[$f_1 = 9$ cm]

864. Spojná šošovka vytvorí obraz svietiaceho zdroja na tienidle vo vzdialenosti $l = 1$ m od zdroja. Ak šošovku posunieme do druhej polohy, pričom polohu zdroja a tienidla už nemeníme, na tienidle sa znova vytvorí svetelný obraz zdroja.

Aká je ohnisková vzdialenosť šošovky, keď na vytvorenie druhého jasného obrazu zdroja treba šošovku posunúť k tienidlu o vzdialenosť $d = 20$ cm?

[$f = 24$ cm]

865. Spojná šošovka zobrazí predmet na tienidle. Výška obrazu $l_1 = 9$ cm. Keď pohybujeme šošovku k tienidlu, pričom polohu predmetu a tienidla nemeníme, zistíme, že druhý zreteľný obraz predmetu má výšku $l_2 = 4$ cm. Vypočítajte, aká je skutočná výška predmetu!

[$h = \sqrt{l_1 l_2} = 6$ cm]

866. Ohnisková vzdialenosť spojnej šošovky je f. Vypočítajte, do akej vzdialenosti od šošovky treba umiestniť svietiaci zdroj, aby sa vzdialenosť vytvoreného obrazu od šošovky líšila od ohniskovej vzdialenosti o menej ako p %!

$$\left[a \geqq f \frac{p + 100}{p}\right]$$

867. Do akej vzdialenosti pred sklenú guľovú plochu s polomerom r_0 treba postaviť predmet, aby obraz predmetu bol za guľovým rozhraním rovnako ďaleko ako predmet pred ním?

[$a = 5r_0$]

868. Sklená dvojvydutá hrubá šošovka má polomery krivosti $r_1 = r_2 = 10$ cm a hrúbku $d = 5$ cm. Vypočítajte ohniskovú vzdialenosť tejto šošovky, polohu jej hlavných rovín a určite polohu obrazu predmetu nachádzajúceho sa vo vzdialenosti $a = 20$ cm od predného vrcholu šošovky!

[$f = f' = 10{,}9$ cm; $h = h' = -1{,}82$ cm; $b = 23{,}95$ cm]

869. Predmet je pozorovaný lupou, ktorá je vo vzdialenosti 2 cm od oka. Vypočítajte, aká je ohnisková vzdialenosť lupy, keď pri 6-násobnom zväčšení sa obraz vytvorí vo vzdialenosti 30 cm od lupy!

[4,5 cm]

870. Optická mohutnosť lupy $D = 10$ dioptrií. Vypočítajte, do akej vzdialenosti od lupy treba umiestniť predmet, aby jeho obraz jasne videl pozorovateľ, ktorý má oko priložené tesne k lupe. Konvenčná zraková vzdialenosť pozorovateľa $l = 25$ cm. Aké zväčšenie lupa poskytuje?

[$a = 7{,}14$ cm; $\gamma = 3{,}5$]

871. Lupa je vytvorená dvojvypuklou šošovkou s rovnakými polomermi krivosti. Vypočítajte, aké majú byť jej polomery krivosti, aby oko priložené tesne k lupe pozorovalo predmet bez akomodácie pri zväčšení $\gamma = 10$! Index lomu skla lupy je $n = 1,5$.

[$r = 2,5$ cm]

872. Aké je zväčšenie mikroskopu, ktorého objektív má ohniskovú vzdialenosť 5 mm, okulár 20 mm a dĺžka celého tubusu mikroskopu je 12 cm?

[$\gamma = 237,5$]

873. Dve spojné šošovky s ohniskovými vzdialenosťmi 3 a 4 cm sú od seba vzdialené 15 cm. Vypočítajte, do akej vzdialenosti pred prvú šošovku treba umiestniť predmet, aby táto optická sústava vytvorila zdanlivý obraz v konvenčnej vzdialenosti oka! Prvú šošovku považujte za objektív, druhú za okulár. Oko je priložené tesne k okuláru.

[4,05 cm]

874. Keplerov hvezdársky ďalekohľad má objektív ohniskovej vzdialenosti $f_1 = 42$ cm a okulár ohniskovej vzdialenosti $f_2 = 1,4$ cm. Aký dlhý je ďalekohľad a aké je jeho uhlové zväčšenie?

[$d = 43,4$ cm; $\gamma = 30$]

875. Objektív Galileiho ďalekohľadu tvorí tenká dvojvydutá šošovka s polomermi krivosti $r_1 = r_2 = 24$ cm a s indexom lomu $n = 1,5$. Optická mohutnosť okulára $D_2 = -20$ dioptrií. Vypočítajte, do akej vzdialenosti od objektívu treba posunúť okulár, aby pozorovateľ, ktorého konvenčná očná vzdialenosť $l = 25$ cm, pozoroval v ďalekohľade jasne predmet vzdialený od objektívu na vzdialenosť $a_1 = 30$ m!

[$a = 17,95$ cm]

876. Mikroprojektor, ktorého objektív má ohniskovú vzdialenosť $f_1 = 3$ cm a okulár $f_2 = 6,5$ cm a ktorého dĺžka $d = 28$ cm, má vytvoriť obraz na fotografickej doske. Vypočítajte, do akej vzdialenosti od okulára treba postaviť fotografickú dosku, aby na nej vznikol ostrý obraz predmetu umiestneného vo vzdialenosti $a = 3,6$ cm pred objektívom! Aké bude zväčšenie obrazu?

[$x = 18,6$ cm; $\gamma = 9,3$]

877. Vypočítajte, aká je najmenšia vzdialenosť medzi dvoma čiarkami, ktoré pri pozorovaní mikroskopom ešte môžeme rozoznať, keď pozorujeme v modrom svetle vlnovej dĺžky $\lambda = 450$ nm a číselná apertúra objektívu $A = 0,55$! Určite, koľkokrát je táto vzdialenosť menšia než vzdialenosť, ktorú ešte rozozná voľné oko zo vzdialenosti. $l = 25$ cm, keď vieme, že najmenší uhol, pod ktorým ešte oko rozlišuje dve čiarky, $\alpha = 1'$!

$\left[d \geqq 4{,}1 \,.\, 10^{-4}\ \text{mm}; \ \frac{d'}{d} = 178\right]$

878. Index lomu skla, z ktorého je zhotovená spojná šošovka, pre lúče červenej farby $n_č = 1{,}51$ a pre lúče fialovej farby $n_f = 1{,}531$. Aká je vzdialenosť medzi ohniskami pre červené a fialové lúče, keď polomery krivosti vypuklých plôch šošovky sú: $r_1 = r_2 = 15$ cm?

$[\Delta f = 0{,}58\ \text{cm}]$

19 VLNOVÁ OPTIKA

Úvod

a) Keď sa dve mechanické vlnenia vychádzajúce z rôznych zdrojov v niektorej oblasti prekrývajú, dochádza v tejto oblasti k *interferencii vlnení. Výsledná výchylka* vlnenia sa potom rovná vektorovému súčtu výchyliek v jednotlivých čiastočných vlneniach. Keď zdroje vlnení kmitajú s rovnakou frekvenciou, majú rovnaký smer kmitania a konštantný fázový rozdiel *(koherentné zdroje)*, amplitúda výsledného kmitania v každom bode prostredia je úplne určená a závisí iba od vzdialenosti bodu prostredia od zdrojov vlnenia.

Maximum amplitúdy vzniká v bodoch, ktorých je pre dráhový rozdiel vlnení $d_2 - d_1$ splnený vzťah

$$d_2 - d_1 = k\lambda$$

a minimum amplitúdy v bodoch, v ktorých pre dráhový rozdiel platí

$$d_2 - d_1 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, λ je vlnová dĺžka vlnenia a d_1, d_2 sú vzdialenosti uvažovaných bodov od príslušných zdrojov vlnenia.

Interferencia vzniká aj pri elektromagnetickom vlnení za podmienok v podstate rovnakých ako pri mechanickom vlnení. Pozorovateľná interferencia vzniká iba pri koherentných vlneniach.

1. Pre vzdialenosť Δs medzi dvoma susednými relatívnymi maximami osvetlenia na tienidle, ktoré sa nachádza vo vzdialenosti l od dvoch koherentných zdrojov, vzdialených od seba malú vzdialenosť a, pri splnení podmienky $a \ll l$ platí:

$$\Delta s = \lambda\,\frac{l}{a}$$

kde λ je vlnová dĺžka použitého monochromatického svetla.

2. Interferenciu svetla možno pozorovať aj na tenkej priehľadnej vrstve. Keď tenkú vrstvu osvetlíme paralelným zväzkom monochromatického svetla vlnovej dĺžky λ, vrstva bude odrážať svetlo s maximálnou intenzitou, keď je splnená podmienka

$$2\,nd\cos\beta=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

a s minimálnou intenzitou, keď

$$2\,nd\cos\beta=k\lambda$$

kde n je index lomu vrstvy, d jej hrúbka a β uhol, pod ktorým sa vlnenie do vrstvy láme, $k=0, 1, 2, \ldots$

b) O tom, že sa svetlo nešíri vždy priamočiaro, ale sa aj ohýba, nás presvedčia rozličné pokusy, napríklad *ohyb svetla na štrbine* a na *optickej mriežke*. Predstavme si, že na úzku štrbinu v nepriehľadnej prekážke alebo na optickú mriežku dopadá napr. kolmo monochromatický zväzok rovnobežných lúčov. Dochádza k ohybu svetla a na vhodne umiestnenom tienidle možno zachytiť interferenčný jav.

Pri ohybe svetla v štrbine smerom určeným rovnicou

$$d\sin\alpha=k\lambda$$

odpovedá nulová intenzita osvetlenia a na tienidle týmto smerom odpovedajú body s nulovou intenzitou osvetlenia (d je šírka štrbiny a $k=1, 2, 3, \ldots$).

Pri ohybe svetla na mriežke vznikajú na tienidle relatívne maximá intenzity osvetlenia v tých bodoch, ktoré odpovedajú smerom určeným rovnicou

$$d\sin\alpha=k\lambda$$

kde d je *mriežková konštanta* a predstavuje vzdialenosť stredov dvoch susedných vrypov na mriežke. Číslo k môže nadobudnúť kladné celočíselné hodnoty a predstavuje rád príslušného relatívneho maxima.

c) Na štúdium ohybu röntgenových lúčov je vhodná *priestorová mriežka kryštálov*. Keď na rovinnú plochu kryštálu dopadá rovnobežný zväzok röntgenových lúčov, odráža sa s maximálnou intenzitou pre tie uhly dopadu α, pre ktoré je splnená *Braggova—Wulfova podmienka:*

$$2d\sin\alpha=k\lambda$$

Uhol α sa meria od roviny kryštálu, d je mriežková konštanta kryštálovej mriežky, číslo $k=1, 2, 3, \ldots$ predstavuje rád príslušného relatívneho maxima.

d) Keď svetelný lúč dopadá na rozhranie dvoch prostredí s absolútnymi indexmi lomu n_1 a n_2 pod uhlom α, ktorý vyhovuje rovnici

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$

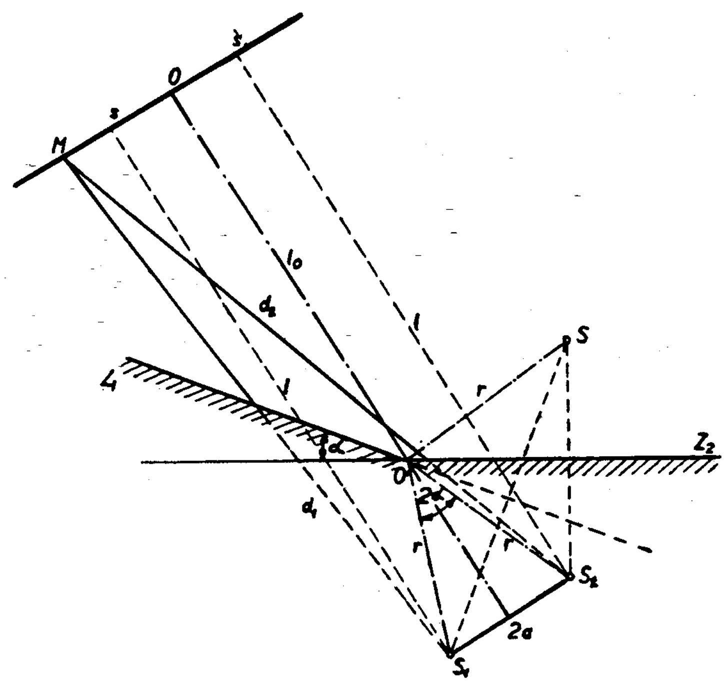
odráža sa ako *úplne polarizovaný* v rovine dopadu. Lúč vnikajúci do druhého prostredia je *polarizovaný čiastočne* v rovine kolmej na rovinu dopadu a s odrazeným lúčom zviera uhol 90°. Vzťah (1) vyjadruje *Brewsterov zákon.*

Príklady

879. Zo svetelného zdroja vzdialeného od priesečnice Fresnelových zrkadiel na vzdialenosť $r = 10$ cm dopadá na zrkadlá Z_1 a Z_2 monochromatické svetlo vlnovej dĺžky $\lambda = 0{,}6$ μm. Svetlo odrazené od zrkadiel vytvorí na tienidle, ktoré je od priesečnice oboch zrkadiel vzdialené $l_0 = 270$ cm, interferenčný obraz. Vzdialenosť dvoch susedných svetelných pásikov $\Delta s = 2{,}9$ mm. Vypočítajte, aký uhol zvierajú zrkadlá!

Riešenie:

Svetlo vychádzajúce zo svetelného zdroja S sa odráža na zrkadlách Z_1 a Z_2 a odrazené lúče vychádzajúce zdanlivo z dvoch virtuálnych zdrojov S_1 a S_2 *(obr. 205)*



Obr. 205

spolu interferujú. Interferenčný úkaz, ktorý vzniká na tienidle vzdialenom od prvého i druhého virtuálneho zdroja o vzdialenosť l, závisí od rozdielu dráh, ktoré lúče vykonali. V bode M tienidla vzniká napr. relatívne maximum, keď dráhový rozdiel

$$d_2 - d_1 = k\lambda \tag{1}$$

kde λ je vlnová dĺžka použitého svetla a $k = 0, 1, 2, \ldots$

Polohu virtuálnych zdrojov S_1 a S_2 ľahko nájdeme zo známych vlastností rovinného zrkadla. Keď ich vzdialenosť označíme $2a$ a vzdialenosť bodu M od stredu tienidla O nazveme s, zrejme platí:

$$d_1^2 = l^2 + (s-a)^2$$

$$d_2^2 = l^2 + (s+a)^2$$

a

$$d_2^2 - d_1^2 = 4sa \tag{2}$$

Pretože vzdialenosti s i $2a$ sú oproti d_1 a d_2 malé, je približne splnený vzťah

$$d_1 + d_2 \doteq 2l$$

a po dosadení do rovnice (2) dostaneme:

$$d_2 - d_1 = \frac{2sa}{l}$$

Podľa podmienky (1) bude v bode M relatívne maximum, keď

$$\frac{2sa}{l} = k\lambda \tag{3}$$

Pre vzdialenosť dvoch susedných relatívnych maxím Δs odtiaľto vyplýva:

$$\Delta s = s_k - s_{k-1} = \frac{l\lambda}{2a} \tag{4}$$

Z *obr. 205* ľahko zistíme, že uhol S_1OS_2 sa rovná dvojnásobku uhla, ktorý zvierajú Fresnelove zrkadlá. Otočením zrkadla Z_1 o uhol α by sa na zrkadle odrazený lúč stočil o uhol 2α a virtuálny obraz zdroja S_1 by sa premiestnil z bodu S_1 do bodu S_2.

Potom možno písať:

$$2a = 2r \sin\alpha$$

$$l = l_0 + r\cos\alpha$$

a vzhľadom na malý uhol α

$$a \doteq r\alpha$$

$$l \doteq l_0 + r$$

Po dosadení do rovnice (4) máme:

$$\Delta s = \frac{l_0 + r}{2r\alpha}\lambda$$

odkiaľ pre hľadaný uhol, ktorý zvierajú Fresnelove zrkadlá, vyplýva:

$$\alpha = \frac{l_0 + r}{2 . \Delta s . r} \lambda$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme:

$$\alpha = \frac{270 \text{ cm} + 10 \text{ cm}}{2 . 0{,}29 \text{ cm} . 10 \text{ cm}} \cdot 0{,}6 . 10^{-4} \text{ cm} = 3 . 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\alpha = 10'$$

880. Mydlinová rovinná blana má pri pozorovaní v odrazenom svetle jasne zelenú farbu. Svetelné lúče vstupujú do oka pod uhlom $\alpha = 35°$ (uhol meriame od normály). Vypočítajte, aká je hrúbka blany a akú farbu bude mať, keď uhol $\alpha = 0°$! Index lomu mydlinovej blany $n = 1{,}33$ vlnová dĺžka zeleného svetla $\lambda_z = 500$ nm.

Riešenie:

Tenká vrstva odráža jednofarebné svetlo vlnovej dĺžky najintenzívnejšie, keď je splnená podmienka

$$2nd \cos \beta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

kde β je príslušný uhol lomu svetelného lúča.

Keď sem zavedieme uhol dopadu, pomocou zákona lomu

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

odkiaľ

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n}$$

dostaneme vzťah

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Keď na vrstvu dopadá biele svetlo, v odrazenom svetle sa najviac zosilňujú tie farby, pre ktoré je splnená podmienka (1). V našom prípade je najintenzívnejšia farba zelená s vlnovou dĺžkou λ_z a pre hrúbku vrstvy dostaneme vzťah

$$d = \frac{(2k + 1) \frac{\lambda_z}{2}}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \tag{2}$$

Keďže číslo k môže nadobúdať ľubovoľné kladné celočíselné hodnoty, hrúbku

d nemožno určiť jednoznačne. Najmenšia možná hrúbka je pre $k=0$; po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$d = 1{,}04 \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

Keď odrazené lúče dopadajú do oka pod uhlom $\alpha = 0°$, podľa rovnice (2) platí:

$$2nd = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

a pre $k=0$

$$\lambda = 4dn = 553{,}3\ \mathrm{nm}$$

Táto vlnová dĺžka odpovedá žltozelenej farbe.

881. Dve dobre vybrúsené rovinné doštičky sú položené na seba tak, že na jednom konci sa okraje dotýkajú, kým na druhom konci, vo vzdialenosti $a = 10$ cm od ich priesečnice, je medzi ne vložený staniolový lístok hrúbky $h = \frac{1}{50}$ mm. Určite vzdialenosť dvoch susedných interferenčných pásov, keď na vrstvu dopadá monochromatické svetlo vlnovej dĺžky $\lambda = 589$ nm a) kolmo, b) pod uhlom $\alpha = 60°$ (meranom od normály)!

Riešenie:

Ide v podstate o lom na tenkej vrstve, ktorej hrúbka sa od miesta k miestu mení. V našom prípade tenkú vrstvu tvorí vrstva vzduchu medzi oboma rovinnými doštičkami.

Keby vzduchová vrstva bola dokonale planparalelná, odrážala by svetlo najintenzívnejšie, keď je splnená podmienka

$$2nd\cos\beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

resp. po zavedení dopadového uhla (pozri príklad 880)

$$2nd\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Pretože ide o vzduchovú vrstvu, $n \doteq 1$ a

$$2d\cos\alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Nech hrúbka vrstvy v tých miestach, v ktorých sa vytvoria dva susedné svetlé interferenčné pásy, je d_1 a d_2; potom sú zrejme splnené vzťahy

$$2d_1 \cos \alpha = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

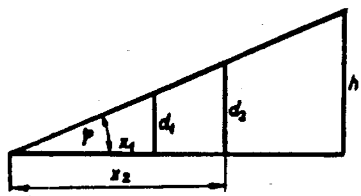
$$2d_2 \cos \alpha = (2k+3)\frac{\lambda}{2}$$

Ďalej, ako je zrejmé z *obr. 206*,

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= x_1 \operatorname{tg} \varphi \\ d_2 &= x_2 \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kde

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{a} \tag{3}$$



Obr. 206

Pre vzdialenosť dvoch susedných pásov vychádza z rovníc (2) vzťah

$$x_2 - x_1 = (d_2 - d_1) \operatorname{cotg} \varphi$$

Pomocou vzťahov (1) a (3) dostávame:

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h} \cdot \frac{\lambda}{2 \cos \alpha}$$

Po dosadení číselných hodnôt bude:

a) pre $\alpha = 0$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{100 \text{ mm}}{2.10^{-2} \text{ mm}} \cdot \frac{589.10^{-6} \text{ mm}}{2} = 1{,}47 \text{ mm}$$

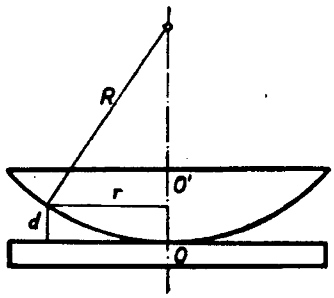
b) pre $\alpha = 60°$

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{h} \cdot \frac{\lambda}{2 \cos 60°} = 2{,}94 \text{ mm}$$

882. Na rovinnú sklenú dosku položíme ploskovypuklú šošovku s polomerom krivosti R, vypuklou stranou nadol. Keď na túto sústavu (Newtonove sklá) dopadne kolmo monochromatický zväzok lúčov, objaví sa interferenčný úkaz v podobe striedajúcich sa tmavých a svetlých krúžkov. Vysvetlite vznik tohto javu a nájdite polomery tých kružníc, pozdĺž ktorých vzniknú maximá svetelnej intenzity!

Riešenie:

Medzi šošovkou a doskou vzniká tenká vzduchová vrstva, ktorej hrúbka sa od stredu smerom k okraju šošovky zväčšuje *(obr. 207)*. Vzduchová vrstva má rovnakú hrúbku v tých miestach, ktoré sú rovnako vzdialené od osi OO', prechádzajúcej stredom šošovky, a bodom, v ktorom sa šošovka dotýka dosky. Označme túto vzdialenosť r.



Obr. 207

Interferenčný úkaz vzniká tým, že svetelné lúče odrazené na spodnom rozhraní vzduchovej vrstvy a skla interferujú s lúčmi odrazenými na hornom rozhraní.

Na tenkej vrstve všade rovnakej hrúbky d vzniknú maximá svetelnej intenzity, keď je splnená podmienka

$$2nd \cos \beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

Vzhľadom na podmienku, že svetelné lúče dopadajú kolmo a odraz nastáva na vrstve vzduchu, $\beta = 0$, $n \doteq 1$, podmienka (1) nadobudne tvar

$$2d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

Podľa *obr. 207* zrejme platí:

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2}$$

Keď druhý člen v tomto výraze rozvedieme podľa binomického rozvoja a členy vyššieho rádu zanedbáme (za predpokladu, že $R \gg r$), dostaneme:

$$d \doteq R - \left(R - \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{R}\right) = \frac{r^2}{2R}$$

a pomocou vzťahu (2) bude

$$2\frac{r^2}{2R}=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

odkiaľ

$$r=\sqrt{R(2k+1)\frac{\lambda}{2}}; \qquad k=0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Maximá svetelnej intenzity vznikajú na kružniciach, ktorých polomery spĺňajú vzťah (3).

883. Keď na štrbinu dopadá kolmo rovnobežný zväzok modrého svetla vlnovej dĺžky $\lambda_m=450$ nm, vidieť na vzdialenom tienidle stred druhého tmavého pásika pod uhlom $\alpha_m=5°\ 14'$, meraným od normály k rovine štrbiny. Pod akým uhlom bude vidieť stred štvrtého tmavého pásika, keď štrbinu osvetľujeme červeným svetlom vlnovej dĺžky $\lambda_č=760$ nm?

Riešenie:

Minimálne osvetlenie druhého rádu pre svetlo modrej farby vzniká v miestach tienidla, pre ktoré je splnená podmienka

$$d \sin \alpha_m=2\lambda_m \tag{1}$$

V červenom svetle pre miesta minimálneho osvetlenia štvrtého rádu platí:

$$d \sin \alpha_č=4\lambda_č \tag{2}$$

Riešením rovníc (1) a (2) dostaneme:

$$\sin \alpha_č=\frac{2\lambda_č}{\lambda_m}\sin \alpha_m$$

a po dosadení číselných hodnôt bude:

$$\sin \alpha_č=\frac{2.7.10^{-5}\ \text{cm}}{4{,}5.10^{-5}\ \text{cm}}\sin 5°\ 14'$$

t. j.

$$\alpha_č=16°\ 29'$$

884. Na optickú mriežku, ktorá má na 1 mm 100 vrypov, dopadá kolmo rovnobežný zväzok bieleho svetla. Pomocou spojnej šošovky s ohniskovou vzdialenosťou 30 cm, umiestnenej tesne za mriežkou, vytvorí sa na vhodne umiestnenom tienidle spektrum. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od seba na tienidle je

a) červená a fialová farba v spektre druhého rádu,

b) koniec spektra prvého rádu a začiatok spektra druhého rádu!

Vlnová dĺžka krajného červeného svetla je 760 nm a krajného fialového svetla 400 nm.

Riešenie:

Ostrý ohybový jav sa vytvorí v ohniskovej rovine šošovky, vo vzdialenosti $l = 30$ cm od mriežky. Pre odchýlku červenej farby v spektre druhého rádu platí:

$$\sin \alpha_č = 2 \frac{\lambda_č}{d}$$

a pre odchýlku fialovej farby

$$\sin \alpha_f = 2 \frac{\lambda_f}{d}$$

Keďže mriežková konštanta $d = \frac{1}{100}$ mm, po dosadení vychádzajú pre odchýlku červenej a fialovej farby v spektre druhého rádu hodnoty

$$\alpha_č = 8° \, 45'$$

$$\alpha_f = 4° \, 35'$$

Vzdialenosť červenej farby od maxima nultého rádu

$$x_č = l \operatorname{tg} \alpha_č = 46{,}2 \text{ mm}$$

a fialovej

$$x_f = l \operatorname{tg} \alpha_f = 24{,}0 \text{ mm}$$

Ich vzájomná vzdialenosť

$$\Delta x = x_č - x_f = 22{,}2 \text{ mm}$$

b) Odchýlku červenej farby v spektre prvého rádu určíme z rovnice

$$\sin \alpha'_č = \frac{\lambda_č}{d}$$

odkiaľ po dosadení číselných hodnôt vyplýva

$$\alpha'_č = 4° \, 22'$$

Pre vzdialenosť červenej farby od maxima nultého rádu dostaneme:

$$x'_č = l \operatorname{tg} \alpha'_č = 23{,}0 \text{ mm}$$

Začiatok spektra druhého rádu, ktorý tvorí fialová farba, je vzdialený od konca spektra prvého rádu (červená farba)

$$\Delta x' = x_f - x'_č = 24{,}0 \text{ mm} - 23{,}0 \text{ mm} = 1{,}0 \text{ mm}$$

885. Ohybová mriežka je osvetlená kolmo rovnobežným zväzkom bieleho svetla. Určite, či sa môže niektorá farba zo spektra prvého rádu prekrývať s niektorou farbou spektra druhého rádu!

Riešenie:

Nech sa v spektre prvého rádu objaví farebný pás vlnovej dĺžky λ_1 pod uhlom α_1 a v spektre druhého rádu farebný pás vlnovej dĺžky λ_2 pod uhlom α_2. Zrejme sú splnené vzťahy

$$d \sin \alpha_1 = \lambda_1$$

$$d \sin \alpha_2 = 2\lambda_2$$

kde d je mriežková konštanta.

Keby sa oba pásy mali prekrývať, mal by byť splnený vzťah

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

čo by viedlo k podmienke

$$\lambda_1 = 2\lambda_2$$

Okom vnímané farebné zložky bieleho svetla majú vlnové dĺžky v rozsahu od 400 do 700 nm, preto túto podmienku nemožno splniť.

886. Určite najvyšší rád spektra, ktoré ešte vzniká pri ohybe svetla vlnovej dĺžky λ mriežkou, ak mriežková konštanta je d!

Riešenie:

Maximálna intenzita k-teho rádu sa objaví v smere, pre ktorý je splnená podmienka

$$\sin \alpha = k \frac{\lambda}{d} \tag{1}$$

Pretože funkcia $\sin \alpha$ sa rovná najviac jednej, musí aj pravá strana rovnice (1) spĺňať podmienku

$$k \frac{\lambda}{d} \leqq 1$$

odkiaľ pre najvyšší rád spektra dostaneme:

$$k \leqq \frac{d}{\lambda}$$

pričom k musí byť celé číslo.

887. Vypočítajte, aká je mriežková konštanta α-železa, keď jeho hustota $\varrho = 7860 \text{ kg.m}^{-3}$ a α-železo kryštalizuje v kubickej sústave s priestorovo centrovanou mriežkou!

Riešenie:

Nech všeobecne v kubickej mriežke pripadá na každú elementárnu bunku prvku n atómov; keď M je hmotnosť jedného mólu prvku a N_A počet atómov v jednom móle, jeden atóm prvku má hmotnosť

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

a hmotnosť pripadajúca na jednu elementárnu bunku bude

$$m = n\frac{M}{N_A} \tag{1}$$

Keď d je mriežková konštanta prvku a ϱ jeho hustota, elementárna bunka má hmotnosť

$$m = d^3 \varrho \tag{2}$$

Porovnaním vzťahov (1) a (2) vyplýva pre hľadanú mriežkovú konštantu vzťah

$$d = \sqrt[3]{n\frac{M}{\varrho N_A}} \tag{3}$$

V kubickej priestorovo centrovanej mriežke pripadajú na každú elementárnu bunku $n = 2$ atómy a pre mriežkovú konštantu potom vychádza hodnota

$$d = \sqrt[3]{\frac{2M}{N_A \varrho}} = \sqrt[3]{\frac{255{,}8 \text{ kg.kmol}^{-1}}{6{,}03 \,.\, 10^{26} \text{ kmol}^{-1} \,.\, 7860 \text{ kg.m}^{-3}}} = 0{,}287 \text{ nm}$$

888. Na kryštál chloridu draselného dopadá röntgenové žiarenie medi K_α a odráža sa pod uhlom $\alpha = 18° \, 03'$ (k rovine (001)) v druhom ráde. Aká je mriežková konštanta KCl? Vlnová dĺžka použitého röntgenového žiarenia $\lambda = 0{,}1537$ nm.

Riešenie:

Röntgenové lúče dopadajúce na rovinný povrch kryštálu sa odrážajú s maximálnou intenzitou, keď je splnená Braggova—Wulfova podmienka

$$2d \sin \alpha = k\lambda$$

Pretože pozorované spektrum je druhého rádu, $k = 2$ a po dosadení číselných hodnôt dostávame pre hľadanú mriežkovú konštantu d hodnotu

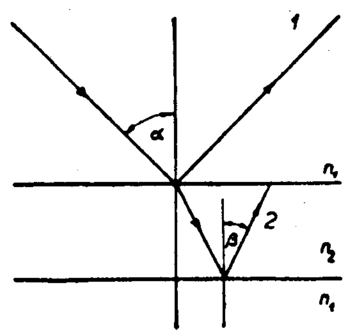
$$d=\frac{k\lambda}{2\sin\alpha}=\frac{2\,.\,0{,}1537\,.\,10^{-9}\ \mathrm{m}}{2\sin 18°\,03'}=4{,}96\,.\,10^{-10}\ \mathrm{m}$$

889. Na planparalelnú sklenú doštičku dopadá svetelný lúč zo vzduchu pod takým uhlom, že do vzduchu odrazený lúč je úplne polarizovaný. Dokážte, že je celkom polarizovaný aj lúč, ktorý sa po lome v doštičke na spodnom rovinnom rozhraní odráža do skla!

Riešenie:

Keď absolútny index lomu vzduchu je n_1 a skla n_2, je podmienka, aby odrazený lúč 1 bol úplne polarizovaný *(obr. 208)*, daná Brewsterovým vzťahom:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{n_2}{n_1} \tag{1}$$



Obr. 208

Aby sme zistili, či je lúč 2 odrazený do skla pod uhlom β polarizovaný, zistíme hodnotu tg β:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \tag{2}$$

Podľa zákona lomu

$$\sin\beta=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha$$

Porovnaním s rovnicou (1), upravenou do tvaru

$$\cos\alpha=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha$$

dostaneme:

$$\sin\beta=\cos\alpha$$

a ďalej

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

čo po dosadení do rovnice (2) dáva:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{n_1}{n_2}$$

Tento vzťah vyjadruje podmienku, aby lúč odrazený na rozhraní prostredia sklo a vzduch bol úplne polarizovaný.

Úlohy

890. Aká je vlnová dĺžka použitého svetla pri Youngovom pokuse, keď vzdialenosť štrbín, z ktorých vychádzajú koherentné interferujúce lúče, $a = 0{,}6$ mm a keď interferenčné pásy na tienidle, vzdialenom od štrbín 1 m, sú od seba vzdialené $\Delta s = 1$ mm?

[$\lambda = 0{,}0006$ mm]

891. Vzdialenosť dvoch štrbín, ktoré slúžia ako koherentné svetelné zdroje, je 0,45 mm. Vypočítajte, v akej vzdialenosti od centrálneho maxima sa nachádza prvý jasný pruh sfarbený červeno ($\lambda_1 = 700$ nm) a fialovo ($\lambda_2 = 400$ nm)! Tienidlo je vzdialené od štrbín 50 cm.

[1 mm; 1,75 mm]

892. Vypočítajte vzdialenosť tretieho svetelného pásu od stredu interferenčného obrazca na tienidle, keď interferenčný jav vznikol odrazom svetla vlnovej dĺžky $\lambda = 0{,}56$ μm na Fresnelových zrkadlách, zvierajúcich uhol $\alpha = 9' \, 10''$! Vzdialenosť zdroja od priesečnice zrkadiel $r = 10$ cm, vzdialenosť tienidla $l_0 = 1$ m.

[$\Delta s = 3{,}5$ mm]

893. Mydlinová blana (index $n = 4/3$) je osvetlená kolmo monochromatickým svetlom vlnovej dĺžky $\lambda_0 = 540$ nm. Aká má byť hrúbka blany, aby v odrazenom svetle na blane nevznikol interferenčný úkaz?

[$d < 101{,}25$ nm]

894. Sklená doštička hrubá 0,3 μm je osvetlená paralelným zväzkom bieleho svetla, ktoré na doštičku dopadá kolmo. Určite vlnovú dĺžku monochromatického svetla vo viditeľnej časti spektra, ktoré je v odrazenom svetle najviac a) zosilnené, b) zoslabené!

[a) 600 nm; b) 450 nm]

895. Biele svetlo sa odráža kolmo na plochách vzdušnej vrstvy hrubej 1 μm, ktorá sa nachádza medzi dvoma sklenými doskami. Určite vlnové dĺžky svetla vo viditeľnej oblasti, ktoré sú v odrazenom svetle najviac a) zosilnené, b) zoslabené.

[a) 571,4 nm; 444 nm; b) 666,6 nm, 500 nm, 400 nm]

896. Na veľmi tenkú sklenú doštičku tvaru klina dopadá kolmo na jej povrch rovnobežný zväzok monochromatických lúčov s vlnovou dĺžkou $\lambda = 0{,}5\ \mu m$. Interferenčný úkaz v doštičke pozorujeme v odrazenom svetle. Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú plochy klina, keď vzdialenosť susedných tmavých pásikov je 5,6 nm!

[$\varphi = 6''$]

897. Priestor medzi Newtonovými sklami je vyplnený vodou. Vypočítajte vzdialenosť medzi tretím a štvrtým Newtonovým krúžkom, keď polomer krivosti šošovky $R = 1$ m a krúžky pozorujeme v odrazenom svetle vlnovej dĺžky $\lambda = 600$ nm! Index lomu vody $n = 4/3$.

[$\Delta r = 0{,}19$ mm]

898. Priemer piateho Newtonovho svetelného krúžku pri pozorovaní v červenom svetle (odrazenom) ($\lambda_č = 700$ nm) je 3,54 mm. Určite ohniskovú vzdialenosť použitej ploskovypuklej šošovky! Aký bol priemer piateho krúžku v modrom svetle ($\lambda_m = 450$ nm)?

[$f = 2$ m; $2r = 2{,}84$ mm]

899. Na Newtonove sklá dopadá kolmo jednofarebné svetlo a interferenčný úkaz pozorujeme v odrazenom svetle. Aká je vlnová dĺžka použitého svetla, keď priemer prvého tmavého interferenčného krúžku je 1,52 mm a polomer krivosti ploskovypuklej šošovky $r = 1$ m?

[$\lambda = 578$ nm]

900. Rovnobežný zväzok monochromatického svetla vlnovej dĺžky $\lambda = 450$ nm dopadá kolmo na štrbinu šírky 1 mm. Tesne za štrbinou je umiestnená šošovka s ohniskovou vzdialenosťou $f = 100$ cm. Na tienidle uloženom v ohniskovej rovine šošovky sa vytvorí ohybový obraz. Určite vzdialenosť minima prvého, druhého a tretieho rádu od hlavného maxima!

[0,45 mm; 0,90 mm; 1,35 mm]

901. Na štrbinu šírky $d = 0{,}5$ mm dopadá kolmo rovnobežný zväzok monochromatických lúčov a na tienidle vzdialenom od štrbiny $l = 3{,}5$ m sa objaví ohybový jav (Frauenhoferov). Vypočítajte vlnovú dĺžku použitého svetla, keď stred prvého tmavého pásika od stredu obrazu štrbiny je vzdialený $a = 4{,}2$ mm!

[$\lambda = 600$ nm]

902. Úzka štrbina je osvetlená rovnobežným zväzkom bieleho svetla, dopadajúceho kolmo na štrbinu. Určite, pre ktorú vlnovú dĺžku splynie stred tretieho tmavého pásika so stredom druhého tmavého pásika pre červenú farbu vlnovej dĺžky $\lambda_č = 690$ nm!

[$\lambda = 460$ nm; pre modrú farbu]

903. Na ohybovú mriežku, ktorá má na 1 mm 100 vrypov, dopadá kolmo rovnobežný zväzok červeného svetla ($\lambda_č = 700$ nm). Vypočítajte, v akej vzdialenosti od seba budú prvý a tretí svetelný pásik na tienidle postavenom vo vzdialenosti $l = 1$ m od mriežky!

[$x = 14{,}4$ cm]

904. Určite najvyšší rád spektra, v ktorom ešte možno pozorovať červenú čiaru s vlnovou dĺžkou 700 nm pomocou optickej mriežky, ktorá má na 1 milimeter 300 vrypov!

[4]

905. Na optickú mriežku, ktorá má na 1 mm 310 vrypov, dopadá kolmo rovnobežný zväzok bieleho svetla. Na tienidle sa vytvorí farebný ohybový jav. Určite uhlovú odchýlku zelenej čiary s vlnovou dĺžkou 540 nm, ktorá sa prekrýva s fialovou čiarou s vlnovou dĺžkou 405 nm zo spektra najbližšieho vyššieho rádu!

[30°]

906. Röntgenové lúče dopadajú na rovinnú stenu kryštálu NaCl a odrážajú sa pod uhlom $\alpha = 5{,}9°$, meranom od tejto roviny v prvom ráde ($k = 1$). Aká je vlnová dĺžka dopadajúceho žiarenia? Hustota NaCl je 2170 kg.m^{-3}.

[$\lambda = 0{,}058$ nm]

907. Vypočítajte, pod akým uhlom má dopadnúť svetelný lúč vo vode na sklenú dosku tak, aby odrazený lúč bol úplne polarizovaný!

[48° 26′]

908. Na doštičku z flintového skla dopadá svetlo pod uhlom $\alpha = 56°\ 12'$ a odráža sa ako úplne polarizované. Aký je index lomu skla?

[$n = 1{,}5$]

909. Vypočítajte, pod akým uhlom musí dopadnúť svetelný lúč na rovinné rozhranie medzi sklom a vodou, aby do skla odrazený lúč bol úplne polarizovaný!

[$\alpha = 41°\ 38'$]

20 ŽIARENIE ČIERNEHO TELESA

Úvod

Telesá tuhé aj kvapalné, ohriate na určitú teplotu, vysielajú elektromagnetické žiarenie.

a) *Intenzitou vyžarovania* (hustotou toku žiarenia) Ψ nazývame podiel toku žiarenia $\mathrm{d}\Phi_e$, ktorý vysiela plocha $\mathrm{d}S$ do celého polpriestoru, a tejto plochy

$$\Psi = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}S}$$

Z intenzity vyžarovania Ψ pripadá na vlnové dĺžky λ až $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ časť $\mathrm{d}\Psi$. Výraz

$$P_\lambda = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\lambda}$$

sa nazýva *spektrálna hustota intenzity vyžarovania*. Intenzitu vyžarovania Ψ potom možno vyjadriť aj vzťahom

$$\Psi = \int_0^\infty P_\lambda \, \mathrm{d}\lambda$$

b) *Absolútne čiernym* nazývame teleso, ktoré naň dopadajúce žiarenie dokonale pohlcuje.

Podľa *Stefanovho—Boltzmannovho zákona* je intenzita vyžarovania absolútne čierneho telesa daná vzťahom

$$\Psi_0 = \sigma T^4$$

kde T je teplota telesa vyjadrená v kelvinoch. Konštanta σ má hodnotu $5{,}7 . 10^{-8}\ \mathrm{J . m^{-2} . s^{-1} . K^{-4}}$.

c) Podľa *Wienovho posuvného zákona* vlnová dĺžka, pri ktorej absolútne čierne teleso vysiela relatívne najviac energie, je nepriamo úmerná absolútnej teplote telesa:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}; \qquad b = 0{,}002\ 89\ \mathrm{m . K}$$

d) Spektrálnu hustotu intenzity vyžarovania absolútne čierneho telesa $P_{0\lambda}$ určuje *Planckov vyžarovací zákon*, ktorý má tvar

$$P_{0\lambda} = f(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{C_2/\lambda T} - 1}$$

kde $C_1 = 2\pi hc^2 = 1{,}19 . \pi . 10^{-16}\ \mathrm{J . m^2 . s^{-1}}$ a $C_2 = \dfrac{hc}{k} = 0{,}0143\ \mathrm{m . K}$.

Príklady

910. Pomocou Planckovho vyžarovacieho zákona dokážte platnosť a) Wienovho posuvného zákona, b) Stefanovho—Boltzmannovho zákona!

Riešenie:

a) Odvodenie Wienovho posuvného zákona.

Hľadajme hodnotu tej vlnovej dĺžky λ_{max}, pre ktorú je monochromatické vyžarovanie absolútne čierneho telesa, vyjadrené Planckovým vyžarovacím zákonom, maximálne.

Na to musí byť splnená podmienka

$$\frac{dP_{0\lambda}}{d\lambda} = 0$$

alebo po dosadení

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{C_2/\lambda T} - 1}\right] = 0$$

Keď vykonáme naznačenú deriváciu, dostaneme vzťah

$$C_1\left(\frac{-5}{\lambda^6 \cdot (e^{C_2/\lambda T})} + \frac{\frac{C_2}{T\lambda^2} e^{C_2/\lambda T}}{\lambda^5 \cdot (e^{C_2/\lambda T})}\right) = 0$$

a keď celú rovnicu delíme výrazom $\frac{C_1}{\lambda^6(e^{C_2/\lambda T} - 1)}$, dostaneme vzťah

$$5 = \frac{C_2\, e^{C_2/\lambda T}}{\lambda T(e^{C_2/\lambda T} - 1)}$$

ktorý po zavedení substitúcie

$$\frac{C_2}{\lambda T} = x \qquad (1)$$

bude mať tvar

$$\frac{x\, e^x}{e^x - 1} = 5$$

Odhadom možno určiť, že táto rovnica má reálny koreň, ktorý sa rovná približne číslu 5. Riešením tejto rovnice známymi metódami algebry vychádza, že rovnica má jediný reálny koreň:

$$x_1 = 4{,}965$$

Keď ho dosadíme do rovnice (1), pre hľadanú vlnovú dĺžku dostaneme:

$$\lambda_{\max} = \frac{C_2}{xT} = \frac{hc}{4{,}965kT} = \frac{\text{konšt}}{T}$$

kde konšt $= 0{,}002\ 89$ m.K.

b) Odvodenie Stefanovho—Boltzmannovho zákona.

Najprv určíme hodnotu intenzity vyžarovania Ψ_0 absolútne čierneho telesa. Keď spektrálna hustota intenzity vyžarovania absolútne čierneho telesa je $P_{0\lambda}$,

$$\Psi_0 = \int_0^{\infty} P_{0\lambda}\, \mathrm{d}\lambda$$

Tento integrál ľahšie vypočítame, keď v Planckovom vyžarovacom zákone, ktorý udáva priebeh funkcie $P_{0\lambda}$, nahradíme vlnové dĺžky frekvenciami. Pre energiu vyžiarenú vo frekvenčnom intervale df (v intervale vlnových dĺžok dλ) možno písať vzťah

$$P_{0f}\, \mathrm{d}f = P_{0\lambda}\, \mathrm{d}\lambda$$

a keď uvážime, že $\lambda = cf^{-1}$ a $|\mathrm{d}\lambda| = cf^{-2}|\mathrm{d}f|$, z Planckovho zákon vyplýva:

$$\frac{C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{C_2/\lambda T} - 1}\, \mathrm{d}\lambda = \frac{C_1 f^5}{c^5} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{C_2 f/cT} - 1}\, cf^{-2}\, \mathrm{d}f$$

a celková intenzita vyžarovania

$$\Psi_0 = \int_0^{\infty} P_{0\lambda}\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^{\infty} P_{0f}\, \mathrm{d}f = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{c^4} \cdot \frac{f^3}{\mathrm{e}^{C_2 f/cT} - 1}\, \mathrm{d}f$$

a keď nahradíme

$$\frac{C_2 f}{cT} = x\,; \quad \mathrm{d}f = \frac{cT}{C_2}\, \mathrm{d}x$$

dostávame

$$\Psi_0 = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{c^4} \cdot \frac{c^3 T^3}{C_2^3} \cdot \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} \cdot \frac{cT}{C_2}\, \mathrm{d}x$$

Ale

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

preto aj

$$\Psi_0 = \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \frac{\pi^4}{15}$$

a po dosadení hodnôt konštánt

$$\Psi_0 = \frac{2k^4 . \pi^5}{15c^2h^3} T^4 = \sigma T^4$$

čo je Stefanov—Boltzmannov zákon.

Konštanta

$$\sigma = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}$$

má číselnú hodnotu

$$\sigma = 5{,}7 . 10^{-8}\ \mathrm{J . m^{-2} . s^{-1}\ K^{-4}}$$

911. Na 1 cm^2 zemského povrchu dopadá zo Slnka asi 8,12 J energie za minútu. Vypočítajte, aká je povrchová teplota Slnka za predpokladu, že Slnko žiari ako absolútne čierne teleso! Vzdialenosť Slnka od Zeme $d = 149{,}5 . 10^6$ km, polomer Slnka $R = 695\ 550$ km.

Riešenie:

Keď Slnko považujeme za guľu s polomerom R a predpokladáme, že celková energia Ψ, ktorú plošná jednotka vyžiari za jednotku času, je pre všetky miesta povrchu Slnka rovnaká, slnečný povrch vyžiari za jednotku času energiu

$$W = 4\pi R^2 \Psi$$

Túto energiu prenášajú elektromagnetické vlny a je rozložená na vlnoploche. Na jednotku plochy zemského povrchu dopadne z tejto energie časť

$$W_1 = \frac{W}{4\pi d^2}$$

kde d je vzdialenosť Zeme od Slnka. Odtiaľ

$$\Psi = W_1 \frac{d^2}{R^2} \qquad (1)$$

Za predpokladu, že Slnko žiari ako absolútne čierne teleso, možno intenzitu vyžarovania Ψ vyjadriť pomocou Stefanovho—Boltzmannovho zákona v tvare

$$\Psi = \sigma T^4 \qquad (2)$$

a porovnaním rovníc (1) a (2) možno písať:

$$T=\sqrt[4]{\frac{\Psi}{\sigma}}=\sqrt[4]{W_1\frac{d^2}{\sigma R^2}}=\sqrt{\frac{d}{R}}\cdot\sqrt[4]{\frac{W_1}{\sigma}}$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

$$T=\sqrt{\frac{149{,}5\,.\,10^6\ \mathrm{km}}{6{,}9555\,.\,10^5\ \mathrm{km}}}\sqrt{\frac{\dfrac{1{,}94\,.\,4{,}2}{60}\ \mathrm{J\,.\,cm^{-2}\,.\,s^{-1}}}{5{,}7\,.\,10^{-12}\ \mathrm{J\,.\,cm^{-2}\,.\,s^{-1}\,.\,K^{-4}}}}=5684\ \mathrm{K}$$

912. Vypočítajte, aký prúd by mal prechádzať kovovým vláknom priemeru $d=0{,}1$ mm, ktoré je vo vyčerpanej banke, aby sa jeho teplota udržiavala na stálej hodnote $T=2500$ K! Predpokladáme, že vlákno vyžaruje energiu ako absolútne čierne teleso. Tepelné straty spojené s vedením tepla zanedbajte. Špecifický odpor vlákna $\varrho=2{,}5\,.\,10^{-4}\ \Omega\mathrm{cm}$.

Riešenie:

Keď vlákno žiari ako absolútne čierne teleso, 1 cm^2 jeho povrchu vyžiari za sekundu podľa Stefanovho—Boltzmannovho zákona celkom energiu

$$\Psi_0=\sigma T^4$$

Úhrnná energia, ktorú vyžiari vlákno povrchu S za čas t je potom

$$\Psi_0 St=\sigma T^4\pi l d t$$

kde l je dĺžka vlákna.

Aby sa vlákno udržiavalo na stálej teplote T, treba túto stratu energie nahradiť energiou, ktorá vzniká pri prechode elektrického prúdu. Keď vodičom s odporom R prechádza prúd I, zväčší sa za čas t jeho vnútorná energia o hodnotu

$$\Delta W=RI^2t$$

čo sa prejaví zvýšením teploty vodiča. Keď sa celá táto energia spotrebuje na úhradu vyžiarenej energie, musí byť splnený vzťah

$$RI^2t=\sigma T^4\pi l d t \tag{1}$$

Keď pre odpor vodiča dĺžky l a prierezu q píšeme vzťah

$$R=\varrho\frac{l}{q}=\varrho\frac{l}{\pi\dfrac{d^2}{4}}$$

rovnica (1) bude mať po úprave tvar

$$I^2=\frac{\sigma T^4\pi^2 d^3}{4\varrho}$$

odkiaľ pre hľadaný prúd dostaneme

$$I = \frac{\pi d T^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma d}{\varrho}}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$I = \frac{\pi \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{m} \,.\, 2{,}5^2 \,.\, 10^6\ \mathrm{K}^2}{2} \,.$$

$$\cdot \sqrt{\frac{5{,}7 \,.\, 10^{-8}\ \mathrm{J} \,.\, \mathrm{s}^{-1} \,.\, \mathrm{m}^{-2} \,.\, \mathrm{K}^{-4} \,.\, 10^{-4}\ \mathrm{m}}{2{,}5 \,.\, 10^{-6}\ \Omega \,.\, \mathrm{m}}} = 1{,}47\ \mathrm{A}$$

913. Kovové vlákno, ktoré má priemer $d = 0{,}2$ mm, sa rozžeraví elektrickým prúdom na teplotu $T_1 = 3000$ K. Vypočítajte, za aký čas po vypnutí prúdu klesne teplota vlákna na teplotu $T_2 = 800$ K! Predpokladáme, že vlákno žiari ako absolútne čierne teleso a z okolia neprijíma nijakú energiu. Všetky ostatné príčiny teplotných strát možno zanedbať. Hustota vlákna $\varrho = 19\ \mathrm{g} \,.\, \mathrm{cm}^{-3}$ a špecifická tepelná kapacita $c = 0{,}155\ \mathrm{J} \,.\, \mathrm{g}^{-1} \,.\, \mathrm{K}^{-1}$.

Riešenie:

Keď vlákno žiari ako absolútne čierne teleso a z okolia neprijíma nijakú energiu, podľa Stefanovho—Boltzmannovho zákona 1 cm^2 jeho povrchu vyžiari za sekundu energiu

$$\Psi_0 = \sigma T^4$$

a vlákno s povrchom $S = \pi d l$ vyžiari energiu

$$W = \sigma \pi d l T^4 \qquad (1)$$

Za čas dt poklesne teplota vlákna z teploty T na $T - \mathrm{d}T$ a vlákno vyžiari energiu

$$W\, \mathrm{d}t = -mc\, \mathrm{d}T \qquad (2)$$

kde m je hmotnosť a c špecifická tepelná kapacita vlákna.

Keď do vzťahu (2) za W dosadíme z rovnice (1), po úprave dostaneme:

$$\frac{\sigma \pi d l}{mc}\, \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

odkiaľ po integrácii

$$\int_0^t \frac{\sigma \pi d l}{mc}\, \mathrm{d}t = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathrm{d}T}{T^4}$$

Po úprave dostávame:

$$t=\frac{mc}{3\sigma\pi dl}\left(\frac{1}{T_2^3}-\frac{1}{T_1^3}\right)$$

Keď sem ešte dosadíme $m=V\varrho=\pi\frac{d^2}{4}l\varrho$, dostaneme:

$$t=\frac{d\varrho c}{12\sigma}\left[\frac{1}{T_2^3}-\frac{1}{T_1^3}\right]$$

Po dosadení číselných hodnôt pre hľadaný čas t vyplýva:

$$t=\frac{2.10^{-4}\ \mathrm{m}.19.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}.155\ \mathrm{J.kg^{-1}.K^{-1}}}{12.5{,}7.10^{-8}\ \mathrm{J.s^{-1}.m^{-2}.K^{-4}}}.$$

$$\cdot\left[\frac{1}{8^3.10^6\ \mathrm{K}^3}-\frac{1}{3^3.10^9\ \mathrm{K}^3}\right]=1{,}65\ \mathrm{s}$$

914. Čierne teleso sme zohriali na teplotu a) 10^6 K, b) 10^3 K. Vypočítajte, na ktorú vlnovú dĺžku v spektre žiarenia tohto telesa pripadá relatívne najviac energie!

Riešenie:

Podľa Wienovho posuvného zákona vlnová dĺžka, pri ktorej absolútne čierne teleso vyžaruje pomerne najviac energie, je nepriamo úmerná absolútnej teplote:

$$\lambda_{\max}=\frac{b}{T}$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

a) $$\lambda_{\max}=\frac{0{,}002\,89\ \mathrm{m.K}}{10^6\ \mathrm{K}}=289.10^{-11}\ \mathrm{m}=2{,}89\ \mathrm{nm}$$

b) $$\lambda_{\max}=\frac{0{,}002\,89\ \mathrm{m.K}}{10^3\ \mathrm{K}}=2890\ \mathrm{nm}$$

Úlohy

915. Kovové vlákno s priemerom 0,2 mm, dlhé 10 cm, nachádzajúce sa vo vákuu, sa rozžeraví elektrickým prúdom na teplotu 3000 K. Aká je energia vláknom vyslaného žiarenia za jednu minútu? Predpokladáme, že vlákno žiari ako absolútne čierne teleso.

[17 400 J]

916. Obvykle sa udáva, že stredná hodnota energie, ktorú vyžiari 1 cm² zemského povrchu za 1 minútu, je 0,54 J. Akú teplotu by malo mať absolútne čierne teleso, ktoré by vyžarovalo rovnaké množstvo energie?

[$T = 200$ K]

917. Do čiernej tenkostennej nádoby tvaru kocky sme naliali 1 kg vody teploty 50 °C a voda vyplnila celý objem nádoby. Vypočítajte, za aký čas sa voda ochladí na teplotu 10 °C, keď je umiestnená v čiernej dutine, ktorej steny majú teplotu blízku absolútnej nule!

[$t = 1$ h 38 min]

918. Určite, aká je teplota slnečného povrchu, keď vieme, že v slnečnom spektre pripadá relatívne najväčšie množstvo vyžiarenej energie na vlnovú dĺžku $\lambda = 4{,}75 \, . \, 10^{-5}$ cm! Predpokladáme, že Slnko žiari ako absolútne čierne teleso.

[$T = 6084$ K]

919. Teleso zohriate na teplotu 2500 K necháme postupne chladnúť; vlnová dĺžka svetla, na ktorú pripadá relatívne najviac energie v spektre žiarenia tohto telesa, sa pritom zmení o 0,8 μm. Vypočítajte, na akú teplotu sa teleso ochladilo, ak predpokladáme, že žiari ako absolútne čierne teleso!

[$T = 1477$ K]

920. V nádobe sa nachádza oceľ v kvapalnom stave. Vypočítajte, pri akej teplote bude oceľ vyžarovať maximálnu energiu vo vlnovej dĺžke, ktorá patrí do hraničnej oblasti viditeľného svetla! Predpokladáme, že kvapalná oceľ žiari ako absolútne čierne teleso.

[3612 K]

921. Vypočítajte, koľkokrát viac energie vyžiari absolútne čierne teleso zohriate na teplotu $T = 5000$ K v žltozelenej časti spektra ($\lambda_1 = 580$ nm) ako v červenej časti spektra ($\lambda_2 = 760$ nm)!

$$\left[\frac{W_{\lambda 1}}{W_{\lambda 2}} = 1{,}17\right]$$

E MIKROČASTICE. ATÓMY. MOLEKULY

21 MIKROČASTICE

Úvod

Pri stanovení vlastností mikročastíc a sledovaní ich správania v rôznych fyzikálnych podmienkach nevystačíme s predstavami a zákonmi klasickej fyziky. Bude treba použiť aj niektoré predstavy a výsledky špeciálnej teórie relativity a kvantovej fyziky. Kritériom toho, či na riešenie daného fyzikálneho javu možno použiť nerelativistický postup, je pomer medzi rýchlosťami, ktoré pri fyzikálnom jave prichádzajú do úvahy, a rýchlosťou svetla vo vákuu ($c \doteq 3 \,.\, 10^8 \text{ m.s}^{-1}$). Ak sú tieto rýchlosti v porovnaní s rýchlosťou svetla vo vákuu malé, možno použiť nerelativistický postup. Hranice použiteľnosti nekvantového postupu vymedzuje princíp neurčitosti, ktorého obsah osvetlíme neskôr.

Pri riešení príkladov a úloh v tejto kapitole si treba uvedomiť predovšetkým tieto skutočnosti:

a) V elektrickom poli s intenzitou $\boldsymbol{E}$ pôsobí na elektrón, ktorého náboj je $-e$, sila

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$$

b) Magnetické pole s indukciou $\boldsymbol{B}$ pôsobí na elektrón, pohybujúci sa rýchlosťou $\boldsymbol{v}$, silou

$$\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Ak je magnetické pole homogénne a rýchlosť je kolmá na smer indukcie, sila pôsobiaca na elektrón má konštantnú hodnotu

$$F = evB$$

a smeruje vždy do stredu krivosti daného miesta dráhy pohybu, v ktorom sa elektrón nachádza. Elektrón sa v takomto prípade pohybuje po kružnici a uvedená sila má význam dostredivej sily.

c) Podľa špeciálnej teórie relativity súvisí hmotnosť m akéhokoľvek materiálneho objektu (telesa, častice, poľa) s jeho energiou W podľa vzťahu

$$W = mc^2$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Keď sa mení energia telesa, mení sa aj jeho hmotnosť. V prípade mechanického pohybu je závislosť hmotnosti m telesa od jeho rýchlosti v daná vzťahom

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť telesa, t. j. hmotnosť pri rýchlosti $v = 0$. Kinetickú energiu telesa v tejto teórii vyjadruje vzťah

$$W_k = c^2(m - m_0) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Hybnosť častice s rýchlosťou v je v relativistickej fyzike daná vzťahom

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Špeciálna teória relativity poskytuje v porovnaní s klasickou fyzikou nový pohľad aj na časovopriestorové vlastnosti materiálnych objektov. Z nej vyplýva napr. *dilatácia času.* Ak určitý dej na nejakom telese prebehne vo vzťažnej sústave, vzhľadom na ktorú je teleso v pokoji, za čas t_0, potom vo vzťažnej sústave, v ktorej sa uvažované teleso pohybuje rýchlosťou v, prebehne ten istý dej za čas t, pre ktorý platí vzťah

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

d) Fotón elektromagnetického žiarenia s vlnovou dĺžkou λ a s frekvenciou f sa vyznačuje energiou

$$W = hf$$

a hybnosťou

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

kde h je *Planckova konštanta.*

e) Podobne ako fotónom priraďujeme aj akejkoľvek pohybujúcej sa mikročastici korpuskulárne i vlnové vlastnosti. Pre vlnovú dĺžku λ *de Broglieho vlny*, ktorá prislúcha častici hmotnosti m, pohybujúcej sa rýchlosťou v, platí vzťah

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Pre frekvenciu de Broglieho vĺn platí podobne ako u fotónov vzťah

$$f = \frac{W}{h}$$

kde U je energia mikročastice.

f) Ak určujeme súčasne polohu aj hybnosť mikročastice, možno to urobiť iba približne, s istou nepresnosťou Δx, Δy, Δz v hodnotách súradníc polohy častice a s nepresnosťou Δp_x, Δp_y, Δp_z v hodnotách súradníc hybnosti. Podľa *princípu neurčitosti* platia medzi týmito nepresnosťami vzťahy dané týmito reláciami neurčitosti

$$\Delta x \,.\, \Delta p_x \geqq \hbar \,; \quad \Delta y \,.\, \Delta p_y \geqq \hbar \,; \quad \Delta z \,.\, \Delta p_z \geqq \hbar$$

kde $\hbar = h/2\pi$. Podstatou princípu neurčitosti je, že relácie neurčitosti poukazujú na hranice použiteľnosti pojmov a predstáv klasickej fyziky. Klasická fyzikálna sústava, charakterizovaná klasickými dynamickými veličinami, ktoré závisia príslušným spôsobom od času a môžu byť v princípe určené s ľubovoľnou presnosťou, je výsledkom abstrakcie a jestvuje len v našej predstave. V skutočnosti takáto sústava nejestvuje. Opis reálnej sústavy metódami klasickej fyziky je istým priblížením sa k skutočnosti a relácie neurčitosti poskytujú informácie, ktoré umožňujú hodnotiť vhodnosť, resp. kvalitu tohto priblíženia.

g) Jav, ktorý nastáva pri zrážke fotónu s elektrónom, označujeme ako *Comptonov jav.* Pri tejto zrážke dochádza medzi fotónom a elektrónom k výmene energie a hybnosti, čo vedie k zmene pohybového stavu elektrónu, ako aj k zmene frekvencie a smeru pohybu fotónu. Keďže ide o izolovanú sústavu, ktorú tvorí fotón s elektrónom, platí pri tomto jave ako zákon zachovania energie, tak aj zákon zachovania hybnosti.

h) Pre rýchlosť *fotoelektrónov*, ktoré vysielajú niektoré látky pri osvetlení svetlom určitej frekvencie *(vonkajší fotoelektrický jav)* platí vzťah

$$hf = A_0 + A + \frac{1}{2} mv^2$$

kde A_0 je *ionizačná práca*, A je *výstupná práca*, f je frekvencia použitého svetla, h je Planckova konštanta, m je hmotnosť elektrónu a v je jeho rýchlosť, ktorou vyletuje z príslušnej látky. U kovov je A_0 veľmi malé, takže možno písať $A_0 = 0$. Pre kovy možno teda predchádzajúcu rovnicu písať v tvare

$$hf = A + \frac{1}{2} mv^2$$

i) *Ionizačným potenciálom* určitého prvku nazývame hodnotu takého potenciálu, ktorého súčin s nábojom elektrónu vyjadruje veľkosť práce potrebnej na ionizáciu atómu príslušného prvku.

Príklady

922. Vypočítajte intenzitu elektrického poľa protónu vo vzdialenosti $r = 10^{-8}$ cm!

Riešenie:

Protón považujeme za bodový elektrický náboj. Potom

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} = \frac{1}{4\pi . 8{,}856 . 10^{-12}} \cdot \frac{1{,}602 . 10^{-19}}{10^{-20}} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} =$$

$$= 1{,}44 . 10^{11} \text{ V.m}^{-1}$$

Elektrické pole tohoto rádu pôsobí na elektrón v elektrónovom obale atómu vodíka. Také silné elektrické pole sa umelo doteraz nepodarilo vyrobiť.

923. Za účinku síl elektrického poľa, budeného záporným bodovým nábojom $Q = 10^{-10}$ C, prebehol elektrón dráhu, ktorej začiatok je vo vzdialenosti 5 cm a koniec vo vzdialenosti 10 cm od bodového náboja Q. Akú rýchlosť a kinetickú energiu získal elektrón na tejto dráhe, keď na začiatku dráhy mal nulovú rýchlosť?

Riešenie:

Podľa vety o kinetickej energii sa práca, ktorú vykonajú sily elektrického poľa na určitej dráhe, rovná prírastku kinetickej energie na tejto dráhe, t. j.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1{,}602 . 10^{-19} . 10^{-10}}{4 . 3{,}14 . 8{,}86 . 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}1}\right) \text{ J} \doteq$$

$$\doteq 9 . 1{,}602 . 10^{-19} \text{ J} = 9 \text{ eV}$$

takže

$$v = \sqrt{\frac{2 . 9 . 1{,}602 . 10^{-19} \text{ J}}{9{,}109 . 10^{-31} \text{ kg}}} = 1{,}78 . 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

924. Elektróny vletujú do homogénneho elektrického poľa medzi doskami vychyľujúceho kondenzátora v katódovom osciloskope rýchlosťou $v_0 = 10^7$ m.s^{-1} kolmo na smer intenzity poľa. Ako sa odchýli stopa elektrónového lúča na tienidle od pôvodnej polohy, keď napätie medzi doskami kondenzátora je 100 V, dĺžka dosiek (v smere pohybu elektrónov) 3 cm, vzdialenosť medzi doskami 1 cm a vzdialenosť tienidla od kraja dosky 30 cm?

Riešenie:

Ide tu o pohyb elektrónu v homogénnom priečnom elektrickom poli intenzity

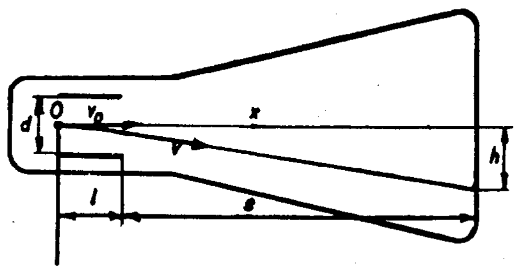
$$E = \frac{U}{d} = \frac{100 \text{ V}}{0{,}01 \text{ m}} = 10\,000 \text{ V.m}^{-1}$$

Pre pohyb elektrónu v tomto poli pri označení podľa *obr. 209* možno písať:

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = 0; \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} = eE$$

takže

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}\,t^2$$



Obr. 209

Pre parabolickú dráhu pohybu elektrónu v tomto poli vyplýva rovnica

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}$$

V mieste, kde elektrón opúšťa pole, $x = l$, a teda

$$y_l = \frac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}\cdot\frac{l^2}{v_0^2}$$

Pre uhol α, ktorý zviera v tomto mieste rýchlosť elektrónu s osou x, platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{eE}{m}\,t_l}{v_0} = \frac{\frac{eE}{m}\,\frac{l}{v_0}}{v_0} = \frac{eEl}{mv_0^2}$$

Dotyčnica k parabole v tomto bode má rovnicu

$$y - y_l = (x - l)\operatorname{tg}\alpha$$

z ktorej možno vypočítať hľadané h. Pre $x = l + c$ sa totiž $y = h$, takže

$$h = y_l + c\operatorname{tg}\alpha = \frac{eEl^2}{2mv_0^2} + \frac{eElc}{mv_0^2} = \frac{eEl}{mv_0^2}\left(\frac{l}{2} + c\right) =$$

$$= \frac{1{,}602.10^{-19}\cdot\frac{100}{10^{-2}}\cdot 3.10^{-2}}{9{,}109.10^{-31}.10^{14}}\cdot 0{,}315\ \mathrm{m} = 16{,}6\ \mathrm{cm}$$

925. Aký je polomer zakrivenia dráhy elektrónu s kinetickou energiou $W_k = 5 \, . \, 10^3$ eV, ak sa elektrón pohybuje v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 50 \, . \, 10^{-4}$ T kolmom na smer pohybu?

Riešenie:

Pre pohyb pomalého elektrónu v homogénnom magnetickom poli kolmom na smer rýchlosti elektrónu platí vzťah

$$m \frac{v^2}{r} = evB$$

takže pre hľadaný polomer r dostaneme:

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2 W_k}{m}}$$

pričom sme rýchlosť v vyjadrili zo vzťahu $\frac{1}{2} mv^2 = W_k$. Potom

$$r = \frac{9{,}109 \, . \, 10^{-31} \text{ kg}}{1{,}602 \, . \, 10^{-19} \text{ C} \, . \, 5 \, . \, 10 \, . \, 10^{-4} \text{ T}} \, .$$

$$. \sqrt{\frac{2 \, . \, 5 \, . \, 10^3 \, . \, 1{,}602 \, . \, 10^{-19} \text{ J}}{9{,}109 \, . \, 10^{-31} \text{ kg}}} = 4{,}77 \, . \, 10^{-2} \text{ m}$$

Pri riešení sme za m dosadzovali pokojovú hmotnosť elektrónu.

926. Elektrón vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou $B = 0{,}01$ T rýchlosťou $v_0 = 10^4 \text{ m} \, . \, \text{s}^{-1}$, ktorá zviera so smerom indukcie uhol $\alpha = 30°$. Nájdite polomer závitu skrutkovice, po ktorej sa elektrón bude pohybovať, výšku jedného závitu, ako aj čas, za ktorý prejde elektrón dráhu $s = 1$ m v smere osi skrutkovice!

Riešenie:

Rýchlosť v_0, ktorou elektrón vletí do magnetického poľa, rozložme na dve zložky, a to na zložku spadajúcu do smeru indukcie magnetického poľa a na zložku, ktorá je kolmá na tento smer. Pre ne platí:

$$v_{01} = v_0 \cos \alpha \, ; \quad v_{02} = v_0 \sin \alpha$$

Pohyb elektrónu sa bude skladať z rovnomerného priamočiareho pohybu v smere indukcie s rýchlosťou v_{01} (na tento pohyb magnetické pole nijako nevplýva) a z rovnomerného pohybu po kružnici s rýchlosťou v_{02} v rovine kolmej na smer indukcie, lebo táto časť pohybu elektrónu je rovnaká ako v príklade 925. Výsledný pohyb elektrónu sa teda bude konať po skrutkovici, ktorej os spadá do smeru indukcie magnetického poľa. Pre polomer r závitov skrutkovice možno podobne ako v príklade 925 písať vzťah

$$\frac{mv_{02}^2}{r} = eBv_{02}$$

takže

$$r = \frac{mv_{02}}{eB} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{eB} = \frac{9{,}109 \,.\, 10^{-31} \,.\, 10^4 \,.\, \frac{1}{2}}{1{,}602 \,.\, 10^{-19} \,.\, 10^{-2}}\ \mathrm{m} = 2{,}84 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

Čas T, za ktorý elektrón obehne raz dookola (vykoná jeden závit), vyplýva zo vzťahu

$$T = \frac{2\pi r}{v_{02}} = \frac{2\pi r}{v_0 \sin\alpha} = \frac{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 2{,}84 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{m}}{10^4\ \mathrm{m} \,.\, \mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{1}{2}} = 3{,}57 \,.\, 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

Pre výšku závitu potom platí:

$$h = v_{01}T = v_0 T \cos\alpha = 10^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3{,}57 \,.\, 10^{-9}\ \mathrm{m} = 3{,}09 \,.\, 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

Čas t, za ktorý v smere osi prejde elektrón dráhu $s = 1$ m, je daný vzťahom

$$t = \frac{s}{v_{01}} = \frac{s}{v_0 \cos\alpha} = \frac{1}{10^4 \frac{\sqrt{3}}{2}}\ \mathrm{s} = 0{,}115 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{s}$$

927. Magnetrón je dióda s anódou tvaru rotačného valca, ktorého osou prechádza vlákno katódy. Na banku elektrónky je navinutá valcová cievka, ktorej os je totožná s osou valcovej anódy. Cievka je taká dlhá, aby magnetické pole, ktoré vytvára elektrický prúd tečúci závitmi cievky, bolo pozdĺž katódy homogénne. Elektróny, ktoré vyletujú z katódy, sú pod súčasným vplyvom elektrického poľa, ktoré sa vytvára medzi anódou a katódou, a magnetického poľa vytvoreného prúdom, ktorý tečie závitmi cievky. Vypočítajte, pri akej najmenšej hodnote indukcie magnetického poľa elektróny nedopadnú na anódu, keď polomer anódy $R = 4$ cm a napätie medzi anódou a katódou $U = 1000$ V!

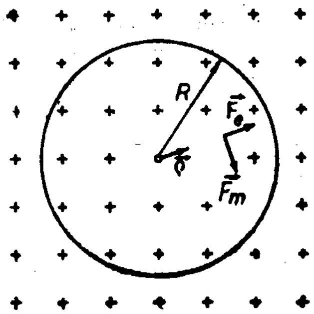
Riešenie:

Pohybová rovnica elektrónu, podliehajúceho súčasnému vplyvu elektrického aj magnetického poľa, má tvar

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m$$

kde $\boldsymbol{F}_e$ je sila, ktorou pôsobí na elektrón elektrické pole, a $\boldsymbol{F}_m$ sila, ktorou pôsobí magnetické pole na elektrón. Na *obr. 210* je znázornená situácia v reze elektrónkou, ktorý je kolmý na smer osi. Ale

$$\boldsymbol{F}_e = -e\boldsymbol{E}\,; \quad \boldsymbol{F}_m = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$



Obr. 210

Z obrázku vidno, že $\boldsymbol{F}_e$ má v každom okamihu radiálny smer a $\boldsymbol{F}_m$ zase priečny smer (transverzálny). Preto rozložíme zrýchlenie $\boldsymbol{a}$ na radiálnu a priečnu zložku. Potom

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{\varrho}) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varrho} + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t}$$

takže

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\varrho} + r\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t}$$

kde $\boldsymbol{\varrho}$ je jednotkový vektor, smerujúci od katódy kolmo na okamžitú polohu elektrónu. Platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho} = \omega\boldsymbol{\tau}$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá uhlová rýchlosť elektrónu a $\boldsymbol{\tau}$ jednotkový vektor v priečnom smere. Ďalej potom

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varrho}}{\mathrm{d}t} =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varrho}) = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\varrho} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\varrho}) - \omega^2\boldsymbol{\varrho} = \varepsilon\boldsymbol{\tau} - \omega^2\boldsymbol{\varrho}$$

lebo vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\boldsymbol{\varrho}$ sú navzájom kolmé, takže $\boldsymbol{\omega} \,.\, \boldsymbol{\varrho} = 0$. Pre zrýchlenie elektrónu potom dostaneme:

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right)\boldsymbol{\varrho} + \left(r\omega + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega\right)\boldsymbol{\tau}$$

Keď si ďalej uvedomíme, že

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = -e\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varrho} + r\omega\boldsymbol{\tau}\right) \times \boldsymbol{B}\right] = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + er\omega B\boldsymbol{\varrho}$$

rovnica (1) poskytuje tieto dve rovnice:

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\omega^2\right) = eE + er\omega B; \quad m\left(r\varepsilon + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega\right) = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Druhú rovnicu možno upraviť na tvar

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\omega) = eB\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

odkiaľ po vynásobení dt a integrácii dostávame:

$$mr^2\omega = \frac{1}{2}eBr^2$$

takže

$$\omega = \frac{eB}{2m}$$

V hraničnom prípade, keď magnetické pole je také, že sa elektrón ešte práve dostane na anódu, dráha elektrónu sa dotýka valcovej katódy. Potom pre $r = R$ sa $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$ a kinetická energia elektrónu v mieste dotyku spĺňa podmienku

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = eU$$

Ak dosadíme za ω uvedený výraz, bude platiť

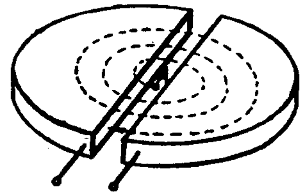
$$\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{eB}{2m}\right)^2 = eU, \quad \text{t. j.} \quad \frac{1}{8}R^2\frac{eB^2}{m} = U$$

Pre hľadané B potom dostaneme:

$$B = \sqrt{\frac{8mU}{eR^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2mU}{e}} = 0{,}53 \, . \, 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

Ak zvýšime hodnotu indukcie magnetického poľa nad $0{,}53 \, . \, 10^{-2}$ T, elektróny sa nedostanú na anódu.

928. Napätie medzi duantmi cyklotrónu $U = U_0 \sin \omega t$, kde $U_0 = 2 \, . \, 10^4$ V a frekvencia napätia $f = 2{,}25 \, . \, 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. Urýchľujú sa ním jednomocné ióny, ktorých hmotnosť je 1800-krát väčšia ako pokojová hmotnosť elektrónu. Ión začína svoj pohyb v bode A (*obr. 211*), a keď obehne rad polkružníc, dosahuje rýchlosť $v_0 = 4{,}4 \,.\, 10^7\ \mathrm{m \,.\, s^{-1}}$. Nájdite počet polkružníc, ktoré obehol ión, a polomer prvej a poslednej kružnice, keď vzdialenosť medzi duantmi prejde ión pri maximálnom napätí!



Obr. 211

Riešenie:

Čas, za ktorý obehne ión ktorúkoľvek polkružnicu, je rovnaký a musí sa rovnať polovici periódy striedavého napätia, t. j.

$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2 \,.\, 2{,}5 \,.\, 10^7\ \mathrm{s^{-1}}} = \frac{1}{4{,}5 \,.\, 10^7}\ \mathrm{s} = 0{,}222 \,.\, 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Pre rýchlosť iónu po absolvovaní n polkružníc dostaneme tú istú hodnotu, ako keby ión prebehol v elektrickom poli dráhu s potenciálnym rozdielom $\varphi = nU_0$. Potom

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = q n U_0$$

t. j.

$$n = \frac{m v_0^2}{2qU_0} = \frac{1800 \,.\, 9{,}109 \,.\, 10^{-31} \,.\, 19{,}36 \,.\, 10^{14}}{2 \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19} \,.\, 2 \,.\, 10^4} = 557$$

Polomer poslednej kružnice

$$r_0 = \frac{v_0 \tau}{\pi} = \frac{4{,}4 \,.\, 10^7 \,.\, 0{,}222 \,.\, 10^{-7}}{3{,}14} = 0{,}31\ \mathrm{m}$$

Polomer prvej kružnice

$$r_1 = \frac{v_1 \tau}{\pi} = \tau \frac{\sqrt{\dfrac{2qU_0}{m}}}{\pi} = 0{,}014\ \mathrm{m}$$

929. Nájdite hmotnosť a rýchlosť elektrónu, keď jeho kinetická energia je $2 \,.\, 10^5\ \mathrm{eV}$!

Riešenie:

Špeciálna teória relativity poskytuje pre závislosť hmotnosti nejakého telesa od rýchlosti vzťah

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť telesa pri rýchlosti $v = 0$. Tento vzťah možno upraviť takto:

$$\frac{m_0}{m} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \doteq 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$$

odkiaľ pre kinetickú energiu telesa pri rýchlosti v vyplýva vzťah

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 = (m - m_0) c^2$$

Teda v súhlase so znením úlohy

$$(m - m_0) c^2 = 2 \,.\, 10^5 \text{ eV} = 2 \,.\, 10^5 \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19} \text{ J}$$

a tak

$$m = m_0 + \frac{2 \,.\, 10^5 \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19}}{(3 \,.\, 10^8)^2} \text{ kg} = 9{,}109 \,.\, 10^{-31} \text{ kg} + 3{,}560 \,.\, 10^{-31} \text{ kg} =$$

$$= 12{,}669 \,.\, 10^{-31} \text{ kg}$$

Rýchlosť elektrónu

$$v = \sqrt{\frac{2 W_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 2 \,.\, 10^5 \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19}}{12{,}669 \,.\, 10^{-31}}} \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1} = 2{,}25 \,.\, 10^8 \text{ m} \,.\, \text{s}^{-1}$$

930. Aké napätie elektrického poľa by bolo podľa klasickej teórie potrebné na to, aby urýchlením v tomto poli získal elektrón rýchlosť svetla? Akú rýchlosť získa elektrón v tomto poli podľa relativistickej mechaniky?

Riešenie:

Podľa klasickej teórie možno písať:

$$eU = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu. Keď sa má $v = c$, potom

$$eU = \frac{1}{2} m_0 c^2$$

takže

$$U = \frac{m_0 c^2}{2e} = \frac{9{,}109 . 10^{-31}\ \mathrm{kg} . 9 . 10^{16}\ \mathrm{m^2 . s^{-2}}}{2 . 1{,}602 . 10^{-19}\ \mathrm{C}} \doteq 256\ \mathrm{kV}$$

Podľa relativistickej mechaniky možno pre kinetickú energiu elektrónu písať (pozri príklad 929):

$$\frac{1}{2} mv^2 = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Potom

$$eU = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 c^2$$

takže

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2}$$

a pre hľadané v dostaneme:

$$v = \frac{\sqrt{5}}{3} c \doteq 0{,}75c$$

Hmotnosť elektrónu pri tejto rýchlosti má hodnotu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{2} m_0 \doteq 1{,}5 m_0$$

Hmotnosť elektrónu vzrástla vzhľadom na pokojovú hmotnosť o 50 %.

931. Aká vlnová dĺžka prislúcha elektrónom, ktoré sú urýchľované elektrickým poľom na dráhe s napätím 10^4 V, na konci dráhy, keď na jej začiatku bola rýchlosť elektrónov nulová?

Riešenie:

Pre vlnovú dĺžku elektrónových vĺn platí vzťah

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

kde m je hmotnosť a v je rýchlosť elektrónu.

Rýchlosť elektrónu na konci urýchľovacej dráhy vyplýva zo vzťahu

$$\frac{1}{2} mv^2 = eU$$

t. j.

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Pre vlnovú dĺžku potom možno písať

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} =$$

$$= \frac{6{,}6256 \,.\, 10^{-34}}{\sqrt{2 \,.\, 9{,}109 \,.\, 10^{-31} \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19} \,.\, 10^4}}\ \mathrm{m} \doteq 1{,}23 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

Počítali sme s pokojovou hmotnosťou elektrónu. Relativistická hmotnosť elektrónu v tomto prípade je len asi o 2 % väčšia ako jeho pokojová hmotnosť.

932. Elektrón sa urýchľuje v homogénnom elektrickom poli pri rozdiele potenciálov $U = 10^5$ V. Aká vlnová dĺžka mu prislúcha? Pri výpočte treba zohľadňovať relativistické vzťahy!

Riešenie:

De Broglieho vlnová dĺžka je daná vzťahom

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{1}$$

Z relativistického vzťahu pre hmotnosť

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

vyplýva po úprave

$$v^2 = c^2\left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right) \qquad (2)$$

Pre kinetickú energiu elektrónu platí

$$W_k = (m - m_0)c^2 = eU$$

odkiaľ

$$m = \frac{eU}{c^2} + m_0 \qquad (3)$$

S použitím rovníc (3) a (2) platí

$$m^2v^2 = \left(\frac{eU}{c^2} + m_0\right)^2 c^2\left(1 - \frac{m_0^2}{\left(\frac{eU}{c^2} + m_0\right)^2}\right)$$

t. j.

$$m^2v^2 = c^2\left[\left(\frac{eU}{c^2} + m_0\right)^2 - m_0^2\right]$$

Po dosadení známych hodnôt bude

$$m^2v^2 = c^2\left[\left(\frac{1{,}602 . 10^{-19}\ \mathrm{C} . 10^5\ \mathrm{J.C^{-1}}}{9 . 10^{16}\ \mathrm{m^2.s^{-2}}} + 9{,}1091 . 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - (9{,}1091 . 10^{-31}\ \mathrm{kg})^2\right] = c^2 . 35{,}6 . 10^{-62}\ \mathrm{kg^2}$$

Po dosadení do vzťahu (1) nakoniec dostaneme

$$\lambda = \frac{6{,}63 . 10^{-34}\ \mathrm{J.s}}{17{,}9 . 10^{-23}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}} = 3{,}7 . 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

933. Aká je vlnová dĺžka de Broglieho vĺn, priradených elektrónu s kinetickou energiou 10^6 eV?

Riešenie:

Pre vlnovú dĺžku príslušných vĺn platí vzťah

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

kde m je hmotnosť elektrónu, v jeho rýchlosť a h Planckova konštanta. Keďže

$$\frac{1}{2} mv^2 = W_k$$

potom

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}$$

a teda

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\dfrac{2W_k}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}} =$$

$$= \frac{6{,}62 \,.\, 10^{-34}\ \mathrm{J\,.\,s}}{\sqrt{2 \,.\, 9{,}109 \,.\, 10^{-31}\ \mathrm{kg} \,.\, 10^{6} \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19}\ \mathrm{J}}} = 1{,}22 \,.\, 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

Počítalo sa s pokojovou hmotnosťou elektrónu.

934. Nájdite frekvenciu fotónu röntgenového žiarenia, ktorého hybnosť je $p = 1{,}1 \,.\, 10^{-23}\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-1}}$!

Riešenie:

Medzi hybnosťou a frekvenciou fotónu platí vzťah

$$p = \frac{hf}{c}$$

takže

$$f = \frac{pc}{h} = \frac{1{,}1 \,.\, 10^{-23}\ \mathrm{kg\,.\,m\,.\,s^{-1}} \,.\, 3 \,.\, 10^{8}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}}{6{,}6256 \,.\, 10^{-34}\ \mathrm{J\,.\,s}} \doteq 5 \,.\, 10^{18}\ \mathrm{s^{-1}}$$

935. Koľko fotónov za sekundu emituje žiarovka s výkonom 60 W, keď predpokladáme, že vysiela monochromatické žlté svetlo vlnovej dĺžky $\lambda = 0{,}6 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{m}$?

Riešenie:

Pre počet fotónov vyslaných za sekundu možno písať

$$n = \frac{P}{hf} = \frac{P\lambda}{hc}$$

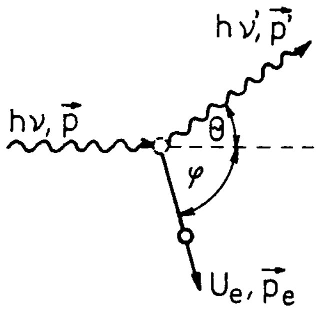
kde c je rýchlosť svetla. Po dosadení bude

$$n = \frac{60\ \mathrm{J\,.\,s^{-1}} \,.\, 0{,}6 \,.\, 10^{-6}\ \mathrm{m}}{6{,}6256 \,.\, 10^{-34}\ \mathrm{J\,.\,s} \,.\, 3 \,.\, 10^{8}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}} \doteq 1{,}8 \,.\, 10^{20}\ \mathrm{s^{-1}}$$

936. Nájdite vzťah, udávajúci zmenu frekvencie, resp. vlnovej dĺžky fotónu pri Comptonovom jave!

Riešenie:

Pri Comptonovom jave dochádza k zrážke fotónu s elektrónom (schematicky je to znázornené na *obr. 212*). Fotón s frekvenciou f narazí na elektrón, ktorý bol pôvodne v pokoji. Pri zrážke dostane elektrón od fotónu isté množstvo energie



Obr. 212

a hybnosti a odrazený elektrón sa dá do pohybu pod uhlom φ oproti pôvodnému smeru pohybu fotónu. Označme energiu a hybnosť elektrónu po zrážke symbolmi W_e a p_e. Po zrážke má odrazený fotón frekvenciu f' a pohybuje sa vzhľadom na pôvodný smer pod uhlom Θ. Pre izolovanú sústavu, ktorú tvorí fotón a elektrón, platí zákon zachovania energie i zákon zachovania hybnosti. Možno preto písať

$$hf + mc^2 - hf' = W_e$$

$$\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}_e \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{p}$ je hybnosť fotónu pred zrážkou, $\boldsymbol{p}'$ po zrážke a m je pokojová hmotnosť elektrónu. Úpravou rovníc (1) dostávame

$$\frac{1}{c^2}(hf + mc^2 - hf)^2 - (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^2 = \frac{W_e^2}{c^2} - \boldsymbol{p}_e^2 = m^2c^2 \qquad (2)$$

lebo

$$W_e = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + \frac{p_e^2}{2m} = \sqrt{\left(mc^2 + \frac{p_e^2}{2m}\right)^2} \doteq \sqrt{m^2c^4 + p_e^2c^2}$$

pričom sme písali $p_e = mv$, kde v je rýchlosť elektrónu po zrážke, a veličinu $p_e^4/4m^2$ sme zanedbali ako veľmi malú v porovnaní s ostatnými členmi pod odmocninou. Keďže

$$|\boldsymbol{p}| = p = \frac{hf}{c}; \quad |\boldsymbol{p}'| = p' = \frac{hf'}{c}; \quad \boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{p}' = pp' \cos \Theta$$

vzťah (2) bude mať tvar

$$\frac{1}{c^2}(hf + mc^2 - hf')^2 - \frac{h^2 f^2}{c^2} + \frac{h^2 ff'}{c^2}\cos\Theta - \frac{h^2 f'^2}{c^2} = m^2c^2$$

odkiaľ pre f' dostávame

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{hf}{mc^2}(1-\cos\Theta)} = \frac{f}{1 + \frac{2hf}{mc^2}\sin^2\frac{\Theta}{2}}$$

Keďže $\lambda' = c/f'$ a $\lambda = c/f$, potom

$$\frac{c}{\lambda'} = \frac{\frac{c}{\lambda}}{1 + \frac{2h}{\lambda mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}}$$

takže

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\Theta}{2}$$

Pre comptonovskú zmenu vlnovej dĺžky fotónu potom dostávame

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2A\sin^2\frac{\Theta}{2}$$

kde sme vyjadrili $A = h/mc = 2{,}426\,.\,10^{-12}$ m.

937. Fotóny röntgenových lúčov sa rozptyľujú na voľných elektrónoch; lúče rozptýlené pod uhlom 45° majú vlnovú dĺžku $2{,}2\,.\,10^{-3}$ nm. Aká je vlnová dĺžka dopadajúceho röntgenového žiarenia?

Riešenie:

Pre frekvenciu rozptýleného röntgenového žiarenia platí

$$f' = \frac{f}{1 + \frac{hf}{mc^2}(1-\cos\Theta)} \tag{1}$$

kde Θ je uhol, ktorý zvierajú odrazené lúče s dopadajúcimi. Po úprave rovnice (1) pre f vychádza

$$f = \frac{f'}{1 - \frac{h(1-\cos\Theta)}{mc^2}f'}$$

a s ohľadom na vzťah $\lambda=\frac{c}{f}$, resp. $\lambda'=\frac{c}{f'}$ sa

$$f=\frac{\frac{c}{\lambda'}}{1-\frac{h(1-\cos\Theta)}{mc^2}\frac{c}{\lambda'}}$$

Po dosadení známych hodnôt

$$f=\frac{\frac{3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}}{2{,}2.10^{-12}\ \mathrm{m}}}{1-\frac{6{,}3.10^{-34}\ \mathrm{J.s}(1-\cos 45°)}{9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}.9.10^{16}\ \mathrm{m^2.s^2}}\cdot\frac{3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}}{2{,}2.10^{-12}\ \mathrm{m}}}=2.10^{20}\ \mathrm{s^{-1}}$$

a pre hľadanú vlnovú dĺžku dopadajúceho žiarenia dostávame

$$\lambda=\frac{c}{f}=3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}\frac{1}{2.10^{20}\ \mathrm{s^{-1}}}=1{,}5.10^{-3}\ \mathrm{nm}$$

938. Fotón röntgenového žiarenia, ktorému prislúcha vlnová dĺžka $\lambda=$ $=10^{-10}$ m, dopadne na slabo viazaný elektrón atómu ľahkého prvku a odchýli sa od svojho pôvodného smeru o uhol $\vartheta=90°$. Vypočítajte, akú energiu získal elektrón pri tejto zrážke a v akom smere sa bude po zrážke pohybovať!

Riešenie:

Elektrón slabo pútaný k jadru považujeme za voľný. Pri zrážke fotónu s elektrónom odovzdá fotón časť svojej energie elektrónu a sám sa bude pohybovať v smere odchýlenom od pôvodného smeru pohybu o uhol ϑ. Keď energia fotónu pred zrážkou bola $W_f=hf$ a po zrážke $W_f=hf'$, zaiste je splnený vzťah

$$hf'<hf$$

resp.

$$f'<f$$

a keď frekvenciu žiarenia vyjadríme jeho vlnovou dĺžkou podľa rovnice

$$f=\frac{c}{\lambda}$$

zrejme platí:

$$\lambda'>\lambda$$

Vlnová dĺžka odchýleného žiarenia je väčšia ako dĺžka dopadajúceho žiarenia.

Z teórie Comptonovho javu pre príslušné posunutie $\Delta\lambda$ vyplýva:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2A \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \tag{1}$$

kde

$$A = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}426 \,.\, 10^{-12}\ \text{m}$$

a m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu.

Keď zrážku fotónu s elektrónom považujeme za pružnú, elektrón získa pri zrážke energiu

$$W_e = W_f - W_f' = h(f - f') = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

a po úprave pomocou vzťahu (1) dostávame pre túto energiu vzťah

$$W_e = \frac{hc}{\lambda} \cdot \frac{2A \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\lambda + 2A \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Po dosadení číselných hodnôt máme:

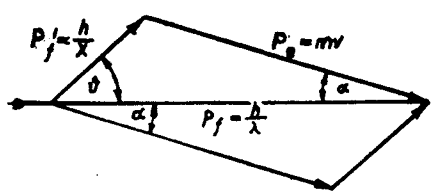
$$W_e = \frac{6{,}62 \,.\, 10^{-34} \,.\, 3 \,.\, 10^8}{10^{-10}} \cdot \frac{2 \,.\, 2{,}426 \,.\, 10^{-12} \sin^2 45^\circ}{10^{-10} + 2 \,.\, 2{,}426 \,.\, 10^{-12} \sin^2 45^\circ}\ \text{J} =$$

$$= 4{,}8 \,.\, 10^{-17}\ \text{J} \doteq 300\ \text{eV}$$

Uhol α, pod ktorým sa elektrón odchýli od pôvodného smeru pohybu fotónu, určíme pomocou zákona zachovania hybnosti aplikovaného na sústavu častíc fotón—elektrón. Keď hybnosť dopadajúceho fotónu je $\boldsymbol{p}_f$, hybnosť odchýleného fotónu $\boldsymbol{p}_f'$ a hybnosť odrazeného elektrónu $m\boldsymbol{v}$, podľa zákona zachovania hybnosti platí:

$$\boldsymbol{p}_f' + m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}_f$$

Grafické zloženie obrazov týchto vektorov je na *obr. 213*.



Obr. 213

Pretože absolútna hodnota hybnosti fotónu pred a po zrážke

$$p_f = \frac{h}{\lambda}; \quad p_f' = \frac{h}{\lambda'}$$

a elektrónu $p_e = mv$, z *obr. 213* podľa sínusovej vety vyplýva:

$$\frac{\sin\,[2R - (\alpha + \vartheta)]}{\sin\alpha} = \frac{\dfrac{h}{\lambda}}{\dfrac{h}{\lambda'}}$$

a zrejme ďalej

$$\frac{\sin\,(\alpha + \vartheta)}{\sin\alpha} = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

Keď vykonáme naznačené úkony, platí

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\lambda' - \lambda\cos\vartheta}{\lambda\sin\vartheta}$$

Keď uvážime, že $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}$ a $\sin\vartheta = 2\sin\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{\vartheta}{2}$ a použijeme vzťah (1), po úprave dostaneme:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}\cdot(\lambda + A)}{\lambda}$$

Po dosadení číselných hodnôt hľadaný uhol

$$\alpha = 45°\,41'$$

939. Elektrón, resp. protón letia prostredím s indexom lomu $n = 1{,}6$. Aká musí byť ich kinetická energia, aby sa stali zdrojom Čerenkovovho žiarenia?

Riešenie:

Aby sa elektricky nabitá častica stala zdrojom Čerenkovovho žiarenia v určitom prostredí, musí byť jej rýchlosť väčšia než fázová rýchlosť svetla v tomto prostredí. Fázová rýchlosť svetla c^* v prostredí s indexom lomu n je daná vzťahom $c^* = c/n$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Hraničná hodnota rýchlosti v elektricky nabitej častice, nad ktorou sa táto častica stáva zdrojom Čerenkovovho žiarenia, spĺňa teda vzťah

$$v = c^* = \frac{c}{n}$$

Pre kinetickú energiu častice pri tejto rýchlosti možno písať

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right)$$

a) Pre elektrón

$$W_k = 9{,}109 \,.\, 10^{-31} \,.\, 9 \,.\, 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \mathrm{J} =$$

$$= 2{,}295 \,.\, 10^{-14}\ \mathrm{J} \doteq 143\ \mathrm{keV}$$

Elektrón s kinetickou energiou $W_k > 143$ keV sa stáva v uvedenom prostredí zdrojom Čerenkovovho žiarenia.

b) Pre protón

$$W_k = 1{,}6722 \,.\, 10^{-27} \,.\, 9 \,.\, 10^{16} \left(\frac{1{,}6}{\sqrt{1{,}6^2 - 1}} - 1 \right) \mathrm{J} = 4{,}21 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{J} \doteq 263\ \mathrm{MeV}$$

Protón s kinetickou energiou $W_k > 263$ MeV sa stáva v uvedenom prostredí zdrojom Čerenkovovho žiarenia.

940. Zväzok elektrónov s kinetickou energiou 0,8 MeV prechádza cez priehľadný materiál s indexom lomu 1,4. Zistite, či sú splnené podmienky pre vznik Čerenkovovho žiarenia! Ak áno, určite, aký uhol zviera vlnoplocha tohoto žiarenia so smerom dopadajúceho elektrónového zväzku!

Riešenie:

Podmienky pre vznik Čerenkovovho žiarenia budú splnené, keď rýchlosť elektrónu v v danom prostredí je väčšia ako rýchlosť svetla c^* v tomto prostredí:

$$c^* = \frac{c}{n} = \frac{3 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}}{1{,}4} = 2{,}14 \,.\, 10^8\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Keď m je relativistická a m_0 pokojová hmotnosť elektrónu a c je rýchlosť svetla vo vákuu, bude jeho kinetická energia daná vzťahom

$$W_k = (m - m_0)^2 c^2$$

a vzhľadom na závislosť hmotnosti m od rýchlosti v

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

bude

$$W_k = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \right)^2$$

odkiaľ po krátkej úprave pre rýchlosť elektrónu v látkovom prostredí dostávame

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{\left(\frac{W_k}{c^2} + m_0 \right)^2}}$$

a po dosadení, ak zvážime, že $W_k = 0{,}8\ \text{MeV} = 0{,}8 \,.\, 10^6 \,.\, 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}28 \,.\, 10^{13}\ \text{J}$, bude

$$v = 3 \,.\, 10^8\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1} \cdot \sqrt{1 - \frac{(9{,}11 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg})^2}{\left(\frac{1{,}28 \,.\, 10^{-13}\ \text{J}}{9 \,.\, 10^{16}\ \text{m}^2 \,.\, \text{s}^{-2}} + 9{,}11 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg} \right)^2}} =$$

$$= 2{,}76 \,.\, 10^8\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}$$

Pretože $v > c^*$, podmienky pre vznik Čerenkovovho žiarenia sú splnené.

Elektrón pri svojom pohybe v priehľadnom materiáli vyžaruje kužeľ svetelných vĺn, ktorý zviera so smerom dopadajúceho elektrónu uhol Θ, pre ktorý platí

$$\sin \Theta = \frac{c}{vn}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$\sin \Theta = \frac{3 \,.\, 10^8\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}}{2{,}76 \,.\, 10^8\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1} \,.\, 1{,}4} = 0{,}776\ 39$$

$$\Theta = 50°\ 55'\ 54''$$

941. Elektrón, ktorý sa pohybuje rýchlosťou rádu $10^6\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}$, dopadne na fosforeskujúce tienidlo a vyvolá na ňom záblesk. Polohu záblesku možno určiť s nepresnosťou 10^{-4} m. Aká nepresnosť vyplýva z princípu neurčitosti pre určenie rýchlosti elektrónu?

Riešenie:

Podľa princípu neurčitosti sa

$$\Delta p_x \geqq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{h}{2\pi \,.\, \Delta x} = \frac{6{,}6 \,.\, 10^{-34}\ \text{J} \,.\, \text{s}}{2\pi \,.\, 10^{-4}\ \text{m}} \doteq 10^{-30}\ \text{kg} \,.\, \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}$$

takže

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{10^{-30}\ \text{kg} \,.\, \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}}{9 \,.\, 10^{-31}\ \text{kg}} \doteq 1\ \text{m} \,.\, \text{s}^{-1}$$

Nepresnosť určenia rýchlosti elektrónu v absolútnej hodnote je pomerne veľká. Z celkovej hodnoty rýchlosti však tvorí približne iba 0,0001 %. Preto možno pri takomto pokuse pozerať na elektrón s dobrou presnosťou ako na časticu v klasickom zmysle.

942. Uvažujme elektrón, ktorý je súčasťou elektrónového obalu atómu. Keďže rozmery samého atómu sú rádu 10^{-10} m, môže byť nepresnosť v určení polohy elektrónu v atóme v krajnom prípade $\Delta x = 10^{-10}$ m. Nájdite nepresnosť v určení rýchlosti elektrónu!

Riešenie:

Podľa princípu neurčitosti možno pre nepresnosť v určení rýchlosti elektrónu písať

$$\Delta v_x \geqq \frac{\hbar}{m\,\Delta x} = \frac{h}{2\pi m\,\Delta x} = \frac{6{,}6 \,.\, 10^{-34}\ \mathrm{J\,.\,s}}{2\,.\,3{,}14\,.\,9\,.\,10^{-31}\ \mathrm{kg}\,.\,10^{-10}\ \mathrm{m}} \doteq 10^{6}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}$$

Keďže rýchlosť elektrónu v atóme je veličina rádu 10^{6} m.s^{-1}, podľa výsledku, ktorý sme dostali, je rýchlosť elektrónu v elektrónovom obale atómu neurčitá. Inak povedané, elektrón v elektrónovom obale atómu nemožno pokladať za časticu v klasickom zmysle, a preto nemožno jeho správanie vysvetliť v rámci klasickej fyziky.

943. Aká je rýchlosť fotoelektrónov vyletujúcich z povrchu striebra osvetleného monochromatickým svetlom vlnovej dĺžky $\lambda = 1500 \,.\, 10^{-10}$ m, keď vlnová dĺžka svetla, pri ktorej sa pri striebre začína prejavovať fotoelektrický jav, je $\lambda_0 = 2600 \,.\, 10^{-10}$ m?

Riešenie:

Rýchlosť fotoelektrónov spĺňa rovnicu

$$hf = A + \frac{1}{2} mv^2$$

kde $A = hf_0$ je výstupná práca elektrónu z kovu. Keďže

$$f = \frac{c}{\lambda}; \quad f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

možno s ohľadom na znenie úlohy písať

$$h\frac{c}{\lambda_0} = A \quad (\text{pri } \lambda = \lambda_0 \text{ sa ešte } v = 0)$$

$$h\frac{c}{\lambda} = A + \frac{1}{2} mv^2$$

takže

$$h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv^2$$

Pre hľadané v potom dostaneme:

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 . 6{,}62 . 10^{-34}\,\mathrm{J.s} . 3 . 10^{8}\,\mathrm{m.s^{-1}}}{9{,}109 . 10^{-31}\,\mathrm{kg}}\left(\frac{1}{1500 . 10^{-10}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{2600 . 10^{-10}\,\mathrm{m}}\right)} =$$

$$= 1{,}109 . 10^{6}\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

944. Akú vlnovú dĺžku musí mať fotón, ak má ionizovať atóm cézia, ktorého ionizačný potenciál $\varphi_i = 3{,}88$ V?

Riešenie:

Na ionizáciu atómu cézia je potrebná práca

$$A = e\varphi_i = 1{,}602 . 10^{-19}\,\mathrm{C} . 3{,}88\,\mathrm{V} = 6{,}216 . 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Fotón, ktorý má ionizovať uvedený atóm, musí mať energiu, ktorá sa rovná, alebo je väčšia ako uvedená práca. Musí teda platiť:

$$hf \geqq A$$

Keďže $\lambda = \frac{c}{f}$, platí $f = \frac{c}{\lambda}$, takže $\frac{hc}{\lambda} \geqq A$ a

$$\lambda \leqq \frac{hc}{A} \leqq \frac{6{,}624 . 10^{-34} . 3 . 10^{8}}{6{,}216 . 10^{-19}}\,\mathrm{m} \leqq 3{,}196 . 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

945. Elektrón má pokojovú hmotnosť $m_e = 9{,}109 . 10^{-31}$g. Aká je energia elektrónu, ktorá odpovedá tejto hmotnosti?

Riešenie:

Súvis medzi hmotnosťou elektrónu a jeho energiou vyjadruje Einsteinov vzťah:

$$W = mc^2$$

Po dosadení číselných hodnôt dostávame:

$$W = 9{,}109 . 10^{-31}\,\mathrm{kg} . 9 . 10^{16}\,\mathrm{m^2.s^{-2}} = 8{,}2 . 10^{-14}\,\mathrm{J}$$

Pretože $1\ \mathrm{eV} = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}\ \mathrm{J}$,

$$W = 5{,}12 \,.\, 10^{5}\ \mathrm{eV} = 0{,}51\ \mathrm{MeV}$$

946. Určite energiu, hybnosť a hmotnosť fotónu röntgenového žiarenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 1 \,.\, 10^{-10}$ m!

Riešenie:

Pre energiu fotónu možno písať

$$W = hf = h\,\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}624 \,.\, 10^{-34} \,.\, 3 \,.\, 10^{8}}{10^{-10}}\ \mathrm{J} =$$

$$= 1{,}987 \,.\, 10^{-15}\ \mathrm{J} = 12{,}4\ \mathrm{keV}$$

Pre hybnosť fotónu platí

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}624 \,.\, 10^{-34}}{10^{-10}}\ \mathrm{kg \,.\, m \,.\, s^{-1}} = 6{,}624 \,.\, 10^{-24}\ \mathrm{kg \,.\, m \,.\, s^{-1}}$$

Hmotnosť fotónu určíme použitím vzťahu $W = mc^2$, ktorý vyjadruje súvis medzi energiou a hmotnosťou akéhokoľvek materiálneho objektu. Keďže v tomto prípade $W = hf = hc/\lambda$, platí

$$mc^2 = h\,\frac{c}{\lambda}$$

takže pre hmotnosť fotónu platí vzťah

$$m = \frac{h}{\lambda c} = \frac{6{,}624 \,.\, 10^{-34}}{10^{-10} \,.\, 3 \,.\, 10^{8}}\ \mathrm{kg} \doteq 2{,}21 \,.\, 10^{-32}\ \mathrm{kg}$$

947. Elektricky nabité π-mezóny sa vzhľadom na laboratórnu vzťažnú sústavu vyznačujú kinetickou energiou $W_k = 7 m_0 c^2$, kde m_0 je pokojová hmotnosť π-mezónu, a strednou dobou života $\tau = 1{,}76 \,.\, 10^{-5}$ s. Nájdite vlastnú dobu života týchto mezónov!

Riešenie:

Vlastnou dobou života τ_0 uvedených mezónov je ich doba života vzhľadom na vzťažnú sústavu, v ktorej sú v pokoji. Pre súvis medzi τ a τ_0 poskytuje špeciálna teória relativity vzťah

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Keďže pre W_k platí vzťah

$$W_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

možno písať

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{W_k + m_0 c^2}$$

takže

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k + m_0 c^2}{m_0 c^2}} = \frac{\tau}{\frac{W_k}{m_0 c^2} + 1} =$$

$$= \frac{1{,}76 \,.\, 10^{-5}}{7 + 1} \text{ s} = 0{,}22 \,.\, 10^{-5} \text{ s} = 2{,}2 \,.\, 10^{-6} \text{ s}$$

Úlohy

948. Koľko elektrónov obsahuje náboj častice prachu s hmotnosťou $m = 10^{-11}$ g, ak sa udržuje v rovnováhe v rovinnom kondenzátore so vzdialenosťou dosiek 5 mm a s potenciálovým rozdielom $U = 76{,}5$ V?

[$n = 40$]

949. Elektrón vložíme do elektrického poľa, v ktorom sa účinkom síl elektrického poľa dá do pohybu. Akú rýchlosť nadobudne po prebehnutí dráhy, medzi koncovými bodmi ktorej je potenciálový rozdiel $U = 100$ V? (Závislosť hmotnosti elektrónu od rýchlosti zanedbajte!)

[$v = 5930 \text{ km} \,.\, \text{s}^{-1}$]

950. Ako sa vychýli z pôvodného smeru elektrón s kinetickou energiou $W_k = 5 \,.\, 10^3$ eV, ak prejde homogénnym elektrickým poľom, kolmým na pôvodný smer rýchlosti elektrónu, s intenzitou $E = 10^5 \text{ V} \,.\, \text{m}^{-1}$, dráhu $x_0 = 0{,}02$ m?

[$y_0 = 0{,}2$ cm]

951. Elektrón sa pohybuje v homogénnom elektrickom poli a je urýchľovaný na úseku, na ktorom je rozdiel potenciálov 1000 V. Predpokladáme, že konečná rýchlosť elektrónu je podstatne menšia ako rýchlosť svetla vo vákuu a jeho začiatočná rýchlosť je nulová. Určite vlnovú dĺžku elektrónu pri tejto rýchlosti!

[$\lambda = 0{,}387 \,.\, 10^{-10}$ m]

952. Elektrón vletí do homogénneho poľa s intenzitou $H = 1600\ \mathrm{A.m^{-1}}$ rýchlosťou $v_0 = 1500\ \mathrm{km.s^{-1}}$ kolmo na smer magnetického poľa. Vypočítajte polomer kružnice, po ktorej sa bude elektrón pohybovať!

[$r \doteq 4{,}2$ mm]

953. Vypočítajte frekvenciu elektrického poľa v cyklotróne na urýchľovanie deuterónov, ak indukcia magnetického poľa v medzere elektromagnetu $B = 1{,}4$ T!

[$f = 1{,}068.10^7\ \mathrm{s^{-1}}$]

954. Nájdite hmotnosť a kinetickú energiu elektrónu, ktorý má rýchlosť $v = 0{,}6c$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu!

[$m = 11{,}384.10^{-31}$ kg; $W_k = 1{,}151.10^5$ eV]

955. Aká je hmotnosť a rýchlosť protónu, keď jeho kinetická energia je 10^8 eV?

[$m = 1{,}8504.10^{-24}$ g; $v = 1{,}316.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

956. Kinetická energia letiaceho elektrónu je 1 MeV. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa pohybuje!

[$v = 0{,}96c$]

957. Koľko fotónov vyšle za sekundu svetelný zdroj monochromatického svetla ($\lambda = 560.10^{-9}$ m), keď celková energia fotónov vyslaných za sekundu je $1{,}5.10^{-3}$ J?

[$n = 4{,}24.10^{15}$]

958. Vysielač elektromagnetických vĺn s výkonom 1 kW pracuje na kmitočte 880 kHz. Koľko fotónov emituje za sekundu?

[$n = 1{,}7.10^{30}$]

959. Vodíkový atóm má hmotnosť $1{,}67.10^{-27}$ kg. Aká vlnová dĺžka prislúcha zväzku takýchto atómov, pohybujúcich sa rýchlosťou $1000\ \mathrm{m.s^{-1}}$?

[$\lambda = 3{,}96.10^{-10}$ m]

960. Akú kinetickú energiu má protón, keď vlnová dĺžka prislúchajúcich mu de Broglieho vĺn $\lambda = 9{,}04.10^{-13}$ m?

[$W_k = 10^3$ eV]

961. Určite energiu, hybnosť a hmotnosť fotónu γ-žiarenia s vlnovou dĺžkou $\lambda = 10^{-12}$ m!

[$W_k = 1{,}978.10^{-13}$ J; $p = 6{,}624.10^{-22}\ \mathrm{kg.m.s^{-1}}$; $m = 2{,}21.10^{-30}$ kg]

962. Určitá častica umožňuje pri kinetickej energii vyššej než 38 MeV vznik Čerenkovovho žiarenia v prostredí s indexom lomu $n = 1{,}5$. Ktorá je to častica?

[Je to elektricky nabitá častica s pokojovou hmotnosťou menšou než $m_0 = 213 m_e$, kde m_e je pokojová hmotnosť elektrónu; je to napr. μ-mezón, ktorého pokojová hmotnosť je približne $207 m_e$.]

963. Akú minimálnu rýchlosť musí mať elektricky nabitá častica, aby sa pri prechode prostredím s indexom lomu $n = 1{,}33$ emitovalo Čerenkovovo žiarenie?

[$v = 2{,}25\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

964. Maximálna zmena vlnovej dĺžky, pozorovaná pri rozptyle svetla na protónoch, $\Delta\lambda_{max} = 2{,}6 \,.\, 10^{-15}$ m. Aká je hmotnosť protónu?

[$m = 1{,}692 \,.\, 10^{-27}$ kg]

965. Určite, aká bude vlnová dĺžka rozptýleného žiarenia pri Comptonovom jave, keď pozorovania konáme v smere kolmom na dopadajúci zväzok röntgenových lúčov vlnovej dĺžky $\lambda = 5 \,.\, 10^{-11}$ m!

[$\lambda' = 5{,}243 \,.\, 10^{-11}$ m]

966. Na voľný elektrón narazí fotón, ktorému prislúcha vlnová dĺžka $\lambda = 5 \,.\, 10^{-11}$ m a po náraze sa fotón odchýli od pôvodného smeru svojho pohybu o uhol $\vartheta = 30°, 60°, 90°, 180°$. Vypočítajte, aký uhol bude zvierať smer pohybu odrazeného elektrónu so smerom dopadajúceho fotónu!

[$\alpha = 74°\ 15'$; $\alpha = 58°\ 50'$; $\alpha = 43°\ 35'$; $\alpha = 0°$]

967. Fotón röntgenového žiarenia s frekvenciou $1{,}5 \,.\, 10^{19}\ \mathrm{s^{-1}}$ bude mať po zrážke s elektrónom frekvenciu $1{,}2 \,.\, 10^{19}\ \mathrm{s^{-1}}$. Akú bude mať elektrón energiu po zrážke?

[$W_e = 83{,}9 \,.\, 10^{-15}$ J]

968. Súradnicu polohy x čiastočky prachu hmotnosti $m = 10^{-15}$ kg sme určili s nepresnosťou $\Delta x = 10^{-8}$ m. Nájdite nepresnosť v určení súradnice jej rýchlosti Δv_x!

[$\Delta v_x \geqq 10^{-11}\ \mathrm{m.s^{-1}}$]

969. Aká je výstupná práca elektrónov pri platine, keď pri osvetlení povrchu svetlom vlnovej dĺžky $\lambda = 1{,}5 \,.\, 10^{-7}$ m majú fotoelektróny rýchlosť $v = 827\ \mathrm{km.s^{-1}}$?

[$A = 6{,}323$ eV]

970. Aký je ionizačný potenciál sodíkových pár, keď ich ionizácia sa začína objavovať pri ich osvetlení monochromatickým svetlom vlnovej dĺžky $\lambda = 0{,}242\ \mu m$?

[$\varphi_i = 5{,}12$ V]

971. Ionizačný potenciál atómu ortuti $\varphi_i = 10{,}4$ V. Akú najmenšiu rýchlosť musí mať elektrón, aby ionizoval atóm ortuti nárazom?

[$v = 1912\ km.s^{-1}$]

972. Rýchlosť elektrónov, letiacich k antikatóde Röntgenovej trubice, sa rovná polovici rýchlosti svetla vo vákuu. Aká je najmenšia vlnová dĺžka spojitého spektra elektromagnetického žiarenia, ktoré vzniká zabrzdením uvedených elektrónov?

$$\left[\lambda_{min} = \frac{h}{m_0 c}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 1{,}56 \, . \, 10^{-11}\ m\right]$$

973. Experimentálne sa zistilo, že π-mezóny s hybnosťou $p = 54\ MeV/c$ preletia v laboratórnej vzťažnej sústave od svojho zrodu do rozpadu priemernú vzdialenosť $l = 3$ m. Nájdite vlastnú dobu života týchto mezónov, keď pokojová hmotnosť π-mezónu je $m_0 = 276 m_e$, kde m_e je pokojová hmotnosť elektrónu!

$$\left[\tau_0 = \frac{m_0}{p}\, l = 0{,}87 \, . \, 10^{-8}\ s\right]$$

22 ELEKTRÓNOVÝ OBAL ATÓMU

Úvod

a) Fyzikálne procesy v elektrónovom obale atómu vodíka možno s dobrou presnosťou vysvetliť v rámci Bohrovej teórie, ktorá je založená na 3 *Bohrových postulátoch*, ktoré spĺňa elektrón pri svojom obiehaní okolo jadra:

1. *Elektrón nemôže obiehať okolo jadra po ľubovoľných dráhach, ale len po určitých dovolených kvantových dráhach, ktoré spĺňajú osobitné podmienky. Ak sa obmedzíme na kruhové dráhy, elektrón môže obiehať len po takých dráhach, ktoré vyhovujú rovnici*

$$2\,\pi\, mav = nh$$

kde m je hmotnosť elektrónu, v jeho rýchlosť, a polomer kružnice, h Planckova konštanta a n *kvantové číslo*, ktoré môže mať hodnotu ľubovoľného nenulového celého kladného čísla. Je zrejmé, že $mav = L$, t. j. tento výraz predstavuje hodnotu momentu hybnosti elektrónu vzhľadom na stred kružnice. Podľa hodnoty kvantového čísla n hovoríme o *nižších* alebo *vyšších kvantových dráhach*.

2. *Keď elektrón obieha po uvedených kvantových dráhach, nevysiela do okolia elektromagnetické žiarenie.*

3. *Na rôznych kvantových dráhach sa elektrón vyznačuje rôznou energiou. Pri prechode z vyššej kvantovej dráhy na nižšiu elektrón vysiela kvantum elektromagnetického žiarenia (fotón) s frekvenciou f, ktorá spĺňa vzťah*

$$hf = W_2 - W_1$$

kde W_2 a W_1 sú energie elektrónu na kvantových dráhach, medzi ktorými došlo k preskoku elektrónu.

Podobne, ak elektrónu dodáme dostatočné množstvo energie, môže preskočiť z nižšej kvantovej dráhy na niektorú vyššiu podľa toho, aké množstvo energie sme mu dodali.

b) *Vlnočet* σ určitej spektrálnej čiary je veličina definovaná vzťahom $\sigma = \frac{1}{\lambda}$, kde λ je vlnová dĺžka príslušnej spektrálnej čiary.

Pre vlnočet spektrálnych čiar vodíkového spektra platí vzťah

$$\sigma = R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

kde $n = 1, 2, 3, 4, 5$ a $m = n + 1, n + 2, \ldots$ a R_∞ je *Rydbergov vlnočet*. Jeho hodnota za predpokladu nekonečne veľkej hmotnosti jadra $R_\infty = 1{,}097\,373 \,.\, 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$.

Súbor spektrálnych čiar prislúchajúcich určitej hodnote n, keď $m = n + 1$, $n + 2, \ldots$, predstavuje *sériu*. *Lymanovej sérii* vodíkového spektra prislúcha $n = 1$, *Balmerovej sérii* prislúcha $n = 2$ atď. Vlnočet, ktorý dostaneme pri danom n, keď $m = \infty$, prislúcha čiare, ktorú nazývame *hranou* príslušnej série.

c) Elektrón sa pri obiehaní okolo jadra atómu vyznačuje *orbitálnym (dráhovým) magnetickým momentom*, ktorého hodnota pre základný kvantový stav ($n = 1$) vodíkového atómu sa rovná $\mu_B = \mu_0 e\hbar / 2m_0 = 1{,}165 \,.\, 10^{-29}$ V.m.s a volá sa *Bohrov magnetón*. Pritom μ_0 je permeabilita vákua, e elementárny elektrický náboj, m_0 pokojová hmotnosť elektrónu a $\hbar = h/2\pi$.

Vzhľadom na existenciu orbitálneho magnetického momentu elektrónu v elektrónovom obale atómu sa vodíkový atóm vyznačuje v magnetickom poli s intenzitou H energiou, pre ktorú platí vzťah

$$W_m = m\mu_B H, \quad m = -l - (l-1), \ldots -1, 0, +1, \ldots, (l-1), l$$

kde m je *magnetické kvantové číslo*.

To je dôvod, prečo sa v magnetickom poli spektrálne čiary pôvodného spektra (bez magnetického poľa) štiepia na oddelené čiary, pričom vzdialenosti susedných spektrálnych čiar, ktoré vznikli štiepením, závisia od veľkosti magnetického poľa. Štiepenie spektrálnych čiar v magnetickom poli sa nazýva *Zeemanov jav.*

d) Elektrón má aj vlastný moment hybnosti, nazvaný *spin.* So spinom je spojený aj *vlastný (spinový) magnetický moment* elektrónu. Priestorové kvantovanie spinu sa opisuje spinovým kvantovým číslom s, ktoré môže mať hodnoty $s = \pm\frac{1}{2}$.

e) Po zavedení spinového kvantového čísla sú na charakterizovanie stavu elektrónu vo vodíkovom atóme k dispozícii 4 kvantové čísla:

hlavné	n $(n=1, 2, 3, \ldots)$
vedľajšie	l $(l=0, 1, 2, \ldots, n-1)$
magnetické	m $(m=-l, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +l)$
spinové	s $\left(s=+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Keď elektrónový obal atómu pozostáva z väčšieho počtu elektrónov, situácia je podstatne zložitejšia. Napriek tomu v istom priblížení, ktorého oprávnenosť sa experimentálne preverila, možno na charakteristiku kvantových stavov mnohoelektrónových atómov používať tie isté kvantové čísla ako pri vodíkovom atóme.

f) Pre elektrónové konfigurácie atómov, ktoré majú viac ako jeden elektrón, platí *Pauliho vylučovací princíp: V atóme (alebo v inej kvantovej sústave) nemôžu existovať dva elektróny, ktoré by mali všetky štyri kvantové čísla rovnaké.*

Inak povedané, v istom kvantovom stave sa môže v atóme vyskytovať iba jeden elektrón. Kvantové stavy obsadzované elektrónmi v elektrónovom obale atómu sa musia od seba líšiť aspoň v jednom kvantovom čísle.

g) Možnosť energetických procesov v elektrónových obaloch atómov je obmedzená *výberovými pravidlami.* Podľa nich musia zmeny vedľajšieho a magnetického kvantového čísla spĺňať vzťahy:

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta m = 0, \pm 1$$

Príklady

974. Vypočítajte polomer prvej dráhy elektrónu obiehajúceho okolo jadra v Bohrovom modeli atómu vodíka! Vypočítajte aj rýchlosť elektrónu na tejto dráhe!

Riešenie:

Pri pohybe elektrónu okolo jadra po kruhovej dráhe v Bohrovom modeli vodíkového atómu úlohu dostredivej sily vykonáva Coulombova príťažlivá sila, takže platí vzťah

$$m_0 \frac{v^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Podľa Bohrovho postulátu musí ďalej platiť

$$2\pi a m_0 v = nh$$

kde $n = 1, 2, 3, \ldots$ je kvantové číslo a h je Planckova konštanta. Pre polomer n-tej dráhy z uvedených dvoch rovníc vyplýva:

$$a = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2$$

a pre polomer prvej dráhy ($n = 1$) platí:

$$a_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} = \frac{8{,}859 \,.\, 10^{-12} \,.\, (6{,}62)^2 \,.\, 10^{-68}}{3{,}14 \,.\, 9{,}109 \,.\, 10^{-31} \,.\, (1{,}602)^2 \,.\, 10^{-38}} \text{ m} \doteq$$

$$\doteq 0{,}53 \,.\, 10^{-10} \text{ m}$$

Pre rýchlosť v elektrónu z uvedených vzťahov vyplýva:

$$v = \frac{nh}{2\pi a m_0} = \frac{nh}{2\pi m_0 \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} n^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}$$

Pre $n = 1$ bude:

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{(1{,}602)^2 \,.\, 10^{-38}}{2 \,.\, 8{,}859 \,.\, 10^{-12} \,.\, 6{,}62 \,.\, 10^{-34}} \text{ m.s}^{-1} =$$

$$= 2{,}188 \,.\, 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

975. Akou silou sa navzájom priťahujú jadro a elektrón na prvej dráhe Bohrovho modelu atómu vodíka? Koľkokrát je táto sila väčšia ako gravitačná sila, ktorou navzájom na seba pôsobia jadro a elektrón?

Riešenie:

Pre hodnotu Coulombovej príťažlivej sily platí:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a_1^2}$$

kde $a_1 = 0{,}53 \,.\, 10^{-10}$ m je polomer prvej kvantovej dráhy. Potom

$$F_1 = \frac{1{,}602^2 \,.\, 10^{-38}}{4 \,.\, 3{,}14 \,.\, 8{,}86 \,.\, 10^{-12} \,.\, 0{,}53^2 \,.\, 10^{-20}} \text{ N} =$$

$$= 0{,}0821 \,.\, 10^{-6} \text{ N}$$

Gravitačná sila, ktorou na seba pôsobia elektrón a protón z tej istej vzdialenosti, má hodnotu

$$F_1^* = \varkappa \frac{m_0 . m_p}{a_1^2} = \varkappa \frac{1840 m_0^2}{a_1^2} = 6{,}685 \cdot 10^{-11} \frac{1840 . 9{,}109^2 . 10^{-62}}{0{,}53^2 . 10^{-20}} \text{ N} =$$

$$= 3{,}63 . 10^{-47} \text{ N}$$

Pomer

$$\frac{F_1}{F_1^*} = \frac{8{,}21 . 10^{-4}}{3{,}63 . 10^{-47}} = 2{,}26 . 10^{43}$$

Coulombova príťažlivá sila je $(2{,}26 . 10^{43})$-krát väčšia ako gravitačná sila.

976. Vypočítajte celkovú energiu elektrónu na druhej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli atómu vodíka!

Riešenie:

Celková energia elektrónu sa skladá z potenciálnej a kinetickej energie. Ak označíme polomer n-tej kvantovej dráhy symbolom a, pre potenciálnu energiu elektrónu na tejto dráhe vzhľadom na nekonečno možno písať:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\infty^a \frac{e^2}{r^2} \mathrm{d}r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{e^2}{r}\right]_\infty^a = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Pre kinetickú energiu možno vzhľadom na platnosť vzťahu

$$m_0 \frac{v^2}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{a^2}$$

písať

$$W_k = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Celková energia elektrónu

$$W = W_p + W_k = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Keďže $a = \dfrac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_0 e^2}$,

$$W = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}$$

Pre $n = 2$ platí:

$$W_2 = -\frac{m_0 e^4}{32\varepsilon_0^2 h^2} = -\frac{9{,}109 . 10^{-31} . (1{,}602)^4 . 10^{-76}}{32 . (8{,}86)^2 . 10^{-24} . (6{,}62)^2 . 10^{-68}} \text{ J} =$$

$$= -5{,}45 . 10^{-19} \text{ J} = -3{,}4 \text{ eV}$$

977. Aká je vlnová dĺžka fotónu, ktorý sa vyžiari, keď sa elektrón vráti vo vodíkovom atóme zo štvrtej kvantovej dráhy na druhú?

Riešenie:

Pre energiu fotónu, ktorý vzniká pri preskoku elektrónu zo štvrtej kvantovej dráhy na druhú, platí:

$$hf = W_4 - W_2 = -\frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 . 4^2 . h^2} + \frac{m_0 e^4}{8\varepsilon_0^2 . 2^2 h^2} = -W_2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4} W_2$$

V príklade 976 sme pre $-W_2$ našli hodnotu $5{,}45 . 10^{-19}$ J. Potom

$$hf = 4{,}09 . 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$f = \frac{4{,}09 . 10^{-19}}{6{,}62 . 10^{-34}}\ \mathrm{s^{-1}} = 6{,}178 . 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}$$

Pre vlnovú dĺžku fotónu platí:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 . 10^8\ \mathrm{m . s^{-1}}}{6{,}178 . 10^{14}\ \mathrm{s^{-1}}} = 0{,}485 . 10^{-6}\ \mathrm{m} = 0{,}485\ \mu\mathrm{m}$$

978. Aká je vlnová dĺžka svetla, ktorá odpovedá preskokom elektrónov zo šiestej kvantovej dráhy na druhú v Bohrovom modeli vodíkového atómu? Aká vlnová dĺžka prislúcha hrane Balmerovej série?

Riešenie:

Pre vlnočet príslušného svetla vyplýva:

$$\sigma = R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = \frac{2}{9} R_\infty =$$

$$= 1{,}097\,373 . 10^7 . 0{,}2222\ \mathrm{m^{-1}} = 2{,}438\,363 . 10^6\ \mathrm{m^{-1}}$$

Pre vlnovú dĺžku potom dostaneme:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma} = 0{,}410 . 10^{-6}\ \mathrm{m} = 0{,}410\ \mu\mathrm{m}$$

Vlnočet prislúchajúci hrane Balmerovej série je daný vzťahom

$$\sigma_\infty = R_\infty \frac{1}{2^2} = \frac{R_\infty}{4}$$

Vlnová dĺžka prislúchajúca hrane Balmerovej série

$$\lambda_\infty = \frac{1}{\sigma_\infty} = \frac{4}{R_\infty} = 0{,}364 . 10^{-6}\ \mathrm{m} = 0{,}364\ \mu\mathrm{m}$$

979. Vypočítajte indukciu magnetického poľa, ktoré je vytvárané elektrónom obiehajúcim v Bohrovom modeli atómu vodíka po prvej dovolenej dráhe, v strede tejto dráhy!

Riešenie:

Obiehajúci elektrón nahradíme kruhovou prúdovou slučkou s polomerom $r = 0{,}53 \,.\, 10^{-10}$ m, ktorou tečie prúd $I = fe$, kde e je elementárny elektrický náboj a f je frekvencia obiehania elektrónu okolo jadra. Keďže

$$mvr = \frac{h}{2\pi}$$

potom

$$v = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{1}{mr}$$

kde m je pokojová hmotnosť elektrónu a v rýchlosť jeho pohybu na prvej dovolenej dráhe. Pre frekvenciu f platí

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

takže

$$I = \frac{ve}{2\pi r} = \frac{he}{4\pi^2 mr^2}$$

Pre indukciu magnetického poľa v strede kruhovej prúdovej slučky platí

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 he}{8\pi^2 mr^3} = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7} \,.\, 6{,}6256 \,.\, 10^{-34} \,.\, 1{,}602 \,.\, 10^{-19}}{8\pi^2 \,.\, 9{,}109 \,.\, 10^{-31} (0{,}53)^3 \,.\, 10^{-30}} \mathrm{T} = 12{,}4 \mathrm{~T}$$

980. Aký je dráhový magnetický moment elektrónu vodíkového atómu v základnom stave podľa Bohrovej teórie?

Riešenie:

Magnetický moment prúdovej slučky s plošným obsahom S, cez ktorú preteká prúd I, má hodnotu danú vzťahom

$$M = \mu_0 IS$$

kde μ_0 je permeabilita vákua. Ak elektrón obieha na základnej dráhe n-krát za sebou, potom $I = ne$. Keď polomer základnej dráhy je a_1, $S = \pi a_1^2$, takže

$$M = \mu_0 ne\pi a_1^2 = \mu_0 \frac{v_1}{2\pi a_1} e\pi a_1^2 = \mu_0 \frac{v_1 a_1 e}{2}$$

Keďže (pozri príklad 974)

$$a_1 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2}; \quad v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}$$

kde m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu a ε_0 permitivita vákua, potom

$$M = \frac{1}{2}\mu_0 e \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 e^2} \cdot \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{he}{m_0} = \mu_B = 1{,}165 \, . \, 10^{-29} \text{ V.m.s}$$

981. Vypočítajte vzťahy pre frekvencie spektrálnych čiar vodíkového spektra, ktoré vznikajú pri Zeemanovom jave v magnetickom poli s intenzitou H!

Riešenie:

Označme symbolom W_1 energiu elektrónu bez magnetického poľa v istom kvantovom stave s magnetickým kvantovým číslom m_1, symbolom W_2 a m_2 príslušné veličiny pre kvantovo nižší stav. Pri preskoku elektrónu zo stavu 1 do stavu 2 za neprítomnosti magnetického poľa sa vyžiari fotón s frekvenciou

$$f_0 = \frac{W_1 - W_2}{h}$$

V magnetickom poli s intenzitou H má celková energia elektrónu v stave 1, resp. v stave 2 hodnotu

$$W_1' = W_1 + m_1 \mu_B H; \quad W_2' = W_2 + m_2 \mu_B H$$

Za prítomnosti magnetického poľa platí pre frekvenciu vyžiareného fotónu vzťah

$$f = \frac{W_1' - W_2'}{h} = \frac{W_1 - W_2}{h} + (m_1 - m_2)\frac{\mu_B H}{h} = f_0 + \Delta m \frac{\mu_B H}{h}$$

S ohľadom na výberové pravidlá môže mať Δm hodnoty -1, 0, $+1$, takže pre frekvencie štiepením vzniknutého normálneho Zeemanovho tripletu platí

$$f_{-1} = f_0 - \frac{\mu_B H}{h}; \quad f_0; \quad f_{+1} = f_0 + \frac{\mu_B H}{h}$$

Získané hodnoty súhlasia s experimentom v silných magnetických poliach.

982. Ukážte na základe Pauliho princípu, aký je najvyšší možný počet elektrónov v n-kvantovej dráhe, keď $n = 4$!

Riešenie:

Keďže jednotlivé kvantové čísla spĺňajú podmienky, že pri určitom n

$$l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm(l-1), \pm l$$
$$s = \pm\frac{1}{2}$$

potom pri:

n	1	m	s	Maximálny počet elektrónov
4	0	0	$\pm\frac{1}{2}$	2
	1	−1, 0, +1		6
	2	−2, −1, 0, +1, +2		10
	3	−3, −2, −1, 0, +1, +2, +3		14
				$\}$ 32

keď sme na základe Pauliho princípu predpokladali, že štvorica kvantových čísel, ktorá charakterizuje stav elektrónu, musí sa v jednotlivých prípadoch elektrónov líšiť aspoň v jednom kvantovom čísle.

Úlohy

983. Vypočítajte obvodovú rýchlosť elektrónu na tretej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli vodíkového atómu!

[$v_3 = 729$ km.s^{-1}]

984. Aká je perióda obiehania elektrónu na tretej kvantovej dráhe v Bohrovom modeli vodíkového atómu?

[$T_3 \doteq 4{,}1 \,.\, 10^{-15}$ s]

985. Vypočítajte vlnové dĺžky prvých troch čiar Balmerovej série vodíkového spektra! ($R_\infty = 1{,}097\,373 \,.\, 10^7$ m^{-1})

[$\lambda_1 = 0{,}656$ μm; $\lambda_2 = 0{,}486$ μm; $\lambda_3 = 0{,}434$ μm]

986. Zriadené ortuťové pary v sklenej banke sú bombardované elektrónmi s kinetickou energiou 4,88 eV. Aká je vlnová dĺžka žiarenia vysielaného parami, ak pary pri zrážke pohltia celú energiu elektrónov?

[$\lambda = 2{,}54 \,.\, 10^{-7}$ m]

987. Aký je pomer magnetického momentu elektrónu na n-tej Bohrovej dráhe vodíkového atómu k momentu hybnosti elektrónu na tej istej dráhe?

$$\left[\frac{M}{L}=\frac{\mu_0 e}{2m_0}\right]$$

988. Vypočítajte rozdiel frekvencií krajných spektrálnych čiar v triplete, vznikajúcom pri Zeemanovom jave v magnetickom poli intenzity $H=10^5\ \mathrm{A.m^{-1}}$!

$$\left[\Delta f=2\,\frac{\mu_B H}{h}=0{,}35\,.\,10^{10}\ \mathrm{s^{-1}}\right]$$

989. Pomocou Pauliho princípu ukážte, aký maximálny počet elektrónov môže prislúchať obalu s hlavným kvantovým číslom $n=3$!

$[N=18]$

23 ATÓMOVÉ JADRO

Úvod

a) Jadro atómu pozostáva z protónov a neutrónov, ktoré označujeme spoločným názvom *nukleóny*. *Atómové číslo* Z jadra udáva počet protónov v jadre (aj počet elektrónov v elektrónovom obale za normálnych okolností). *Hmotnostné číslo* A udáva počet nukleónov v jadre. Jadro s atómovým číslom Z a hmotnostným číslom A obsahuje Z protónov a $A-Z$ neutrónov.

Atómové číslo Z je totožné s poradovým číslom chemického prvku v Mendelejevovej periodickej sústave. *Izotopy* toho istého prvku majú jadrá s rovnakým Z, ale rozdielnym A, t. j. majú rovnaký počet protónov, ale nerovnaký počet neutrónov.

Protón má pokojovú hmotnosť

$$m_p=1{,}6725\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg}=1{,}007\ 2766\ \mathrm{u}$$

pričom 1 u (unifikovaná hmotnostná jednotka) $=1{,}6604\,.\,10^{-27}$ kg.

Neutrón má pokojovú hmotnosť

$$m_n=1{,}6748\,.\,10^{-27}\ \mathrm{kg}=1{,}008\ 6654\ \mathrm{u}$$

b) Hmotnosť jadra atómu je vždy menšia ako súčet hmotností častíc, z ktorých sa skladá. Máme, prirodzene, na mysli pokojové hmotnosti jadra i nukleónov. Hovoríme o *úbytku hmotnosti* Δm, ktorý súvisí s tým, že pri tvorbe atómového jadra sa v dôsledku vzájomnej interakcie nukleónov, ktoré do jadra vstupujú, uvoľňuje isté množstvo energie W_j, ktorá sa označuje ako *väzbová energia* jadra.

Súvisí s Δm podľa vzťahu

$$W_j = \Delta m c^2$$

kde c je rýchlosť svetla vo vákuu.

c) *Rádioaktivita* je proces, pri ktorom nestabilné atómové jadro samovoľne vysiela do okolia častice (héliové jadrá, protóny, elektróny a i.) alebo fotóny žiarenia γ. Vzniká tak *rádioaktívne žiarenie*, ktoré môže byť buď korpuskulárne alebo elektromagnetické. Ak sa príslušné rádioaktívne izotopy chemických prvkov vyskytujú v prírode, hovoríme o *prirodzenej rádioaktivite*. Keď niektoré rádioaktívne jadrá vznikajú umelou cestou pri jadrových reakciách, hovoríme o *umelej rádioaktivite*. Medzi prirodzenou a umelou rádioaktivitou niet principiálneho rozdielu. V obidvoch prípadoch príslušné procesy podliehajú rovnakým zákonom.

Prirodzené rádioaktívne látky vysielajú žiarenie trojakého druhu: žiarenie α, β a γ.

Žiarenie α je prúd jadier héliových atómov, *žiarenie* β je prúd elektrónov, *žiarenie* γ je elektromagnetické vlnenie veľmi malej vlnovej dĺžky. Vymrštením častice α alebo β dochádza k premene rádioaktívneho prvku na iný prvok. Rádioaktívnou premenou α sa posunie prvok v Mendelejevovej periodickej sústave o dve miesta vľavo, lebo jeho atómové číslo sa zmenší o 2. Hmotnostné číslo sa zmenší o 4. Premenou β sa prvok posunie v *Mendelejevovej periodickej sústave* o jedno miesto vpravo, lebo jeho atómové číslo sa zväčší o 1. Často sa stáva, že rádioaktívnym rozpadom jadra vzniká nové jadro, ktoré je tiež rádioaktívne a svojím rozpadom vytvára ďalšie rádioaktívne jadro atď. Hovoríme potom o *rádioaktívnom* alebo *rozpadovom rade*.

Dĺžka dráhy, ktorú častica α preletí pri pohybe v nejakom prostredí, sa nazýva *doletom* žiarenia α.

d) Rádioaktívny rozpad prebieha samovoľne a riadi sa určitými zákonitosťami:

Keď rádioaktívna látka v čase t obsahovala ešte n nerozpadnutých atómov, za čas $\mathrm{d}t$ sa ich rozpadne $\mathrm{d}n$, a pre toto množstvo platí vzťah

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \, \mathrm{d}t$$

kde λ je *rozpadová konštanta* príslušnej rádioaktívnej látky. Výraz

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -\lambda n$$

predstavuje rýchlosť rádioaktívneho rozpadu látky.

Závislosť počtu atómov rádioaktívnej látky, ktoré sa ešte nerozpadli, od času vyjadruje exponenciálny vzťah

$$n = n_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

kde n_0 je začiatočné množstvo atómov látky v čase $t = 0$.

Polčas rozpadu je čas, za ktorý sa rozpadne polovica začiatočného množstva atómov. Súvis medzi polčasom T a rozpadovou konštantou λ rádioaktívnej látky vyjadruje rovnica

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$$

e) O členoch určitého rádioaktívneho radu hovoríme, že sú v *rádioaktívnej rovnováhe*, keď rýchlosti rozpadu týchto členov radu sú rovnaké.

Množstvá atómov prvkov v zmesi, ktorá je v rádioaktívnej rovnováhe, sú priamo úmerné polčasom rozpadu týchto prvkov, teda

$$n_1 : n_2 : n_3 : \ldots = T_1 : T_2 : T_3 : \ldots$$

f) *Jadrová reakcia* je proces, v ktorom intenzívnym pôsobením atómového jadra s elementárnou časticou alebo s iným jadrom nastáva premena jadra, resp. jadier. Pri jadrových reakciách vznikajú viaceré energetické premeny, ktorých výsledkom môže byť alebo *aktivizácia* istého množstva pôvodne pasívnej energie alebo *pasivizácia* istého množstva pôvodne aktívnej energie. Pri týchto procesoch platí vždy ako zákon zachovania energie, tak aj zákon zachovania hmotnosti a zákon zachovania elektrického náboja.

Energia ΔW, ktorá sa v priebehu jadrovej reakcie aktivizuje, resp. pasivizuje, súvisí so zmenou hmotnosti Δm, ku ktorej v priebehu jadrovej reakcie dochádza, podľa rovnice

$$\Delta W = \Delta m c^2$$

So zmenou hmotnosti o $\Delta m = 1$ u sa aktivizuje, resp. pasivizuje energia $\Delta W = 931{,}8$ MeV.

Príklady

990. Vypočítajte, aká je väzbová energia a) deuterónu, b) častice α!

Riešenie:

Mierou pre väzbovú energiu deuterónu, resp. častice α je úbytok hmotnosti, ku ktorému dochádza pri vytvorení týchto častíc z protónov a neutrónov. Zo známeho úbytku hmotnosti sa väzbová energia určí z rovnice

$$\Delta W_j = \Delta m c^2 \tag{1}$$

a) Deuterón je jadro izotopu vodíka ${}^2_1D$ a skladá sa z jedného protónu a jedného neutrónu. Keď hmotnosť protónu je m_p, neutrónu m_n a deuterónu m_d, úbytok hmotnosti pri vytvorení deuterónu

$$\Delta m = m_n + m_p - m_d = 1{,}008\,95\text{ u} + 1{,}007\,58\text{ u} - 2{,}014\,18\text{ u} = 0{,}002\,35\text{ u}$$

Pretože úbytku hmotnosti 1 u prislúcha zmena energie 931,8 MeV, úbytku hmotnosti Δm odpovedá väzbová energia

$$\Delta U = 0{,}002\,35\ \mathrm{u} \,.\, 931{,}8\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}} = 2{,}19\ \mathrm{MeV}$$

b) častica α je jadro héliového atómu. Skladá sa z dvoch protónov a dvoch neutrónov. Úbytok hmotnosti, ku ktorému dochádza pri vytvorení častice α

$$\Delta m = 2m_n + 2m_p - m_\alpha$$

Keď sem dosadíme číselné hodnoty, pre úbytok hmotnosti dostaneme:

$$\Delta m = 2{,}017\,90\ \mathrm{u} + 2{,}015\,16\ \mathrm{u} - 4{,}002\,76\ \mathrm{u}$$

$$\Delta m = 0{,}0303\ \mathrm{u}$$

a väzbová energia častice α ΔW_j potom je:

$$\Delta W_j = 0{,}0303\ \mathrm{u} \,.\, 931{,}8\ \frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}} = 28{,}2\ \mathrm{MeV}$$

991. Určite zloženie jadra izotopu prvku, ktorý vznikne z uránu $^{238}_{92}\mathrm{U}$ po štyroch rozpadoch α a dvoch rozpadoch β!

Riešenie:

Keď premenu napíšeme schematicky, dostávame rovnicu

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow 4\,^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\,^{0}_{-1}\mathrm{e} + ^{a}_{b}X$$

Keďže platí zákon zachovania hmotnosti a elektrického náboja, musia byť pre a a b splnené rovnice

$$a + 0 + 16 = 238$$
$$b - 2 + 8 = 92$$

odkiaľ

$$a = 222$$
$$b = 86$$

Rozpadom vznikne izotop $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$. Jadro tohto izotopu obsahuje $Z = 86$ protónov a $N = A - Z = 136$ neutrónov.

992. Ostreľovaním stabilného izotopu fosforu $^{31}_{15}\mathrm{P}$ deuterónmi vzniká rádioaktívny izotop fosforu $^{32}_{15}\mathrm{P}^*$ s polčasom $T = 14{,}3$ dní. Reakcia prebieha podľa rovnice

$$^{31}_{15}\mathrm{P} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{32}_{15}\mathrm{P}^* + ^{1}_{1}\mathrm{H}$$

Vypočítajte, aká časť z pôvodného množstva rádioaktívneho izotopu $^{32}_{15}\mathrm{P}^*$

ostane ešte po uplynutí 12 hodín od okamihu, keď prerušíme ostreľovanie stabilného izotopu fosforu deuterónmi!

Riešenie:

Pre rozpad umelo rádioaktívneho izotopu fosforu $^{32}_{15}P^*$ platia rovnaké zákonitosti ako pre rozpad prirodzene rádioaktívnych prvkov. Po uplynutí času t ostáva z pôvodného počtu n_0 atómov rádioaktívneho izotopu nerozpadnutých ešte n atómov, pričom je splnená rovnica

$$n = n_0 \, e^{-\lambda t}$$

Pretože

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Po dosadení číselných hodnôt pre relatívne množstvo nerozpadnutých atómov dostaneme:

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{12\,h \cdot 0{,}693}{343{,}2\,h}} = 0{,}98$$

993. Za aký čas ubudne rozpadom $\Delta m = 10\ \mu g$ rádioaktívnej látky, ktorej celkové množstvo bolo $m_0 = 50\ \mu g$ a ktorej polčas rozpadu $T = 3$ minúty?

Riešenie:

Po uplynutí času t ostáva z pôvodného množstva n_0 ešte

$$n = n_0 \, e^{-\lambda t} \tag{1}$$

nerozpadnutých atómov.

Pretože hmotnosť určitého množstva rádioaktívnej látky je úmerná počtu v nej sa nachádzajúcich atómov, rovnicu (1) možno písať aj v tvare

$$m = m_0 \, e^{-\lambda t} \tag{2}$$

kde m_0 je hmotnosť začiatočného množstva látky a m hmotnosť toho množstva látky, ktoré sa za čas t ešte nerozpadne. Keďže

$$m = m_0 - \Delta m \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

z rovnice (2) vyplýva:

$$\frac{m_0 - \Delta m}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

odkiaľ po úprave dostávame:

$$t = -\frac{T}{\log 2} \log \frac{m_0 - \Delta m}{m_0}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$t = -\frac{180\ \mathrm{s}}{0{,}301\ 03} \log \frac{40}{50} = 58\ \mathrm{s}$$

994. Vypočítajte, koľko atómov sa rozpadne za sekundu v 1 kg izotopu $^{238}_{92}U$, ktorého polčas rozpadu $T = 4{,}5 \,.\, 10^9$ rokov!

Riešenie:

Nech v čase t látka obsahuje n nerozpadnutých atómov. Z tých sa za čas $\mathrm{d}t$ rozpadne

$$\mathrm{d}n = -n\lambda\ \mathrm{d}t$$

atómov.

Pre počet atómov rozpadnutých za jednotku času platí:

$$N = -\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = n\lambda \qquad (1)$$

Jeden kilomól $^{238}_{92}U$ obsahuje $N_A = 6{,}03 \,.\, 10^{26}$ atómov; pretože jeden kilogram uránu obsahuje $\frac{1}{238}$ kilomólov, 1 kg uránu v čase $t = 0$ obsahuje

$$n_0 = \frac{1}{238}\, 6{,}03 \cdot 10^{26}$$

atómov.

Podľa rovnice (1) potom dostávame

$$N = n_0\lambda \qquad (2)$$

Keď ešte uvážime, že súvis medzi rozpadovou konštantou λ a polčasom rozpadu T udáva rovnica

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T}$$

z rovnice (2) dostávame

$$N = \frac{1}{238}\, 6{,}03 \,.\, 10^{26} \cdot \frac{0{,}693}{1{,}4 \,.\, 10^{17}}\ \mathrm{s}^{-1} = 1{,}25 \,.\, 10^{7}\ \mathrm{s}^{-1}$$

995. Vypočítajte, aké množstvo $^{226}_{88}Ra$ a $^{222}_{86}Rn$ je v rovnováhe s jedným gramom $^{238}_{92}U$! Polčasy rozpadu uránu, rádia a radónu sú: $T_1 = 4{,}4 \cdot 10^9$ rokov $T_2 = 1590$ rokov a $T_3 = 3{,}825$ dní.

Riešenie:

$^{226}_{88}Ra$ i $^{222}_{86}Rn$ sú prvkami rozpadového radu, ktorého prvým členom je $^{238}_{92}U$.

Všeobecne hovoríme o prvkoch určitého rádioaktívneho radu, že sú v rádioaktívnej rovnováhe, keď počet rozpadnutých atómov dn_i v časovom intervale t až $t + dt$ je rovnaký pre základný prvok i pre prvky jeho rozpadového radu. Platí teda podmienka

$$dn_1 = dn_2 = \ldots = dn_k \tag{1}$$

Keď počet nerozpadnutých atómov prvku v čase t označíme n_i, je splnený vzťah

$$dn_i = -\lambda_i n_i \, dt$$

a podmienku (1) možno prepísať do tvaru

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \ldots = \lambda_k n_k \tag{2}$$

Keď namiesto rozpadových konštánt λ_i zavedieme príslušné polčasy rozpadu T_i podľa

$$\lambda_i = \frac{\ln 2}{T_i}$$

pre podmienku rádioaktívnej rovnováhy platí:

$$\frac{n_1}{T_1} = \frac{n_2}{T_2} = \ldots = \frac{n_k}{T_k}$$

Keď n_1 atómov uránu je v rovnováhe s n_2 atómami rádia a n_3 atómami radónu, je splnená rovnica

$$\frac{n_1}{T_1} = \frac{n_2}{T_2} = \frac{n_3}{T_3}$$

odkiaľ vyplýva:

$$n_2 = n_1 \frac{T_2}{T_1}; \quad n_3 = n_1 \frac{T_3}{T_1}$$

n atómov prvku, ktorého mólová hmotnosť je M_m, má hmotnosť

$$m = \frac{M_m}{N_A} n \tag{3}$$

Keď ešte uvážime, že 1 g $^{238}_{92}U$ obsahuje

$$n_1 = \frac{6{,}03 \, . \, 10^{23}}{238} \text{ atómov}$$

dostaneme z rovnice (3) pre hmotnosť hľadaného množstva rádia m_2 a radónu m_3, ktoré sú v rádioaktívnej rovnováhe s 1 g uránu, vzťahy

$$m_2 = \frac{M_2}{N} n_1 \frac{T_2}{T_1}; \quad m_3 = \frac{M_3}{N} n_1 \frac{T_3}{T_1}$$

a po dosadení číselných hodnôt

$$m_2 = \frac{226}{6{,}03 \, . \, 10^{23}} \cdot \frac{6{,}03 \, . \, 10^{23}}{238} \cdot \frac{1590}{4{,}4 \, . \, 10^9} \text{ g} = 3{,}3 \, . \, 10^{-6} \text{ g}$$

$$m_3 = \frac{222}{238} \cdot \frac{3{,}825}{4{,}4 \, . \, 10^9 \, . \, 365} \text{ g} = 2{,}2 \, . \, 10^{-12} \text{ g}$$

996. Počítačmi sa zistilo, že 1 gram rádia vysiela za 1 sekundu $3{,}7 \, . \, 10^{10}$ častíc α. Nájdite hodnotu Avogadrovej konštanty, keď polčas rozpadu rádia je 1590 rokov a keď relatívna atómová hmotnosť rádia je 226,05!

Riešenie:

Vyjdeme z rozpadovej rovnice v diferenciálnom tvare

$$\mathrm{d}n = -\lambda n \, \mathrm{d}t$$

ktorú upravíme na tvar

$$\left| \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \right| = \lambda n$$

V predchádzajúcej rovnici poznáme $\left| \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \right|$. Tento výraz v našom prípade označuje počet rozpadov za sekundu v 1 g rádia. Veličina n tu predstavuje počet atómov v 1 g rádia. Pre Avogadrovu konštantu N_A, t. j. pre počet atómov v 1 móle rádia, potom platí:

$$N_A = 226{,}05 \, . \, n = 226{,}05 \cdot \frac{1}{\lambda} \left| \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} \right| =$$

$$= 226{,}05 \, \frac{1590 \, . \, 365 \, . \, 86\,400}{0{,}693} \cdot 3{,}7 \, . \, 10^{10} = 6{,}02 \, . \, 10^{23}$$

kde sme použili súvis medzi rozpadovou konštantou λ a polčasom rozpadu T podľa vzťahu $\lambda = \frac{0{,}693}{T}$.

997. V obale, ktorý neprepúšťa žiarenie α, je umiestnený 1 g rádia. Vypočítajte, aké je celkové množstvo energie, ktoré sa v obale získa za jednu hodinu, keď energia, ktorú so sebou častica α odnáša, je $W_\alpha = 4{,}7$ MeV!

Riešenie:

Počítajme len tú časť energie, ktorá pripadá na žiarenie α.

Vymrštením jednej častice α dostane jadro spätný náraz a bude sa pohybovať rýchlosťou v_j opačného smeru ako častica α. Podľa zákona zachovania hybnosti celková hybnosť sústavy jadro + častica α ostáva rovnaká aj po vyslaní častice α. Preto, ak sa obmedzíme iba na absolútne hodnoty, možno písať:

$$m_j v_j = m_\alpha v_\alpha \qquad (1)$$

Celková uvoľnená energia po vymrštení častice α sa rovná súčtu pohybovej energie jadra a častice α, teda

$$W = W_j + W_\alpha = \frac{1}{2} m_j v_j^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

a pomocou rovnice (1) pre energiu dostávame:

$$W = W_\alpha + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{m_j} = W_\alpha \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_j}\right) \qquad (2)$$

častica α predstavuje héliové jadro ^4_2He s hmotnostným číslom 4. Vymrštením častice α sa hmotnostné číslo jadra zmenší o 4. Ak ešte uvážime, že hmotnostné číslo jadra A je úmerné hmotnosti jadra m, platí zrejme vzťah

$$\frac{m_\alpha}{m_j} = \frac{A_\alpha}{A_j}$$

Keď to zoberieme do úvahy, bude mať rovnica (2) tvar

$$W = W_\alpha \left(1 + \frac{A_\alpha}{A_j}\right) = W_\alpha \left(1 + \frac{4}{A-4}\right) = \frac{A}{A-4} W_\alpha$$

kde A je hmotnostné číslo jadra pred vymrštením častice α. Za jednu hodinu vymrští jadro n častíc α, preto celková energia uvoľnená za 1 hodinu jadrom

$$W' = n \frac{A}{A-4} W_\alpha \qquad (3)$$

Počet rozpadov, ktoré nastanú v 1 g rádia za hodinu, ľahko vypočítame pomocou riešenia príkladu 994:

$$N = 3{,}7 \,.\, 10^{10} \,.\, 3600$$

Celková energia uvoľnená vypočítaným počtom rozpadov a s tým súvisiacim vymrštením príslušného počtu častíc α

$$W_c = \frac{3{,}7\,.\,10^{10}\,.\,3600\,.\,226}{222} \cdot 4{,}7\,.\,10^6\ \mathrm{eV}\,.\,1{,}6\,.\,10^{-19}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}$$

$$W_c = 102{,}5\ \mathrm{J}$$

998. Vypočítajte, aké množstvo energie sa uvoľní pri reakcii

$$^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{2}_{1}\mathrm{D} \quad\rightarrow\quad {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

keď relatívna atómová hmotnosť izotopu $^{10}_{5}\mathrm{B}$ je 10,016 18 u a izotopu $^{11}_{5}\mathrm{B}$ je 11,012 84 u!

Riešenie:

Súčet pokojových hmotností častíc vstupujúcich do reakcie

$$m_1 + m_2 = 10{,}016\,18\ \mathrm{u} + 2{,}014\,72\ \mathrm{u} = 12{,}030\,90\ \mathrm{u}$$

kým súčet pokojových hmotností častíc, ktoré reakciou vznikajú,

$$m_3 + m_4 = 11{,}012\,84\ \mathrm{u} + 1{,}008\,13\ \mathrm{u} = 12{,}020\,97\ \mathrm{u}$$

V priebehu reakcie dochádza teda k úbytku hmotnosti

$$\Delta m = 0{,}009\,930\ \mathrm{u}$$

Ide tu o úbytok hmotnosti jadra, lebo celkový počet elektrónov v elektrónovom obale sa nezmenil.

Pri reakcii sa uvoľní energia ΔW, ktorá súvisí s úbytkom hmotnosti Δm vzťahom

$$\Delta W = \Delta m c^2$$

Úbytok hmotnosti Δm ľahko vyjadríme v jednotkách hmotnosti, ak uvážime, že 1 u prislúcha hmotnosť $1{,}66\,.\,10^{-27}$ kg. Potom

$$\Delta m = 1{,}66\,.\,10^{-27} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{u}} \cdot 0{,}009\,93\ \mathrm{u}$$

a pre energiu uvoľnenú pri reakcii dostávame:

$$\Delta W = 1{,}648\,39\,.\,10^{-29}\ \mathrm{kg}\,.\,9\,.\,10^{16}\ \mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2} = 1{,}4843\,.\,10^{-12}\ \mathrm{J} = 9{,}28\ \mathrm{MeV}$$

999. Výsledkom jadrovej reakcie

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \quad\rightarrow\quad 2\,{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

pri ktorej protóny bombardujúce lítium majú energiu 600 keV, sú dve častice α, letiace s kinetickou energiou 8,94 MeV. Zo známej hmotnosti protónu a častice α určite hmotnosť izotopu ${}^7_3Li$!

Riešenie:

V priebehu reakcie dochádza k úbytku hmotnosti Δm, ktorá sa rovná rozdielu pokojových hmotností častíc do reakcie vstupujúcich a reakciou vznikajúcich:

$$\Delta m = m_{Li} + m_H - 2m_{He}$$

odkiaľ pre hmotnosť izotopu lítia vyplýva:

$$m_{Li} = \Delta m - m_H + 2m_{He} \qquad (1)$$

Pri reakcii sa uvoľní celkom energia

$$\Delta W = 2 . 8{,}94 \text{ MeV} - 0{,}6 \text{ MeV} = 17{,}28 \text{ MeV}$$

a s ňou súvisiaci úbytok hmotnosti Δm sa vypočíta z rovnice

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2}$$

Je známe, že úbytku hmotnosti 1 u odpovedá energia 931,8 MeV, preto úbytok hmotnosti odpovedajúci uvoľnenej energii $\Delta W = 17{,}28$ MeV, je:

$$\Delta m = \frac{17{,}28 \text{ MeV}}{931{,}8 \dfrac{\text{MeV}}{\text{u}}} = 0{,}018\,54 \text{ u}$$

Pre atómovú hmotnosť izotopu lítia potom vyplýva:

$$m_{Li} = 0{,}018\,64 \text{ u} - 1{,}008\,13 \text{ u} + 8{,}007\,72 \text{ u} = 7{,}018\,13 \text{ u}$$

1000. Tvrdé žiarenie γ, ktoré vzniká pri prirodzenom rádioaktívnom rozpade rádioaktívneho tória, zapríčiňuje rozpad deuterónu na protón a neutrón podľa reakcie

$${}^2_1D + \gamma \quad \rightarrow \quad {}^1_1H + {}^1_0n$$

Vypočítajte hmotnosť neutrónu, keď kinetická energia protónu $\Delta W_1 = 0{,}217$ MeV a energia dopadajúceho žiarenia γ $\Delta W_2 = 2{,}62$ MeV!

Riešenie:

V priebehu reakcie dochádza k úbytku pokojovej hmotnosti

$$\Delta m = m_D - (m_H + m_n)$$

kde m_D, m_H, m_n sú pokojové hmotnosti deutrónu, protónu a neutrónu. Potom

$$m_n = m_D - m_H - \Delta m \qquad (1)$$

Vzhľadom na to, že hmotnosť protónu a neutrónu sa len nepatrne líšia, bude aj energia vznikajúceho protónu a neutrónu prakticky rovnaká a pri reakcii sa uvoľní energia

$$\Delta W = 2\,\Delta W_1 - \Delta W_2$$

Uvoľnenej energii ΔW odpovedá úbytok hmotnosti

$$\Delta m = \frac{\Delta W}{c^2}$$

a pre hmotnosť neutrónu z rovnice (1) vyplýva:

$$m_n = m_D - m_H - \frac{2\,\Delta W_1 - \Delta W_2}{c^2}$$

Číselne

$$m_n = 2{,}014\,72\ \text{u} - 1{,}008\,13\ \text{u} + \frac{2{,}186\ \text{MeV} \,.\, 1{,}6 \,.\, 10^{-13}\ \dfrac{\text{J}}{\text{MeV}}}{9 \,.\, 10^{16}\ \text{m}^2 \,.\, \text{s}^{-2}}$$

Keď uvážime, že 1 u odpovedá hmotnosť $1{,}66 \,.\, 10^{-27}$ kg,

$$m_n = 1{,}006\,59\ \text{u} \,.\, 1{,}66 \,.\, 10^{-27}\ \frac{\text{kg}}{\text{u}} + 0{,}389 \,.\, 10^{-29}\ \text{kg} =$$

$$= 1{,}6748 \,.\, 10^{-27}\ \text{kg}$$

1001. Rádiová emanácia (radón) vzniká rádioaktívnym rozpadom $^{226}_{88}\text{Ra}$, vyslaním častice α so začiatočnou energiou $\Delta W = 4{,}9$ MeV. Vypočítajte rozdiel medzi úbytkom hmotnosti jadra rádia a radónu! Známy je len úbytok hmotnosti častice α, $\Delta m_\alpha = 0{,}0303$ u.

Riešenie:

Pretože jadro $^{226}_{88}\text{Ra}$ obsahuje 88 protónov a 138 neutrónov, pri jeho vzniku dochádza k úbytku hmotnosti

$$\Delta m_{\text{Ra}} = 88 m_p + 138 m_n - m_{\text{Ra}}$$

a pri vzniku jadra $^{222}_{86}\text{Rn}$ z 86 protónov a 136 neutrónov k úbytku hmotnosti

$$\Delta m_{\text{Rn}} = 86 m_p + 136 m_n - m_{\text{Rn}}$$

Rozdiel týchto hmotnostných úbytkov je:

$$\Delta m = \Delta m_{\text{Ra}} - \Delta m_{\text{Rn}} = 2 m_p + 2 m_n - (m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}}) \qquad (1)$$

Pri rozpade rádia na radón podľa reakcie

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{226}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\alpha \tag{2}$$

uvoľňuje sa energia $\Delta W = 4{,}9$ MeV a tejto energii prislúchajúci úbytok hmotnosti

$$\Delta m' = \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{4{,}9\ \mathrm{MeV}}{931{,}8\ \dfrac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{u}}} = 0{,}005\ 26\ \mathrm{u}$$

Z rovnice (2) pre tento úbytok hmotnosti vyplýva:

$$\Delta m' = m_{\mathrm{Ra}} - (m_{\mathrm{Rn}} + m_{\alpha})$$

Keď z tejto rovnice vyjadríme rozdiel $m_{\mathrm{Ra}} - m_{\mathrm{Rn}}$ a dosadíme do rovnice (1), dostaneme:

$$\Delta m = 2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_{\alpha} - \Delta m'$$

Výraz $2m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{n}} - m_{\alpha}$ predstavuje úbytok hmotnosti Δm_{α}, ku ktorému dochádza pri vzniku častice α, preto

$$\Delta m = \Delta m_{\alpha} - \Delta m' = 0{,}0303\ \mathrm{u} - 0{,}005\ 26\ \mathrm{u} \doteq 0{,}025\ \mathrm{u}$$

1002. Vypočítajte, aká má byť vlnová dĺžka žiarenia, ktoré by mohlo vyvolať tvorenie elektrónovo-pozitrónového páru!

Riešenie:

Dvojica elektrón—pozitrón vzniká premenou fotónu predovšetkým v poli ťažkých jadier prvkov. Pokojová hmotnosť vytvorenej dvojice Δm sa bude rovnať súčtu pokojových hmotností elektrónu (m_{e}) a pozitrónu (m_{p}). K tomuto prírastku pokojovej hmotnosti dochádza pohltením energie ΔW jedného fotónu. Súvis medzi oboma veličinami udáva rovnica:

$$\Delta W = \Delta m c^2 \tag{1}$$

Pretože energia jedného fotónu $\Delta W = hf$, rovnice (1) pre frekvenciu príslušného žiarenia vyplýva:

$$f = \frac{\Delta m c^2}{h}$$

a zo vzťahu $\lambda = \frac{c}{f}$ pre jeho vlnovú dĺžku

$$\lambda = \frac{h}{\Delta m \,.\, c} \tag{2}$$

Číselne

$$\Delta m = 5{,}489\,.\,10^{-4}\ \mathrm{u} + 5{,}489\,.\,10^{-4}\ \mathrm{u} = 10{,}978\,.\,10^{-4}\ \mathrm{u}$$

Keďže jednotke atómovej hmotnosti prislúcha hmotnosť $1{,}66\,.\,10^{-27}$ kg, bude:

$$\Delta m = 18{,}22\,.\,10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

a zo vzťahu (2) pre hľadanú vlnovú dĺžku vyplýva:

$$\lambda = \frac{6{,}62\,.\,10^{-34}\ \mathrm{J\,.\,s}}{18{,}22\,.\,10^{-31}\ \mathrm{kg}\,.\,3\,.\,10^{8}\ \mathrm{m\,.\,s^{-1}}} = 12\,.\,10^{-13}\ \mathrm{m}$$

1003. Izotop $^{235}_{92}\mathrm{U}$, ostreľovaný pomalými neutrónmi, rozdelí sa na dva približne rovnaké fragmenty, pričom sa uvoľní energia asi 200 MeV. Vypočítajte, aké množstvo energie by sa takto uvoľnilo pri rozštiepení 1 kg uránu! Koľko kilogramov $^{235}_{92}\mathrm{U}$ by spotrebovala za 24 hodín atómová pec pri výkone 1 megawattu?

Riešenie:

Pri rozštiepení 1 kg uránu sa uvoľní energia

$$W = n\,\Delta W \tag{1}$$

kde ΔW je energia uvoľnená pri rozpade jedného atómu a n je počet atómov nachádzajúcich sa v 1 kg uránu. Pre tento počet zrejme platí:

$$n = \frac{1000}{235}\cdot 6{,}03\,.\,10^{23}$$

a pre celkovú uvoľnenú energiu z rovnice (1) vychádza:

$$W = \frac{1000}{235}\cdot 6{,}03\,.\,10^{23}\,.\,200\ \mathrm{MeV}\,.\,1{,}6\,.\,10^{-13}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{MeV}}$$

$$W = 8{,}2\,.\,10^{13}\ \mathrm{J}$$

Pri ideálnom výkone pece $P = 1\ \mathrm{MW} = 10^{6}\ \mathrm{W}$ by sa v nej za 24 hodín uvoľnila energia

$$W_0 = 10^{6}\,W\,.\,86\,400\ \mathrm{s} = 8{,}64\,.\,10^{10}\ \mathrm{J}$$

Keďže rozpadom 1 kg uránu sa uvoľní energia $W = 8{,}2\,.\,10^{13}$ J, atómová pec pri výkone 1 MW za deň spotrebuje:

$$m = \frac{8{,}64\,.\,10^{10}\ \mathrm{J}}{8{,}2\,.\,10^{13}\ \mathrm{J\,.\,kg^{-1}}} = 1{,}05\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg} \doteq 1\ \mathrm{g}\ ^{235}_{92}\mathrm{U}$$

1004. Pri jadrovej reakcii typu termonukleárnych reakcií

$$^3_1H + ^2_1H \rightarrow ^4_2He + ^1_0n$$

sa aktivizuje 17,6 MeV pôvodne pasívnej energie. Vypočítajte pokojovú hmotnosť jadra ^3_1H, keď poznáte pokojové hmotnosti ^1_0n a jadier ^2_1H, ^4_2He!

Riešenie:

Vznik energie $W = 17{,}6$ MeV súvisí s úbytkom pokojovej hmotnosti Δm v priebehu jadrovej reakcie, pričom

$$\Delta m = \frac{W}{c^2}$$

Keďže $\Delta m = 1$ u odpovedá energia 931,8 MeV, potom

$$\Delta m = \frac{17{,}6 \text{ MeV}}{931{,}8 \text{ MeV}} = 0{,}018\,888 \text{ u}$$

Pre pokojovú hmotnosť jadra trícia ^3_1H potom platí

$$m_{^3_1H} = m_{^4_2He} + m_{^1_0n} + \Delta m - m_{^2_1H} =$$

$$= 4{,}002\,763 \text{ u} + 1{,}008\,95 \text{ u} + 0{,}018\,888 \text{ u} - 2{,}014\,172 \text{ u} =$$

$$= 3{,}016\,429 \text{ u} = 5{,}0061 \,.\, 10^{-27} \text{ kg}$$

Úlohy

1005. Konečným produktom rádioaktívneho rozpadu $^{232}_{90}Th$ je izotop $^{208}_{82}Pb$. Vypočítajte, koľko častíc α a koľko častíc β sa uvoľní pri tomto rozpade!

[6; 4]

1006. Vypočítajte, za aký čas sa rozpadne polovica atómov rádia, keď jeho rozpadová konštanta $\lambda = 1{,}42 \,.\, 10^{-11}$ s^{-1}!

[$T = 1550$ rokov]

1007. Vypočítajte, koľko percent určitého množstva rádioaktívneho polónia s polčasom rozpadu 40 minút sa rozpadne za 5 minút!

[$p = 8{,}3$ %]

1008. Za aký čas sa rozpadne z 10^7 atómov aktínia jeden atóm? Polčas rozpadu aktínia je 13,5 rokov.

[$t = 60$ s]

1009. Vypočítajte, koľko častíc α vyšle 1 g rádia za 1 sekundu, keď polčas jeho rozpadu je 1590 rokov!

[$N = 3{,}7 \,.\, 10^{10}$]

1010. Podľa Geigerovho—Nuttalovho zákona závislosť doletu (d) častice α, vymršťovanej rádioaktívnym preparátom, od jeho rozpadovej konštanty (λ) možno vyjadriť približne empirickou formulou:

$$\log d = A \log \lambda + B$$

kde A a B sú konštanty. Vypočítajte, aký je dolet častíc α ^{238}U a ^{226}Ra, keď sú známe polčasy ich rozpadu! Číselné hodnoty konštánt A a B pre uránový rozpadový rad sú: $A = 0{,}0167$ a $B = 0{,}7059$, keď dolet meriame v cm a rozpadovú konštantu v s^{-1}.

[$d_1 = 2{,}72$ cm; $d_2 = 3{,}35$ cm]

1011. Prirodzeným rádioaktívnym rozpadom izotopu $^{238}_{92}U$ vzniká izotop $^{234}_{92}U$. Vypočítajte, aký je polčas jeho rozpadu, keď v prírodnom uráne, ktorý je zmesou izotopov ^{238}U a ^{235}U, je 0,006 % izotopu ^{234}U a 99,3 % izotopu ^{238}U! Polčas rozpadu ^{238}U je $4{,}4 \,.\, 10^9$ rokov.

[$T = 2{,}7 \,.\, 10^5$ rokov]

1012. Vypočítajte, aký objem radónu je v rovnováhe s 1 g rádia pri teplote 0 °C a tlaku $1{,}013 \,.\, 10^5$ Pa!

[$V = 0{,}67$ mm^3]

1013. Vypočítajte, akou rýchlosťou sa bude pohybovať jadro rádia po vymrštení častice α s energiou $W_\alpha = 4{,}7$ MeV!

[$v = 2{,}7 \,.\, 10^5$ m.s^{-1}]

1014. Vypočítajte, aká energia (v J i eV) odpovedá 1 u!

[$W = 14{,}94 \,.\, 10^{-11}$ J $= 933$ MeV]

1015. Aké množstvo energie sa uvoľní pri jadrovej reakcii

$$^{27}_{13}Al + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{30}_{14}Si + ^{1}_{1}H$$

keď relatívna atómová hmotnosť izotopu hliníka $m_{Al} = 26{,}9899$ u a izotopu kremíka $m_{Si} = 29{,}9832$ u?

[$\Delta W = 2{,}26$ MeV]

1016. Vypočítajte úbytok hmotnosti, ku ktorému dochádza pri chemickej reakcii

$$2\,H_2 + O_2 = 2\,H_2O$$

keď pri teplote 25 °C sa pri vzniku 1 mólu vody uvoľní 286,3 kJ energie!

[$\Delta m = 3{,}2 \,.\, 10^{-9}$ g]

1017. Pri jadrovej reakcii

$${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \quad \rightarrow \quad {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}H$$

sa uvoľní energia 0,6 MeV. Aká veľká je hmotnosť jadra ${}^{14}_{6}C$, keď hmotnosť jadra izotopu ${}^{14}N$ je 14,007 50 u?

[$m_c = 14{,}008\,29$ u $= 23{,}25 \,.\, 10^{-24}$ g]

1018. Pri jadrovej reakcii

$${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \quad \rightarrow \quad {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$$

sa pohltí energia $12{,}5 \,.\, 10^{10}$ J na vznik mólu izotopu kyslíka. Aká je relatívna atómová hmotnosť izotopu ${}^{17}_{8}O$, keď relatívna atómová hmotnosť izotopu ${}^{14}_{7}N$ je 14,007 56 u?

[$m_0 = 17{,}0047$ u]

1019. Vypočítajte väzbovú energiu jadra izotopu a) ${}^{14}_{7}N$, b) ${}^{207}_{82}Pb$! Aká stredná energia pripadá na jeden nukleón? Relatívna atómová hmotnosť izotopu ${}^{14}_{7}N$ je 14,007 56 u a ${}^{207}_{82}Pb$ 207,21 u.

[a) $\Delta W_1 = 104{,}4$ MeV; b) $\Delta W_2 = 1467{,}9$ MeV; $\Delta W_s = 7{,}1$ MeV]

1020. Vypočítajte energiu, ktorá sa uvoľní pri vytvorení $m = 1$ g hélia z protónov a neutrónov!

[$W = 57 \,.\, 10^{10}$ kJ]

1021. Pri dopade tvrdého žiarenia γ na kov vzniká v mieste dopadu dvojica elektrón—pozitrón. Vypočítajte hmotnosť pozitrónu, keď úhrnná energia vytvorenej dvojice je 1,6 MeV a energia dopadajúceho žiarenia γ je 2,62 MeV! Hmotnosť elektrónu $m_e = 9{,}109 \,.\, 10^{-28}$ g.

[$m_p = 5{,}487 \,.\, 10^{-4}$ u $= 9{,}108 \,.\, 10^{-28}$ g]

1022. Pri jadrovej reakcii

$${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \quad \rightarrow \quad {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

sa aktivizuje 3,3 MeV pôvodne pasívnej energie. Vypočítajte pokojovú hmotnosť jadra ^3_2He, keď poznáte pokojové hmotnosti jadra ^2_1H a neutrónu ^1_0n!

[$m_{^3_2He} = 3{,}015\ 85\ u = 5{,}0051 . 10^{-27}$ kg]

24 MOLEKULY

Úvod

a) *Molekula* je stabilné usporiadanie dvoch alebo viacerých atómov. Charakterizuje ju *väzbová energia*, ktorá predstavuje množstvo energie potrebné na rozpad molekuly na izolované atómy. Existujú viaceré typy väzieb, prostredníctvom ktorých sa realizuje vznik molekuly. Najznámejšie sú *iónová väzba* a *kovalentná väzba.*

b) Energia väzby iónovej molekuly je daná vzťahom

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

kde e je elementárny elektrický náboj, ε_0 permitivita vákua, R_0 rovnovážna vzájomná vzdialenosť medzi iónmi, ktoré tvoria molekulu, n exponent odpudivých síl medzi iónmi.

c) V izolovaných atómoch spočíva mechanizmus vzniku elektromagnetického žiarenia v preskokoch elektrónov z vyšších energetických hladín elektrónového obalu na nižšie hladiny. K týmto *elektrónovým spektrám* sa v molekulách pripájajú aj spektrá súvisiace s *vibračným* a *rotačným pohybom molekuly.*

Pre *vibračné energetické hladiny* molekuly možno odvodiť vzťah

$$W = \left(v + \frac{1}{2}\right) hf$$

kde $v = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je vibračné kvantové číslo, pre ktoré platí pravidlo výberu $\Delta v = \pm 1$. Pre frekvenciu žiarenia f platí

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}}$$

kde k je konštanta medziatómovej sily v molekule a $m' = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ je redukovaná hmotnosť molekuly, m_1 a m_2 sú hmotnosti atómov tvoriacich molekulu.

Rotačné energetické hladiny molekuly sú dané vzťahom

$$W = \frac{\hbar J(J+1)}{2I}$$

kde $\hbar = h/2\pi$, I moment zotrvačnosti molekuly vzhľadom na os otáčania a $J = 0, 1, 2, 3 \dots$ je *rotačné kvantové číslo.*

Príklady

1023. Nájdite exponent n odpudivých síl, ktoré sa uplatňujú pri iónovej väzbe molekuly KCl, keď energia iónovej väzby KCl je $W = -4{,}59$ eV a keď rovnovážna vzdialenosť iónov v molekule KCl je $R_0 = 2{,}79 . 10^{-10}$ m!

Riešenie:

Pre energiu iónovej väzby platí vzťah

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

kde e je elementárny elektrický náboj, ε_0 je permitivita vákua. Význam ostatných symbolov je zrejmý z textu príkladu.

Pre hľadané n možno potom písať

$$n = \frac{e^2}{e^2 + 4\pi\varepsilon_0 R_0 W} =$$

$$= \frac{(1{,}602)^2 . 10^{-38}}{(1{,}602)^2 . 10^{-38} - 4 . 3{,}14 . 8{,}854 . 10^{-12} . 2{,}79 . 10^{-10} . 4{,}59 . 1{,}602 . 10^{-19}} =$$

$$= \frac{2{,}566 . 10^{-38}}{0{,}285 . 10^{-38}} \doteq 9$$

1024. Aká je energia iónovej väzby NaCl, keď rovnovážna vzdialenosť iónov v molekule NaCl je $R_0 = 2{,}8 . 10^{-10}$ m a keď exponent odpudivých síl je $n = 8$? Určite podiel coulombovskej energie a energie iónovej väzby NaCl!

Riešenie:

Dané hodnoty dosadíme do vzťahu pre energiu iónovej väzby

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\frac{(1{,}602)^2 . 10^{-38}}{4 . 3{,}14 . 8{,}854 . 10^{-12} . 2{,}8 . 10^{-10}}\left(1 - \frac{1}{8}\right) =$$

$$= -7{,}222 . 10^{-19}\ \mathrm{J} \doteq -4{,}50\ \mathrm{eV}$$

Coulombovská energia iónov Na^+ a Cl^- vo vzdialenosti R_0 je

$$W_{\text{coul}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0} = -8{,}24 . 10^{-19}\ \mathrm{J} = -5{,}14\ \mathrm{eV} = 1{,}14\ W$$

1025. Vypočítajte rozdiel medzi dvoma ľubovoľnými susednými vibračnými energetickými hladinami molekuly CO, ak vibračný kmitočet $f = 2{,}04 \,.\, 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$!

Riešenie:

Pre vibračné energetické hladiny molekuly platí vzťah

$$W = \left(v + \frac{1}{2}\right) hf$$

kde $v = 0, 1, 2, 3 \ldots$ je vibračné kvantové číslo a h je Planckova konštanta. Rozdiel $\Delta W = hf$ je pre ktorékoľvek susedné energetické hladiny rovnaký. Pre náš prípad

$$\Delta W = hf = 6{,}6256 \,.\, 10^{-34}\ \mathrm{J.s} \,.\, 2{,}04 \,.\, 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1} =$$

$$= 0{,}1352 \,.\, 10^{-19}\ \mathrm{J} \doteq 0{,}084\ \mathrm{eV}$$

1026. Vibračné spektrum molekuly HCl je charakterizované frekvenciou $f = 9 \,.\, 10^{13}\ \mathrm{s}^{-1}$. Vypočítajte konštantu medziatómovej sily v molekule HCl, keď redukovaná hmotnosť molekuly $m' = 1{,}616 \,.\, 10^{-27}$ kg!

Riešenie:

Súvis frekvencie f s hľadanou konštantou k je daný vzťahom

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}}$$

takže

$$k = 4\pi^2 f^2 m' = 4 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, 81 \,.\, 10^{26}\ \mathrm{s}^{-2} \,.\, 1{,}616 \,.\, 10^{-27}\ \mathrm{kg} =$$

$$= 5{,}16 \,.\, 10^2\ \mathrm{kg.s^{-2}} = 5{,}16 \,.\, 10^2\ \mathrm{N.m^{-1}}$$

1027. Nájdite rozdiel medzi po sebe nasledujúcimi rotačnými energetickými hladinami molekuly CO, keď rovnovážny moment zotrvačnosti molekuly CO je $I = 1{,}46 \,.\, 10^{-46}\ \mathrm{kg.m^2}$!

Riešenie:

Rotačné energetické hladiny molekuly počítame podľa vzťahu

$$W = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}$$

kde $\hbar = h/2\pi$, $J = 0, 1, 2, 3 \ldots$ je rotačné kvantové číslo. Rozdiel medzi rotačnými energetickými hladinami, ktoré odpovedajú $J = 0$ a $J = 1$, je

$$\Delta W = \frac{2\hbar^2}{2I} = \frac{(6{,}6256)^2 \,.\, 10^{-68}\ \mathrm{J^2.s^2}}{2^2 \,.\, 3{,}14^2 \,.\, 1{,}46 \,.\, 10^{-46}\ \mathrm{kg.m^2}} =$$

$$= 0{,}762 \,.\, 10^{-22}\ \mathrm{J} \doteq 0{,}47 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{eV}$$

Pre rozdiel medzi rotačnými hladinami, ktoré odpovedajú $J=1$ a $J=2$, dostaneme

$$\Delta W = \frac{4\hbar^2}{2I} \doteq 0{,}94 \,.\, 10^{-3}\ \text{eV}$$

a podobne pre hladiny s $J=2$ a $J=3$ je

$$\Delta W = \frac{6\hbar^2}{2I} \doteq 1{,}41 \,.\, 10^{-3}\ \text{eV}$$

atď.

Úlohy

1028. Vypočítajte energiu iónovej väzby molekuly KBr, keď rovnovážna vzdialenosť iónov v tejto molekule je $R_0 = 2{,}94 \,.\, 10^{-10}$ m a exponent odpudivých síl $n=9$!

[$W \doteq -6{,}979 \,.\, 10^{-19}\ \text{J} \doteq -4{,}36\ \text{eV}$]

1029. Vibračné spektrum molekuly HCl je charakterizované frekvenciou $f = 9 \,.\, 10^{13}\ \text{s}^{-1}$. Vypočítajte hodnoty energie pre prvé tri vibračné energetické hladiny tejto molekuly!

[$W_0 = 0{,}18$ eV; $W_1 = 0{,}56$ eV; $W_2 = 0{,}94$ eV]

1030. Vypočítajte konštantu medziatómovej sily v molekule CO, keď vibračný kmitočet je $f = 2 \,.\, 10^{13}\ \text{s}^{-1}$ a hmotnosti atómov tvoriacich molekulu sú $m_C = 1{,}99 \,.\, 10^{-26}$ kg a $m_O = 2{,}6 \,.\, 10^{-26}$ kg!

[$k = 2{,}26 \,.\, 10^2\ \text{N} \,.\, \text{m}^{-1}$]

1031. Nájdite hodnoty energie pre prvé tri rotačné energetické hladiny molekuly, ktorej rovnovážny moment zotrvačnosti je $I = 2 \,.\, 10^{-46}\ \text{kg} \,.\, \text{m}^2$!

[$W_0 = 0$; $W_1 = 0{,}556 \,.\, 10^{-22}\ \text{J} = 0{,}347 \,.\, 10^{-3}$ eV;
$W_2 = 1{,}662 \,.\, 10^{-22}\ \text{J} = 1{,}04 \,.\, 10^{-3}$ eV]

TABUĽKY

Tabuľka 1

Základné fyzikálne konštanty

Normálne zrýchlenie voľného pádu

$g_n = 9{,}806\,65\ \mathrm{m.s^{-2}}$

(pri riešení úloh počítajte so zrýchlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$)
Gravitačná konštanta

$\varkappa = 6{,}67\,.\,10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$

Plynová konštanta

$R_m = 8{,}314\,41\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$

Počet molekúl v látkovom množstve 1 mól (Avogadrova konštanta)

$N_A = 6{,}022\,.\,10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$

Normálny molárny objem plynu (objem, ktorý má jeden mól pri teplote 0 °C a tlaku 101,325 kPa)

$V_0 = 22{,}414\,.\,10^{-3}\ \mathrm{m^3.mol^{-1}}$

Boltzmannova konštanta

$k = \dfrac{R_m}{N_A} = 1{,}380\,45\,.\,10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$

Permitivita vákua

$\varepsilon_0 = 8{,}854\,.\,10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^2}$

Permeabilita vákua

$\mu_0 = 4\pi\,.\,10^{-7}\ \mathrm{m.kg.s^{-2}.A^{-2}} = 1{,}257\,.\,10^{-6}\ \mathrm{m.kg.s^{-2}.A^{-2}}$

Faradayova konštanta

$F = 9{,}649\,.\,10^4\ \mathrm{C.mol^{-1}}$

Rýchlosť svetla vo vákuu

$c = 2{,}9979\,.\,10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Planckova konštanta

$h = 6{,}626\,.\,10^{-34}\ \mathrm{J.s}$

Konštanta σ v Stefanovom—Boltzmannovom zákone

$\sigma = 5{,}67\,.\,10^{-8}\ \mathrm{J.m^{-2}.s^{-1}.K^{-4}}$

Konštanta b vo Wienovom posuvnom zákone

$b = 0{,}002\ 89\ \mathrm{m.K}$

Elektrický náboj elektrónu

$e = -1{,}602.10^{-19}\ \mathrm{C}$

Pokojová hmotnosť elektrónu

$m_0 = 9{,}109.10^{-31}\ \mathrm{kg} = 5{,}489.10^{-4}\ \mathrm{u}$

Pokojová hmotnosť protónu

$m_p = 1{,}6722.10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}007\ 58\ \mathrm{u}$

Pokojová hmotnosť neutrónu

$m_n = 1{,}6744.10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}008\ 95\ \mathrm{u}$

Pokojová hmotnosť častice α

$m_\alpha = 6{,}6428.10^{-27}\ \mathrm{kg} = 4{,}002\ 763\ \mathrm{u}$

Pokojová hmotnosť deuterónu

$m_d = 3{,}342.10^{-27}\ \mathrm{kg} = 2{,}014\ 172\ \mathrm{u}$

Pokojová hmotnosť pozitrónu

$m_\pi = 9{,}109.10^{-31}\ \mathrm{kg} = 5{,}489.10^{-4}\ \mathrm{u}$

Hmotnosť vodíkového atómu

$m_H = 1{,}6731.10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1{,}008\ 128\ \mathrm{u}$

Magnetický moment Bohrovho magnetónu

$\mu_B = 1{,}165.10^{-29}\ \mathrm{V.m.s}$

Rydbergova konštanta (pre nekonečne veľkú hmotnosť jadra)

$R = 10\ 973\ 730\ \mathrm{m}^{-1}$

Unifikovaná hmotnostná jednotka

$1\ \mathrm{u} = (1{,}659\ 56 \pm 0{,}000\ 04).10^{-27}\ \mathrm{kg}$

Zmene hmotnosti $\Delta m = 1\ \mathrm{u}$ odpovedá zmena energie $\Delta W = 931{,}8\ \mathrm{MeV}$

Tabuľka 2

Označenia a jednotky používaných fyzikálnych veličín

Veličina	Označenie veličiny	Jednotka v sústave SI	Označenie jednotky	Iné používané jednotky
Dĺžka, dráha	l, s	meter	m	
Hmotnosť	m, M	kilogram	kg	
Čas	t	sekunda	s	
Plošný obsah	S		m^2	
Objem	V		m^3	
Hustota	ϱ		$kg.m^{-3}$	$1\ g.cm^{-3} = 10^3\ kg.m^{-3}$
Špecifický objem	v, V		$m^3.kg^{-1}$	$1\ cm^3.g^{-1} = 10^{-3}\ kg^{-1}.m^3$
Rýchlosť	v, c		$m.s^{-1}$	
Zrýchlenie	a, g		$m.s^{-2}$	
Uhlová rýchlosť	ω		s^{-1}	
Uhlové zrýchlenie	ε		s^{-2}	
Frekvencia	f		s^{-1}	
Perióda	T		s	
Sila, tiaž	F, G	newton	$N = kg.m.s^{-2}$	
Tlak	p	pascal	$Pa = N.m^{-2}$	
Práca	A	joule	$J = kg.m^2.s^{-2}$	$1\ eV = 1{,}602.10^{-19}\ J$ $1\ kWh = 3{,}6.10^6\ J$
Energia	W	joule	J	
Výkon	P	watt	$W = J.s^{-1}$	
Impulz	I		N.s	
Hybnosť	p		$kg.m.s^{-1}$	
Moment hybnosti	L		$kg.m^2.s^{-1}$	
Modul pružnosti v ťahu	E		$N.m^{-2}$	
Modul pružnosti v šmyku	G		$N.m^{-2}$	
Povrchové napätie	σ		$N.m^{-1}$	
Súčiniteľ vnútorného trenia (viskozity)	η		$kg.m^{-1}.s^{-1}$	
Relatívna atómová (molekulová) hmotnosť	$A_r (M_r)$			
Teplota	t, T, ϑ	kelvin	K	$1\ °C = 1\ K$ $T = 273{,}16\ K + t$
Teplo	Q	joule	J	
Špecifická tepelná kapacita	c		$J.kg^{-1}.K^{-1}$	
Špecifické skupenské teplo	l		$J.kg^{-1}$	
Mólové teplo	C		$J.mol^{-1}.K^{-1}$	
Vnútorná energia	W		J	
Entalpia	H		J	
Entropia	S		$J.kg^{-1}.K^{-1}$	
Voľná energia	F		J	

Veličina	Označenie veličiny	Jednotka v sústave SI	Označenie jednotky	Iné používané jednotky
Termodynamická potenciálna energia	G		J	
Osmotický tlak	π		$N.m^{-2}$	
Špecifická tepelná vodivosť	λ		$J.m^{-1}.s^{-1}.K^{-1}$	
Súčiniteľ prestupu tepla	α		$J.m^{-2}.s^{-1}.K^{-1}$	
Elektrický náboj	Q, e	coulomb	$C = A.s$	
Intenzita elektrického poľa	E		$V.m^{-1}$	
Hustota náboja:				
plošná	σ		$C.m^{-2}$	
objemová	ϱ		$C.m^{-3}$	
Potenciál elektrického poľa	φ	volt	$V = J.A^{-1}.s^{-1}$	
Tok intenzity elektrického poľa	T		$V.m$	
Elektrická indukcia	D		$A.m^{-2}.s$	
Elektrická polarizácia	P		$C.m^{-2}$	
Elektrická susceptibilita	χ, χ_e		$A^2.kg^{-1}.m^3.s^4$	
Elektrická kapacita	C	farad	$F = C.V^{-1}$	
Hustota energie v elektrickom poli	u_e		$J.m^{-3}$	
Elektrický prúd	I	ampér	A	
Napätie (rozdiel potenciálov)	U		V	
Hustota elektrického prúdu	i		$A.m^{-2}$	
Elektrický odpor vodiča	R	ohm	$\Omega = V.A^{-1}$	
Špecifický odpor	ϱ		$\Omega.m$	
Špecifická vodivosť	γ		$\Omega^{-1}.m^{-1}$	
Teplotný súčiniteľ odporu	α		K^{-1}	
Elektromotorické napätie (EMN)	u_e		V	
Elektrochemický ekvivalent	A		$kg.A^{-1}.s^{-1}$	
Magnetický indukčný tok	Φ	weber	$Wb = kg.s^{-2}.A^{-1}.m^2$	
Magnetická indukcia	B	tesla	$T = Wb.m^{-2}$	
Magnetická polarizácia	J	tesla	T	
Intenzita magnetického poľa	H		$A.m^{-1}$	

Veličina	Označenie veličiny	Jednotka v sústave SI	Označenie jednotky	Iné používané jednotky
Permeabilita	μ		A^{-2} kg.m.s^{-2}	
Magnetická susceptibilita	$\varkappa$		A^{-2} kg.m.s^{-2}	
Magnetický odpor	R_m		A Wb^{-1}	
Indukčnosť	L	henry	$H = kg.s^{-2}.A^{-2}.m^2$	
Vzájomná indukčnosť	L_{mn}		H	
Svetelný tok	Φ	lúmen	Lm	
Svietivosť	I	kandela	cd	
Osvetlenie	E	lux	Lx	
Ohnisková vzdialenosť	f		m	
Optická mohutnosť	D	dioptria	$D = m^{-1}$	
Index lomu	n, N			
Hustota toku žiarenia	Ψ		$J.m^{-2}.s^{-1}$	
Polčas rozpadu	T		s	
Rozpadová konštanta	λ		s^{-1}	

Tabuľka 3

Hustoty ϱ

Tuhá látka	$kg.m^{-3}$	Tuhá látka	$kg.m^{-3}$
Hliník	$2{,}7 \ .10^3$	Olovo	$11{,}3.10^3$
Chlorid sodný	$2{,}17.10^3$	Sklo	$2{,}5.10^3$
Ľad	$0{,}92.10^3$	Striebro	$10{,}5.10^3$
Meď	$8{,}9 \ .10^3$	Zinok	$7{,}1.10^3$
Mosadz	$8{,}5 \ .10^3$	Železo (oceľ)	$7{,}8.10^3$
Nikel	$8{,}8 \ .10^3$	Volfrám	$19{,}1.10^3$
Kvapalina	$kg.m^{-3}$	**Kvapalina**	$kg.m^{-3}$
Éter	$0{,}714.10^3$	Ortuť	$13{,}6.10^3$
Lieh	$0{,}79 \ .10^3$	Petrolej	$0{,}8.10^3$
Morská voda	$1{,}03 \ .10^3$	Voda	$1{,}0.10^3$
Plyny (za normálnych podmienok — — pri teplote 0 °C a pri tlaku 101,325 kPa)	$kg.m^{-3}$	**Plyn**	$kg.m^{-3}$
Dusík	1,251	Kyslík	1,428
Hélium	0,178	Vodík	0,0899
Kysličník uhličitý	1,977	Vzduch	1,293

Tabuľka 4

Povrchové napätie (σ)

Látka	$N.m^{-1}$	Látka	$N.m^{-1}$
Ortuť	0,49	Terpentín	0,027
Lieh	0,022	Voda pri 20 °C	0,07

Tabuľka 5

Rýchlosť zvuku

Látka	$m.s^{-1}$	Látka	$m.s^{-1}$
Kyslík	317,2	Voda	1 450 0
Oceľ (železo)	5 100,0	Vodík	1 272,0
Vzduch pri 0 °C .... 332 $m.s^{-1}$			

Tabuľka 6

Koeficienty rozťažnosti

Lineárna rozťažnosť (α)			
Látka	K^{-1}	Látka	K^{-1}
Hliník	24.10^{-6}	Sklo	10.10^{-6}
Meď	17.10^{-6}	Zinok	29.10^{-6}
Mosadz	19.10^{-6}	Železo (oceľ)	12.10^{-6}

Objemová rozťažnosť (β)

Látka	K^{-1}	Látka	K^{-1}
Lieh	110.10^{-5}	Ortuť	$18,2.10^{-5}$

Špecifické tepelné kapacity

Látky tuhé a kvapalné (c)	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	Plyny (c_v, $\varkappa$)	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	
Hliník	896	Argón	319	1,66
Ľad	2 090	Dusík	741	1,41
Liatina	544	Hélium	3 152	1,66
Lieh	2 470	Kysličník uhličitý	653	1,30
Meď	383	Kysličník uhoľnatý	745	1,40
Mosadz	389	Kyslík	648	1,40
Platina	133	Vodík	10 130	1,41
Olej				
(priemerná hodnota)	1 674	Vzduch	728	1,40
Olovo	129			
Ortuť	139			
Zinok	385			
Železo (oceľ)	460			

Tabuľka 8

Teploty (t) a špecifické skupenské teplá topenia (l_t) niektorých látok pri tlaku 0,1 MPa

Látka	°C	J.kg
Cín	231,9	$586 \ .10^3$
Fosfor biely	44,2	$22{,}6.10^3$
Hliník	658,0	$393 \ .10^3$
Ľad	0,0	$333{,}6.10^3$
Olovo	327,0	$20{,}9.10^3$
Ortuť	–38,9	$11{,}7.10^3$

Špecifické skupenské teplo varu vody pri teplote 100 °C a tlaku 0,1 MPa je 2256.10^6 $J.kg^{-1}$

Tabuľka 9

Van der Waalsove konštanty (a, b)

Látka	$J.m^3.mol^{-2}$	$m^3.mol^{-1}$
CO_2	0,3654	$43 \ .10^{-6}$
H_2O	0,5523	$30{,}4.10^{-6}$
N_2	0,137	$38{,}7.10^{-6}$
O_2	0,1375	$31{,}7.10^{-6}$

Kryoskopická konštanta vody $K = 1{,}86$ $kg.K.mol^{-1}$
Ebulioskopická konštanta vody $E = 0{,}52$ $kg.K.mol^{-1}$

Tabuľka 10

Súčinitele tepelnej vodivosti (λ) pri 18 °C

Látka	$J.K^{-1}.m^{-1}.s^{-1}$	Látka	$J.K^{-1}.m^{-1}.h^{-1}$
Hliník	209,3	Azbest	753,5
Meď	397,7	Heraklit	259,5
Železo	58,6	Omietka	2 512,0
		Kotolný kameň	8 372,0
		Sadze	293,0
		Tehla	1 883,7

Tabuľka 11

Súčinitele prestupu tepla (α)

Látka	$J.m^{-2}.h^{-1}.K^{-1}$
Dymové plyny — popol	$62{,}8 \, .10^3$
Kotolný kameň — voda	$1{,}67.10^7$

Tabuľka 12

Permitivity (ε_r) (relatívne)

Látka		Látka	
Etylalkohol	26,0	Sklo	7,0
Parafín	2,0	Sľuda	7,0
Petrolej	2,0	Voda	81,0
Porcelán	6,0	Vzduch (za normálneho tlaku)	1,0006

Tabuľka 13

Špecifický odpor ($10^6\ \varrho$) a teplotný koeficient odporu ($10^3\ \alpha$) pri 0 °C

Látka	Ω.m	K^{-1}
Hliník	0,029	4,2
Meď	0,017	3,92
Mosadz	0,08	1,5
Olovo	0,21	4,2
Ortuť	0,958	0,99
Nikel	0,07	6,7
Platina	0,107	3,9
Zinok	0,06	4,2
Železo (oceľ)	0,12	6,0
Uhlík	40,0	–8,0

Tabuľka 14

Elektrochemický ekvivalent (A)

Látka	$g.A^{-1}.s^{-1}$
Meď	328.10^{-6}
Striebro	$1\,118.10^{-6}$

Tabuľka 15

Priemerné indexy lomu (n) pre viditeľné spektrum

Látka	
Sklo	1,52
Voda	1,33
Konvenčná vzdialenosť oka $l = 0,25$ m	

Tabuľka 16

Polčasy rozpadu (T) rádioaktívnych látok

Látka	
Aktínium	13,5 rokov
Rádium	1 590,0 rokov
Radón	3,825 dní
Urán (izotop ^{238}U)	$4{,}4 \cdot 10^9$ rokov
Kobalt (izotop ^{60}Co)	5,2 rokov
Chlór (izotop ^{38}Cl)	38,5 minút
Fosfor (izotop ^{32}P)	14,3 dní
Stroncium (izotop ^{90}Sr)	30 rokov
Sodík (izotop ^{42}Na)	14,8 hodín
Uhlík (izotop ^{14}C)	5 700 rokov

Tabuľka 17

Atómové číslo (Z) a relatívne atómové hmotnosti (A_r) prvkov

Slovenský názov	Latinský názov	Značka	Z	A_r
Aktínium	Actinium	Ac	89	227,05
Amerícium	Americium	Am	95	243*)
Antimón	Stibium	Sb	51	121,76
Argón	Argon	A	18	39,944
Arzén	Arsenicum	As	33	74,91
Astát	Astatium	At	85	210*)
Báryum	Baryum	Ba	56	137,36
Berkélium	Berkelium	Bk	97	247*)
Berýlium	Beryllium	Be	4	9,013
Bizmut	Bismuthum	Bi	83	209,00
Bór	Borum	B	5	10,82
Bróm	Bromum	Br	35	79,916
Cér	Cerium	Ce	58	140,13
Cézium	Caesium	Cs	55	132,91
Cín	Stannum	Sn	50	118,70
Curium	Curium	Cm	96	247*)
Draslík	Kalium	K	19	39,100
Dusík	Nitrogenium	N	7	14,008
Dysprózium	Dysprosium	Dy	66	162,46
*) Hmotnostné číslo izotopu s najdlhším polčasom rozpadu				

Slovenský názov	Latinský názov	Značka	Z	A_r
Einsteinium	Einsteinium	E	99	254*)
Erbium	Erbium	Er	68	167,2
Európium	Europium	Eu	63	152,0
Fermium	Fermium	Fm	100	257*)
Fluór	Fluorum	F	9	19,00
Fosfor	Phosphorus	P	15	30,975
Francium	Francium	Fr	87	223*)
Gadolínium	Gadolinium	Gd	64	156,9
Gálium	Gallium	Ga	31	69,72
Germánium	Germanium	Ge	32	72,60
Hafnium	Hafnium	Hf	72	178,6
Hélium	Helium	He	2	4,003
Hliník	Aluminium	Al	13	26,98
Holmium	Holmium	Ho	67	164,94
Horčík	Magnesium	Mg	12	24,32
Chlór	Chlorum	Cl	17	35,457
Chróm	Chromium	Cr	24	52,01
Indium	Indium	In	49	114,76
Irídium	Iridium	Ir	77	193,1
Jód	Iodum	J	53	126,92
Kadmium	Cadmium	Cd	48	112,41
Kalifornium	Californium	Cf	98	251*)
Kobalt	Cobaltum	Co	27	58,94
Kremík	Silicium	Si	14	28,09
Kryptón	Krypton	Kr	36	83,80
Kyslík	Oxygenium	O	8	16,00
Lantán	Lanthanum	La	57	138,93
Lawrencium	Lawrentium	Lr	103	260*)
Lítium	Lithium	Li	3	6,940
Lutécium	Lutetium	Lu	71	174,99
Mangán	Manganum	Mn	25	54,93
Meď	Cuprum	Cu	29	63,54
Mendelejevium	Mendelevium	Mv	101	258*)
Molybdén	Molybdaenium	Mo	42	95,95
Neodým	Neodymium	Nd	60	144,27
Neón	Neon	Ne	10	20,183
Neptúnium	Neptunium	Np	93	237*)
Nikel	Niccolum	Ni	28	58,69
Niób	Niobium	Nb	41	92,91
Nobelium	Nobelium	No	102	259*)
Olovo	Plumbum	Pb	82	207,21
Ortuť	Hydrargyrum	Hg	80	200,61
Osmium	Osmium	Os	76	190,2

*) Hmotnostné číslo izotopu s najdlhším polčasom rozpadu

Slovenský názov	Latinský názov	Značka	Z	A_r
Paládium	Palladium	Pd	46	106,7
Platina	Platinum	Pt	78	195,23
Plutónium	Plutonium	Pu	94	244*)
Polónium	Polonium	Po	84	210
Prazeodým	Praseodymium	Pr	59	140,92
Prométium	Promethium	Pm	61	145*)
Protaktínium	Protactinium	Pa	91	231
Rádium	Radium	Ra	88	226,05
Radón	Radon	Rn	86	222
Rénium	Rhenium	Re	75	186,31
Ródium	Rhodium	Rh	45	102,91
Rubídium	Rubidium	Rb	37	85,48
Ruténium	Ruthenium	Ru	44	101,7
Samárium	Samarium	Sm	62	150,43
Selén	Selenium	Se	34	78,96
Síra	Sulphur	S	16	32,066
Skandium	Scandium	Sc	21	44,96
Sodík	Natrium	Na	11	22,997
Striebro	Argentum	Ag	47	107,88
Stroncium	Strontium	Sr	38	87,63
Tálium	Thallium	Tl	81	204,39
Tantal	Tantalum	Ta	73	180,88
Technécium	Technetium	Tc	43	97*)
Telúr	Tellurium	Te	52	127,61
Terbium	Terbium	Tb	65	159,2
Titán	Titanium	Ti	22	47,90
Tórium	Thorium	Th	90	232,12
Túlium	Thulium	Tm	69	169,4
Uhlík	Carboneum	C	6	12,010
Urán	Uranium	U	92	238,07
Vanád	Vanadium	V	23	50,95
Vápnik	Calcium	Ca	20	40,08
Vodík	Hydrogenium	H	1	1,0080
Volfrám	Wolframium	W	74	183,92
Xenón	Xenon	Xe	54	131,3
Yterbium	Ytterbium	Yb	70	173,04
Ytrium	Yttrium	Y	39	88,92
Zinok	Zincum	Zn	30	65,38
Zirkónium	Zirconium	Zr	40	91,22
Zlato	Aurum	Au	79	197,2
Železo	Ferrum	Fe	26	55,85

*) Hmotnostné číslo izotopu s najdlhším polčasom rozpadu