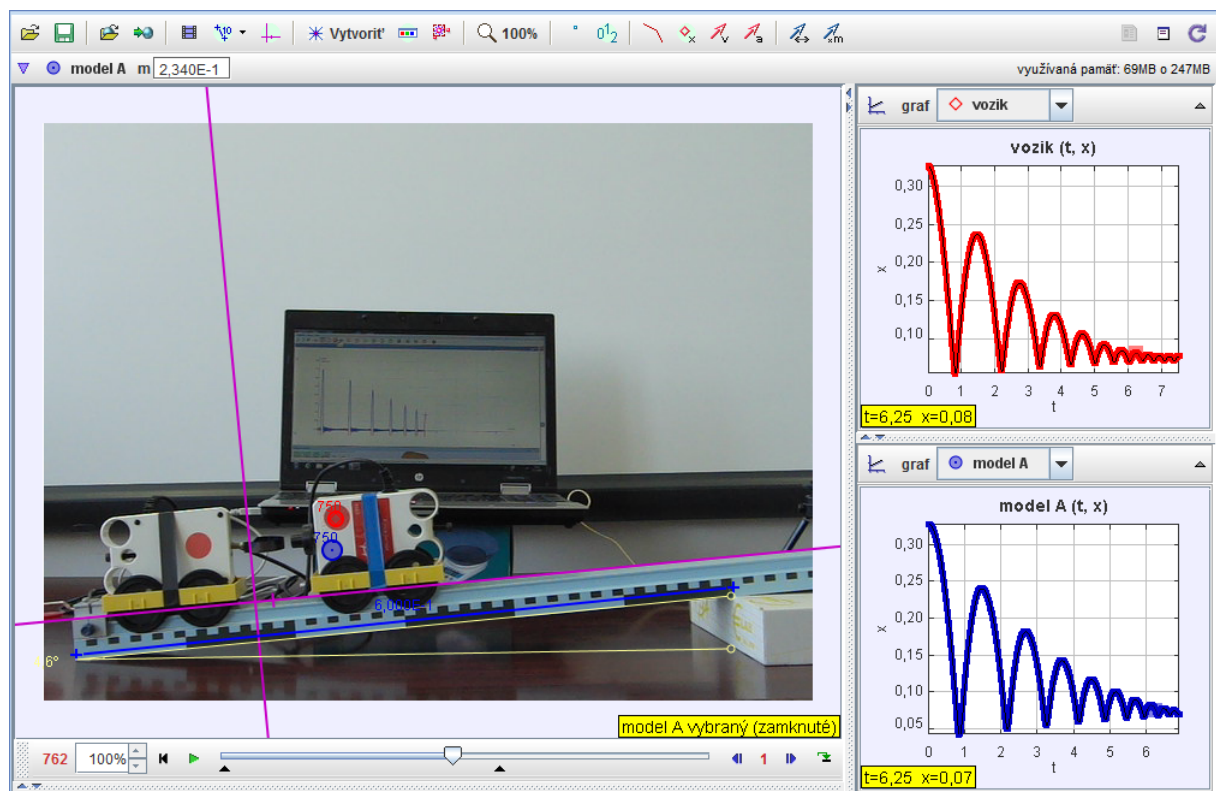


Videoanalýzy, modelovanie a simulácie reálnych dejov

Peter Hockicko, Jozef Kúdelčík



Táto vysokoškolská učebnica vznikla v rámci riešenia projektu KEGA č. 035ŽU-4/2012
Formovanie fyzikálnych predstáv prostredníctvom videoanalýzy a videomeraní pre
zatraktívnenie a popularizáciu fyziky.

Vedecký redaktor doc. Ing. Pavol Rafajdus, PhD.

Recenzenti doc. RNDr. Marián Kireš, PhD.
doc. PaedDr. Ľuboš Krišťák, PhD.

Vydala Žilinská univerzita v Žiline/EDIS-vydavateľstvo ŽU

© P. Hockicko, J. Kúdelčík, 2014

ISBN 978-80-554-0961-0

Obsah

Úvod.....	3
Práca v programe Tracker	5
1. Kinematika hmotného bodu	13
1.1 Hmotný bod, vzťahová sústava, trajektória, dráha pohybu	13
1.2 Priamočiary pohyb.....	15
1.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu	16
1.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu	20
1.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb	20
1.3 Dvojrzmerný pohyb.....	26
1.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici.....	28
1.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti	35
1.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici.....	35
1.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie.....	36
2. Dynamika hmotného bodu	39
2.1 Newtonove pohybové zákony, hybnosť, impulz sily	40
2.2 Práca	42
2.3 Výkon	43
2.4 Energia.....	44
3. Trecie sily.....	55
3.1 Šmykové trenie	55
3.2 Valivé trenie	60
4. Gravitačné pole	67
4.1 Newtonov gravitačný zákon	67
4.2 Pohyby telies v gravitačnom poli Zeme	67
4.2.1 Pohybová rovnica pre popis v malých výškach	69
4.2.2 Voľný pád.....	70
4.2.3 Vrh nahor.....	71
4.2.4 Vodorovný vrh	72
4.2.5 Šikmý vrh	73
4.3 Pohyb telies v gravitačnom - radiálnom poli Zeme.....	74
4.3.1 Pohyb telesa po kruhovej dráhe okolo Zeme	74
4.3.2 Pohyb telesa po parabolickej dráhe v gravitačnom poli Zeme.....	74
4.3.3 Pohyb, pri ktorom teleso opustí slnečnú sústavu	75
5. Tuhé teleso	79
5.1 Moment sily	79
5.2 Ťažisko telesa	79
5.2.1 Ťažisko sústavy dvoch a viacerých hmotných bodov	79
5.3 Moment zotrvačnosti a kinetická energia otáčavého pohybu.....	82
5.4 Pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo osi.....	82
6. Kvapaliny	89
6.1 Tlak v kvapalinách.....	89
6.1.1 Pascalov zákon	89
6.1.2 Hydrostatický tlak	89
6.2 Archimedov zákon.....	91
6.3 Povrchová vrstva kvapaliny.....	92
6.3.1 Kapilarita.....	94
6.4 Rovnica spojitosti	96
6.5 Bernoulliho rovnica	98

6.6	Obtiekanie telies	100
7.	Kmitavý pohyb	103
7.1	Harmonický pohyb	103
7.1.1	Kinematika a dynamika kmitavého pohybu	104
7.1.2	Premeny energie v mechanickom oscilátore	111
7.2	Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie	113
7.3	Vynútený kmitavý pohyb	118
7.4	Skladanie kmitov	120
8.	Modelovanie reálnych dejov v programe Tracker	123
9.	Programátorské prostredie.....	131
9.1	Zoznámenie sa s prostredím	131
9.2	Menu Delphi	132
9.3	Tlačidlo - Button.....	132
9.4	Vybrané komponenty	134
9.5	Knižnica Canvas	136
9.6	Knižnica Grafy	139
10.	Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc.....	145
10.1	Sústava lineárnych rovníc	145
10.2	Základné operácie s maticami.....	146
10.3	Výpočet hornej trojuholníkovej matice	148
10.4	Riešenie pomocou inverznej matice a Cramerovho pravidla	148
10.5	LU metóda	149
10.6	Gaussova eliminačná metóda.....	151
10.7	Eliminácia s výberom hlavného prvku	153
10.8	Iteračné metódy.....	153
10.8.1	Jacobiho metóda.....	154
10.8.2	Gaussova-Seidelova metóda	156
10.9	Metóda najmenších štvorcov	162
11.	Numerické modelovanie reálnych dejov	167
11.1	Eulerova metóda	168
11.1.1	Newtonov zákon chladenia /ohrievania	169
11.2	Modelovanie pohybovej rovnice.....	170
11.3	Modifikovaná Eulerova metóda.....	175
11.4	Metódy Runge Kutta.....	176
11.5	Riešenie sústav diferenciálnych rovníc.....	177
11.6	Diferenciálne rovnice vyššieho rádu.....	178
11.7	Viackrokové metódy	181
11.7.1	Adamsove-Basforthove metódy (explicitné)	182
11.7.2	Adamsove-Moultonove metódy (implicitné)	183
11.8	Metóda prediktor – korektor	184
	Použitá a odporúčaná literatúra	193
	Register.....	197

Úvod

Fyzika ako predmet je pre mnohých študentov veľmi náročná, pretože preberané témy sú pre viacerých študentov abstraktné a je pre nich ťažké (niekedy až nemožné) predstaviť si daný dej. Súvisí to s tým, že mnohí študenti nemajú v dostatočnej miere vybudované abstraktné myslenie. Predkladaná učebnica ponúka prezentáciu a analýzu jednotlivých základných častí fyziky názorným spôsobom, keďže je obsahovo zameraná na fyzikálne videoanalýzy a simulácie reálnych dejov.

Obsahom prvej časti knihy je hlavne mechanika hmotného bodu a tuhého telesa spájaná s pohybom telesa, popis a analýza pohybu, modelovanie fyzikálnych závislostí.

Druhá časť knihy ponúka numerické výpočty reálnych fyzikálnych dejov popísaných diferenciálnymi rovnicami v jazyku Pascal.

Kniha je rozdelená nasledovne: po úvodnej časti nasleduje opis programu Tracker a práce v danom programe. 1. až 3. kapitola sa zaoberá mechanikou hmotného bodu a je rozdelená na kinematiku s dôsledným popisom základných druhov pohybov a dynamiku rozoberajúcu príčiny vzniku pohybu. 3. Kapitola sa zameriava na trecie sily. Vo 4. kapitole sú základné zákony gravitačného poľa s riešením pohybov v gravitačnom poli Zeme a Slnka. V 5. kapitole sú základy dynamiky sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. Predmetom 6. kapitoly je mechanika kvapalín, 7. kapitola rozoberá kmitavý pohyb telies. V ďalších kapitolách nasleduje teoretický popis pohybu a modelovanie časových závislostí fyzikálnych veličín. 8 kapitola sa zaoberá modelovaním reálnych dejov v programe Tracker.

Ďalšia časť knihy v 9. kapitole poskytuje základné informácie týkajúce sa programovacieho vývojového prostredia Delphi a Lazarus. V rámci knihy sa predpokladajú základy jazyka Pascal. Nachádza sa tu aj výpis procedúry Grafy na jednoduchšie vykresľovanie vypočítaných výsledkov. Nasledujúca kapitola je venovaná riešeniu sústav s viacerými neznámymi klasickými výpočtami: Gaussova eliminačná a LU metóda a tiež iteračné metódy ako je Jacobiho a Gauss-Siedelova metóda. Okrem rôznych využití je tu tiež vysvetlená metóda najmenších štvorcov. Posledná 10. kapitola je venovaná numerickému riešeniu diferenciálnych rovníc o jednej neznámej. Postupne sa prechádza cez jednotlivé numerické metódy od najjednoduchšej Eulerovej metódy k metódam Runge-Kutta a tiež metóde prediktor-korektor. V rámci kapitol sa riešia viaceré príklady, ktoré boli riešené aj pomocou programu Tracker v predchádzajúcich kapitolách. Ku každému príkladu je aj výpis programu s vysvetlivkami.

Teoretické postupy v jednotlivých kapitolách sprevádzajú riešené príklady, ktoré majú za úlohu ukázať aplikáciu teórie na riešenie konkrétneho problému. Literatúra uvedená v závere knihy predstavuje nielen literatúru, z ktorej bolo čerpané pri zostavovaní danej učebnice, ale aj literatúru odporúčanú na hlbšie štúdium.

Po prečítaní danej učebnice by mal študent byť schopný urobiť základnú fyzikálnu analýzu zosnímaného deja, určiť jednotlivé fyzikálne veličiny popisujúce daný dej, analyticky popísať časové závislosti fyzikálnych veličín a vytvoriť matematický model, ktorý čo najlepšie popíše časový priebeh pohybu vyšetrovaného telesa.

Táto kniha je určená hlavne pre študentov bakalárskych a inžinierskych študijných programov s jednosemestrálnym základným kurzom fyziky na Žilinskej Univerzite (so zameraním hlavne na študentov SvF, PEDaS, FBI (predmet Kapitoly z fyziky a Numerické modelovanie reálnych procesov)), ale aj pre všetkých, ktorí majú záujem o štúdium tejto vedy.

Podiel autorov na učebnici je nasledujúci: kapitolu Práca v programe Tracker a kapitoly 1 – 3, 5 – 8 pripravil doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD., kapitoly 4, 9 – 11 pripravil doc. RNDr. Jozef Kúdelčík, PhD., úvod bol pripravený spoločne.

V prílohe tejto vysokoškolskej učebnice je DVD so zosnímanými videami a fotografiami, na ktoré sa pri analýze dejov odvolávame (zdroj pre riešenie príkladov).

Z našich doterajších výskumov realizovaných v rámci projektov KEGA č. 075-008ŽU-4/2010 a 035ŽU-4/2012 vyplynulo, že študenti, ktorí pracovali s videoanalýzami v programe Tracker dosiahli štatisticky významne lepšie výsledky vo vedomostiach z fyziky ako študenti, ktorí pracovali na výpočtových cvičeniach štandardným spôsobom. V zmysle Bloomovej taxonómie poznávacích cieľov predkladaná učebnica pomáha riešiť problémové úlohy a rozvíjať poznávanie študentov na vyšších úrovniach osvojenia si poznatkov a to hlavne na úrovni aplikácia, analýza, syntéza a hodnotenie.

Radi by sme sa poďakovali odborným recenzentom doc. RNDr. Mariánovi Kirešovi, PhD. a doc. PaedDr. Ľubošovi Krišťákovi, PhD. za pozorné prečítanie rukopisu, ich návrhy a pripomienky, ktoré prispeli k skvalitneniu tejto vysokoškolskej učebnice.

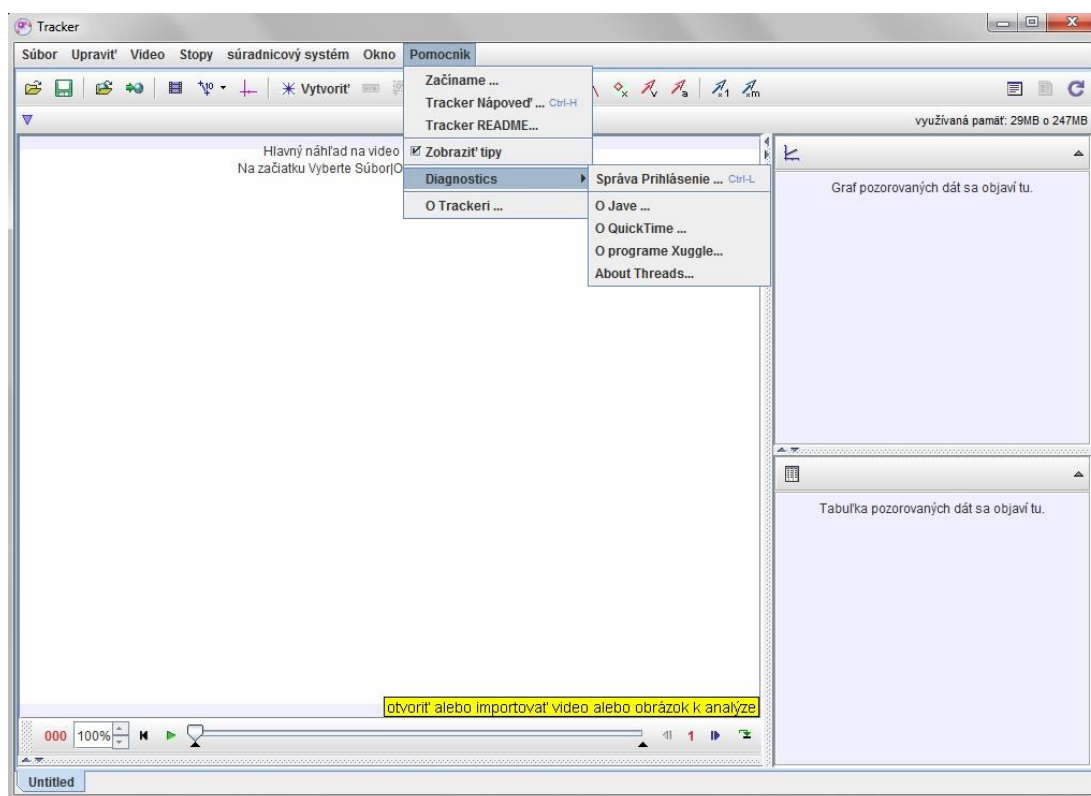
Zvláštne poďakovanie patrí doc. Ing. Igorovi Jamnickému, CSc. za použitie dvoch úloh, ktoré sú riešené spoločne na predmete Modelovanie reálnych procesov.

Autori

Práca v programe Tracker

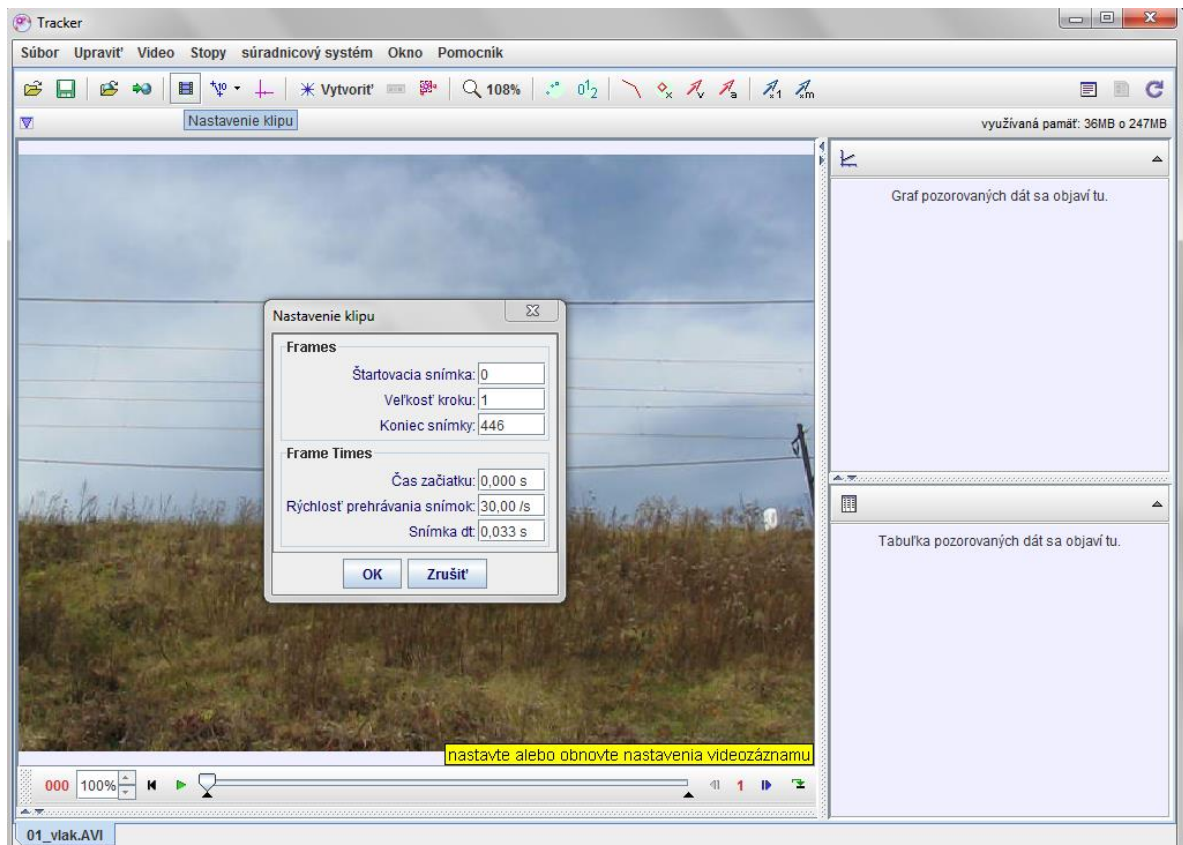
Program Tracker je voľne šíriteľný a stiahnuteľný program vytvorený na platforme Open Source Physics (<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>). Pre správne fungovanie momentálnej a starších verzií je potrebné mať v počítači nainštalované programy QuickTime a Java (32-bitová verzia), aktuálna verzia programu je 4.86 avšak autori neustále pracujú na zdokonaľovaní daného programu.

Po nainštalovaní programu a jeho prvom otvorení sa môžeme presvedčiť o správnom fungovaní programu (Obr. 0.1): Pomocník – Diagnostics - o Java/ O QuickTime / O programe Xuggle, pokiaľ sú všetky komponenty nainštalované, program by mal fungovať správne, presvedčíme sa o tak, že klikneme na Video – Importovať a vložíme video súbor (program akceptuje formáty avi, mov, mp4, flv, wmv, ogg) a skúsime ho prehrať kliknutím na zelenú šípku v ľavo dole. Pokiaľ sa video spustí a prehráva sa, je predpoklad, že program je nainštalovaný správne a môže sa začať následná analýza. (Program taktiež obsahuje prehľadný help: Pomocník – Začínáme ... alebo Tracker Náповeď...).

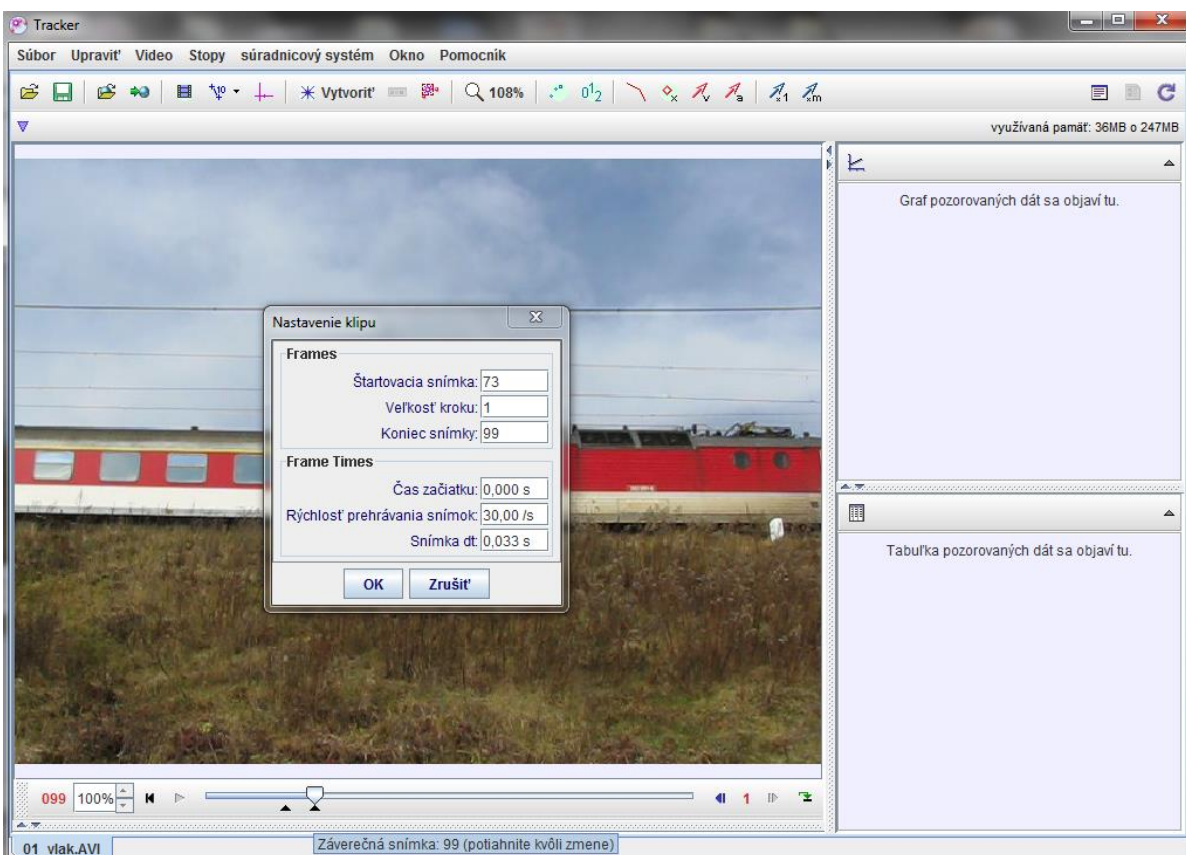


Obr. 0.1 Otvorenie programu Tracker a overenie jeho funkčnosti

Po vložení videa do programu je potrebné dané video nakalibrovať, aby získané údaje predstavovali reálne fyzikálne hodnoty. Ako prvé je potrebné zadať správnu informáciu o počte obrázkov za sekundu (fps) (Obr. 0.2), zvyčajne fotoaparáty pripravujú videá s 30 fps, avšak stretne sa aj s videami, ktoré majú 120 alebo 1000 fps (pri každom príklade je uvedená daná informácia, ak nie je, ostáva hodnota 30 fps, ktorú má aj program predinštalovaný). Niektoré kamery pripravujú videá, ktoré majú 25 alebo 50 fps. Pri natáčaní vlastných videí je potrebné danú informáciu získať z daného zariadenia, aby bolo možné z analýzy získať reálne hodnoty. Dané hodnoty doplníme do programu po kliknutí na Nastavenie klipu (modrá štvorcová ikona, piata zľava hore). Taktiež je možné nastaviť štartovaciu snímku – začiatok a koniec klipu, ktorý sa bude analyzovať (buď v samotnej tabuľke alebo uchytением a potiahnutím čiernych trojuholníkov v spodnej časti) (Obr. 0.3).

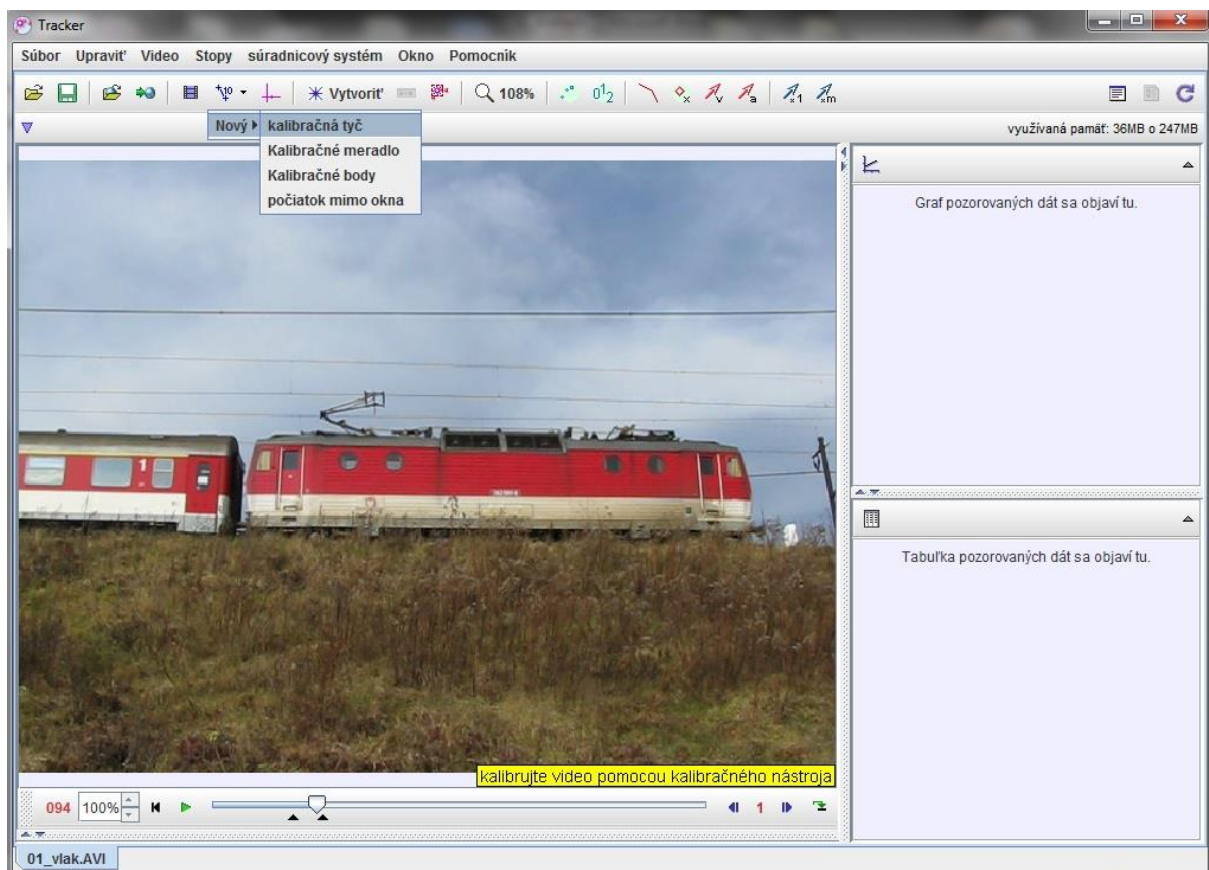


Obr. 0.2 Nastavenie klipu – rýchlosť prehrávania



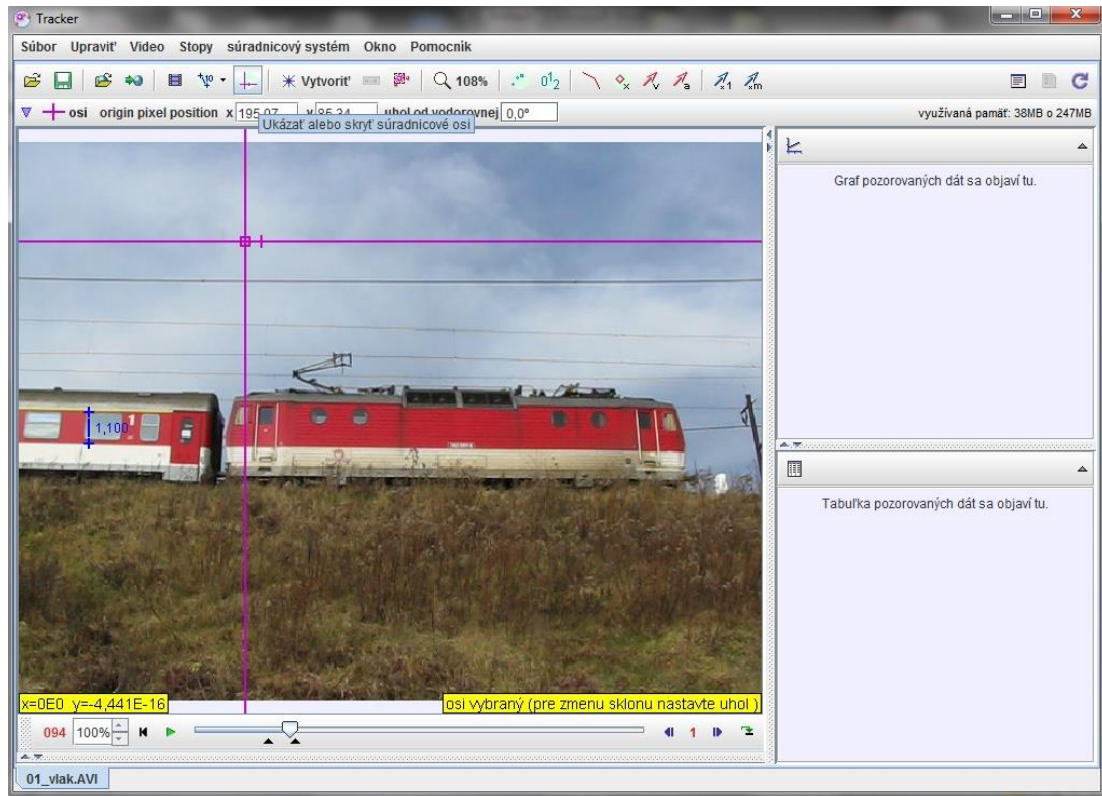
Obr. 0.3 Nastavenie klipu – štartovacia a koncová snímka

Následne je potrebné nakalibrovať veľkosť objektu na videu: zvolíme šiestu ikonu zľava (modrá úsečka) a vyberieme buď kalibračnú tyč alebo meradlo (Obr. 0.4). Videá pre analýzy obsahujú buď 1 metrovú kalibračnú tyč, alebo meter, prípadne sa v zadaní nachádza informácia o veľkosti objektu (napr. zvislý rozmer okna vlaku s rámom: 1,1m) potom, čo sa po stlačení ikon objaví tyč, je potrebné preniesť ju na dané miesto, upraviť rozmery a dopísať aktuálny údaj – pokiaľ to bude v metroch, všetky získané fyzikálne veličiny budú obsahovať metre (m/s, m/s^2 a pod.). Pri kalibrovaní reálnych rozmerov vo videozázname je potrebné pamätať na to, že čím rozmerovo väčší objekt je použitý na kalibráciu (je známa jeho skutočná veľkosť), tým väčšiu presnosť určovania rozmerov dosiahneme.



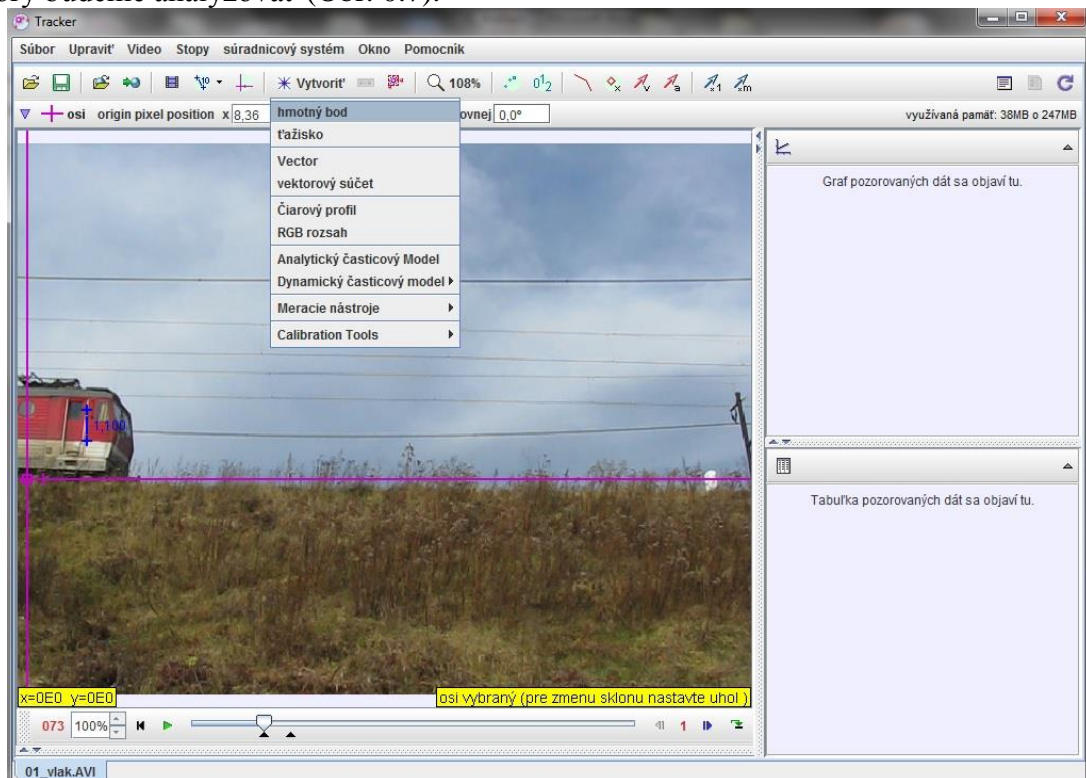
Obr. 0.4 Kalibrácia klipu

Obr. 0.5 Zvyčajne nastavíme kladnú x-ovú os do smeru pohybu, avšak niekedy je taktiež vhodné analyzovať pohyb v smere zvislo nadol (zvislý vrh, voľný pád). Je potrebné si uvedomiť, že podľa toho, ako máme nastavené osi a počiatok súradnicovej sústavy, pre ďalšiu analýzu bude potrebné skúmať časový vývoj tých súradníc, v smere ktorých sa daný pohyb uskutočňuje. Keďže každý študent si môže ľubovoľne navoliť počiatok súradnicovej sústavy a aj smer osí, analytické vyjadrenie časových závislostí bude pre každého iné (nie je možné, aby dvaja študenti, ktorí robia dané analýzy toho istého videa na rozdielnych počítačoch dosiahli presne tie isté analytické vyjadrenia! Čo sa však týka veľkostí hľadaných fyzikálnych veličín, tie by sa zasa nemali výrazne odlišovať.)



Obr. 0.5 Vloženie a nastavenie súradnicových osí

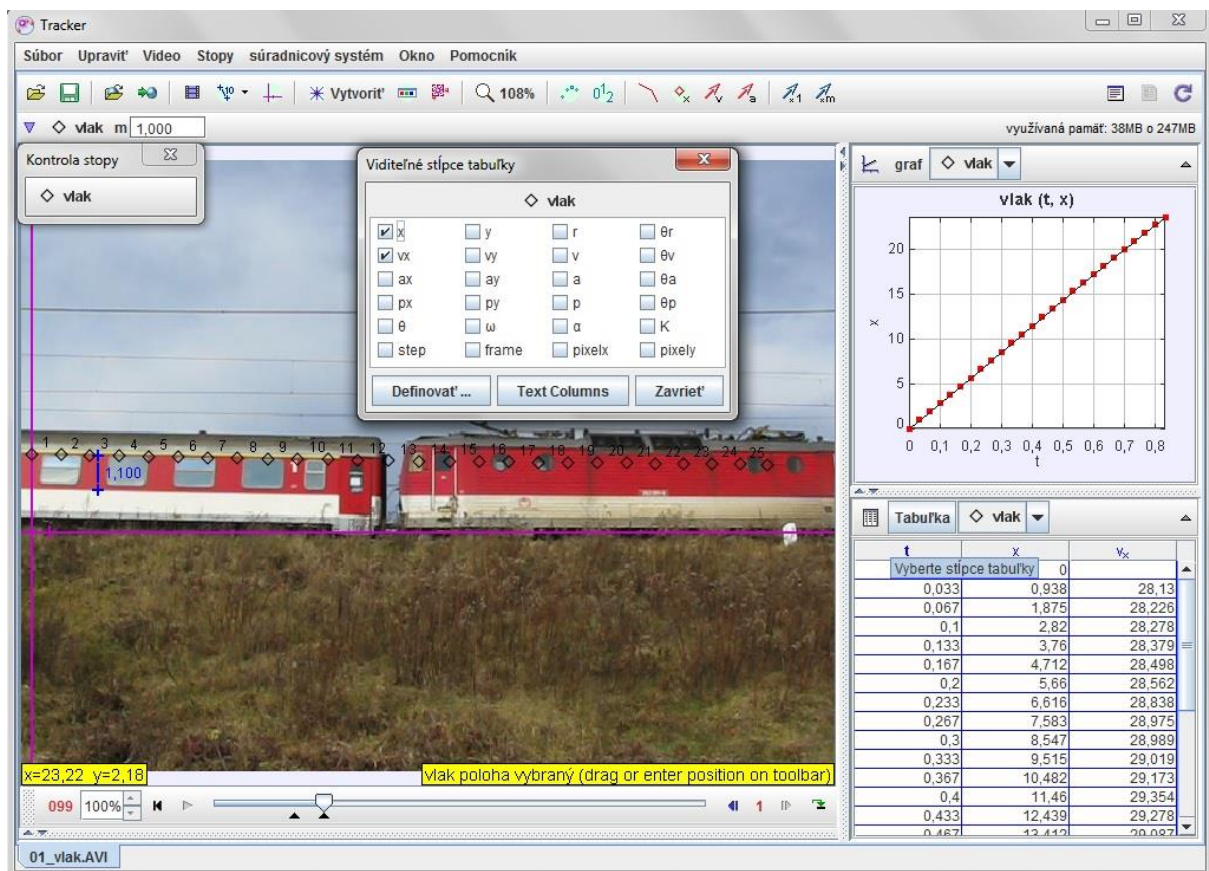
Ako náhle máme nakalibrované video a označenú súradnicovú sústavu, môžeme začať s analýzou. Klikneme na Vytvoriť (ôsma ikona v poradí - hviezdička) (Obr. 0.6), hmotný bod, stlačíme súčasne ľavé CTRL a SHIFT a označíme na video bod, ktorý sa bude pohybovať a ktorý budeme analyzovať (Obr. 0.7).



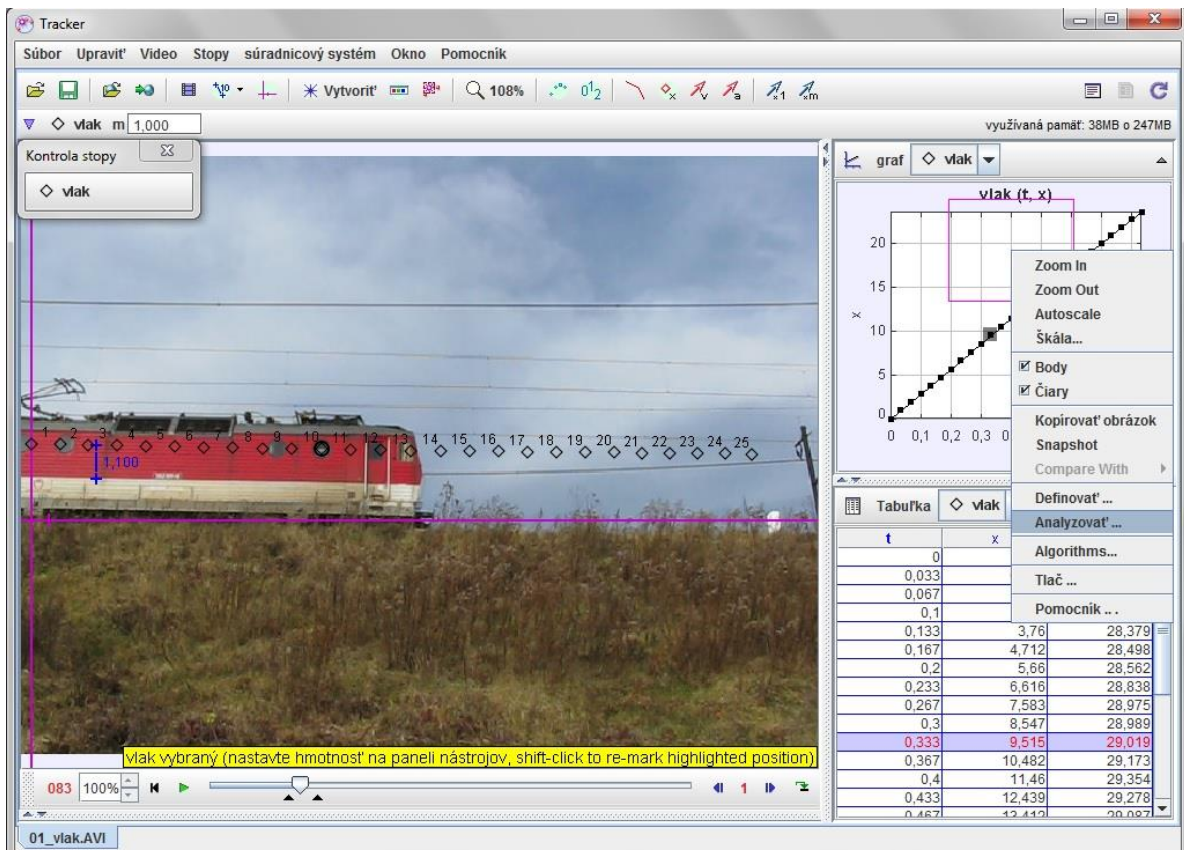
Obr. 0.6 Vytvorenie hmotného bodu pre analýzy časových závislostí

A teraz nasleduje analýza nameraných údajov: v pravej časti obrazovky sa nám následne objaví graf a tabuľka. Po kliknutí na premennú na zvislej osi (x) je možné vybrať z niekoľkých fyzikálnych veličín – program ponúka 22 preddefinovaných časových závislostí, je tiež možnosť definovať aj iné závislosti a vyšetrovať nielen časové závislosti, keďže program umožňuje meniť aj fyzikálnu veličinu na vodorovnej osi (čas je preddefinovanou fyzikálnou veličinou).

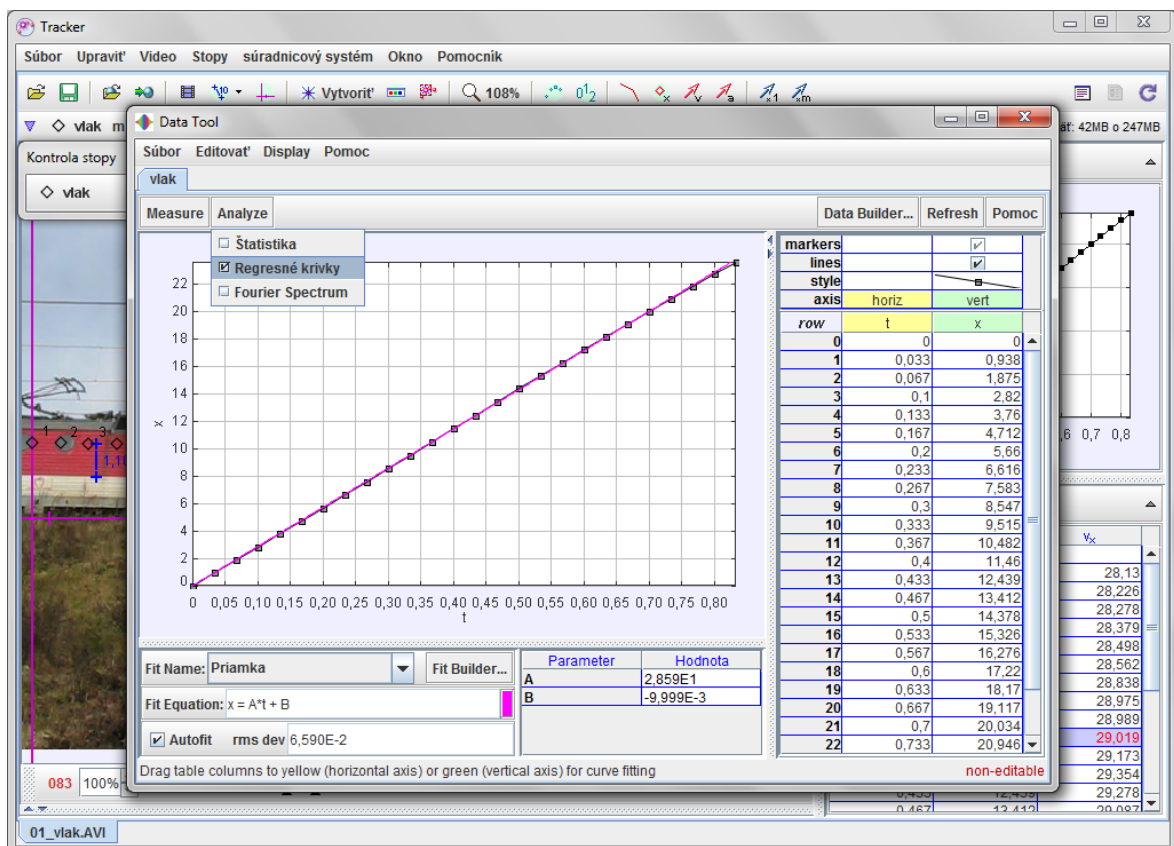
Po kliknutí na Tabuľka (Obr. 0.9) je možné vybrať z niekoľkých fyzikálnych veličín, ktoré budú pre naše ďalšie analýzy zaujímavé. Hodnoty z tabuľky je taktiež možné exportovať do samostatného súboru, s ktorým je možné ďalej pracovať. Po kliknutí pravým tlačidlom myši na graf (Obr. 0.10) je možné vybrať z ponuky analyzovať, čo nám umožní získať fyzikálnu interpretáciu deja a následne hľadané fyzikálne veličiny. Po otvorení nástroja na analýzy grafov – *Data Tool* a kliknutím na *Analyze* je možné označiť regresné krivky (Obr. 0.11), čo nám umožní nameranou sústavou bodov preložiť preddefinované funkcie (prípadne zadefinovať nové), program má preddefinovanú priamku, parabolu, exponenciálnu funkciu a iné. Následne po zadaní funkcie program vyráta parametre (A , B , prípadne viac), ktoré majú fyzikálny zmysel a predstavujú riešenie danej fyzikálnej analýzy. Úlohou študentov bude prísúdiť daným hodnotám fyzikálnym zmysel, doplniť patričné fyzikálne jednotky a odpovedať na vopred stanovený fyzikálny problém. Po kliknutí na tlačidlo *Measure* je možno využívať funkcie *Coordinates*, *Slope*, *Area*, ktoré umožňujú stanoviť súradnice označeného bodu, deriváciu fyzikálnej veličiny v danom čase a integrál danej fyzikálnej veličiny v danom časovom intervale. Viac sa o danom využití funkcií dozvieme v ďalších kapitolách pri riešení konkrétnych úloh.



Obr. 0.9 Výber vypočítaných údajov z nameraných dát a ich záznam v tabuľke



Obr. 0.10 Po kliknutí na graf je možné pristúpiť k analýze nameraných dát



Je ešte vhodné pripomenúť že pri tvorbe vlastného videozáznamu pre videomeranie je potrebné dbať na záznam zo statívu, resp. bez pohybu kamery či fotoaparátu, aby nedochádzalo následne k zmene počiatku zvolenej súradnicovej sústavy.

Ďalšie kapitoly tejto vysokoškolskej učebnice obsahujú fyzikálnu teóriu, ktorá je následne aplikovaná pre analýzu reálnych dejov okolo nás (vo forme videí alebo fotografií) prostredníctvom vyššie popísaného programu Tracker.

Z našich skúseností a štatistických analýz vyplýva, že analýzou videí v programe Tracker si študenti ľahšie ozrejmi fyzikálne vzťahy a zákonitosti a takto získajú požadované vedomosti z fyziky a jej príbuzných predmetov, nadobudnú matematické zručnosti (Hockicko a kol. 2014). Preto je aj základná fyzikálna problematika v ďalších kapitolách vysvetľovaná v súčinnosti s videoanalýzou v programe Tracker.

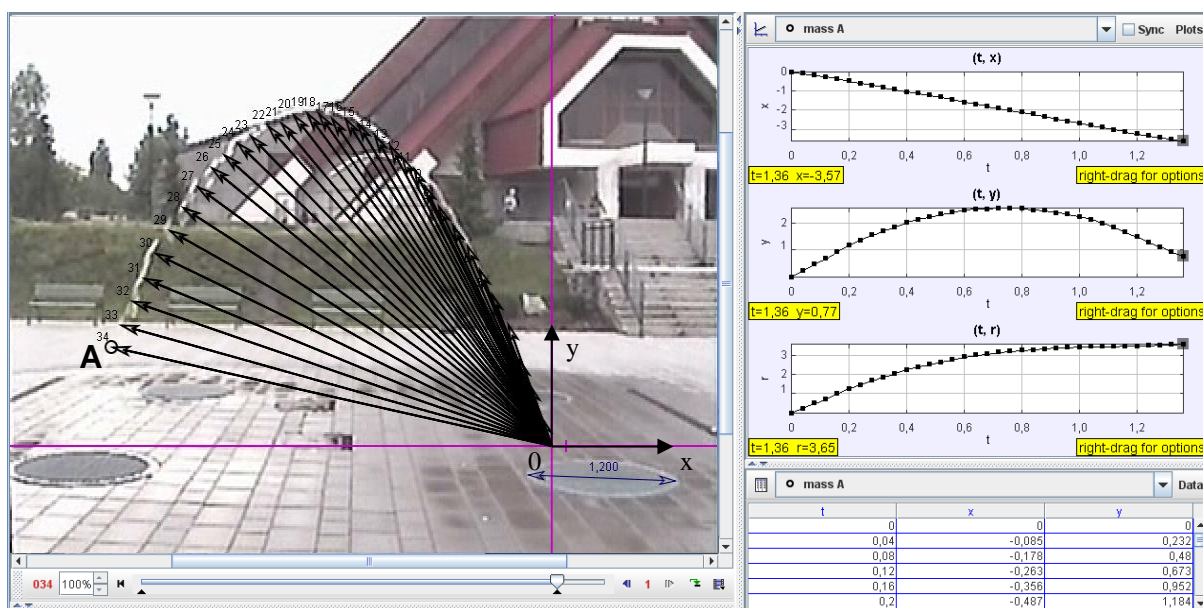
1. Kinematika hmotného bodu

Pohyb vo všeobecnosti zahŕňa všetky zmeny a procesy, ktoré prebiehajú okolo nás. Je neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty. To, čo sa pri samotnom pohybe uskutočňuje, umožňuje do detailov analyzovať program Tracker, pomocou ktorého môžeme skúmať aj veľmi rýchle procesy. Časť fyziky, ktorá sa zaoberá popisom pohybu telies, triedením a porovnávaním pohybov sa nazýva *kinematika*.

1.1 Hmotný bod, vzťažná sústava, trajektória, dráha pohybu

Pod *mechanickým pohybom* budeme rozumieť proces, pri ktorom sa mení poloha hmotného objektu (auto, autobus, lietadlo). Aby sme si uľahčili popis pohybu telesa, nahradíme toto teleso hmotným bodom. Pod *hmotným bodom* rozumieme myšlené teleso, ktorého rozmery a tvar môžeme pre popis pohybu zanedbať, avšak hmotnosť sa zachováva. Hmotným bodom pri našich analýzach v programe Tracker nahradíme auto, vlak, loptu, puk, atď. Budeme pritom predpokladať, že všetky časti daného telesa sa pohybujú rovnako rýchlo a v rovnakom smere. Predstava hmotného bodu však nebude vhodná pre otáčajúce sa telesá okolo vlastnej osi (napríklad letiaca a rotujúca sekera, kladivo), pretože rôzne časti danej sekery, kladiva sa v danom okamihu pohybujú rôzne rýchlo a v rôznych smeroch. Taktiež aj pri skúmaní deformácie telesa nie je vhodné pracovať s myšlienkovým pojmom hmotného bodu.

Pohyb hmotného bodu sa javí ako najjednoduchší mechanický pohyb. Ak mechanický pohyb definujeme ako premiestňovanie telesa, musíme premiestňovanie vzhľadom na niečo vzťahovať. Teleso alebo telesá, vzhľadom na ktoré pohyb opisujeme, tvoria *vzťažnú sústavu*. Pohyb a pokoj sú preto relatívne pojmy, čo sa javí vzhľadom na jednu vzťažnú sústavu v pokoji, môže byť súčasne vzhľadom na inú sústavu v pohybe a opačne (napr. opis pohybu áut na diaľnici). V praxi spájame s telesami tvoriacimi vzťažnú sústavu najčastejšie nejakú *súradnicovú sústavu*, napr. *pravouhlú pravotočivú sústavu súradníc x, y, z* . (Pre zjednodušenie budeme na začiatku uvažovať o pohybe v rovine, teda sústave x, y .) Polohu objektu určujeme najčastejšie k **počiatku** súradnicovej sústavy.



Obr. 1.1 Analýza pohybu vodného lúča fontány v programe Tracker

Vo fyzike sa často stretávame s úlohou, pri ktorej potrebujeme opísať polohu telesa alebo jeho pohyb. Na Obr. 1.1 je v istom okamihu znázornený pohyb vodného lúča fontány na Vlčincoch v Žiline. Skúmajme teraz pohyb začiatku vodného lúča. Čiara, po ktorej sa začiatok vodného lúča pohyboval sa nazýva **trajektória**. Pri opise pohybu začiatku vodného lúča sa obmedzíme na pohyb jedného bodu, ktorý môžeme považovať za hmotný bod. Aby sme mohli skúmať pohyb bodu, potrebujeme určiť jeho **polohu v čase t** vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy x, y , t.j., súradnice $x_0, y_0, t_0, x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, \dots$, v ktorých sa daný bod v jednotlivých časových úsekoch pri pohybe nachádzal. Hodnoty týchto bodov zapíšeme do tabuľky. Čas sme začali merať, keď začiatok vodného lúča prechádzal bodom so súradnicami x_0, y_0 . Vtedy mal čas hodnotu $t_0 = 0$ s. V súradnicovej sústave x, y trajektória predstavuje graf vzájomnej závislosti $y = y(x)$ súradníc bodov trajektórie.

Polohu nejakého bodu A vo všeobecnosti vzhľadom pravouhlú súradnicovú sústavu x, y, z máme určenú vtedy, keď poznáme všetky jeho tri súradnice x, y, z v priestore (x, y v rovine), kde x je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami y a z , y je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a z a z je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a y . Polohu hmotného bodu môžeme charakterizovať pomocou polohového vektora. Pod **polohovým vektorom** \vec{r} hmotného bodu A vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy O budeme rozumieť orientovanú úsečku, ktorej začiatok je v bode O a koniec v bode A . Pre polohový vektor v kartézskej sústave súradníc x, y, z platí

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

kde $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ sú jeho priemety do súradnicových osí a x, y, z sú pravouhlé súradnice bodu A a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smere osí x, y, z . Pri analýze pohybu hmotného bodu v programe Tracker budeme uvažovať o pohybe v rovine, keďže záznam kamerou, fotoaparátom nám neumožňuje vnímať a analyzovať pohyb v treťom smere, takže pri našich ďalších analýzách sa obmedzíme len na pohyb v rovine x, y .

O mechanickom pohybe hovoríme vtedy, keď nejaký hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu, čiže mení sa jeho polohový vektor, pričom koncový bod sa pohybuje s hmotným bodom a počiatočný bod trvalo splýva s počiatkom sústavy súradníc. Pohyb hmotného bodu môžeme charakterizovať vtedy, keď v každom časovom okamihu sú známe jeho súradnice, čiže ak poznáme ich funkcie závislosti od času, čo môžeme zapísať

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (1.2)$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\vec{r} = f(t), \quad (1.3)$$

vtedy hovoríme, že polohový vektor \vec{r} je **vektorovou funkciou času**. Sled polôh, ktoré hmotný bod počas svojho pohybu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu zaujíma, predstavuje **trajektóriu** pohybu. Jej dĺžka sa nazýva **dráha pohybu**.

V dvojrozmerných prípadoch pohybu je jedna zložka rovná 0 (napr. $z = 0$). Tu si vystačíme s dvojrozmerným súradnicovým systémom určeným osami x a y , a tým aj rozklad vektora \vec{r} je len rozkladom do týchto dvoch smerov

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}. \quad (1.4)$$

Na popis priamočiareho pohybu nám postačuje len jedna zložka polohového vektora \vec{r} . Ak je pohyb hmotného bodu orientovaný v smere osi x tak platí

$$\vec{r} = x\vec{i} . \quad (1.5)$$

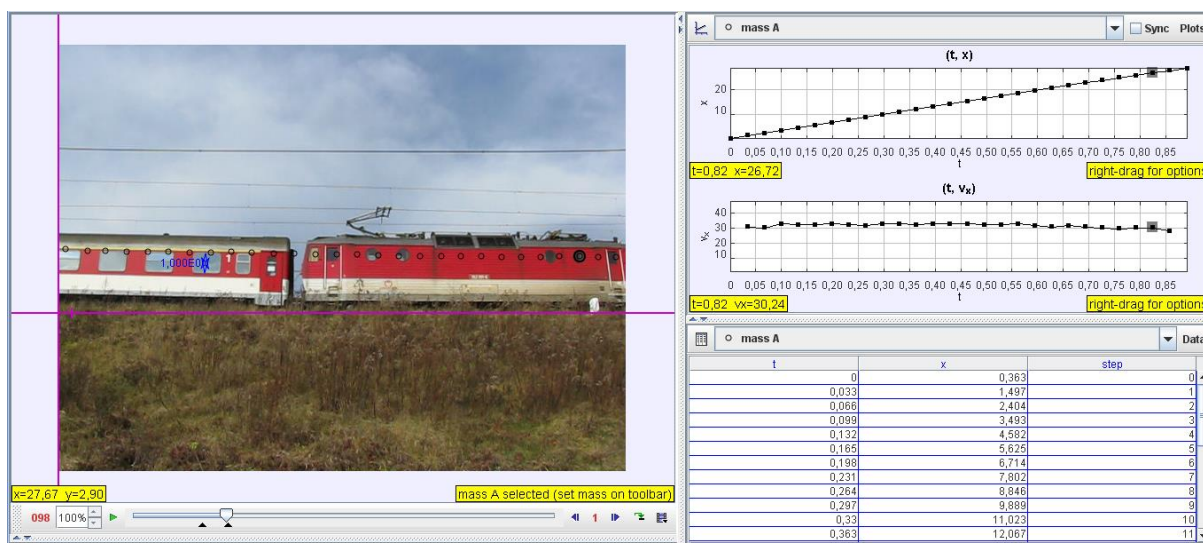
V prípade priamočiarych pohybov vystačíme pri určovaní polohy s dráhou s

$$s = |\vec{r}| = x , \quad (1.6)$$

ktorá predstavuje veľkosť posunutia v danom smere, pričom súradnicovú sústavu si môžeme vždy zvoliť tak, aby sa pohyb uskutočňoval v kladnom smere osi x , čo nám zjednoduší opis pohybu.

1.2 Priamočiary pohyb

Aby sme si uľahčili opis pohybu, venujme sa teraz priamočiaremu pohybu vlaku (Obr. 1.2 - opis pohybu sa preniesie z roviny x, y iba na priamku, t.j. os x). Bod, v ktorom sa začiatok vlaku nachádzal na začiatku v čase $t = 0$ sme zvolili za začiatok dráhy. *Skúmať pohyb* znamená predovšetkým stanoviť závislosť $x = x(t)$, dráhy od času, prípadne ďalšie charakteristiky, ktoré sú závislé na čase. Zaznamenávajme teda polohy vlaku v istých časových intervaloch (napr. $\Delta t = 0,033\text{s}$, záznam bol vyhotovený fotoaparátom, pričom vytvorené video má 30 fps (obrázokov za sekundu)), zapisujeme ich do tabuľky a znázorníme body so súradnicami t, x a bodmi so súradnicami preložíme súvislú, spojitú čiaru, bez zlomov a skokov. Keďže naše merania nemusia byť celkom presné, snažíme sa, aby preložené krivka prechádzala okolo nameraných bodov čo najbližšie (zvyčajne to za nás urobí program (pridať regresné krivky, fit funkcie)). Tak vytvoríme grafickú závislosť $x = x(t)$. (Dĺžku úseku Δt si môžeme zvoliť ľubovoľne, program Tracker, pomocou ktorého bola urobená prezentovaná analýza nám umožňuje analyzovať pohyb v časových intervaloch $\Delta t = 0,033\text{s}$ (v závislosti od zosnímaného videa a počtu záberov za 1s)). Tabuľka s hodnotami dvojíc (x, t) predstavuje jeden zo spôsobov vyjadrenia fyzikálnej závislosti dráhy od času, $x = x(t)$. Druhý zo spôsobov, akým možno vyjadriť závislosť fyzikálnej veličiny, je grafická závislosť.



Obr. 1.2 Analýza pohybu vlaku v programe Tracker

Dráha pohybu zvoleného začiatočného bodu vlaku sa v závislosti od času mení, čo vyjadruje aj zmena vektora $\vec{r}(x) = f(t)$. Aby sme sa o spôsobe, akým sa poloha vlaku v závislosti od času mení dozvedeli viac, budeme merať zmeny dráhy $\Delta x = \Delta s$ (v prípade pohybu v smere osi y : $\Delta y = \Delta s$) v navzájom rovnakých časových intervaloch Δt . Zmeny dráhy sú vždy kladné, čiže dráha pohybu je veličina, ktorá vždy len narastá. Zmenu dráhy Δs zvykneme nazývať **prírastok dráhy** alebo **dráhový úsek**, ktorý vlak prešiel v časovom intervale Δt . Celková dráha s , ktorú vlak prešiel od začiatku pohybu, je rovná súčtu prírastkov – zmien dráhy Δs v jednotlivých časových intervaloch Δt , ktoré už uplynuli.

Ako si môžeme všimnúť z analýzy grafu $x = x(t)$, akokoľvek ľubovoľne si zvolíme veľkosť Δt , pri rovnakých zmenách Δt dráha narastie o rovnakú hodnotu Δs . Tento pohyb môžeme charakterizovať ako **pohyb rovnomerný priamočiary**. Hovoríme, že teleso sa pohybuje **rovnomerne**, ak v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch Δt prejde rovnaké dráhy Δs . Ak teleso v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch Δt prejde rôzne úseky dráhy Δs , hovoríme, že sa pohybuje **nerovnomerným pohybom**. Takým pohybom sa pohybuje napríklad vlak pri rozbiehaní alebo pri brzdení. Ak sa zmeny dráhy Δs , prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt , postupne zväčšujú, nerovnomerný pohyb pri rozbiehaní vlaku sa nazýva **zrýchlený pohyb**. Ak sa zmeny dráhy Δs , prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt , budú postupne znižovať, nerovnomerný pohyb vlaku pri brzdení sa nazýva **spomalený pohyb**.

Skúsme teraz spoločne analyzovať pohyb začiatku vodného lúča v dvoch rôznych smeroch - x , y . Ako si môžeme všimnúť zo závislosti $x(t)$ a $y(t)$ (Obr. 1.3), pohyb v smere osi x je rovnomerný a v smere osi y je nerovnomerný - na začiatku spomalený a v druhej časti deja zrýchlený. Prečo je tomu tak, dozvieme sa v ďalších kapitolách pri skúmaní príčin pohybu - v dynamike a pri pohyboch telies v gravitačnom poli Zeme (pôsobiacia sila, ktorá ovplyvňuje pohyb, pôsobí iba v jednom smere).

1.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu

Pojem rýchlosť používame v bežnom živote často bez toho, aby sme si uvedomovali, že to je **fyzikálna veličina**. Z praxe vieme, že keď napr. auto prejde určitú vzdialenosť, napr. zo Žiliny do Bratislavy 200 km za dve hodiny, vypočítame jeho rýchlosť tak, keď určíme dráhu, ktorú auto prešlo za jednu hodinu. Inokedy zase odmeriame čas $\Delta t = 10$ s, za ktorý šprintér, zabehne dráhu $\Delta s = 100$ m. Každý, kto cestoval autom vie, že na 200 km dlhej ceste sa auto nepohybuje stále rovnako. Na ceste sú úseky, na ktorých sa auto pohybuje rýchlejšie a inde je jeho rýchlosť obmedzená dopravnou značkou. Podobne je to aj so šprintérom. Najprv bol pri štarte v pokoji a až po rozbehu sa mu podarilo dosiahnuť maximálnu rýchlosť.

Rýchlosť, ktorú sme vypočítali pre dvojhodinový pohyb auta alebo pre desaťsekundový beh športovca, nazývame **priemerná veľkosť rýchlosti** a definujeme ju ako podiel celkovej dráhy s a časového intervalu, v ktorom sa daný pohyb uskutočnil:

$$v_p = \frac{s}{t}. \quad (1.7)$$

Jednotku rýchlosti v sústave SI určíme podľa známeho predpisu

$$[v_p] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1} \quad (1.8)$$

Pri opise dopravných situácií zvykneme vyjadrovať rýchlosť v jednotkách kilometer za hodinu ($\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$).

Pod tzv. **priemernou** alebo **strednou rýchlosťou** \bar{v}_p rozumieme podiel posunutia Δs v určitom časovom intervale Δt a dĺžky tohto intervalu.

$$\bar{v}_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.9)$$

Priemerná rýchlosť je podľa definície závislá od dĺžky časového intervalu, v ktorom ju určujeme a od zmeny dráhy v tomto intervale. Veľkosť priemernej rýchlosti rovnomerného pohybu sa v závislosti od času nemení. Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu vyjadruje veľkosť rýchlosti rovnomerného pohybu, ktorým by teleso prešlo rovnako veľkú dráhu za rovnako dlhý čas ako pri pohybe nerovnomernom.

Ak sa ale opýtame, ako rýchle sa daný objekt pohybuje, máme na mysli rýchlosť telesa v danom okamihu, to znamená tzv. **okamžitú rýchlosť**. Tú dostaneme z priemernej rýchlosti tak, že budeme časový interval Δt , meraný od okamihu t , znižovať až k nule. S poklesom hodnoty Δt sa priemerná rýchlosť meraná v intervale $t + \Delta t$ blíži k istej limitnej hodnote, čiže derivácii vektora posunutia, ktorá definuje rýchlosť v okamihu t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1.10)$$

Veličiny ds , dt nazývame **infinitesimálnymi** (nekonečne malými) alebo **elementárnymi**. Ich fyzikálny význam spočíva v tom, že označujú veľmi malé hodnoty alebo zmeny príslušných fyzikálnych veličín. Okamžitá rýchlosť je vektorovou veličinou. **Veľkosť okamžitej rýchlosti** (alebo **veľkosť rýchlosti**) má vždy nezápornú hodnotu a postráda informáciu o smere. To, čo určuje rýchlosť v automobile, predstavuje práve veľkosť rýchlosti.

Ak využijeme poznatky o diferenciálnych operáciách a integrálnom počte môžeme zo všeobecnej definície rýchlosti (1.10) odvodiť vzťah pre dráhu priamočiareho pohybu hmotného bodu.

V prípade rovnomerného pohybu je rýchlosť $v = v_0$ a keďže veľkosť priemernej rýchlosti sa nemení, možno vzťah (1.9) upraviť do tvaru

$$\Delta s = v_0 \Delta t, \quad (1.11)$$

pričom pre celkovú dráhu prejdenu v čase t môžeme písať známy vzťah (za predpokladu, že v čase $t = 0$ bola prejdenu dráha nulová)

$$s = v_0 t, \quad (1.12)$$

Pozrime sa teraz na graf závislosti rýchlosti na čase a pokúsme sa hľadať isté súvislosti so vzťahom (1.11). Keďže sa jedná o rovnomerný pohyb, grafom závislosti $v = v(t)$ je úsečka v danom časovom intervale. Ak veľkosť rýchlosti v_0 vynásobíme s časom, v ktorom daný pohyb skúmame, dostaneme podľa vzťahu (1.11) prejdenu dráhu a podľa grafu obsah plochy pod grafom závislosti $v = v(t)$. Možno teda konštatovať, že dráha, ktorú teleso pri rovnomernom pohybe prejde, je úmerná veľkosti (obsahu) plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase. Tento významný poznatok je možné zovšeobecniť aj pre nerovnomerné pohyby. Vo všeobecnosti si možno časovú os rozdeliť na menšie časové úseky Δt , v ktorých môžeme priemernú rýchlosť v_i považovať za konštantnú. Hodnotu celkovej prejdenej dráhy

s istým priblížením a chybou určíme ako súčet obsahov všetkých obdĺžnikov so stranami Δt a v_i , čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i v_i \Delta t . \quad (1.13)$$

Zmenšovaním intervalov na minimum ($\Delta t \rightarrow 0$) sa budeme blížiť k skutočnej hodnote prejdenej dráhy v danom čase, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_i \Delta t , \quad (1.14)$$

čo je ekvivalentné zápisu pomocou integrálu

$$s = \int ds = \int v dt , \quad (1.15)$$

V prípade rovnomerného pohybu, kedy je rýchlosť stále konštantná, môžeme podľa pravidiel pre integrovanie ju vyňať pred integrál, čím dostaneme

$$s = \int ds = \int v_0 dt = v_0 \int dt = v_0 t + c , \quad (1.16)$$

kde c je integračná konštanta, ktorú vypočítame, ak poznáme prejdenú dráhu v čase $t = 0$ s. Ak prejdená dráha v čase $t = 0$ s bola $s = s_0$, môžeme písať

$$s(t = 0) = s_0 = v_0 \cdot 0 + c \Rightarrow c = s_0 . \quad (1.17)$$

V konečnom dôsledku po úpravách dostávame vzťah

$$s = v_0 t + s_0 , \quad (1.18)$$

ktorý je známym vyjadrením dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu hmotného bodu. V prípade, že v čase $t = 0$ s bola dráha $s_0 = 0$ m, potom vzťah (1.18) prejde na zjednodušený tvar

$$s = v_0 t . \quad (1.19)$$

Pri našich analýzach v programe Tracker budeme analyzovať prejdenú dráhu hmotného bodu v smere osi x : $s = x$ alebo v smere osi y : $s = y$, pričom rýchlosti v danom smere budú charakterizované zložkami v smere osi x : $v = v_x$ a v smere osi y : $v = v_y$. Keďže súradnicovú sústavu je možné ľubovoľne natočiť, odporúčame si zvoliť vzťažnú sústavu tak, aby analýza bola čo najjednoduchšia – zvyčajne natočíme osi v smere pohybu telesa.

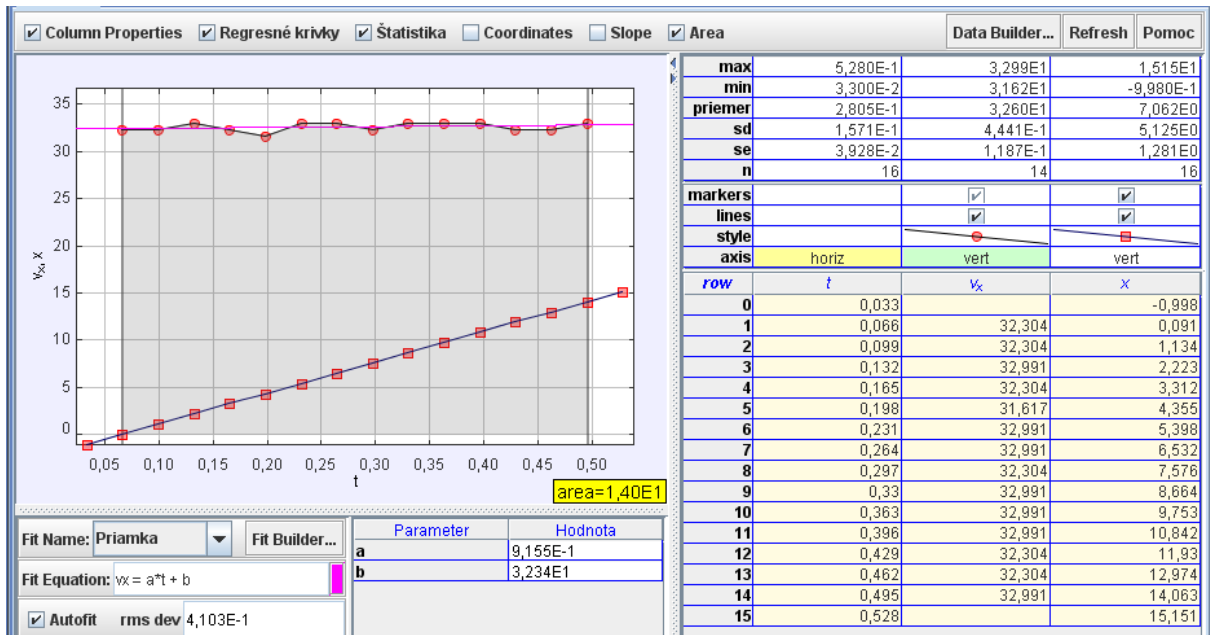
Úloha 1.1:

Analyzujte pohyb vlaku a určte jeho rýchlosť. Pre analýzu použite program Tracker a video [vlak.avi](#).

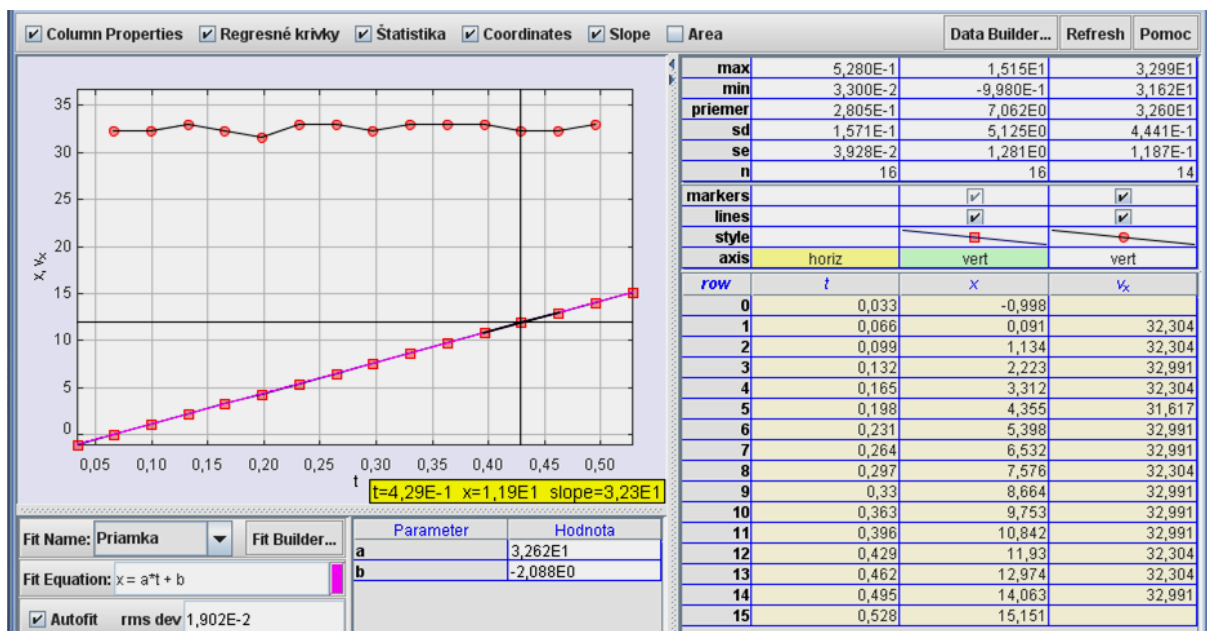
(dĺžka vozňa je 26,40 m, výška a šírka okna vozňa s rámom je 1,10 m x 1,35 m, počet obrázkov za sekundu je 30fps).

Riešenie:

Ako môžeme vidieť z Obr. 1.3, rýchlosť pohybu vlaku (vyjadrenú na grafe guľôčkami) môžeme považovať za približne konštantnú ($v = 32,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ z grafickej závislosti, zo štatistiky $v = 32,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) a pohyb vlaku za rovnomerný priamočiary. Ak teraz porovnáme obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti v časovom intervale od $t_1 = 0,066 \text{ s}$ do $t_{14} = 0,495 \text{ s}$ (čo je hodnota v žltom rámeiku $\text{area} = 14$) s prejdenu dráhou v danom časovom intervale ($\Delta s = \Delta x = x_{14} - x_1 = 14,063 \text{ m} - 0,091 \text{ m} = 13,972 \text{ m} \approx 14 \text{ m}$) zistíme, že hodnoty sú navzájom rovnaké.



Obr. 1.3 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe



Obr. 1.4 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe

Z analýzy pohybu vlaku na Obr. 1.4 môžeme usúdiť, že dráha pohybu vlaku sa rovnomerne zvyšovala s časom, čo možno charakterizovať rovnicou v analytickom vyjadrení $x(t) = 32,6t - 2,088$. To znamená, že pohyb vlaku je rovnomerný priamočiary s rýchlosťou vlaku $v = 32,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a v čase $t = 0 \text{ s}$ bola poloha vlaku $x_0 = -2,088 \text{ m}$ (čo súvisí pri danej analýze s posunom vzťažnej sústavy kvôli lepšej analýze rýchlosti). V čase $t_{12} = 0,429 \text{ s}$ bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 32,3 (slope = 32,3). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{12} = 0,429 \text{ s}) = 32,304 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. To znamená, že ak na grafe závislosti dráhy na čase určíme v ktoromkoľvek časovom intervale hodnotu smernice dotyčnice, určíme zároveň aj rýchlosť pohybu v danom časovom okamihu. Matematicky je okamžitá rýchlosť rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie $s = s(t)$.

1.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu

Rýchlosť pohybu môže byť stála alebo sa môže meniť. Pohyb, pri ktorom sa rýchlosť mení sa nazýva **zrýchleným**. O zrýchlený pohyb pôjde nielen vtedy, keď sa bude meniť veľkosť rýchlosti, ale aj vtedy, keď sa bude meniť smer rýchlosti. Ako miera pre zmenu rýchlosti za jednotku času sa zavádza **zrýchlenie**.

Priemerné (stredné) zrýchlenie \bar{a} v časovom intervale Δt je definované

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.20)$$

Podobne ako pri rýchlosti, tak aj pri zrýchlení dostaneme **okamžité zrýchlenie** tak, že časový interval Δt sa bude približovať k nule

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (1.21)$$

Hovoríme, že zrýchlenie a sa rovná derivácii rýchlosti podľa času, čiže v danom okamihu je rovné smernici dotyčnice ku krivke $v(t)$ v bode určenom daným okamihom. Vzhľadom k tomu, že pri priamočiarom pohybe je rýchlosť rovná derivácii posunutia podľa času, môžeme zrýchlenie a určiť tak, že dané posunutie budeme derivovať dvakrát za sebou, čo môžeme vyjadriť nasledovne

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.22)$$

a hovoríme, že zrýchlenie je rovné druhej derivácii dráhy $s(t)$ podľa času.

Jednotkou zrýchlenia v sústave SI je $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Zrýchlenie má veľkosť aj smer, je teda vektorovou veličinou.

1.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb

Veľmi často sa stretávame s pohybmi, pri ktorých sa rýchlosť mení rovnomerne, čiže zrýchlenie je konštantné. Takýto pohyb nazývame **rovnomerne zrýchlený**. Príkladom takéhoto

pohybu môže byť rozbeh auta, vlaku, ale aj pád telesa (za určitých podmienok pri zanedbaní odporu vzduchu). Obdobným spôsobom, ako v prípade rovnomerného pohybu, môžeme aj v prípade nerovnomerného pohybu určiť v a s zo zrýchlenia a rýchlosti.

Aby sme sa dozvedeli, čo platí pre rýchlosť a dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, pokúsime sa upraviť niektoré z predchádzajúcich vzťahov ((1.21) a (1.22)).

Úpravou vzťahu (1.21) dostávame

$$dv = a dt. \quad (1.23)$$

Integráciou oboch strán rovnice dostaneme

$$\int dv = \int a dt. \quad (1.24)$$

Keďže uvažujeme o konštantnom zrýchlení, môžeme ho vyňať pred integrál

$$\int dv = a \int dt \quad (1.25)$$

a nasledovným výpočtom neurčitého integrálu dostávame

$$v = at + c, \quad (1.26)$$

kde c je integračná konštanta. Túto konštantu určíme z počiatočných podmienok pre rýchlosť častice v čase $t = 0$, kedy je rýchlosť $v_x = v_{0x}$. Dosadením tejto hodnoty do predchádzajúceho vzťahu, ktorý platí pre ľubovoľný okamih dostaneme hodnotu integračnej konštanty c

$$v_0 = v(t=0) = a \cdot 0 + c = c. \quad (1.27)$$

Získanú hodnotu konštanty c dosadíme do vzťahu (1.26) a dostávame

$$v = at + v_0. \quad (1.28)$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je zrýchlenie $a > 0$ a pre spomalený pohyb je $a < 0$ a predchádzajúci vzťah prejde na tvar $v = v_0 - at$.

Podobným spôsobom so znalosťou pravidiel pre integračný počet môžeme odvodiť aj vzťah pre dráhu zo vzťahu (1.10). Úpravou tohto vzťahu dostávame

$$ds = v dt. \quad (1.29)$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme

$$\int ds = \int v dt. \quad (1.30)$$

Z predchádzajúceho výsledku poznáme vzťah pre rýchlosť (1.28), ktorá závisí na čase. Jej dosadením za v dostávame

$$\int ds = \int (v_0 + at) dt. \quad (1.31)$$

Využijeme jednu z vlastností integrálov – aditívnosť, t.j. integrál súčtu je rovný súčtu integrálov. Keďže počiatočná rýchlosť v_0 je konštantná, môžeme ju vyňať pred integrál a následne upraviť

$$\int ds = v_0 \int dt + a \int t dt. \quad (1.32)$$

Integráciou oboch strán rovníc dostávame

$$s = 1/2at^2 + v_0t + c', \quad (1.33)$$

kde c' je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre polohu častice (v čase $t = 0s$ je $s = s_0$). Dosadením do predchádzajúceho vzťahu zistíme, že hodnota konštanty $c' = s_0$, čiže predchádzajúca rovnica nadobudne tvar

$$s = 1/2at^2 + v_0t + s_0. \quad (1.34)$$

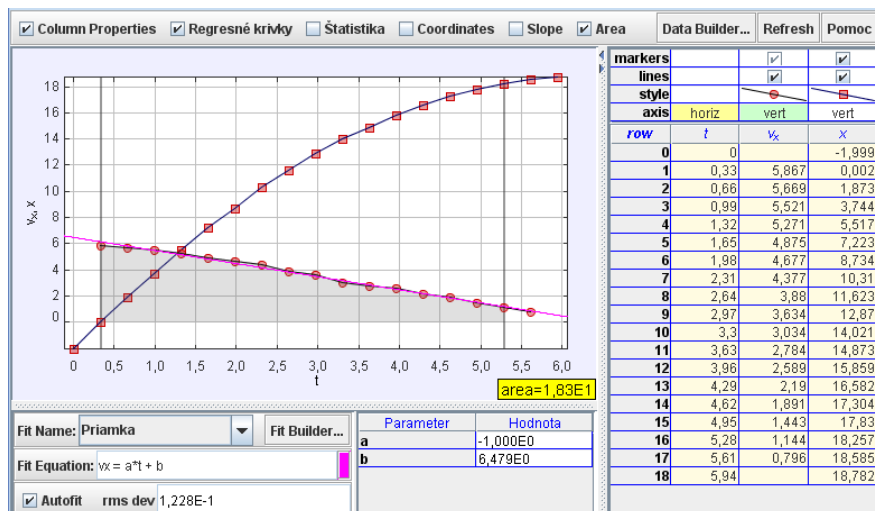
Úloha 1.2:

Analyzujte pohyb vlaku, určte jeho spomalenie vlaku.

(dĺžka vozňa je 24,50 m, výška a šírka okna vozňa s rámom 0,96 m x 1,27 m, 30fps).

zdroj: [brzdenie vlaku.avi](#)

Riešenie:

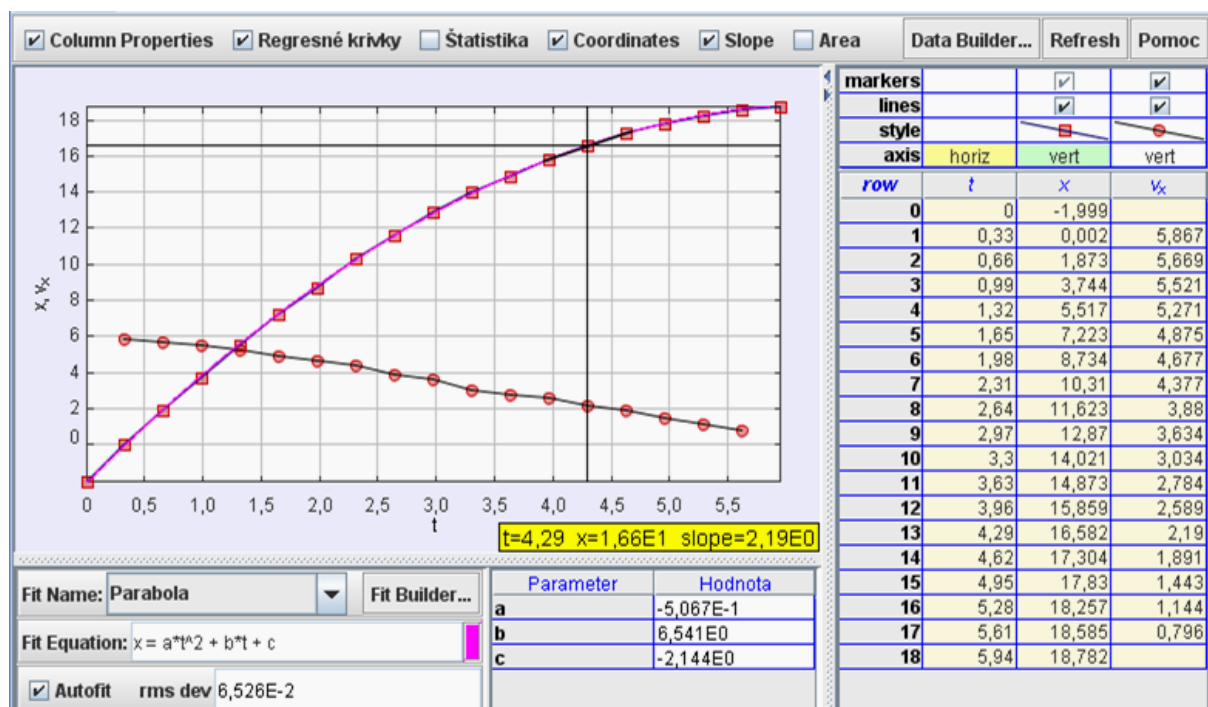


Obr. 1.5 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení

Ako si môžeme všimnúť z grafu závislosti dráhy na čase (štvorčeky), pohyb, ktorý vlak vykonáva môžeme považovať za spomalený, navyše z grafu rýchlosti na čase môžeme konštatovať, že vlak vykonáva rovnomerne spomalený pohyb so zrýchlením $a = -1 \text{ m.s}^{-2}$.

Analyticky môžeme závislosť rýchlosti vlaku na čase vyjadriť rovnicou $v(t) = -t + 6,479$, čo napovedá, že v čase, keď sme začali pohyb analyzovať ($t = 0\text{s}$) mal vlak veľkosť rýchlosti $v_0 = 6,479 \text{ m.s}^{-1}$. Obsah plochy pod závislosťou rýchlosti na čase nás informuje o tom, že za čas $\Delta t = t_{16} - t_1 = 5,28\text{s} - 0,33\text{s}$ prešiel vlak dráhu $s = 18,3\text{m}$ (area = 18,3), čo odpovedá prejdenej dráhe v čase $\Delta t = 5,28\text{s} - 0,33\text{s} = 4,95\text{s}$ ($\Delta s = \Delta x = x_{16} - x_1 = 18,257\text{m} - 0,002\text{m} = 18,255\text{m} \approx 18,3\text{m}$).

Na Obr. 1.6 je prevedená analýza závislosti prejdenej dráhy pri brzdení vlaku od času. Ako z matematickej analýzy daného pohybu vyplýva, závislosť dráhy na čase pri brzdení vlaku môžeme popísať rovnicou $s = -0,5067t^2 + 6,54t - 2,144 = \frac{1}{2} \cdot 1,0134t^2 + 6,54t - 2,144$. Daný pohyb považujeme teda za rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -1,0134\text{m.s}^{-2}$ a počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 6,541\text{m.s}^{-1}$ (čo odpovedá analýze predchádzajúceho grafu). V čase $t = 0\text{s}$ bola poloha vlaku $x_0 (t_0 = 0\text{s}) = -1,999\text{m}$ (hodnota v tabuľke nameraných hodnôt, z fitovania matematickej závislosti $s_0 = c = -2,144 \text{ m}$). V čase $t_{13} = 4,29 \text{ s}$ bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 2,19 (slope = 2,19). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{13} = 4,29\text{s}) = 2,19\text{m.s}^{-1}$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. Takýmto spôsobom je možno v ktoromkoľvek čase určiť okamžitú rýchlosť pohybu vlaku ako smernicu dotyčnice ku grafu závislosti dráhy na čase.



Obr. 1.6 Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení

Deriváciou dráhy podľa času dostaneme funkčnú závislosť rýchlosti a naopak, integráciou rýchlosti dostaneme závislosť dráhy ako funkciu času. Vo všeobecnosti, ak je jedna fyzikálna veličina vyjadrená ako derivácia druhej, tak zase druhú je možné získať integrovaním funkčnej závislosti prvej veličiny. Takýto postup sa nevzťahuje len na riešenie pohybov v kinematike, ale sa uplatňuje prakticky pri vzájomných vzťahoch všetkých fyzikálnych veličín.

Treba však pripomenúť, že odvodené rovnice (1.28) a (1.34) platia iba pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Symbol s_0 predstavuje dráhu hmotného bodu prejdenu v čase $t = 0s$ a rýchlosť v_0 je rýchlosť v čase $t = 0s$. V prípade, že zrýchlenie $a = 0m.s^{-2}$ potom vzťah (1.34) prejde na tvar (1.18), resp. ak v čase $t = 0s$ bola dráha $s_0 = 0$ tak na tvar (1.19), čo sú vzťahy pre rovnomerný priamočiary pohyb hmotného bodu pohybujúceho sa konštantnou rýchlosťou v_0 . Tiež, ak zrýchlenie bolo nenulové a počiatočná rýchlosť a dráha bola nulová ($v_0 = 0ms^{-1}$, $s_0 = 0m$), tak dostávame vzťah pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu

$$s = 1/2at^2 \quad (1.35)$$

Obdobným spôsobom, ako bol analyzovaný pohyb vlaku, môžeme urobiť aj analýzu pohybu padajúceho telesa, ibaže tento raz budeme analyzovať pohyb v smere osi y , pričom pri analýzach budeme využívať y -ovú súradnicu: $s = y$ a pre popis rýchlosti $v = v_y$ (pri zachovaní natočenia súradnicovej sústavy). Keďže je možné súradnicovú sústavu natáčať ľubovoľným spôsobom, je na samotnom študentovi, ako si danú sústavu natočí a aké zložky bude analyzovať.

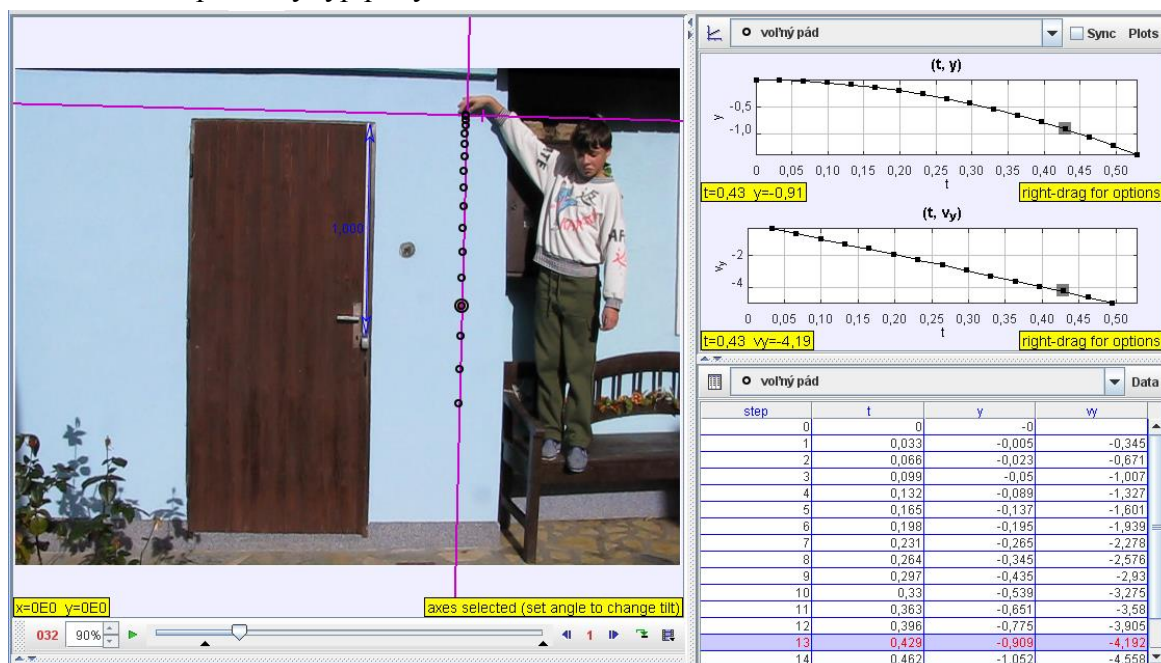
Úloha 1.3:

Analyzujte pohyb padajúcej loptičky, určte hodnotu jej zrýchlenia.

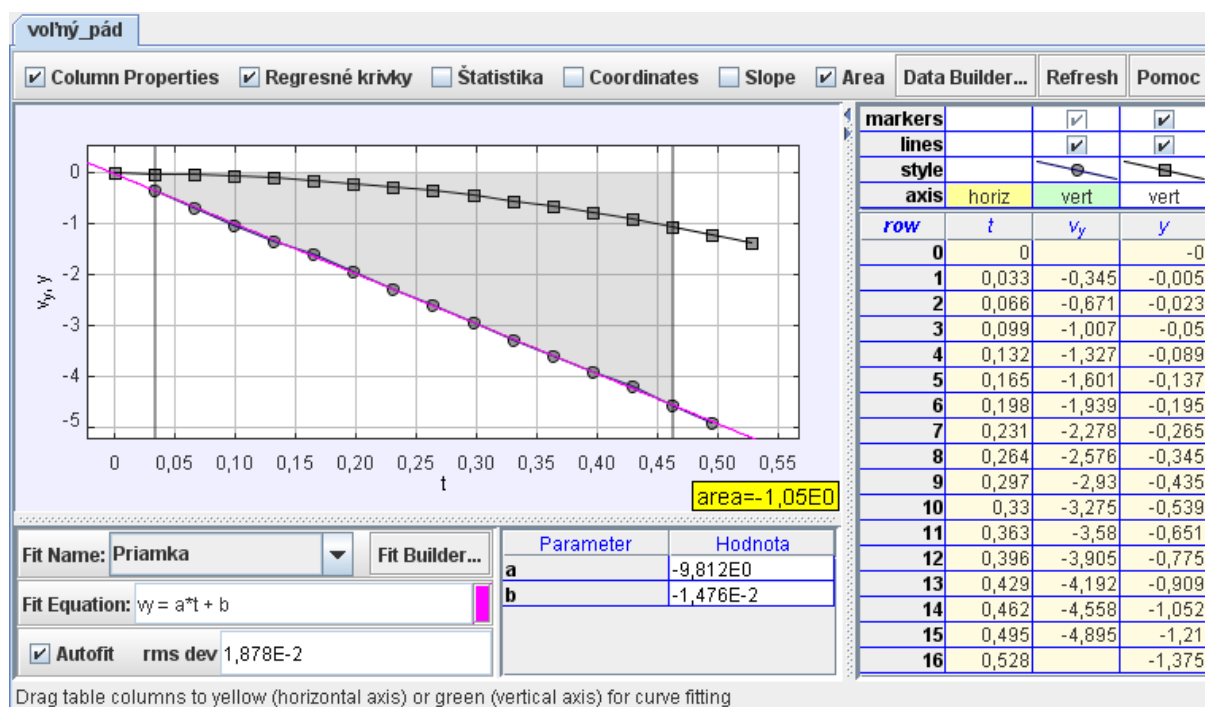
(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť loptičky: $m = 2,5$ g), zdroj: [volny pad.avi](#) (30fps).

Riešenie:

Keďže padajúca guľôčka sa pohybuje v zápornom smere osi y , hodnoty polohy a rýchlosti v danom smere nadobúdajú záporné hodnoty. Z prvého grafu závislosti dráhy na čase môžeme usudzovať, že sa jedná o pohyb nerovnomerný a zrýchlený, graf závislosti rýchlosti od času potvrdzuje, že daný pohyb je rovnomerne zrýchlený. Obdobnou analýzou, aká bola urobená v predchádzajúcom príklade sa môžeme dopracovať k analytickým vyjadreniam časových závislosti dráhy a rýchlosti a taktiež aj k hodnote zrýchlenia, ktorá je charakteristická pre daný typ pohybu.

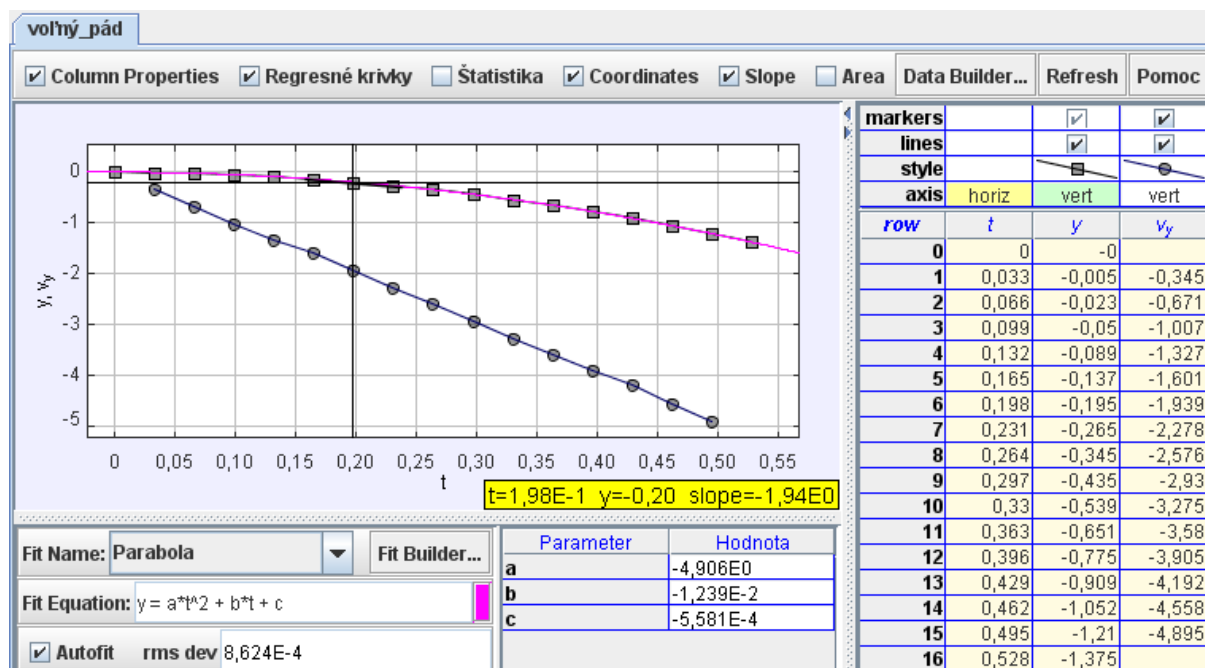


Obr. 1.7 Analýza pohybu padajúceho telesa



Obr. 1.8 Analýza rýchlosti pohybu padajúceho telesa

Z analýzy rýchlosti pohybu voľne padajúceho telesa vyplýva, že pohyb voľne pustenej guľôčky je rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením $a = -9,812 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Závislosť rýchlosti na čase môžeme charakterizovať rovnicou $v(t) = -9,812t - 0,0147$, z obsahu plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase vyplýva, že prejdená dráha v danom časovom intervale $\Delta t = t_{14} - t_1 = 0,462\text{s} - 0,033\text{s} = 0,429\text{s}$ je 1,05 metra (resp. $\Delta s = \Delta y = y_{14} - y_1 = |-1,052 - (-0,005)| = 1,047\text{m}$ z nameraných dát v tabuľke).



Obr. 1.9 Analýza dráhy pohybu padajúceho telesa

Závislosť dráhy na čase voľne padajúceho telesa na čase (1.34) môžeme popísať rovnicou $s(t) = y(t) = -4,906t^2 - 0,01239t - 0,0005581$, čo môžeme prepísať do tvaru $s(t) =$

$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot 9,812t^2 - 0,01239t - 0,0005581$. Pohyb voľne pustenej guľôčky (v krátkom časovom intervale, kedy ešte môžeme zanedbať odpor vzduchu) môžeme opäť podľa predchádzajúcej analýzy považovať za rovnomerne zrýchlený pohyb so záporným zrýchlením $a = -9,812 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Zistením smernice dotyčnice ku grafu závislosti dráhy od času v čase $t_0 = 0,198 \text{ s}$, bola určená hodnota okamžitej rýchlosti $v(0,198\text{s}) = -1,94 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, čo odpovedá hodnote určenej z tabuľky $v_{y0} = -1,939 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Daný pohyb možno považovať za voľný pád, keďže $\vec{a} = \vec{g} = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Čo sa počiatočnej rýchlosti a dráhy týka, tie by v prípade voľného pádu mali byť nulové; po zaokrúhlení čísel na prvú platnú číslicu sú hodnoty počiatočnej rýchlosti aj dráhy veľmi blízke nule. Viac o podobných pohyboch realizovaných v blízkosti zemského povrchu (v gravitačnom poli Zeme) sa dozvieme v kapitole Gravitačné pole (4).

1.3 Dvojrozmerný pohyb

Po predchádzajúcej analýze pohybu v jednom smere (na priamke) možno naše úvahy rozšíriť na pohyb, ktorý sa uskutočňuje v dvoch smeroch. Najdôležitejšie pojmy týkajúce sa popisu pohybu budú analogické s tými, ktoré sme odvodili v predchádzajúcich častiach, avšak rozšírené za pomoci vektorovej algebry do roviny.

Podiel

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_p \quad (1.36)$$

definuje priemernú rýchlosť hmotného bodu. Matematicky môžeme zmenšovanie časového intervalu vyjadriť pomocou limity a následnej derivácie polohového vektora podľa času

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.37)$$

Rýchlosť \vec{v} je v tomto vyjadrení okamžitou rýchlosťou hmotného bodu v čase t a smer rýchlosti má smer dotyčnice ku trajektórii pohybu. Vzťah (1.37) je analógiou vzťahu (1.10), ale zároveň je jeho zovšeobecnením pre pohyby v trojrozmernom (dvojrozmernom) priestore. (Keďže v programe Tracker budeme analyzovať pohyby v rovine, vystačíme si s dvoma rozmermi.) Zavedené veličiny $d\vec{r}$ a dt sú elementárnym vyjadrením polohového vektora a času.

Pre dvojrozmerný súradnicový systém s vektorom \vec{r} určeným pomocou dvoch zložiek prejde vzťah pre rýchlosť (1.37) do tvaru

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} \quad (1.38)$$

Ak zavedieme veľkosti zložiek vektora rýchlosti pre jednotlivé smery nasledovne

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad (1.39)$$

dostávame pre celkovú rýchlosť

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \quad (1.40)$$

Veľkosť rýchlosti je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (1.41)$$

V prípade pohybu hmotného bodu rýchlosťou v_0 len v jednom smere napr. v smere osi x sú zložky rýchlosti v ostatných smeroch $v_y = 0$. Potom vo vzťahu (1.40) pre zložku rýchlosti nahradíme $v_x = v_0$ a zložku vektora x môžeme nahradiť dráhou s . Dostávame tak skalárny vzťah pre rýchlosť priamočiareho pohybu vyjadrený ako deriváciu dráhy podľa času, čo je vzťah (1.10).

Predpokladajme v ďalšom, že rýchlosť pohybu nezostáva konštantná ako v prípade rovnomerného pohybu, ale sa mení s časom. Takýto pohyb sme označili ako nerovnomerný. Nech sa hmotný bod v čase t_1 pohybuje rýchlosťou v_1 a v čase t_2 rýchlosťou v_2 . Pomer zmeny rýchlosti v časovom intervale vyjadruje zrýchlenie už zadefinované vzťahom (1.21). Avšak vzťah (1.21) je opäť definíciou zrýchlenia len pre prípad priamočiareho pohybu. Pre zovšeobecnenie definície zrýchlenia v priestore je potrebné upraviť vzťah pre dvojrozmerný súradnicový systém. Ak uvažujeme dvojrozmerný súradnicový systém s vektorom \vec{r} určeným pomocou dvoch zložiek, potom zrýchlenie môžeme vyjadriť s využitím vzťahu (1.21) analogicky, ako sme to urobili pre rýchlosť v predchádzajúcej časti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j}. \quad (1.42)$$

Ak uvažujeme vzťahy pre veľkosti zložiek rýchlosti (1.39), tak zrýchlenie je možné vyjadriť ako druhú deriváciu polohového vektora podľa času

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j}. \quad (1.43)$$

Veľkosti zložiek vektora zrýchlenia zavedieme nasledovne

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (1.44)$$

a pre celkové zrýchlenie potom dostávame

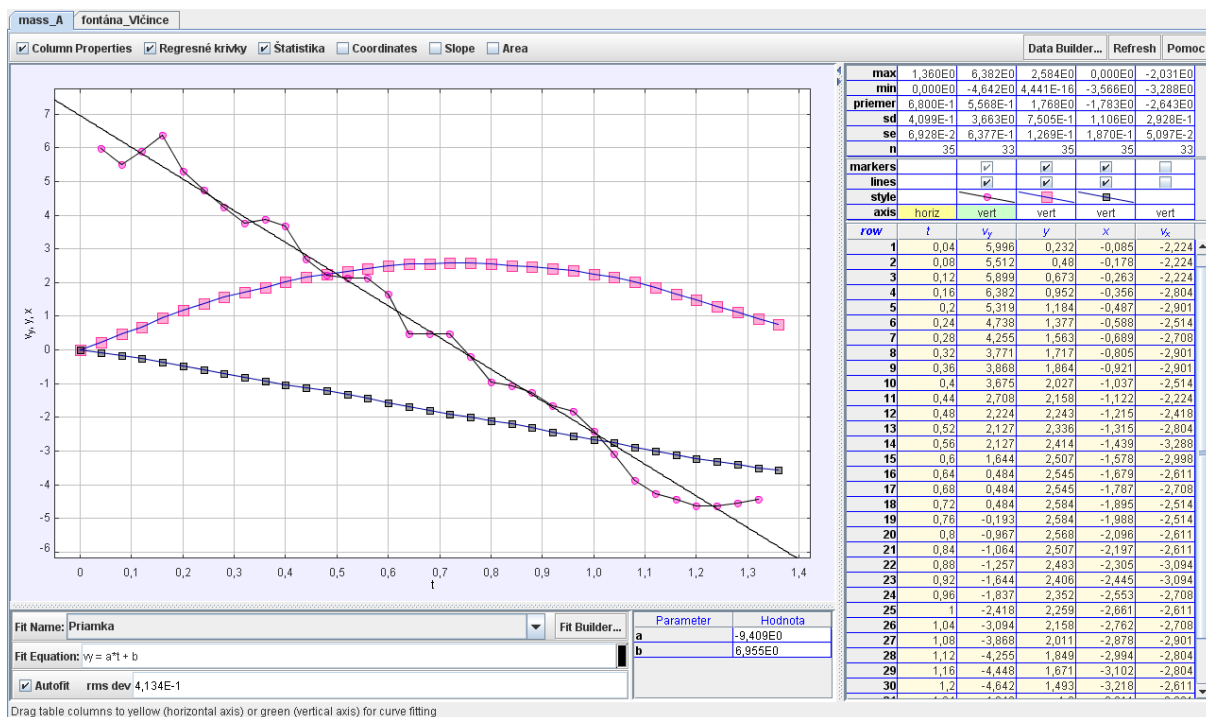
$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (1.45)$$

Veľkosť zrýchlenia je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.46)$$

Vráťme sa ešte na koniec tejto časti k analýze pohybu vodného lúča fontány, ktorý urobíme v rovine x, y (v smere osi z sa daný pohyb nerealizuje). Ako si môžeme všimnúť, poloha začiatku vodného lúča v smere osi x rovnomerne narastá (menšie modré štvorčeky), závislosť polohy x na čase môžeme približne charakterizovať rovnicou $x(t) = -2,7t + 0,052$, a teda pohyb v danom smere môžeme považovať za rovnomerný (s rýchlosťou $v_x = 2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, znamienko – hovorí o pohybe v zápornom smere osi x). Poloha vodného lúča v smere osi y najprv narastá, potom sa znižuje (väčšie červené štvorčeky), preto pohyb v tomto smere

považujeme za nerovnomerný. Matematickou analýzou možno daný pohyb popísať vzťahom $y(t) = -1/2 \cdot 9,67t^2 + 7,13t - 0,0054$, z čoho vyplýva, že zrýchlenie tohto pohybu je konštantné a smeruje dole v zápornom smere osi y , t.j. $a_y = -9,67 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \approx g$. Rýchlosť pohybu v danom smere možno charakterizovať rovnicou $v_y(t) = 6,96 - 9,41t$, pričom z daného vyjadrenia a grafickej závislosti $v_y(t)$ (gulôčky) vyplýva, že pri stúpaní vodného lúča je rýchlosť kladná a znižuje sa z rýchlosti približne $v_y(0) \approx 7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ až na nulu ($v_y(0,74\text{s}) = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$) a potom veľkosť (zápornej) rýchlosti narastá.



Obr. 1.10 Analýza pohybu vodného lúča fontány

1.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici

V prechádzajúcej časti boli odvodené vzťahy pre prípad priamočiareho rovnomerného a rovnomerne zrýchleného pohybu. Trajektória takéhoto pohybu bola časť priamky. Tieto vzťahy boli potom zovšeobecnené na pohyb v priestore s použitím vektorového zápisu. Ak zavedieme jednotkový vektor $\vec{\tau}$ orientovaný v smere dotyčnice ku krivke, môžeme potom rýchlosť vyjadriť ako skalárny násobok veľkosti rýchlosti v a jednotkového vektora $\vec{\tau}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v\vec{\tau}. \quad (1.47)$$

Analýzou vzťahu (1.47) podľa skalárnej veličiny v dostávame nasledujúce druhy pohybov podľa veľkosti rýchlosti

- a) $v = \text{konštanta}$, \Rightarrow rovnomerný pohyb,
- b) $v \neq \text{konštanta}$, \Rightarrow nerovnomerný pohyb

a rozborom z pohľadu vektora $\vec{\tau}$ vystihujúceho smer pohybu dostávame ďalšie rozdelenie

- c) $\vec{\tau} = \text{konštanta}$, \Rightarrow priamočiary pohyb,
- d) $\vec{\tau} \neq \text{konštanta}$, \Rightarrow krivočiary pohyb.

Kombináciou týchto možností získame štyri základné druhy pohybu, rovnomerný priamočiary, rovnomerný krivočiary, nerovnomerný priamočiary, nerovnomerný krivočiary. Na popis priamočiarych pohybov vystačíme s jednorozmerným súradnicovým systémom, kým v prípade krivočiarych pohybov je potrebný popis s dvoma súradnicami pre pohyby v rovine resp. troma súradnicami pre pohyby v priestore. Predmetom tejto kapitoly bude rozbor z pohľadu smeru pohybu.

Veľká variabilita krivočiarych pohybov neumožňuje univerzálnym spôsobom popísať všetky krivočiare pohyby, a preto sa v tejto kapitole naša pozornosť zúži len na špeciálny prípad krivočiareho pohybu, konkrétne prípad pohybu po kružnici, ktorý taktiež nazývame **otáčavý** alebo **rotačný pohyb**. Analogicky s priamočiarym pohybom (patrí medzi **posuvné (translačné) pohyby**), ktorý je charakterizovaný dráhou \vec{s} , rýchlosťou \vec{v} a zrýchlením \vec{a} môžeme aj pohyb po kružnici charakterizovať orientovaným uhlom α , vektorom uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ a vektorom uhlového zrýchlenia $\vec{\epsilon}$. Kým v prípade priamočiareho pohybu sme mohli s dráhou, rýchlosťou a zrýchlením pracovať ako so skalárnymi veličinami, tak v prípade pohybu po kružnici sú spomínané veličiny vektormi.

Uvažujme teraz o pohybe hmotného bodu, ktorý sa otáča okolo pevnej osi o (Obr. 1.11). Odrazové sklíčko na bicykli opisuje pri otáčavom pohybe za daný čas rovnaký uhol. (Naproti tomu pri posuvnom pohybe všetky body telesa sa pohybujú po trajektóriách rovnakého tvaru, napr. po priamkach pri priamočiarym pohybe a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť.) Uhol α charakterizuje oblúk opísaný sprievodičom rotujúceho hmotného bodu (odrazové sklíčko) so stredom kruhovej trajektórie. Ak poznáme dĺžku oblúka s , ktorú hmotný bod za čas t urazil a polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje je R , pre veľkosť uhla α platí

$$\alpha = \frac{s}{R}. \quad (1.48)$$

Hodnoty takto definovaného uhla sa udávajú v oblúkovej miere, t.j. v radiánoch (rad). Niekedy sa však môžeme stretnúť aj so zadaním uhla v stupňoch alebo otáčkach, pričom platí prevod

$$1 \text{ otáčka} = 360^\circ = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}, \quad (1.49)$$

odtiaľ potom dostávame

$$1 \text{ rad} = 57,3^\circ = 0,159 \text{ otočky}. \quad (1.50)$$

Ak teraz chceme skúmať otáčavý pohyb, znamená to skúmať časovú závislosť uhla otočenia hmotného bodu, čiže $\alpha = \alpha(t)$. Ak sa uhol otočenia hmotného bodu v čase t mení z hodnoty $\alpha_1(t_1)$ na hodnotu $\alpha_2(t_2)$, potom pod **otočením** hmotného bodu rozumieme v danom časovom intervale veličinu $\Delta\alpha$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (1.51)$$

Otočenie $\Delta\alpha$ rotujúceho hmotného bodu nadobúda kladné hodnoty, ak sa daný bod otáča v smere rastúceho uhla, t.j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Pri otáčaní v smere klesajúcich hodnôt uhla otočenia nadobúda záporné hodnoty. (Otočenie v zmysle vektorovej

algebry nie je vektorovou veličinou, pretože skladanie otočení nie je komutatívne (pri zmene poradia dvoch otočení knihy o uhol 90° v rôznych smeroch nedostaneme knihu do tej istej polohy). Pri infinitezimálnych otočeniach $d\alpha$ však môže byť pokladané za vektorovú veličinu.)

Nech v čase t_1 je uhol otočenia hmotného bodu α_1 a v čase t_2 je uhol otočenia α_2 . **Priemerná uhlová rýchlosť** hmotného bodu v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ je definovaná vzťahom

$$\bar{\omega} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}, \quad (1.52)$$

kde $\Delta\alpha$ predstavuje otočenie hmotného bodu v časovom intervale Δt .

(Okamžitá) uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ je limitou priemernej uhlovej rýchlosti vyjadrenej vzťahom (1.50) pri poklese veličiny Δt k nulovej hodnote, t.j.

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (1.53)$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je $rad.s^{-1}$ (alebo Is^{-1} , prípadne otáčky/s). V prípade, že uhlová rýchlosť rotujúceho bodu nie je konštantná, daný bod má nenulové uhlové zrýchlenie. Ak uhlová rýchlosť v čase t_1 je ω_1 a v čase t_2 je ω_2 , potom **priemerné uhlové zrýchlenie** hmotného bodu v časovom intervale Δt je definované vzťahom

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (1.54)$$

kde $\Delta\omega$ predstavuje zmenu uhlovej rýchlosti hmotného bodu v danom časovom intervale Δt . **(Okamžité) uhlové zrýchlenie** $\vec{\varepsilon}$ je limitou priemerného uhlového zrýchlenia pri poklese Δt k nulovej hodnote, t.j.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.55)$$

Jednotkou uhlového zrýchlenia je $rad.s^{-2}$ (alebo Is^{-2} , prípadne otáčky/s²).

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie sú vektorové veličiny, to znamená, že vzťahy (1.53) a (1.55) môžeme zapísať aj vo vektorovom tvare, pričom orientácia vektorov $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ je totožná a je určená podľa pravidla pravej ruky. Vektory majú smer kolmý na rovinu danú pohybom s orientáciou nahor, resp. nadol v závislosti na smere pohybu hmotného bodu.

Okrem týchto veličín môže byť pohyb po kružnici popísaný aj pomocou obvodovej rýchlosti \vec{v} . Smer vektora obvodovej rýchlosti je dotyčnica ku kružnici v danom mieste, čiže sa nachádza v rovine kružnice.

Podobným spôsobom ako v prípade priamočiareho pohybu môžeme odvodiť vzťah pre uhol a uhlovú rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. V takom prípade je zrýchlenie ε konštantné, smery vektorov uhlového zrýchlenia a uhlovej rýchlosti sú zhodné a vzťah (1.55) sa dá prepísať nasledovne

$$d\omega = \varepsilon dt. \quad (1.56)$$

Uhlová rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu je potom po zintegrování vzťahu (1.56) daná zápisom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (1.57)$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je zrýchlenie $\varepsilon > 0$ a pre spomalený pohyb je $\varepsilon < 0$. Pre vyjadrenie opísaného uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici využijeme základný vzťah pre vyjadrenie uhla (1.53) a použijeme odvodený vzťah (1.57). Následne dostaneme

$$\int d\alpha = \int (\omega_0 + \varepsilon t) dt \quad (1.58)$$

a ďalším zintegrováním dostávame pre uhol rovnomerne zrýchleného pohybu vzťah

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (1.59)$$

Tento vzťah je všeobecným vyjadrením uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. Symbol α_0 predstavuje uhol prejdený v čase $t = 0$ s a ω_0 je uhlová rýchlosť v čase $t = 0$ s. Vo všetkých predchádzajúcich vzťahoch je vidieť analógiu veličín a vzťahov s priamočiarym pohybom, na čo poukazuje aj Tab. 1.1.

Tab. 1.1 Analógia veličín a vzťahov pre pohyb po kružnici a priamočiary pohyb

Pohyb po kružnici	Priamočiary pohyb
α	\vec{r}
$\vec{\omega}$	\vec{v}
$\vec{\varepsilon}$	\vec{a}
$\vec{\omega} = \frac{d\alpha}{dt}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$
$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$	$v = v_0 + at$
$\alpha = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$

Úloha 1.4:

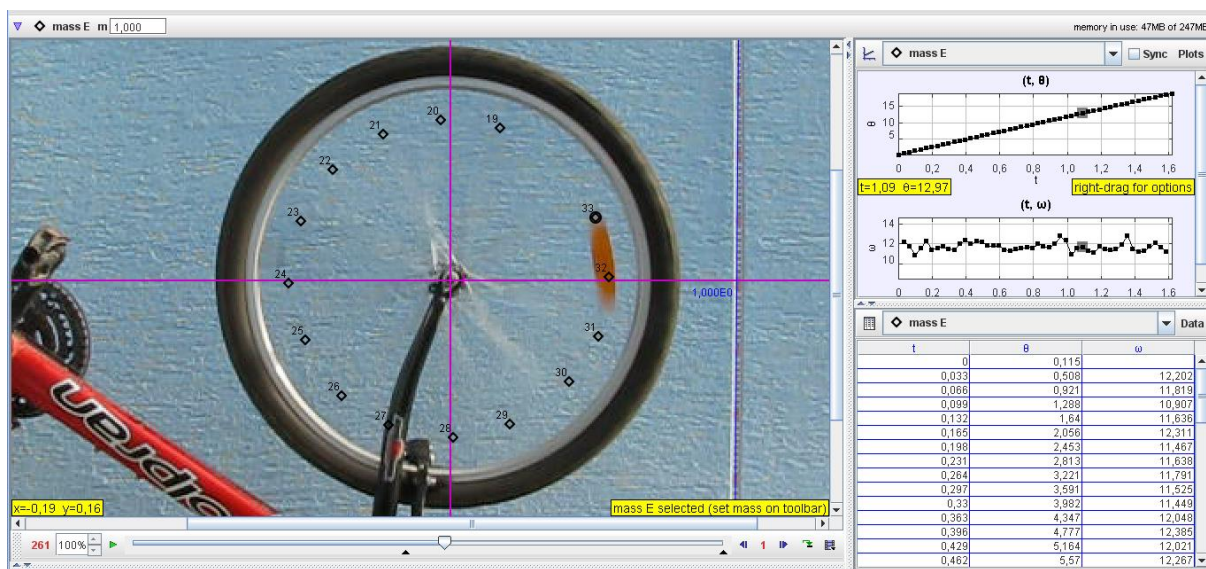
Analyzujte otáčavý pohyb kolesa (odrazového sklíčka). Určte uhlovú rýchlosť otáčania kolesa, určte uhlové zrýchlenie pri brzdení kolesa.

(dĺžka meradla: 1 m).

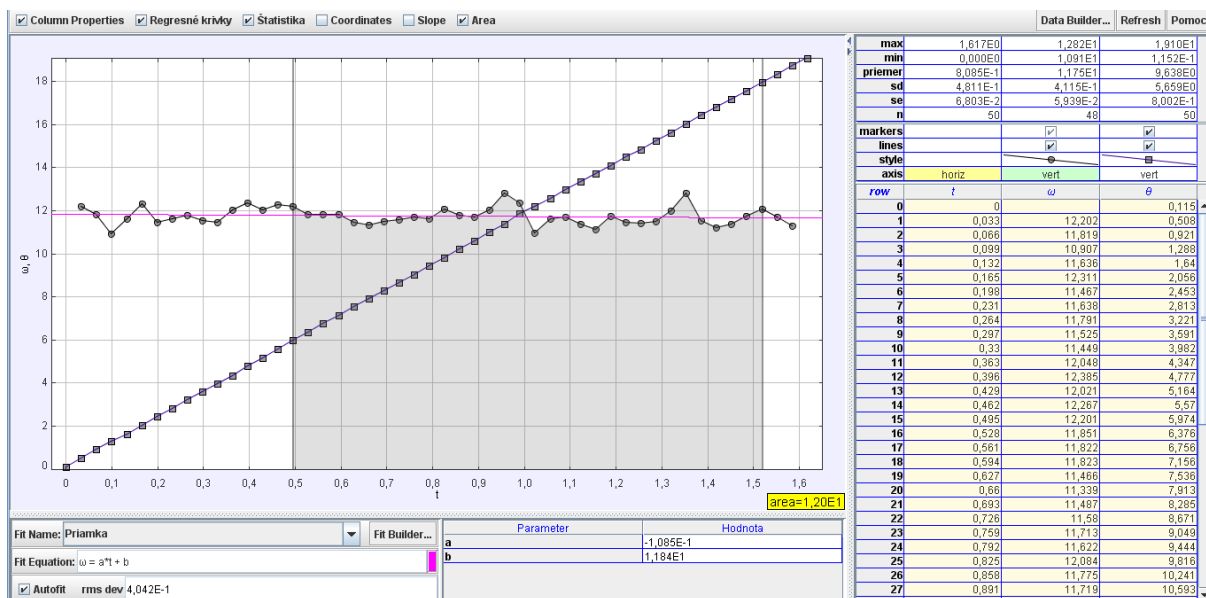
zdroj: [koleso.avi](#) (30 fps),

Riešenie:

Pokúsme sa teraz spoločne tak ako v predchádzajúcej časti analyzovať pohyb hmotného bodu po kružnici. Na Obr. 1.11 je zaznamenaný pohyb odrazového sklička na kolese bicykla. Matematickou analýzou grafov daných pohybov (Obr. 1.12, Obr. 1.13) môžeme usúdiť s istou presnosťou, že sa jedná o rovnomerný otáčavý pohyb, pričom veľkosť priemernej uhlovej rýchlosti je $\omega = 11,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Uhol otočenia v čase t môžeme popísať rovnicou $\alpha(t) = \theta = 11,8t + 0,127$. Obdobnou analýzou ako v predchádzajúcom prípade analýzy priamočiarych pohybov môžeme určiť uhol otočenia v istom časovom okamihu ako obsah plochy pod grafom závislosti uhlovej rýchlosti v danom časovom okamihu (Obr. 1.12 – obsah vyznačenej plochy je 12 rad , čo odpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta\alpha = \Delta\theta = (18 - 6) \text{ rad} = 12 \text{ rad}$.) (V programe Tracker je možné zvoliť aj stupne.)

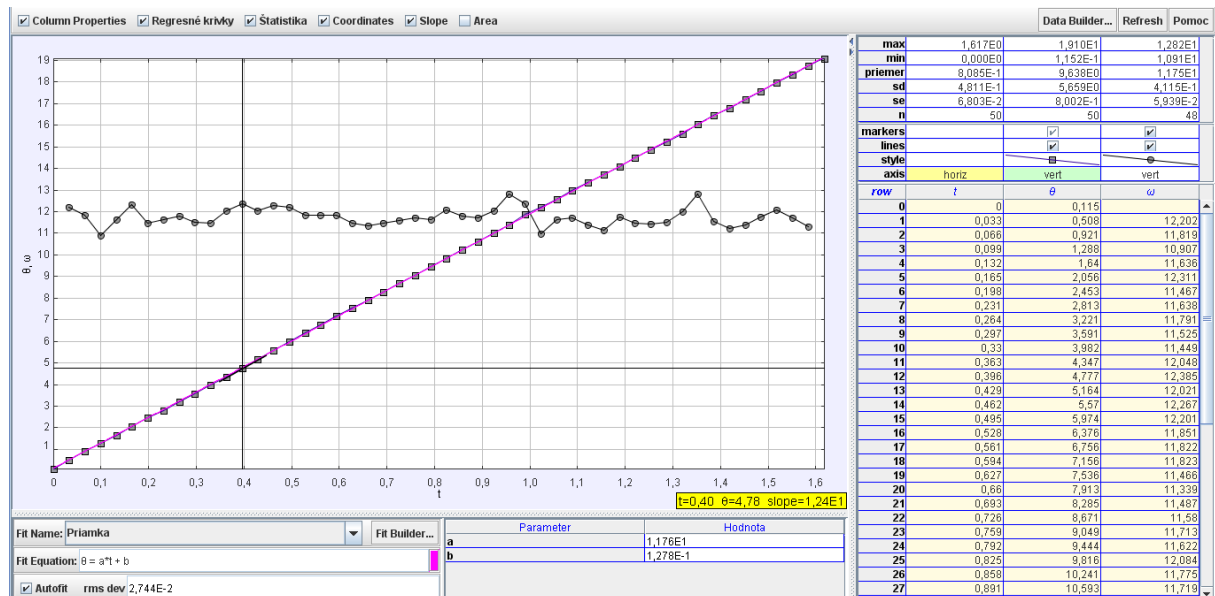


Obr. 1.11 Analýza pohybu odrazového sklička na kolese bicykla

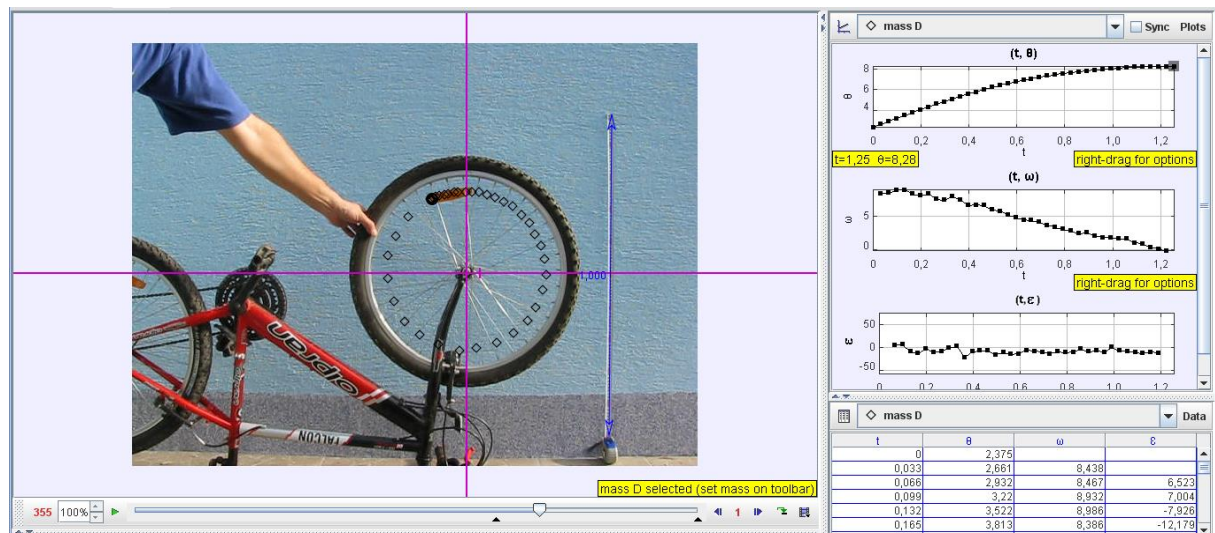


Obr. 1.12 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (gulôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času, analýza uhlovej rýchlosti

Obdobnou analýzou grafu závislosti uhla otočenia na čase možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (Obr. 1.13 – v čase $t = 0,40s$ má smernica dotyčnice hodnotu $12,4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, čo odpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky: $\omega(0,40s) = 12,385 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$).



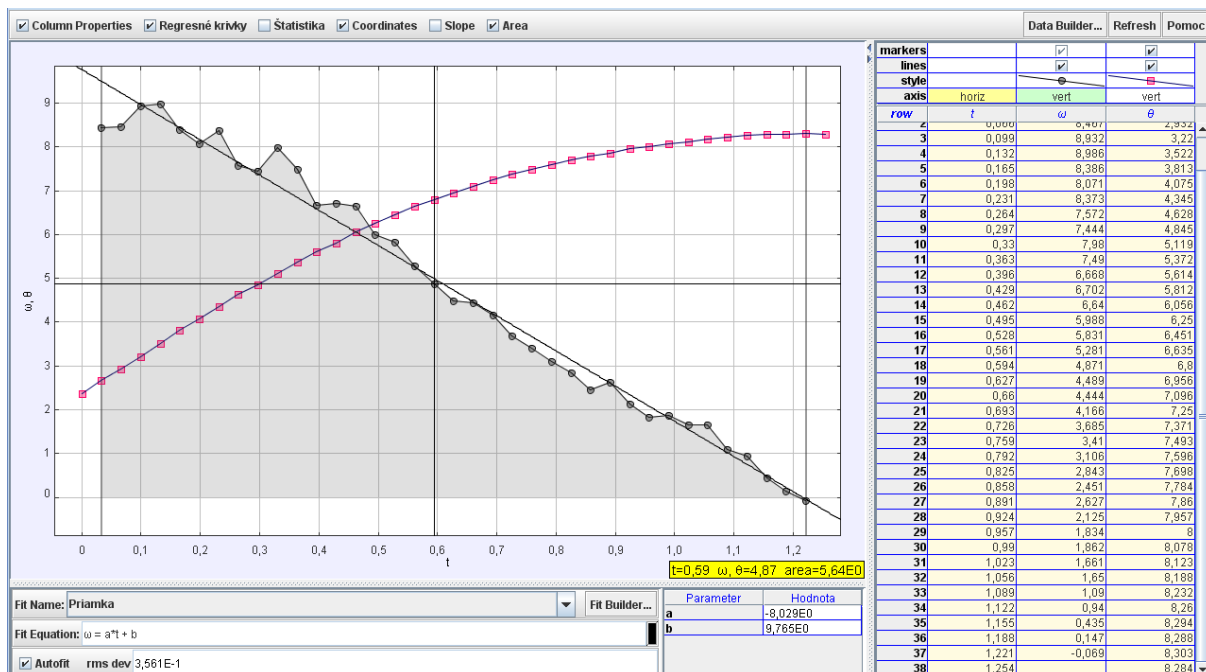
Obr. 1.13 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhla otočenia



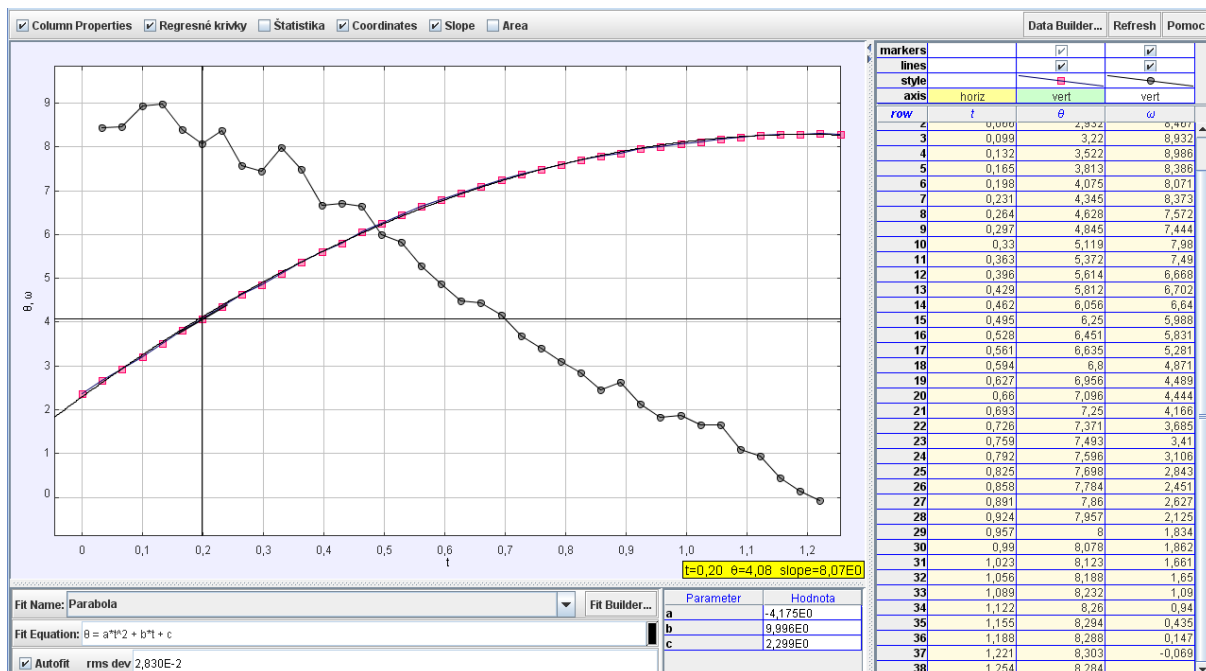
Obr. 1.14 Analýza pohybu odrazového sklička na kolese bicykla pri brzdení kolese

Na Obr. 1.14 je znázornená analýza pohybu odrazky na kolese bicykla pri jeho brzdení. Detailnejšou analýzou časových závislosti možno usúdiť (Obr. 1.15, Obr. 1.16), že sa jedná o rovnomerne spomalený otáčavý pohyb, ktorý možno popísať rovnicami $\omega(t) = -8,029t + 9,765$ a $\alpha(t) = \theta(t) = -1/2 \cdot 8,35t^2 + 9,996t + 2,299$, pričom veľkosť uhlového zrýchlenia je približne rovná $\epsilon \approx 8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$ a uhlová rýchlosť na začiatku brzdenia kolese mala hodnotu približne $\omega \approx 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (Obr. 1.16 – v čase $t = 0,20s$ má smernica dotyčnice hodnotu $8,07 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, čo odpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky: $\omega(0,20s) = 8,071 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) a uhol otočenia v danom časovom intervale ako

obsah plochy pod krivkou závislosti uhlovej rýchlosti na čase (Obr. 1.15 - obsah vyznačenej plochy je $5,64 \text{ rad}$, čo odpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{37} - t_1 = 1,221 \text{ s} - 0,033 \text{ s} = 1,188 \text{ s}$: $\Delta \alpha = \Delta \theta = \theta_{37} - \theta_1 = 8,303 \text{ rad} - 2,661 \text{ rad} = 5,642 \text{ rad}$).



Obr. 1.15 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhlovej rýchlosti



Obr. 1.16 Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčky) od času, analýza uhla otočenia

1.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti

Na odvodenie vzťahu, ktorý vyjadruje vzájomný súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou, použijeme základnú definíciu uhlovej rýchlosti (1.53) a súvis medzi opísaným uhlom α a prejdenou dráhou, ktorú v tomto prípade predstavuje oblúk s (vzťah (1.48)). Dosadením rovnosti (1.48) za α do vzťahu (1.53) dostávame

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\left(\frac{s}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}, \quad (1.60)$$

kde $\frac{ds}{dt} = v$ je už známa definícia okamžitej rýchlosti posuvného pohybu. Po dosadení dostávame vzťah medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou v skalárnom tvare

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (1.61)$$

(Ešte elegantnejšie je možné dopracovať sa k tomuto vzťahu priamo deriváciou vzťahu (1.48) podľa času, čo už ponechávame na samotnom čitateľovi.) Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že aj keď sa všetky časti telesa otáčajúceho sa okolo vlastnej osi otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou, častice telesa, ktoré obiehajú vo väčšej vzdialenosti R od osi otáčania, pohybujú sa aj väčšou obvodovou rýchlosťou v . Predchádzajúci vzťah však nevystihuje smer rýchlosti, hovorí iba o veľkosti obvodovej rýchlosti. Vo vektorom tvare je výsledný vzťah charakterizujúci súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou daný zápisom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (1.62)$$

1.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici

V prípade rovnomerného otáčavého pohybu telesa po kružnici stálou uhlovou rýchlosťou je podľa vzťahu (1.61) časovo nepremenná obvodová rýchlosť každej častice telesa. Vtedy vykoná každý hmotný bod telesa jeden obeh po kružnici za rovnaký časový interval. **Čas, za ktorý vykoná hmotný objekt jeden obeh po kružnici rovnomerným pohybom sa nazýva perióda (T).** Doba obehu je pre všetky častice otáčajúceho sa telesa rovnaká. Jednotkou periódy je 1s. Perióda je vyjadrená vzťahom

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \quad (1.63)$$

z ktorého je zrejme, že je podielom dĺžky kruhovej trajektórie hmotného bodu ($2\pi R$) a jej obvodovej rýchlosti v . Po dosadení vzťahu (1.61) do tejto rovnice dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.64)$$

Okrem periódy sa pre rovnomerné pohyby po kružnici zavádza aj ďalšia fyzikálna veličina **frekvencia (f).** **Frekvencia je definovaná ako počet obbehov hmotného bodu rovnomerným**

pohybom po kružnici za jednotku času. Matematicky je vyjadrená ako prevrátená hodnota periódy

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.65)$$

Jednotkou frekvencie je $1s^{-1} = 1Hz$ (Hertz). Pomocou týchto zavedených veličín je možné vyjadriť uhlovú rýchlosť. Keďže perióda a frekvencia popisujú výhradne rovnomerné pohyby, tak aj vzťah pre uhlovú rýchlosť (1.53) sa môže zjednodušiť

$$\omega = \frac{\alpha}{t}. \quad (1.66)$$

Jeden obchod po kružnici zodpovedá uhlu $\alpha = 2\pi$ a čas $t = T$. Po dosadení vzťahu (1.66) prejde na tvar

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.67)$$

alebo po dosadení vzťahu (1.65) na tvar

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.68)$$

1.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

Podľa základnej definície zrýchlenia v priestore (1.42) je zrýchlenie vektorová veličina vyjadrená ako časová zmena vektora rýchlosti. Ak dôjde k časovej zmene rýchlosti je potom zrýchlenie nenulové. Táto zmena rýchlosti môže byť reprezentovaná buď zmenou jej veľkosti alebo jej smeru. V predchádzajúcej kapitole sme analyzovali priamočiary pohyb, pričom sme neuvažovali o zmene smeru rýchlosti. V prípade pohybu po kružnici sa však táto zmena smeru rýchlosti nedá zanedbať. Zmenu smeru rýchlosti bude popisovať **normálové (radiálne) zrýchlenie** \vec{a}_n a zmenu jej veľkosti **tangenciálne zrýchlenie** \vec{a}_t . Ich orientáciu na kružnici znázorňuje Obr. 1.17. Kým vektor tangenciálneho zrýchlenia a_t je dotyčnicou ku kruhovej trajektórii pohybu v danom mieste, tak vektor normálového zrýchlenia a_n má smer do stredu kružnice. Celkové zrýchlenie potom môžeme vyjadriť ako vektorový súčet oboch zrýchlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (1.69)$$

alebo v prípade určenia len veľkosti celkového zrýchlenia

$$|a| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (1.70)$$

Odvodíme teraz vzťahy pre tangenciálne a normálové zrýchlenie, pričom využijeme všeobecnú definíciu zrýchlenia v priestore (1.42) a použijeme prepis vektora rýchlosti ako súčin veľkosti rýchlosti vyjadrenej skalárom v a smeru charakterizovanom jednotkovým vektorom (1.47)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt}. \quad (1.71)$$

Podľa pravidiel pre derivovanie súčinu je možné upraviť predchádzajúci vzťah (1.71) na nasledujúci tvar

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.72)$$

Prvá časť vzťahu (1.72) charakterizuje zmenu veľkosti rýchlosti, a teda predstavuje tangenciálnu zložku zrýchlenia, pričom za rýchlosť môžeme dosadiť vzťah (1.61), ε predstavuje uhlové zrýchlenie. Druhá časť vyjadruje zmenu smeru rýchlosti a predstavuje normálovú zložku zrýchlenia

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = R \frac{d\omega}{dt} \vec{\tau} = R\varepsilon \vec{\tau}, \quad (1.73)$$

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{\rho}. \quad (1.74)$$

kde ρ je jednotkový vektor smerujúci do stredu kružnice. Určenie tangenciálneho zrýchlenia podľa vzťahu (1.73) je potom analogické určenie zrýchlenia priamočiareho pohybu. Pre celkové zrýchlenie s dosadením predchádzajúcich vzťahov pre tangenciálne zrýchlenie (1.73) a normálové zrýchlenie (1.74) dostávame

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \vec{\rho}. \quad (1.75)$$

Vzťah (1.75) je vyjadrením celkového zrýchlenia hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici s polomerom R . V prípade rovnomerného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie nulové a normálové zrýchlenie konštantné. A zase v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie konštantné a normálové zrýchlenie narastá s druhou mocninou obvodovej rýchlosti.

Úloha 1.5:

Analyzujte otáčavý pohyb odrazového sklíčka a bieleho kruhu na otáčajúcom sa kolese. Určte uhlovú a obvodovú rýchlosť otáčania odrazového sklíčka, kruhu a navzájom ich porovnajte. Čo platí pre uhlové zrýchlenie pri rozbehu a brzdení kola?

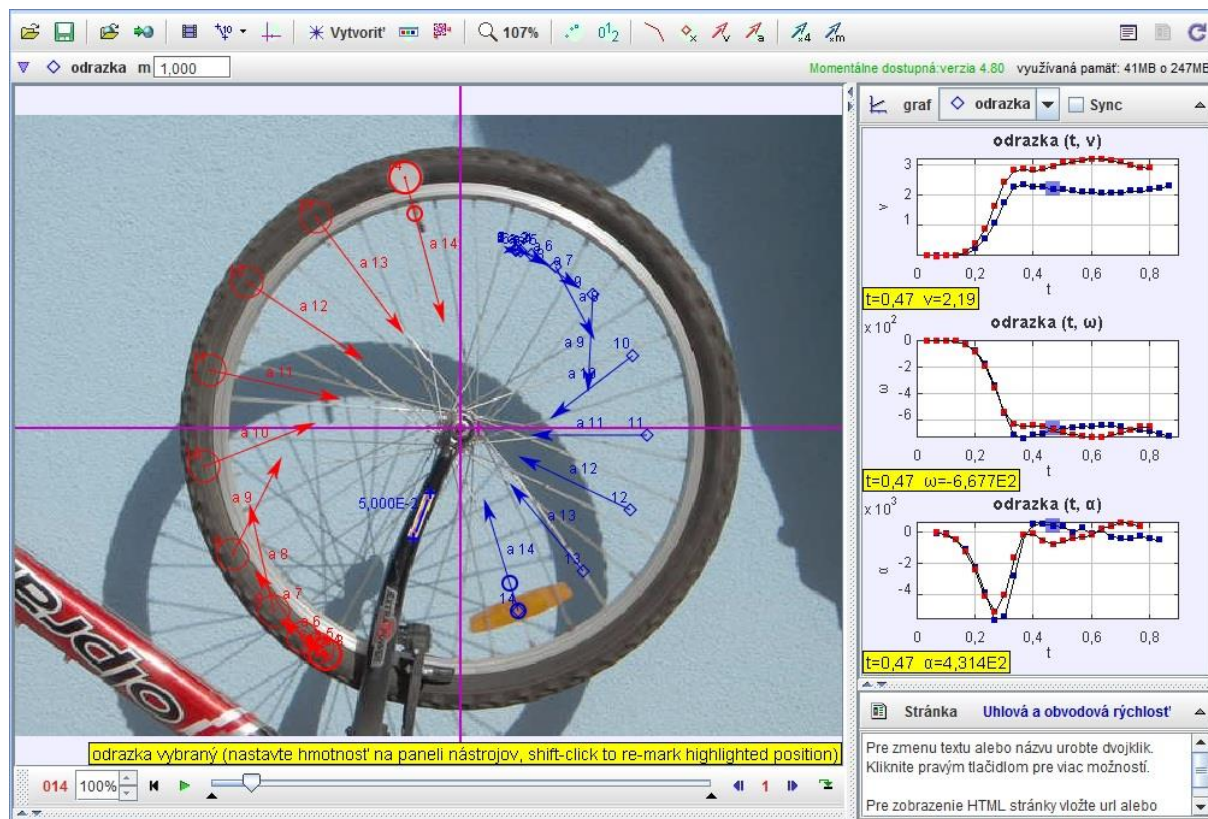
(dĺžka meradla: 1 m, 120 fps).

zdroj: [koleso_120.avi](#)

Riešenie:

Pre analýzu použijeme časové závislosti obvodovej a uhlovej rýchlosti odrazového sklíčka a bieleho bodu, časovú závislosť uhlovej rýchlosti. Program Tracker umožňuje vzájomné porovnanie viacerých hmotných bodov (odrazové sklíčko a biely bod), čo umožňuje priamo odpovedať na zadané otázky. Zaujímavé je taktiež sledovať vektor

zrýchlenia rozbiehajúcich sa hmotných bodov a ich smer a veľkosť v závislosti od pôsobiacej sily (dotyk ruky s kolesom) a rýchlosti kolesa. Danú analýzu a skúmanie smeru a veľkosti okamžitého zrýchlenia, aplikáciu vzťahov (1.73), (1.74) ponechávame na samotnom čitateľovi.



Obr. 1.17 Analýza rozbehu kolesa, obvodovej a uhlovej rýchlosti a zrýchlenia

Neriešené úlohy:

Úloha 1.6: Určte periódu a frekvenciu otáčavého pohybu vrtule lietadla pri lete.

(frekvencia snímok: 1000 fps)

zdroj: [vrtula.avi](#)

Úloha 1.7: Analyzujte pohyb rakety, určte jej rýchlosť, zrýchlenie tesne po odpálení.

(dĺžka meradla: 1 m, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [raketa.avi](#), [raketa odpal.avi](#)

Úloha 1.8: Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty v čase. Akú má rýchlosť lopta v najvyššom bode, aké má zrýchlenie?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [vrh_nahor2.avi](#),

(hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vrh_nahor.avi](#)

2. Dynamika hmotného bodu

Dynamiku hmotného bodu charakterizujú pohybové zákony, ktoré sformuloval Isaac Newton (1642-1727). Ešte ale aj dnes sa mnohokrát stretávame s nesprávnym, tzv. aristotelovským názorom, podľa ktorého pre udržanie telesa v pohybe stálou rýchlosťou je potrebné nejaké silové pôsobenie („sila“), lebo inak sa teleso zastaví. Ak by sme pripravili ľadovú plochu dokonale hladkú, puk by sa po náraze pohyboval po dokonale hladkej ploche bez toho, aby spomaľoval a zastavil sa. Na udržanie stálej rýchlosti pohybu telesa po dokonale hladkej podložke teda nepotrebujeme silu (zatiaľ neuvažujeme o odporových ani trecích silách). Pre zjednodušenie nebudeme uvažovať o otáčavom pohybe a budeme pracovať výlučne s modelom hmotného bodu.

Vzájomné pôsobenie telies (interakcia) sa môže uskutočňovať napr. pri vzájomnom styku telies alebo prostredníctvom fyzikálnych polí (gravitačného, elektrického, magnetického). Toto vzájomné pôsobenie telies alebo telies a polí charakterizuje vektorová fyzikálna veličina *sila* – \vec{F} . Výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť zmena ich pohybového stavu alebo deformácia týchto telies. Teleso, ktoré je v dostatočnej vzdialenosti od všetkých ostatných telies a nepôsobí na neho žiadne pole (nie je v žiadnom vzájomnom pôsobení s iným fyzikálnym objektom) nazývame *izolované teleso* (prípadne ak zanedbávame rozmery telesa hovoríme o *izolovanom hmotnom bode*). Ako izolované sa správajú všetky telesá, pri ktorých je silové pôsobenie ostatných telies vykompenzované.

Vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body zotrúvajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe sa nazývajú *inerciálne vzťažné sústavy*. Zmenu pohybového stavu telies môže v inerciálnych vzťažných sústavách spôsobiť len ich vzájomné pôsobenie s inými objektmi. V inerciálnych vzťažných sústavách izolované hmotné body, ktoré sú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe, majú vlastnosť zotrúvať v tomto stave. *Zotrúvanosť* je jednou z vlastností hmoty a nezávisí na rýchlosti hmotného bodu.

Vzťažné sústavy, v ktorých zmena pohybového stavu telies môže nastať bez ich vzájomného pôsobenia s ostatnými objektmi sa nazývajú *neinerciálne vzťažné sústavy*. V mnohých prípadoch môžeme s dostatočnou presnosťou za inerciálnu považovať vzťažnú sústavu spojenú s povrchom Zeme. Vždy možno nájsť reálnu vzťažnú sústavu, ktorá bude s dostatočnou presnosťou spĺňať vlastnosti inerciálnej vzťažnej sústavy a umožní čo najjednoduchší opis a vysvetlenie fyzikálnych dejov.

Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si navzájom rovnocenné. Bud' sa navzájom pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom alebo sú v pokoji, pričom nie je možné žiadnym pokusom v inerciálnej vzťažnej sústave určiť, či je daná sústava v pokoji alebo v rovnomernom priamočiari pohybe. V prípade niektorých fyzikálnych veličín namerajú pozorovatelia v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách tie isté hodnoty. Takýmito *invariantnými veličinami* v newtonovskej mechanike sú *sila*, *hmotnosť*, *zrýchlenie* a *čas*. Iné fyzikálne veličiny, ako napr. *rýchlosť*, majú pre pozorovateľa v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách rôzne hodnoty (pre jedného pozorovateľa nachádzajúceho sa v inerciálnej vzťažnej sústave pohybujúcej sa rýchlosťou v je určitý objekt v pokoji, pre iného pozorovateľa v inej sústave sa ten istý objekt pohybuje napr. rýchlosťou v). Vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách však platí *princíp invariantnosti: Fyzikálne zákony vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách majú rovnaký tvar*.

Z tohto princípu vyplýva, že voľba vzťažnej sústavy nemôže ovplyvniť platnosť fyzikálnych zákonov. Princíp invariantnosti hovorí, že dvaja rôzni pozorovatelia, ktorí budú študovať tú istú udalosť v dvoch rôznych inerciálnych sústavách musia dôjsť k záveru, že príroda funguje pre oboch rovnako. Aj keď hodnoty napr. práce a kinetickej energie namerané rôznymi

pozorovateľmi sa budú líšiť, vzťah medzi prácou a kinetickou energiou bude v oboch vzťahných sústavách rovnaký.

Pri video analýze dejov v programe Tracker si väčšinou zvolíme inerciálnu vzťahnú sústavu, ktorá bude v pokoji a jej počiatok spojíme s bodom, ktorý sa na videu nepohybuje. (Preto je aj pri príprave ďalších videí vhodné používať statív, aby daný obraz nebol roztrasený a aby sme sa pri analýze dopúšťali čo najmenších chýb merania.)

2.1 Newtonove pohybové zákony, hybnosť, impulz sily

Prejdime teda k základným zákonom dynamiky a sformulujeme **prvý Newtonov pohybový zákon (zákon zotrvačnosti)**, ktorý hovorí:

Každý hmotný bod v inerciálnej vzťahnej sústave zotrva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.

Treba poznamenať, že prvý Newtonov pohybový zákon platí nielen v prípadoch, kedy na teleso nepôsobia žiadne sily, ale aj vtedy, keď sily pôsobia, ale ich výslednica je nulová. Zákon charakterizuje **zotrvačnosť** ako základnú vlastnosť každého izolovaného hmotného bodu zotrvať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe v inerciálnej vzťahnej sústave. Čím väčšia je zotrvačnosť telesa, tým väčšia sila je potrebná na to, aby sme zmenili rýchlosť na určitú hodnotu. Zo zákona vyplýva, že na zmenu pohybového stavu hmotného bodu v inerciálnej vzťahnej sústave je potrebné jeho vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Mierou toho pôsobenia je sila. Zotrvačné a gravitačné vlastnosti objektov charakterizuje ďalšia fyzikálna veličina, ktorú nazývame **hmotnosť** m (jednotka v sústave SI je kilogram $[m] = \text{kg}$). Hmotnosť je charakteristikou samotného predmetu. Na tomto mieste je vhodné zdôrazniť rozdiel medzi tiažovou silou, hmotnosťou a ich určovaním. Vážením určujeme veľkosť tiaže, ktorou Zem pôsobí na teleso. Potom zo znalosti tiažového zrýchlenia g v mieste merania dokážeme určiť veľkosť hmotnosti telesa. (Pri analýzach v programe Tracker je potrebné poznať hmotností analyzovaných telies, ktoré sa priamo zadávajú do programu.)

Zo skúsenosti vieme, že ak na dve telesá rôznej hmotnosti budeme pôsobiť rovnakou silou (napr. kopnutie do rôznych lôpt), bude aj ich pohybový účinok iný – čím menšia hmotnosť, tým väčšia zmena rýchlosti telesa za jednotku času, čiže zrýchlenia. Alebo čím väčšia má byť zmena rýchlosti telesa danej hmotnosti za určitý čas, tým väčšia sila naň musí pôsobiť. Prípadne, pre to isté zrýchlenie rôznych telies musí byť pôsobiaca sila tým väčšia, čím väčšia je ich hmotnosť. Zhrnutím týchto poznatkov dospejeme k formulácii **druhého Newtonovho pohybového zákona (zákon sily)**:

Aby mal hmotný bod s hmotnosťou m v inerciálnej vzťahnej sústave zrýchlenie a , musia naň okolité objekty pôsobiť výslednou silou F :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \text{alebo} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.1)$$

Je potrebné si uvedomiť, že sila nie je príčinou pohybu, ale je príčinou zmeny pohybového stavu telesa. Sila \vec{F} je vektorovou fyzikálnou veličinou, ktorej smer je zhodný so smerom zrýchlenia \vec{a} , ktoré udeľuje hmotnému objektu. Pod silou \vec{F} môžeme rozumieť aj vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso. Jednotkou sily je *newton* (N). *1 newton* je sila, ktorá telesu hmotnosti 1 kg udeľuje zrýchlenie 1 m.s^{-2} . Odtiaľ $[F] = 1\text{N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$.

Za povšimnutie stojí, že druhý Newtonov pohybový zákon nie je v rozpore s prvým. Ak na hmotný bod nepôsobia žiadne sily, podľa rovnice (2.1) sa bude hmotný bod pohybovať bez zrýchlenia, t.j. rovnomerným pohybom alebo bude v pokoji.

Zmena pohybového stavu hmotného bodu nezávisí len od pôsobiacej sily, ale aj od času, za ktorý sila pôsobila. Mierou časového účinku sily je fyzikálna veličina, ktorú nazývame **impulz sily**. Impulz sily \vec{I} je definovaný ako súčin sily \vec{F} a času t , počas ktorého sila pôsobila. Pre konštantnú silu platí

$$\vec{I} = \vec{F}t. \quad (2.2)$$

Ak sila nie je konštantná, môžeme vo všeobecnosti pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt. \quad (2.3)$$

Impulz sily je vektorovou fyzikálnou veličinou a pre konštantnú silu má smer rovnaký ako sila. Ak bude sila \vec{F} za čas t pôsobiť na hmotný bod s konštantnou hmotnosťou m , pre impulz sily platí

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_0^t m\vec{a}dt = m \int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_0}^v d\vec{v} = m(\vec{v} - \vec{v}_0), \quad (2.4)$$

kde v a v_0 sú rýchlosti hmotného bodu v čase t a $t = 0$ s. Súčin hmotnosti m a rýchlosti v hmotného bodu nazývame **hybnosť** a označujeme \vec{p}

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Hybnosť je vektorová fyzikálna veličina, ktorej smer je totožný so smerom rýchlosti. Jednotkou hybnosti je $[p] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Zadefinovaním hybnosti môžeme pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}dt = \vec{p} - \vec{p}_0. \quad (2.6)$$

Impulz sily, ktorá pôsobí na hmotný bod, je rovný zmene jeho hybnosti.

Zavedenie hybnosti nám umožňuje druhý Newtonov pohybový zákon zapísať aj v inej forme

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.7)$$

Z vyjadrenia vyplýva, že sila pôsobiaca na hmotný bod je rovná derivácii jeho hybnosti podľa času. Na základe predchádzajúcej formulácie môžeme **druhý Newtonov zákon** formulovať nasledovne:

Pomer zmeny hybnosti hmotného bodu a doby, za ktorú táto zmena nastala, je priamo úmerný výslednej pôsobiacej sile.

Z tejto formulácie vyplýva, že ak nastala zmena hybnosti v čase, musela na teleso pôsobiť sila, prípadne obrátene, ak na teleso bude pôsobiť sila, nastane zmena jeho hybnosti.

Silové pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné. Tento poznatok je obsahom **tretieho Newtonovho pohybového zákona (zákon akcie-reakcie)**, ktorý hovorí:

Dva hmotné body na seba navzájom pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \quad (2.8)$$

Jednu z týchto síl nazývame **akcia** a druhú **reakcia**. Akcia a reakcia súčasne vznikajú a súčasne zanikajú. Každá z týchto síl pôsobí na iné teleso, preto sa vo svojich účinkoch navzájom nerušia. (Ak dve rovnako veľké sily opačného smeru pôsobia súčasne na ten istý hmotný bod, nejedná sa o akciu a reakciu.)

2.2 Práca

Ak chceme premiestniť nejaký predmet, musíme vynaložiť určitú námahu. Zvyčajne to robíme tak, že na predmet pôsobíme silou a vykonáme pri tom istú prácu. Vo všeobecnosti pod prácou rozumieme mieru účinku sily, ktorým hmotný bod mení svoju polohu. Ak na hmotný bod bude pôsobiť nejaká konštantná sila \vec{F} tak, že jej účinkom sa posunie po úsečke (dráhe) \vec{s} a ak navyše smer sily a dráhy je ten istý, potom práca W je rovná priamo súčinu veľkosti sily F a dráhy s

$$W = Fs. \quad (2.9)$$

Ak smer sily a dráhy nebudú rovnaké, ale budú zvierat' uhol α , práca bude rovná súčinu veľkosti priemetu sily do smeru dráhy a dráhy s

$$W = Fs \cos \alpha. \quad (2.10)$$

Využitím znalostí z vektorového počtu o skalárnom súčine dvoch vektorov môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do vektorového tvaru

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}, \quad (2.11)$$

pričom \vec{s} predstavuje orientovanú úsečku (vektor dráhy).

Ak bude na hmotný bod pôsobiť premenlivá sila, dráhu rozdelíme na také malé intervaly $\Delta\vec{s}$, aby sme v každom z nich mohli považovať silu \vec{F} za konštantnú, resp. dráhu za priamočiaru. Elementárnu prácu v i -tom intervale vypočítame zo vzťahu

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \quad (2.12)$$

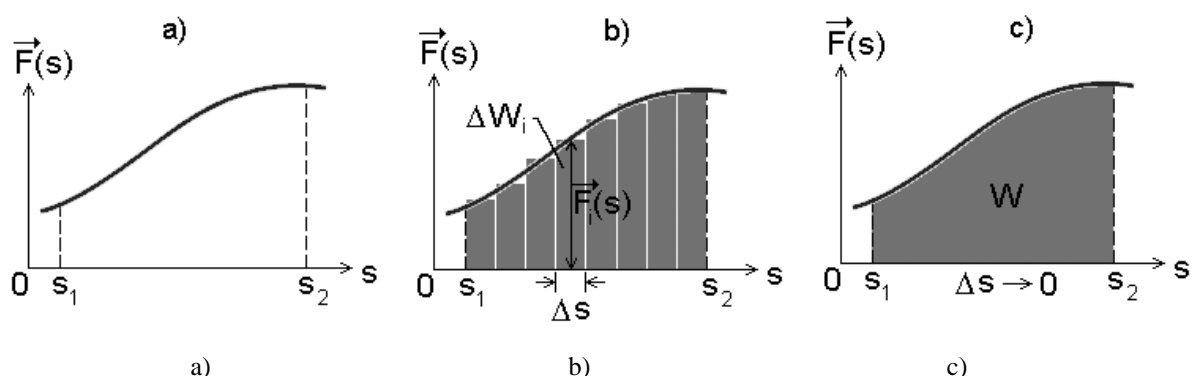
a celkovú prácu dostaneme súčtom jednotlivých elementárnych prác pozdĺž celej dráhy

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i. \quad (2.13)$$

Ak jednotlivé intervaly budú nekonečne malé (infinitesimalne) $d\vec{s}$, sumácia prejde na integrál

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (2.14)$$

pričom integrovať treba pozdĺž celej dráhy (Obr. 2.1).



Obr. 2.1 a) Graf závislosti sily pôsobiacej na časticu, ktorá sa pohybuje po priamej dráhe s , pričom sila F na ňu pôsobí rovnobežne s osou s v intervale s_1 až s_2 . b) Dráha v intervale s_1 až s_2 bola rozdelená na jednotlivé rovnaké elementy Δs , v ktorých predpokladáme pôsobenie konštantnej sily $F_i(s)$. Sila v danom intervale vykoná prácu ΔW_i . c) Limitný prípad, kedy $\Delta s \rightarrow 0$ a práca vykonaná silou $F(s)$ v intervale s_1 až s_2 je reprezentovaná obsahom vyfarbenej plochy pod krivkou.

2.3 Výkon

Tú istú prácu môžeme vykonať za rôzny čas. Mierou toho, ako „rýchle“ koná sila prácu je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva **výkon** P . Ak vykoná sila \vec{F} prácu ΔW za dobu Δt , je jej **priemerný výkon** v danom časovom intervale definovaný pomerom

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

Okamžitý výkon P je limitným prípadom priemerného výkonu pre $\Delta t \rightarrow 0$

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (2.16)$$

Jednotkou výkonu v SI je joule za sekundu, ale používanější je jednotka *watt* (W) [P] = $J \cdot s^{-1}$ = W. Stretnúť sa môžeme aj s jednotkou nazývanou *konská sila* (*konská sila* = 746 W). Pri stálom výkone P môžeme prácu vyjadriť ako súčin výkonu a času

$$W = Pt \quad (2.17)$$

a z tohto vzťahu nám pre prácu vyplýva bežne používaná jednotka – kilowatthodina ($1 \text{ kilowatthodina} = 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 1000 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$).

Ak vo vzťahu (2.16) vyjadríme prácu súčinom $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, môžeme pre výkon písať

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (2.18)$$

Výkon teda môžeme vyjadriť aj ako skalárny súčin sily a rýchlosti jej pôsobiska. Takže ak napr. ťahač bude pôsobiť na plne naložený prívies silou \vec{F} a rýchlosť príviesu je v danom okamihu \vec{v} , súčin sily a rýchlosti nám povie, aký je „výkon ťahača“ v danom okamihu.

2.4 Energia

Pod pojmom **energia** budeme rozumieť skalárnu fyzikálnu veličinu, ktorej hodnota je určená stavom fyzikálnej sústavy (objektu). Kinetická energia E_k súvisí s pohybovým stavom častice alebo telesa. Zo skúseností vieme, že ak sa teleso pohybuje rýchlejšie, jeho kinetická energia je väčšia, ak je teleso v pokoji, jeho kinetická energia je nulová. To isté platí aj pre kinetickú energiu telesa nezanedbateľných rozmerov, ak sa všetky jeho časti pohybujú rovnakou rýchlosťou \vec{v} , t.j. vykonávajú posuvný (translačný) pohyb, pričom uvažujeme, že teleso nerotuje ani nie je deformované. Jednotkou kinetickej energie (a všeobecne energie) je joule ($[E] = J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$). V oblasti časticovej fyziky sa zvykne používať aj jednotka elektrónvolt ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Prenos energie medzi objektom a jeho okolím môže byť sprostredkovaný silovým pôsobením alebo tepelnou výmenou. Deje súvisiace so silovým pôsobením nazývame súhrne konanie práce. Ak budeme na teleso pôsobiť nejakou silou, z 2. Newtonovho zákona vyplýva, že jeho rýchlosť bude rásť a tým rastie aj jeho kinetická energia. Naopak, ak bude teleso vplyvom výslednej sily spomaľovať, bude aj jeho kinetická energia klesať. Ak sa kinetická energia častice vplyvom silového pôsobenia jeho okolia všeobecne mení, hovoríme, že sily pôsobiace na časticu konajú prácu. Ak sila zväčšila (nezmenila, zmenšila) kinetickú energiu častice, hovoríme, že vykonala kladnú (nulovú, zápornú) prácu, prípadne hovoríme, že sila prácu koná (nekoná, sprostredkováva). V najširšom slova zmysle práca predstavuje tú časť energie, ktorú teleso získava prostredníctvom silového pôsobenia jeho okolia.

Podľa charakteru pôsobiacich síl hovoríme o energii mechanickej, elektrickej, chemickej, jadrovej a pod. Často sa používa tvrdenie, že energia je schopnosť konať prácu. Mierou procesu premeny energie aj mierou prenosu energie z jedného telesa na druhé je práca (fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje dej). Aj keď hodnoty veličín energie a práce vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, nesmieme tieto veličiny stotožňovať (jedna vyjadruje stav sústavy, druhá dej).

Keď na hmotný bod s hmotnosťou m pôsobí sila \vec{F} , udeľuje mu zrýchlenie \vec{a} , pričom koná prácu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_{r_1}^{r_2} d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (2.19)$$

Aby sa hmotný bod s hmotnosťou m , ktorý sa pohybuje rýchlosťou \vec{v} zastavil, musí na neho pôsobiť sila \vec{F}' opačného smeru, ako je smer rýchlosti \vec{v} . Sila \vec{F}' pri zastavovaní hmotného bodu koná prácu

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}'(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \dots = m \int_v^0 \vec{v} \cdot d\vec{v} = -m \int_v^0 v dv = -\left(0 - \frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.20)$$

Hmotný bod s rýchlosťou v má teda schopnosť vykonať prácu $\frac{1}{2}mv^2$. Hovoríme, že má pohybovú alebo *kinetickú* energiu. *Kinetická energia* hmotného bodu s hmotnosťou m pohybujúceho sa rýchlosťou \vec{v} je rovná

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.21)$$

Využitím vzťahu (2.19) môžeme vysloviť tvrdenie, že zmena kinetickej energie častice ΔE_k je rovná práci W vykonanej silou \vec{F}

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = W, \quad (2.22)$$

pričom symbolom E_{k0} sme označili počiatočnú kinetickú energiu častice $\frac{1}{2}mv_0^2$ a E_{k1} predstavuje výslednú kinetickú energiu častice $\frac{1}{2}mv_1^2$. Tento vzťah však neplatí všeobecne, stačí si predstaviť rotujúce alebo deformujúce sa teleso, kde sa jednotlivé časti telesa pohybujú rôznymi rýchlosťami.

Uvažujme teraz loptu hmotnosti m , ktorú môžeme považovať za bodový objekt. Ak ju vyhodíme zvisle nahor počiatočnou rýchlosťou \vec{v}_0 vzhľadom k Zemi (pričom pre jednoduchosť zanedbáme otáčanie Zeme okolo Slnka a jej rotáciu okolo vlastnej osi (vtedy tiažová sila Zeme \vec{F}_G je rovná gravitačnej sile \vec{F}_g) a uvažujeme len malé výšky nad povrchom Zeme), bude jej počiatočná kinetická energia $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$. V priebehu výstupu sa jej pohyb pôsobením príťažlivej *tiažovej sily* Zeme $\vec{F}_G = \vec{F}_g$, $\vec{F}_G = m \vec{g}$ (kde \vec{g} je vektor tiažového zrýchlenia smerujúci do stredu Zeme) spomaľuje a kinetická energia klesá. Ak bude tiažová sila jedinou silou, ktorá na loptu pôsobí (ak zanedbáme odporovú silu vzduchu), potom k zmene kinetickej energie prispieva iba práca tiažovej sily

$$W_g = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m\vec{g} \cdot d\vec{r} = m \int_{h_1}^{h_2} \vec{g} \cdot d\vec{h} = mg(h_1 - h_2). \quad (2.23)$$

Ak zoberíme záporne vzatú prácu vykonanú tiažovou silou, môžeme pri pohybe telesa v blízkosti povrchu Zeme zadefinovať zmenu **tiažovej potenciálnej energie sústavy** teleso – Zem

$$\Delta E_p = -W, \quad (2.24)$$

ktorá sa tiež nazýva **potenciálna energia telesa** v tiažovom poli Zeme. V prípade sústavy častica – Zem budeme pod E_p rozumieť hodnotu tiažovej potenciálnej energie častice v polohe o súradnici h . Vo vzťahu

$$\Delta E_p = E_{ph} - E_{p0} = mg(h-0), \quad (2.25)$$

pod hodnotou E_{p0} budeme rozumieť tiažovú potenciálnu energiu v tzv. referenčnej konfigurácii, pri ktorej sa častica nachádza v referenčnom bode o súradnici h_0 . Zvyčajne kladieme $E_{p0} = 0$ pre $h_0 = 0$. Predchádzajúci vzťah môžeme potom prepísať do tvaru

$$E_p(h) = mgh, \quad (2.26)$$

z ktorého vyplýva, že tiažová potenciálna energia sústavy častica – Zem závisí iba od zvislej polohy h častice vzhľadom k referenčnej polohe o súradnici $h_0 = 0$ (t.j. na výške častice nad referenčným bodom). Ak vzťažnú sústavu a nulovú hladinu spojíme s povrchom Zeme, hovoríme stručne, že potenciálnu energiu má teleso. Ako sme však už spomenuli, v skutočnosti potenciálnu energiu tiažovú nemá samo teleso, ale presnejšie sústava Zem – teleso. Predchádzajúci vzťah (2.26) je možné použiť iba v nie veľkých vzdialenostiach od povrchu Zeme, kde hodnotu \vec{g} považujeme za približne konštantnú.

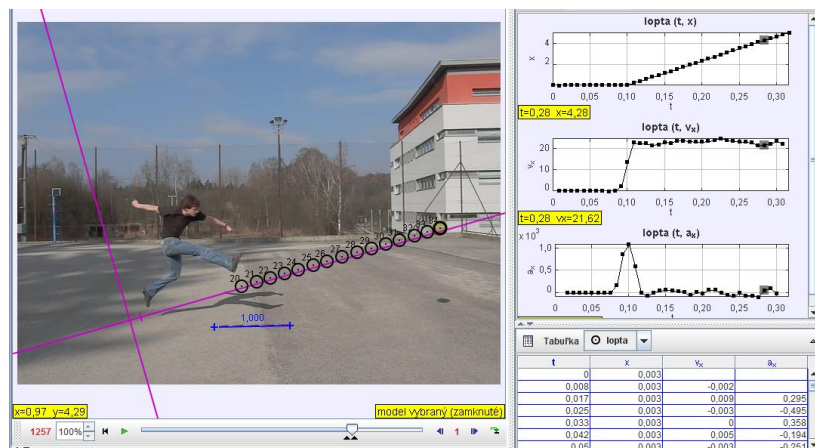
Úloha 2.1:

Analyzujte daný pohyb, určte hybnosť lopty a jej zmenu v čase. Akou veľkou silou pôsobí noha na loptu v čase kopu?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

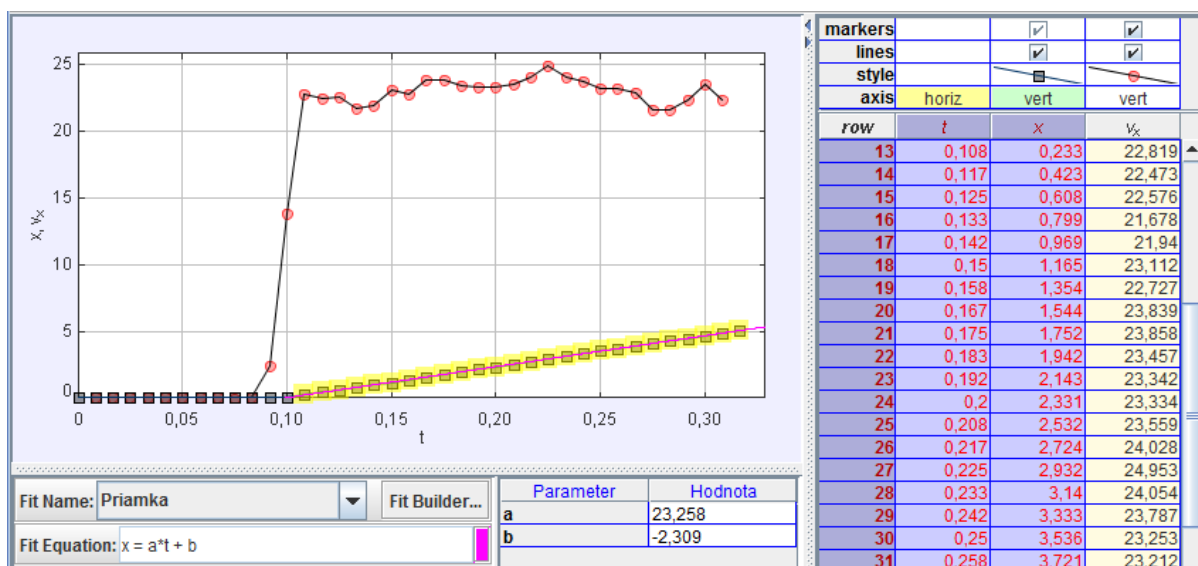
zdroj: [odkop.avi](#)

Riešenie:



Obr. 2.2 Analýza pohybu lopty

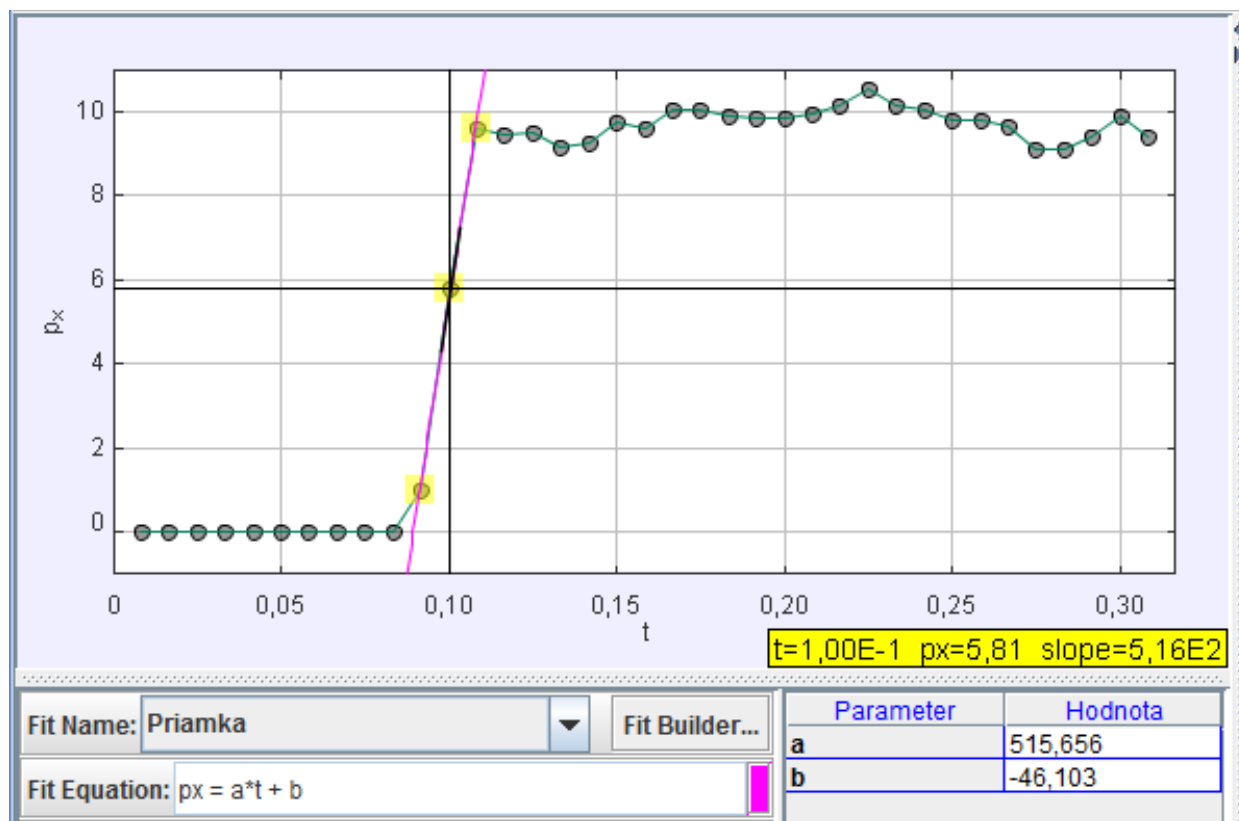
Zvolením vhodnej súradnicovej sústavy (ponechávame na samotnom študentovi) a využitím funkcie „autortacker“ zaznamená program polohu lopty v jednotlivých časových intervaloch ($\Delta t = 0,00833 \text{ s}$ pre 120 fps). Hodnoty veličín (x , y , v_x , v_y , a_x , a_y , t) sú zaznamenávané do tabuľky a znázornené v grafických závislostiach $x = x(t)$, $v_x = v_x(t)$ a $a_x = a_x(t)$ (Obr. 2.2).



Obr. 2.3 Spracovanie zaznamenaných údajov

Ako môžeme z Obr. 2.2 vidieť, jednou z možností ako si zvoliť súradnicovú sústavu, je umiestniť os tak, aby sa pohyb uskutočňoval v jednom smere. Ďalšou matematickou analýzou určíme, že rýchlosť pohybu lopty (vyjadrenú na grafe guľôčkami (Obr. 2.3) môžeme považovať od istého okamihu ($t = 0,108 \text{ s}$) za približne konštantnú, a teda pohyb lopty v analyzovanom čase za rovnomerný priamočiary, čo môžeme matematicky zapísať rovnicou, ktorú sme určili fitovaním závislosti polohy na čase pomocou priamky: $x = at + b = 23,258t - 2,309$. Parameter a v tomto prípade má charakter rýchlosti pohybu lopty, takže rýchlosť pohybu lopty bola stanovená na $v_p = 23,26 \text{ m/s}$.

Ďalšou úlohou je určiť, akou silou pôsobila noha na loptu (alebo lopta na nohu) v okamihu kopnutia. Pri tejto úlohe je niekoľko možností ako určiť daný fyzikálny parameter. Jeden zo spôsobov ponúka Obr. 2.4: veľkosť pôsobiacej sily pri odkope lopty určíme z II. Newtonovho pohybového zákona (NPZ) v tvare $F = \Delta p / \Delta t$, pričom Δt predstavuje časový okamih, za ktorý pôsobila na loptu sila. Následne z grafu časovej závislosti hybnosti – z analytického vyjadrenia priamky, ktorou sme fitovali časovú závislosť hybnosti v okamihu pôsobenia sily na loptu, sme určili: $p_x = 515,656t - 46,103$. Veľkosť pôsobiacej sily bola teda určená ako $F = 515,66 \text{ N}$. Iný zo spôsobov, ako možno určiť veľkosť pôsobiacej sily v danom okamihu, je využitie II. NPZ v tvare $F = dp/dt = d/dt(p)$, čo predstavuje deriváciu hybnosti podľa času. Využitím funkcie *slope* v programe určíme smernicu dotyčnice ku krivke, čo predstavuje veľkosť pôsobiacej sily v danom okamihu. Hodnota sily určenej daným spôsobom mala veľkosť $F = 516 \text{ N}$ (Obr. 2.4).



Obr. 2.4 Analýza časovej závislosti hybnosti a určenie pôsobiacej sily

Ďalšou z možností, ktorú je možno využiť pre určenie veľkosti pôsobiacej sily, je použitie II. NPZ v tvare $F = ma$, čiže určením veľkosti zrýchlenia v čase pôsobiacej sily z časovej závislosti zrýchlenia (maximálna hodnota bola $a = 1090 \text{ m/s}^2$) a vynásobením danej hodnoty odmeranou hmotnosťou lopty. Je taktiež možné pre určenie zrýchlenia využiť metódu fitovania časovej závislosti rýchlosti a veľkosť zrýchlenia určiť ako $a = \Delta v / \Delta t$ (prípadne využiť funkciu *slope* ($a = dv/dt$)).

Úloha 2.2:

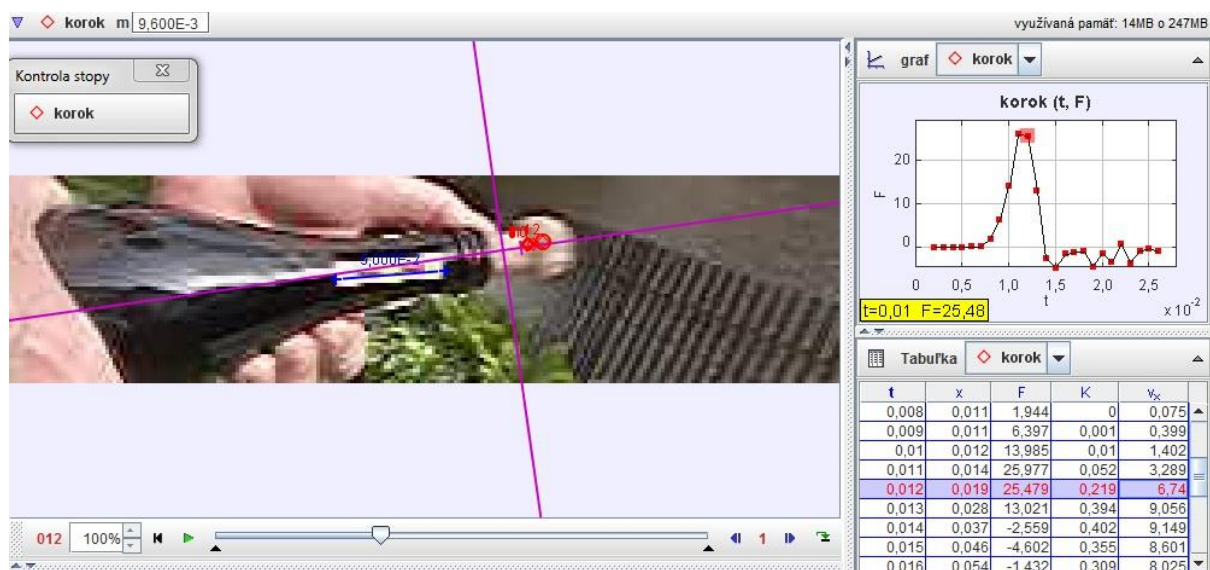
Analyzujte otváranie šampanského. Aká veľká sila pôsobí na korkovú zátku pri otvorení šampanského? Určte veľkosť impulzu sily.

(dĺžka dielika: 1 cm, hmotnosť zátky je 9,6 g, frekvencia snímok: 1000 fps)

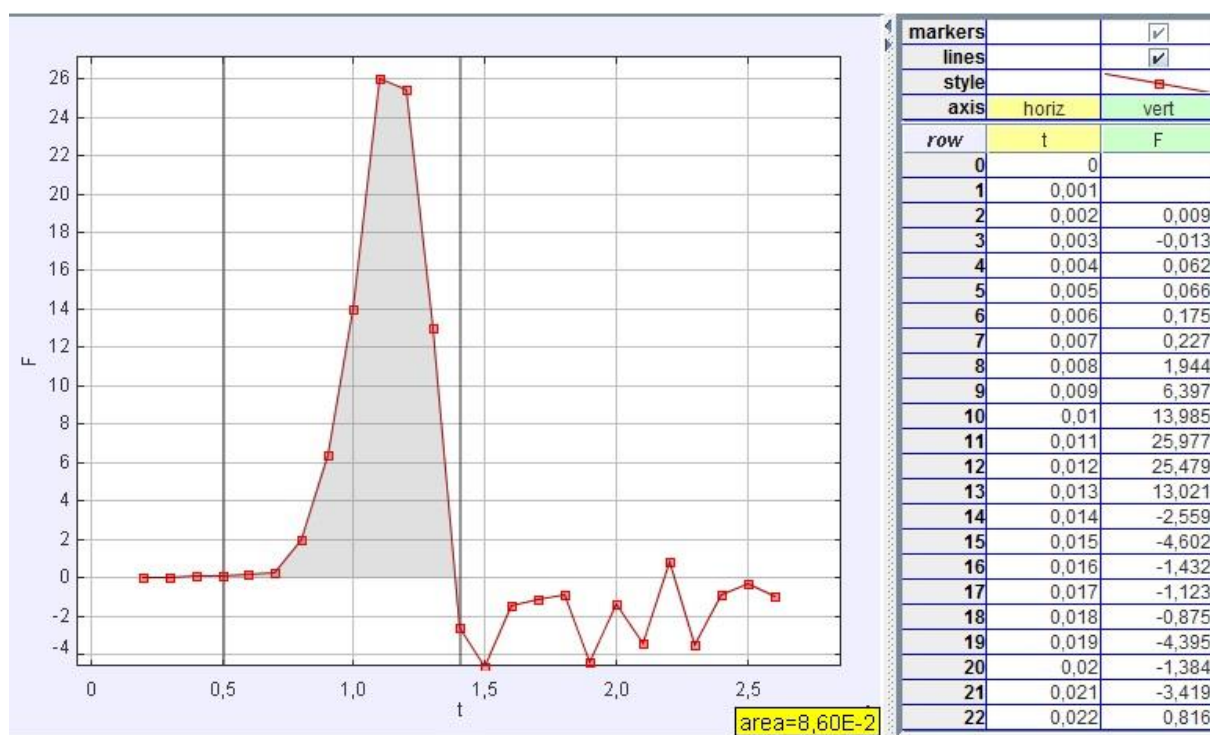
zdroj: [sampanske.avi](#)

Riešenie:

Nasledujúci Obr. 2.5 ukazuje časovú závislosť sily. Využitím vzťahu (2.3) dokážeme vypočítať impulz sily I ako obsah plochy pod krivkou časovej závislosti sily (funkcia area) (Obr. 2.6), ($I = 0,086 \text{ Ns}$).



Obr. 2.5 Analýza otvárania šampanského



Obr. 2.6 Časová analýza sily a výpočet impulzu sily

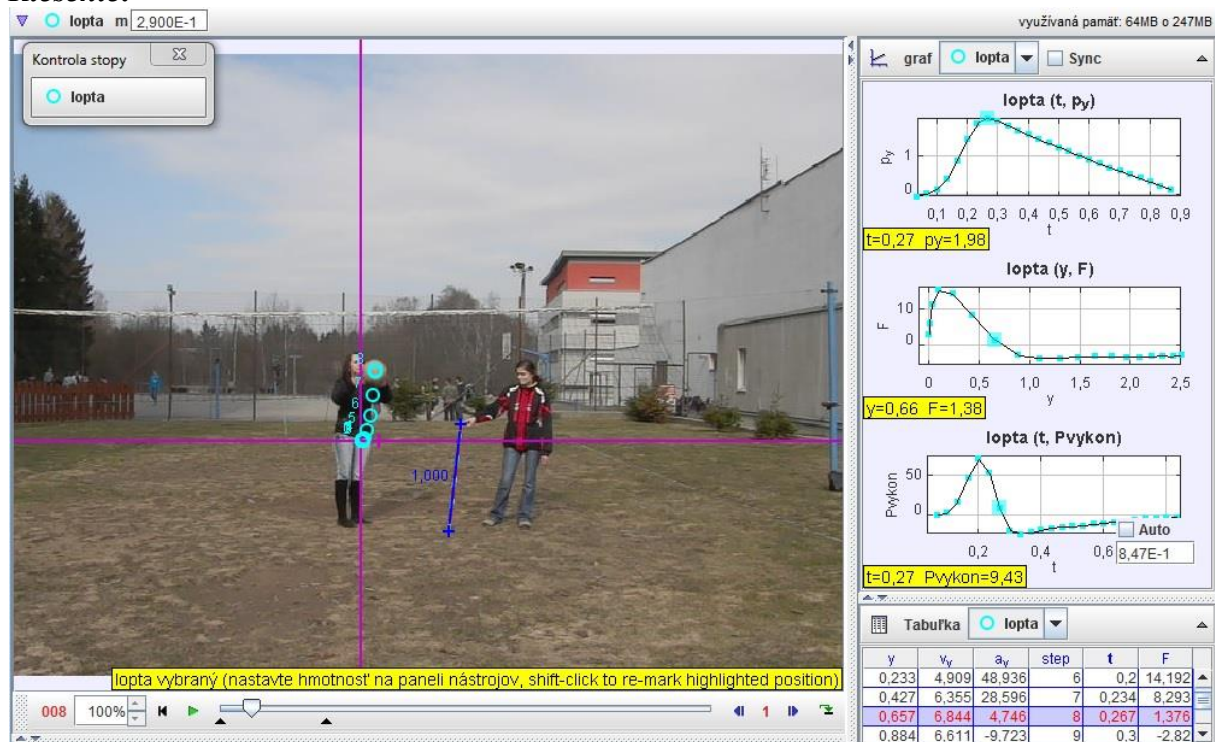
Úloha 2.3:

Analyzujte pohyb vyhodenej lopty. Aká sila pôsobí na loptu pri vyhodení? Odhadnite veľkosť vykonanej práce pri vyhodení lopty?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps),

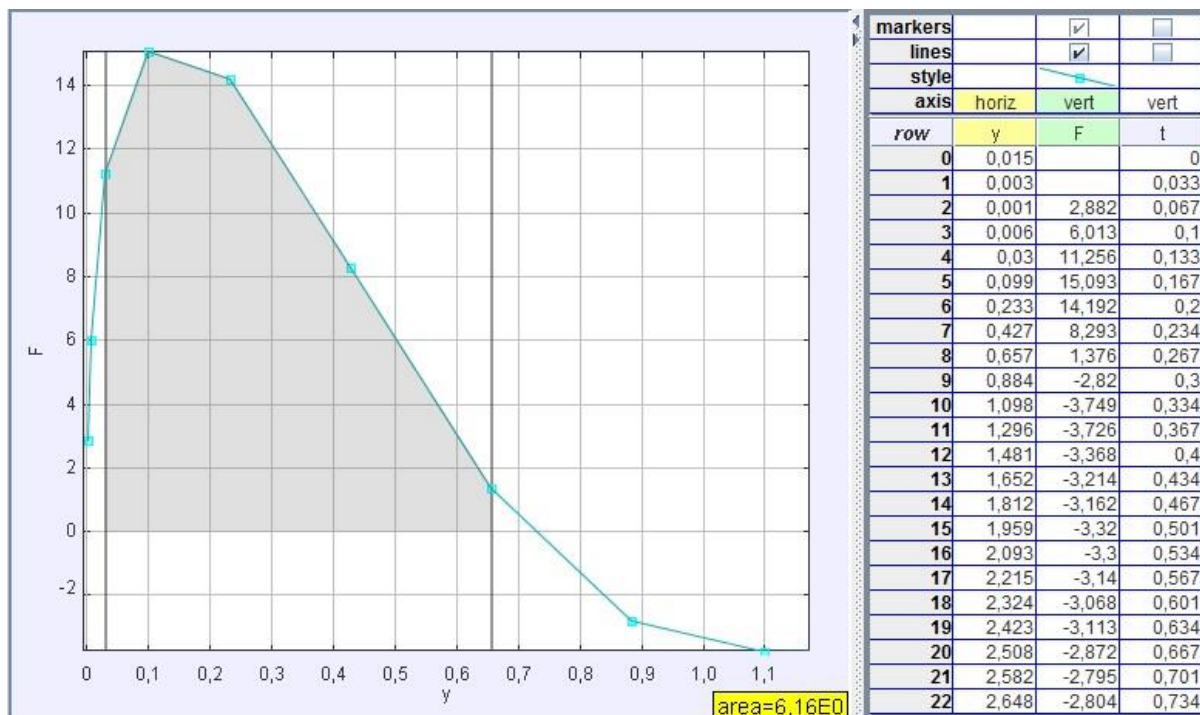
zdroj: [vrh_nahor2.avi](#)

Riešenie:



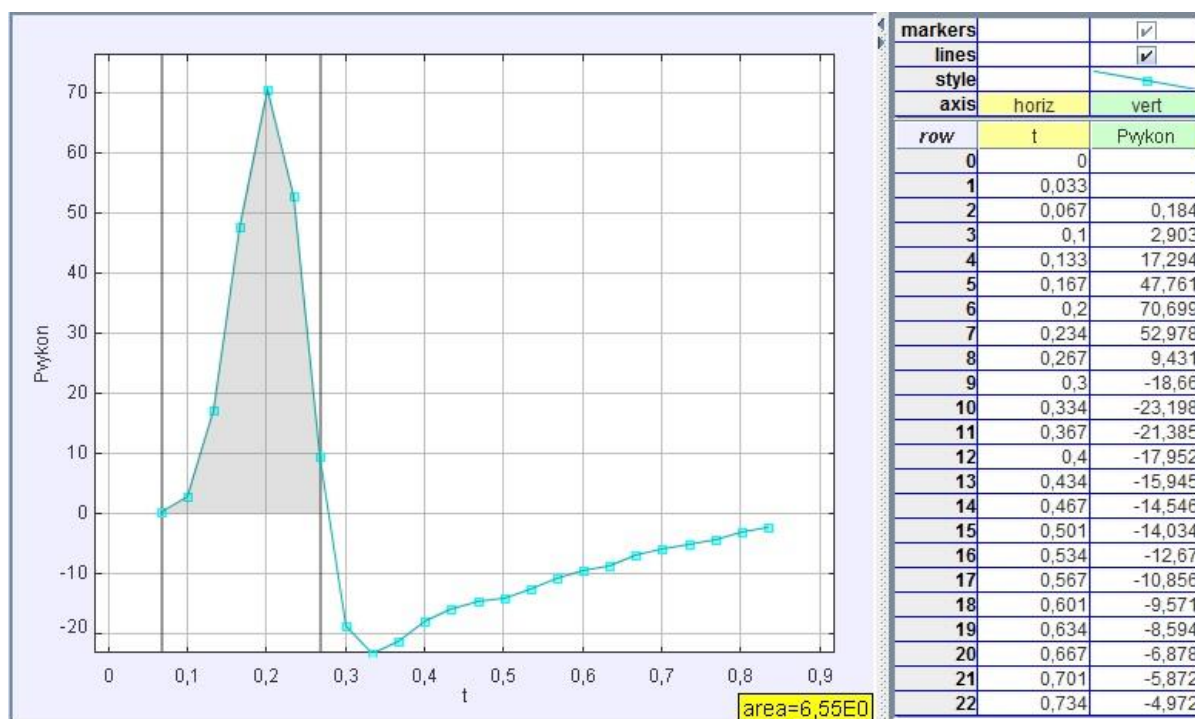
Obr. 2.7 Analýza pohybu vyhodenej lopty

Ako si môžeme z Obr. 2.7 všimnúť, veľkosť výslednej sily F , ktorá pôsobí na loptu pri vyhodení nie je konštantná, ale sa mení, dokonca pri opustení rúk sa jej hodnota zmení na zápornú (na loptu už nepôsobia ruky, ale len gravitačné pole Zeme). Využitím vzťahu (2.14) a analýzou závislosti pôsobiacej sily F od polohy y odhadneme vykonanú prácu $W \approx 6,2$ J. (dopúšťame sa však istej chyby, keďže v danom konkrétnom prípade program neumožňuje vyrátať obsah pod krivkou počas prvých dvoch snímkov.)



Obr. 2.8 Analýza pôsobiacej sily pri vyhodení lopty

Ako si môžeme všimnúť z Obr. 2.8, program Tracker umožňuje vykonávať nie len časové závislosti, ale aj závislosti podľa iných fyzikálnych veličín (preddefinovaných je ich viac ako 20, ďalšie veličiny je však možné zadefinovať v programe). Možnosti daného programu nám umožnili zadefinovať výkon P podľa vzťahu (2.18) a využitím vzťahu (2.16) určiť veľkosť vykonanej práce pomocou výkonu, ktorej vypočítaná hodnota $W = 6,55 \text{ J}$ (Obr. 2.9) je v celkom dobrej zhode s prácou odhadnutou v predchádzajúcom prípade.



Obr. 2.9 Analýza výkonu a výpočet vykonanej práce

Úloha 2.4:

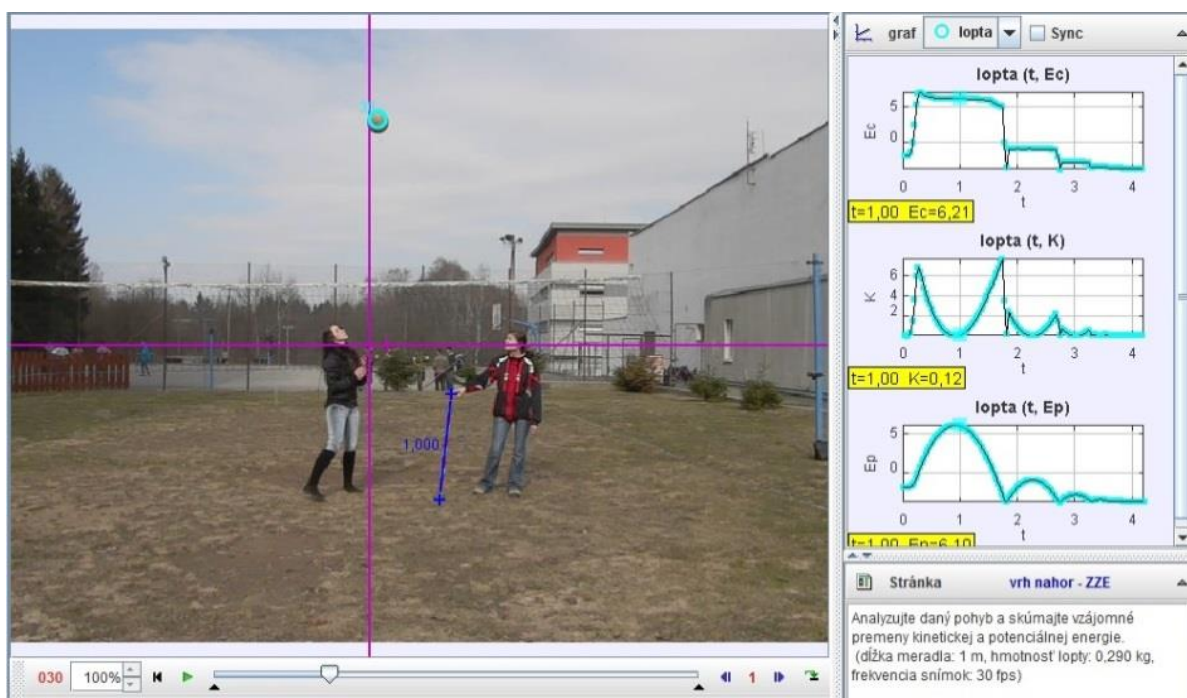
Analyzujte pohyb vyhodenej lopty, jej kinetickú, potenciálnu a celkovú energiu v jednotlivých okamihoch.

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: zdroj: vrh_nahor2.avi

Riešenie:

Kinetickú energiu má program Tracker preddefinovanú, potenciálnu a celkovú energiu je potrebné v programe zadefinovať. Ako si možno všimnúť z Obr. 2.10, potom, čo lopta opustí ruky, jej kinetická energia sa znižuje a naopak, potenciálna energia narastá, až kým lopta nedosiahne maximálnu výšku. Potom pri páde lopty nadol platí predchádzajúce tvrdenie v obrátenom poradí – kinetická energia lopty narastá a potenciálna sa znižuje až pokiaľ lopta nedosiahne zem. Po odraze sa časť mechanickej energie stratí, avšak, ako si možno z analýzy všimnúť, medzi odrazmi je súčet kinetickej a potenciálnej energie (mechanická energia) stály, pričom prebieha premena kinetickej energie na potenciálnu a opačne. Po niekoľkých odrazoch lopty jej kinetická (a zároveň aj potenciálna) energia sa zníži na minimum a pôvodná energia lopty sa premení na iné formy energie (vnútorná energia), ktoré už ale nie sú analyzované v danom programe.



Obr. 2.10 Analýza kinetickej, potenciálnej a celkovej energie

Úloha 2.5:

Určte rýchlosť strely pred nárazom do plechovice.

(dĺžka plechovice je 16,7 cm, hmotnosť strely: 0,1 g, hmotnosť plechovice: 15,8 g, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [balisticke kyvadlo.avi](#)

Overtte vypočítanú rýchlosť strely z predchádzajúceho príkladu výpočtom na videu s 1000 fps.

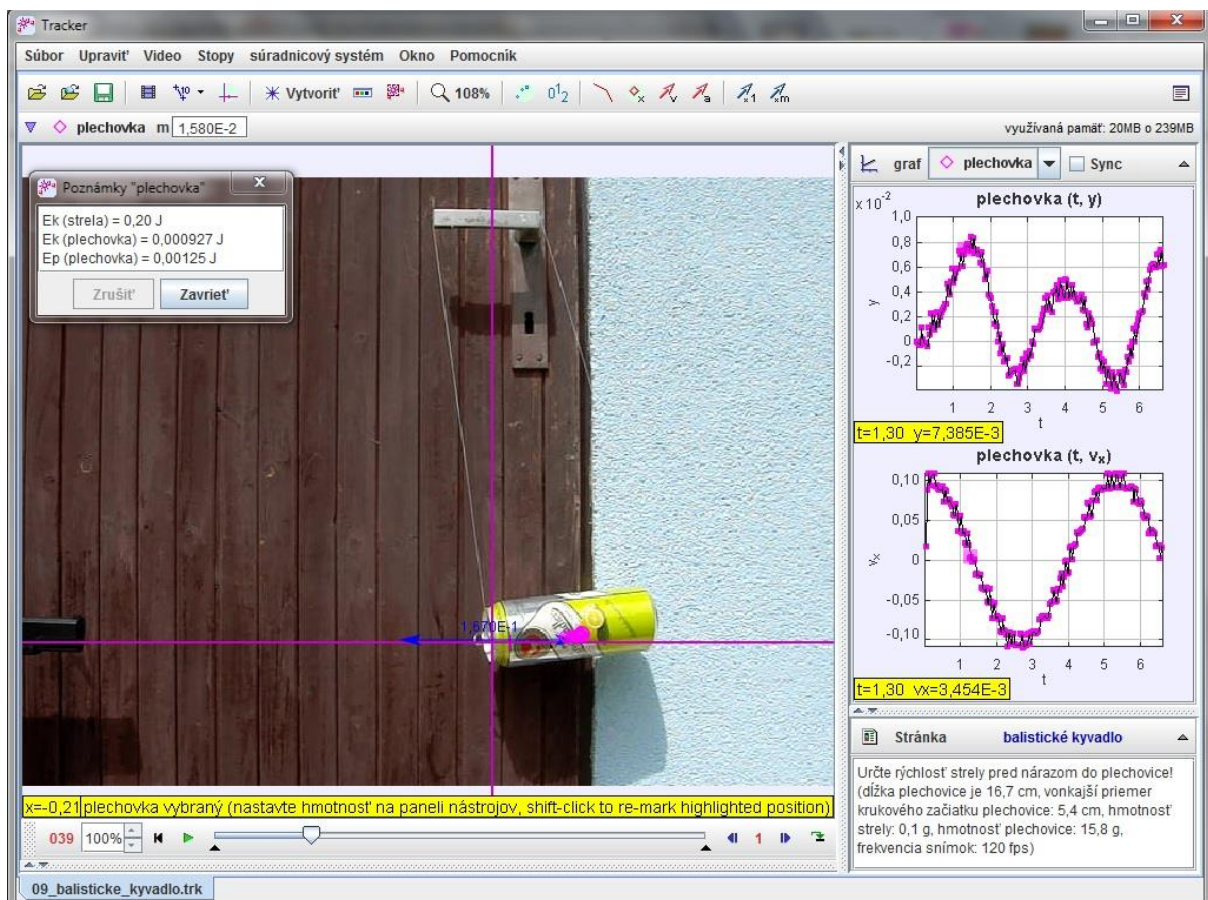
(vonkajší priemer kruhového začiatku plechovice: 53,92 mm, frekvencia snímok: 1000 fps)

zdroj: [rychlost strely.avi](#)

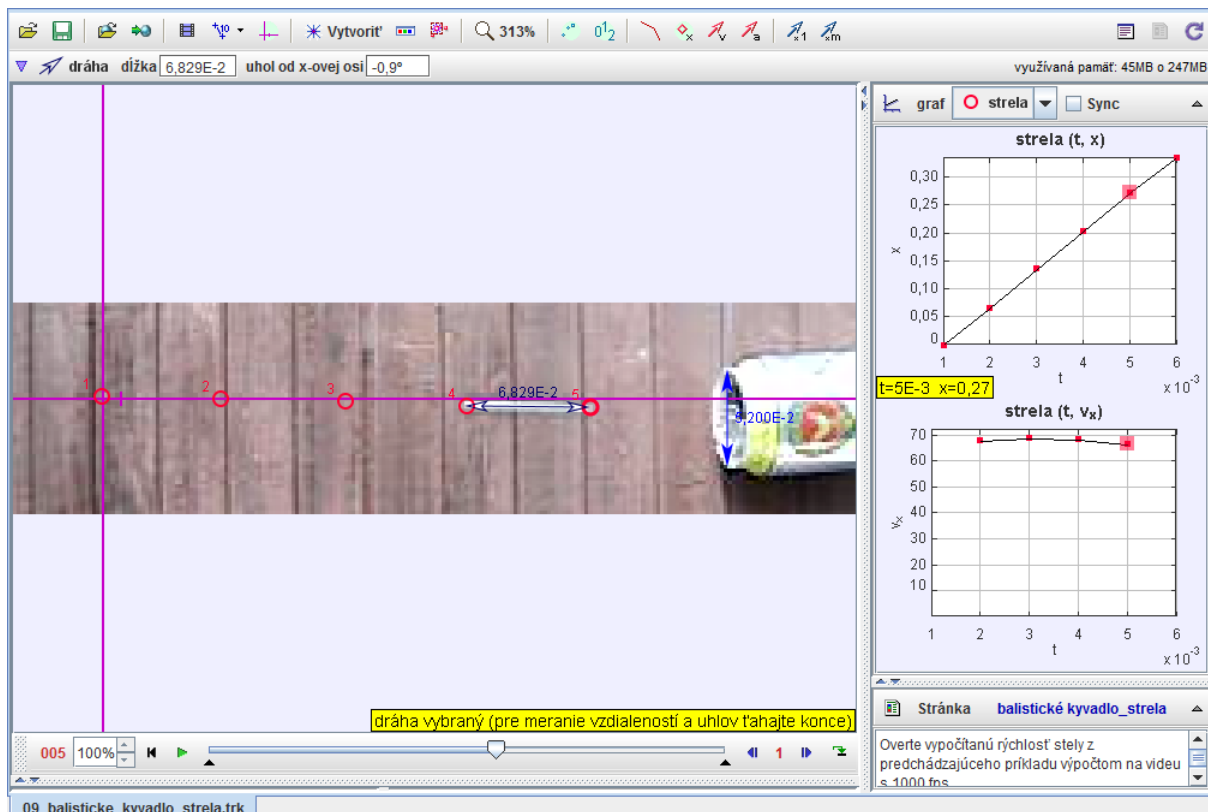
Riešenie:

Vzhľadom k tomu, že daný dej je natoľko rýchly, že nie je možné zaznamenať polohu vystrelennej strely (video má 120 fps a vystrelenú guľôčku je možné zaznamenať len počas jedného záberu), je potrebné určovať rýchlosť strely z analýzy pohybu plechovice po náraze (Obr. 2.11). Zvolením vhodných časových závislostí je možné určiť maximálnu výšku, do ktorej sa plechovica dostane a rýchlosť plechovice tesne po zrážke. Využitím vzťahov pre zákon zachovania mechanickej (ZZME) a celkovej energie je možné dopracovať sa k počiatočnej rýchlosti strely. Či však ZZME bol aplikovaný správne, o tom sa môžeme presvedčiť analýzou ďalšieho videa (obrázku), ktoré bolo zosnímané rýchlosťou 1000 fps (Obr. 2.12).

Vzhľadom k tomu, že daný záber trval $t = 1/1000$ s, z odhadu prejdenej dráhy guľôčky (biely pás) je možné vypočítať rýchlosť strely pred zrážkou a overiť tak, či predchádzajúci výsledok a analýza boli správne. V prípade, že sa vypočítané rýchlosti líšia o jeden až dva rády, je potrebné si uvedomiť, kedy je možné použiť ZZME a kedy ho zase použiť nemôžeme. V prípade, že počas deja dochádza k premene mechanickej energie na iné formy energie, či už v dôsledku trecích alebo odporových síl, nie je možné použiť ZZME. Ďalšie riešenie teda ponechávame na samotnom čitateľovi, analýze a porovnaní výsledkov z oboch videí.



Obr. 2.11 Analýza pohybu plechovice po náraze strely vystrelenej z guľôčkovej pištole



Obr. 2.12 Analýza pohybu strely vystrelenej z guľôčkovej pištole (1000 fps)

Neriešené úlohy:

Úloha 2.6: Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri kope a pri odraze od steny? Ako sa zmení hybnosť lopty?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [odkop_stena.avi](#)

Úloha 2.7: Analyzujte pohyb jednotlivých guľôčok pri Gaussovom dele.

(dĺžka meradla: 0,5 m, frekvencia snímok: 1000 fps)

zdroj: [Gauss_delo.avi](#)

Úloha 2.8: Aká veľká sila pôsobí na voľne padajúcu guľu? Akou veľkou silou pôsobí guľa pri dopade na zem?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť gule je 0,7265 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

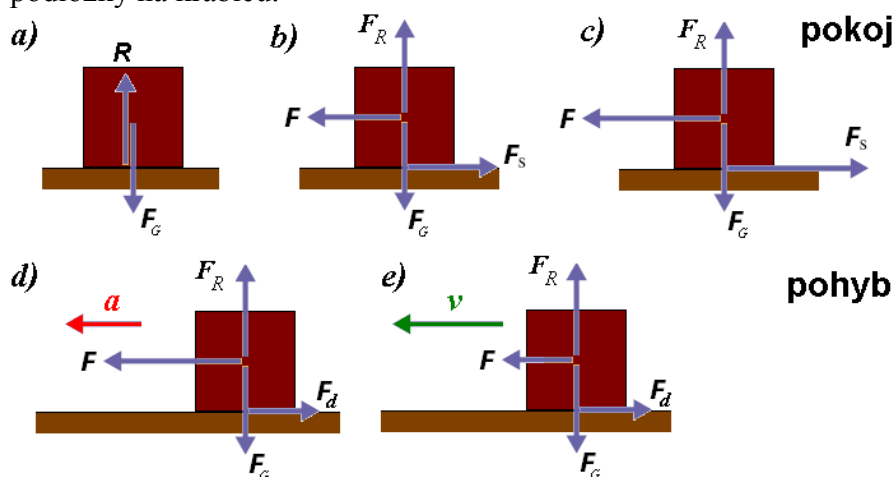
zdroj: [gula.avi](#)

3. Trecie sily

Mnohokrát v úvodných častiach fyziky pri analýze pohybu kvôli zjednodušeniu používame formuláciu „odpor vzduchu zanedbajte“ alebo „vplyv trecích síl je zanedbateľný“. V skutočnosti sa však s trením stretávame doslova na každom kroku. Sú situácie, kedy trenie a vplyv odporových síl nie je možné zanedbať. Bez trenia by nebola možná naša chôdza, pohyb auta či bicykla, nemohli by sme písať perom, prípadne ho držať v ruke. Skrutky by nespĺňali svoj účel, utkaná látka by sa rozpadla a uzly by sa rozviazali. Na druhej strane vplyvom trenia v motore a hnacích mechanizmoch sa spotrebováva okolo 20% benzínu v automobile navyše. Nepretržitost' opakovania šmyku a kontaktu stykových plôšok môže byť niekedy doprevádzané rôznymi zvukmi, napr. pri šmyku kolies na suchej dlažbe, pri škrabaní nechťom po tabuli, ťahmi sláčika po husľovej strune, atď. Z pohľadu druhov pohybu, pri ktorých sa trenie prejavuje rozlišujeme trenie šmykové a valivé.

3.1 Šmykové trenie

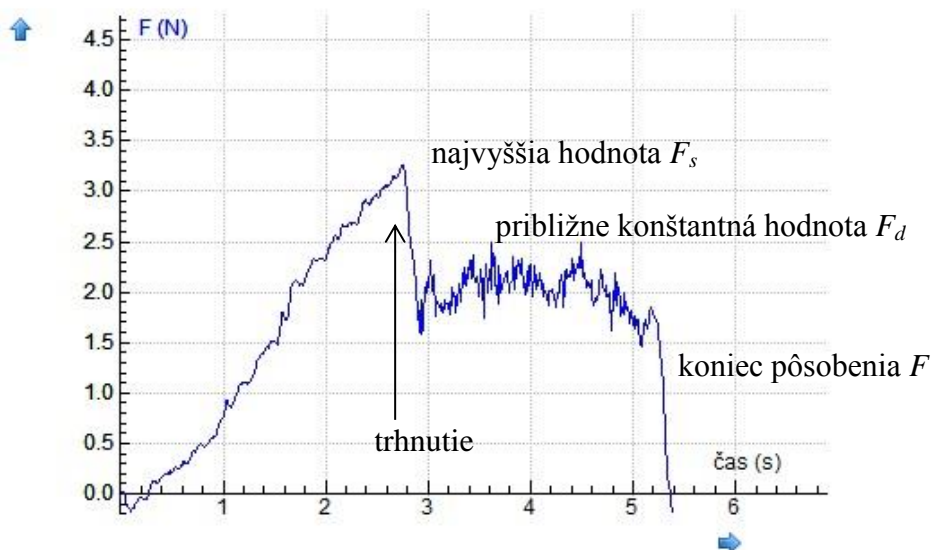
Na nasledujúcom myšlienkovom experimente si objasníme mechanizmy pôsobenia a vlastnosti síl trenia. Predstavme si krabicu, ktorá leží na podlahe. Snažíme sa ju tlačíť vodorovne stálou silou, ale krabica sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila, ktorou na krabicu pôsobíme je kompenzovaná vodorovnou brzdnou silou, ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste dna krabice. Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na krabicu pôsobili. Existuje istá veľkosť sily, ktorú už brzdná sila krabice nedokáže vykompenzovať a krabica sa pohne. Trecia sila, ktorou bude podlaha pôsobiť na pohybujúcu sa krabicu, ju bude postupne spomaľovať, až kým sa krabica zastaví. Keby sme chceli, aby sa krabica pohybovala po podlahe konštantnou rýchlosťou, museli by sme ju tlačíť alebo ťahať silou, ktorá má rovnakú veľkosť ale opačný smer ako trecia sila, ktorá jej pohybu bráni. Celá situácia je podrobne rozobraná z fyzikálneho hľadiska na Obr. 3.1. Na začiatku (a), kedy je krabica v pokoji, pôsobí na krabicu tiažová sila Zeme \vec{F}_G , ktorá je vykompenzovaná reakciou \vec{F}_R tlakovej sily podložky na krabicu.



Obr. 3.1 Pôsobenie síl na krabicu. (a – c) Krabica je v pokoji, (d – e) krabica sa pohybuje. Keď je krabica v pokoji, vonkajšia sila F je kompenzovaná rovnako veľkou, opačne orientovanou silou statického šmykového trenia F_s . S rastúcou silou F narastá aj veľkosť sily F_s až do najvyššej hodnoty (c). Potom nastane „trhnutie“ a krabica sa začne pohybovať so zrýchlením a (d). Ak chceme, aby sa krabica pohybovala rovnomerne

rýchlosťou v , musíme veľkosť sily F znížiť tak, aby kompenzovala dynamickú šmykovú treciu silu F_d (e).

V ďalších obrázkoch sme reakciu \vec{F}_R pre lepšiu názornosť presunuli po vektorovej priamke do ťažiska krabice. Ak začneme na krabicu pôsobiť silou \vec{F} (b) a snažíme sa ju odtlačiť doľava, ako odozva vznikne *statická šmyková trecia sila* \vec{F}_s , ktorá smeruje vpravo a kompenzuje silu \vec{F} . Krabica je stále v pokoji. So zväčšovaním sily \vec{F} narastá aj sila \vec{F}_s (c) až po určitú kritickú hodnotu, kedy sa krabica „trhne“, stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa so zrýchlením \vec{a} pohybovať smerom vľavo (d). V tomto prípade už ale krabicu brzdí *dynamická (kinetická) šmyková trecia sila* \vec{F}_d , ktorá má menšiu veľkosť ako najväčšia prípustná hodnota veľkosti statickej šmykovej trecej sily pôsobiacej len v pokoji. Ak by sme chceli, aby sa krabica pohybovala rovnomerne, museli by sme v okamihu pohnutia krabice veľkosť našej pôsobiacej sily znížiť.



Obr. 3.2 Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je krabica v pokoji cez začiatok pohybu až po približne rovnomerný pohyb za pomoci systému IPCoach

Obr. 3.2 ukazuje závislosť zväčšujúcej sa pôsobiacej sily na krabicu, ktorú chceme uviesť do pohybu, až do času, kedy nastane „trhnutie“ krabice a následné zmenšenie pôsobiacej sily, keďže chceme krabicu tlačiť približne rovnomerne.

Výsledky nášho myšlienkového experimentu môžeme zhrnúť nasledovne:

- Ak začneme pôsobiť silou \vec{F} na teleso, ktoré ostáva v pokoji, statická šmyková trecia sila \vec{F}_s pôsobiaca na teleso má rovnakú veľkosť ako priemet sily \vec{F} do podložky a je voči nej opačne orientovaná.
- Veľkosť sily \vec{F}_s dosahuje maximálnu hodnotu $F_{s,max}$ danú vzťahom

$$F_{s,max} = \mu_s F_n, \quad (3.1)$$

kde μ_s je koeficient (faktor) statického šmykového trenia a F_n je veľkosť normálovej tlakovej sily, ktorou je teleso pritlačované k podložke (veľkosť je taktiež rovná sile, ktorou pôsobí podložka na teleso). Ak prevýši veľkosť našej pôsobiacej sily \vec{F} hodnotu $F_{s,max}$, začne sa teleso pohybovať po podložke.

- Keď sa teleso dá do pohybu a budeme na neho pôsobiť takou silou \vec{F} , aby sa pohybovalo približne rovnomerne, klesne veľkosť šmykovej trecej sily z $F_{s,max}$ na hodnotu F_d , ktorá je určená vzťahom

$$F_d = \mu_d F_n. \quad (3.2)$$

kde μ_d je koeficient (faktor) dynamického šmykového trenia. Túto veľkosť F_d má dynamická trecia sila v priebehu celého pohybu.

Podľa Amontonovovho – Coulombovho zákona **veľkosť trecej sily pri šmykovom trení nezávisí na veľkosti styčnej plochy** a je úmerná len veľkosti normálovej sily F_n , ktorú v predchádzajúcom myšlienkovom experimente predstavuje tiažová sila $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Treba ešte zdôrazniť, že predchádzajúce rovnice nemajú vektorový charakter, koeficienty μ_s a μ_d sú bezrozmerné a zisťujú sa experimentálne. Hodnoty koeficientov závisia od vlastností ako telesa, tak aj podložky, takže zvykneme hovoriť o koeficientoch trenia medzi podložkou a telesom alebo medzi dvoma materiálmi (napr. hodnota koeficientu statického šmykového trenia μ_s medzi oceľou a ľadom je 0,027). Taktiež predpokladáme, že hodnota koeficientu dynamického trenia μ_d nezávisí na rýchlosti pohybu telesa po podložke. Statické trenie medzi ľadom a podrážkou topánky je častokrát veľmi malé a nezabráni pošmyknutiu. Preto si statické trenie často zvyšujeme posypaním ľadu pieskom, prípadne štrkom či popolom. Na druhej strane trenie minimalizujeme, keď styčné plochy vzájomne sa pohybujúcich telies namažeme vrstvou maziva.

Čo sa týka brzdzenia áut, je potrebné rozlíšiť dva prípady:

- ak sa kolesá auta pri brzdení zablokujú, ide o brzdenie v šmyku, pričom sa pneumatika auta pohybuje vzhľadom k asfaltu rovnakou rýchlosťou ako auto a vtedy počítame s koeficientom kinematického trenia,
- ak brzdenie neprebíha v šmyku, je v každom okamihu bod dotyku kolesa s vozovkou v pokoji, a preto bude brzdná sila rovná hodnote sily statického trenia.

Súčasná elektronika v autách, systém ABS, zabráňuje, aby vozidlo v prípade šmyku bolo neovládateľné. Keďže koeficient kinematického trenia je vždy menší ako koeficient maximálneho statického trenia, je trecia sila medzi kolesami v šmyku menšia ako v prípade brzdzenia bez šmyku, brzdná dráha z tohto dôvodu je v šmyku dlhšia, a preto aj bezpečnostné systémy v aute sa snažia neuviesť auto do šmyku. (V niektorých prípadoch na suchom asfalte však môže byť brzdná dráha s ABS dlhšia, než bez neho.)

Úloha 3.1:

Určte faktor dynamického šmykového trenia medzi oceľou a rôznymi materiálmi a pomocou tabuliek odhadnite, o aké materiály sa jedná.

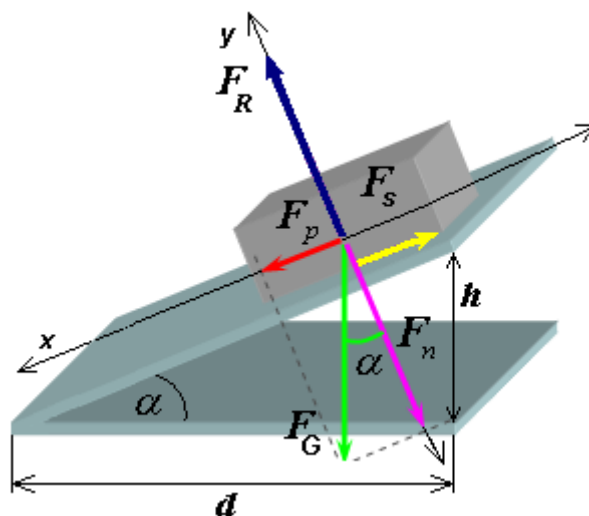
(frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [koeficient trenia.avi](#)

Riešenie:

Je niekoľko možností, ako určiť hľadaný koeficient statického šmykového trenia. Jednou z nich by mohlo byť využitie silomeru a odmeranie veľkosti pôsobiacej sily v momente, kedy sa krabica dá do pohybu. Pri rovnomernom pohybe zo znalosti hmotnosti krabice, veľkosti pôsobiacej sily a využitím vzťahov (3.1) a (3.2) by sme určili hľadaný koeficient statického a dynamického trenia.

Iným spôsobom riešenia tejto úlohy bez silomeru a znalosti hmotnosti krabice je využitie naklonenej roviny. Ak by bolo možné podložku (napr. stôl) postupne nakláňať, pri určitom uhle sa krabica na stole pohne. Rozoberieme si túto situáciu z fyzikálneho hľadiska.



Obr. 3.3 Krabica na naklonenej rovine a znázornenie síl, keď je krabica v pokoji ($F_t = F_d$ pri rovnomernom pohybe)

Na Obr. 3.3 je znázornená krabica na naklonenej rovine v momente, kedy sa práve začína pohybovať. Na krabicu bude pôsobiť tiažová sila \vec{F}_G , tlaková sila od podložky \vec{F}_R v smere kolmom na naklonenú rovinu a trecia sila \vec{F}_s v smere pozdĺž naklonenej roviny. Keďže je krabica tesne pred začatím pohybu v pokoji, musí podľa druhého Newtonového pohybového zákona platiť, že výslednica síl pôsobiacich na krabicu je rovná nule

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R + \vec{F}_s = m\vec{a} = 0. \quad (3.3)$$

Túto rovnicu budeme riešiť zvlášť pre x -ovú a y -ovú zložku. Pre x -ovú zložku môžeme predchádzajúcu vektorovú rovnicu prepísať do tvaru pre veľkosti síl

$$\sum F_x = F_p - F_s = ma = 0, \quad (3.4)$$

kde F_p predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily \vec{F}_G do smeru osi x ($F_p = F_g \sin \alpha$). Pre y -ovú zložku dostávame

$$\sum F_y = F_R - F_n = 0, \quad (3.5)$$

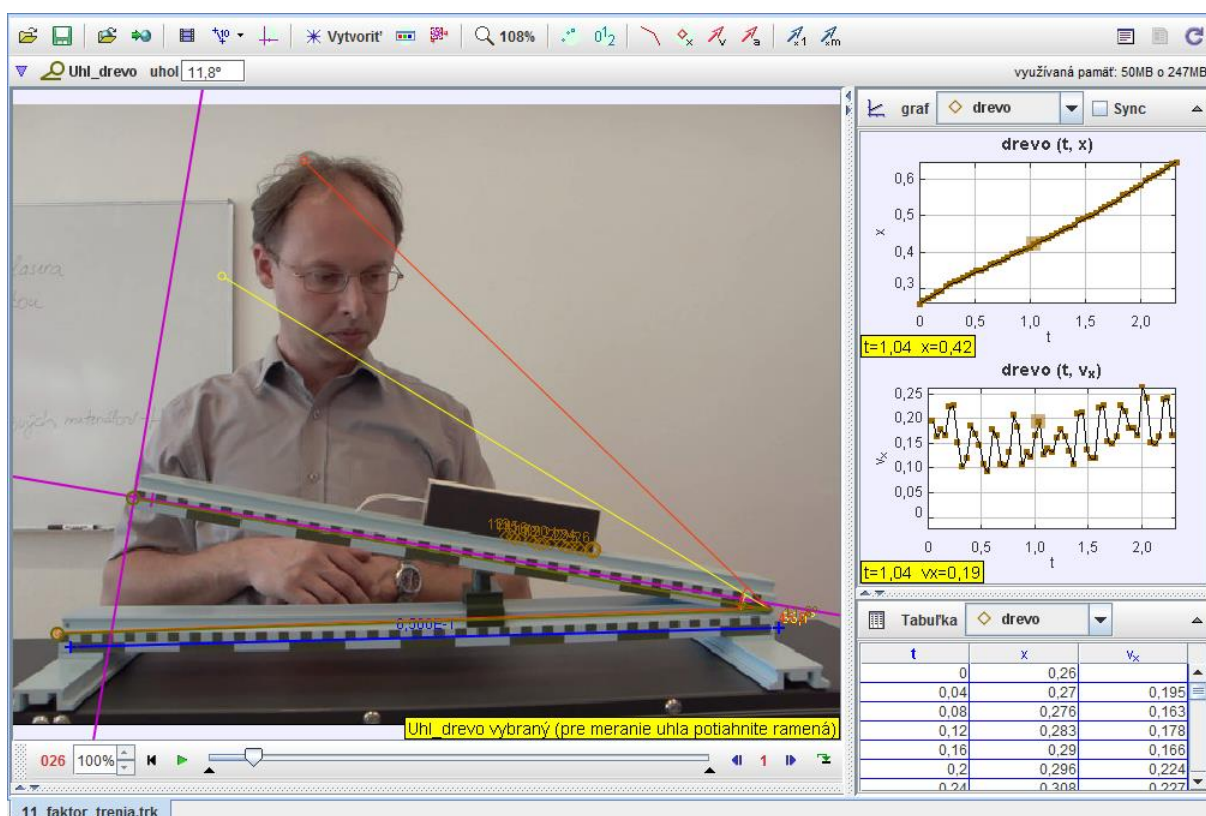
kde F_n je normálová sila a predstavuje veľkosť priemetu tiažovej sily \vec{F}_G do smeru osi y ($F_n = F_G \cos \alpha$). Keďže pohyb krabice je realizovaný vždy len v smere osi x (po splnení istých podmienok), bude predchádzajúca rovnica vždy rovná nule, to znamená, že normálová sila \vec{F}_n je vždy vykompenzovaná reakciou podložky \vec{F}_R . V závislosti od toho, ako sa bude krabica pohybovať, bude pravá strana rovnice (3.4) nenulová (v prípade zrýchleného pohybu so zrýchlením \vec{a}) alebo tak ako v našom prípade rovná nule (rovnomený pohyb krabice, prípadne krabica je v pokoji). V okamihu, kedy sa krabica začína pohybovať, nadobúda veľkosť statickej šmykovej trecej sily \vec{F}_s maximálnu hodnotu, teda $F_{s,max} = \mu_s F_n$, kde $F_n = F_G \cos \alpha$. Úpravou rovnice (3.4) teda dostávame

$$F_p = F_{s,max}, \quad (3.6)$$

$$F_G \sin \alpha = \mu_s F_G \cos \alpha, \quad (3.7)$$

odtiaľ

$$\mu_s = \tan \alpha. \quad (3.8)$$



Obr. 3.4 Analýza pohybu telesa na naklonenej rovine v programe Tracker

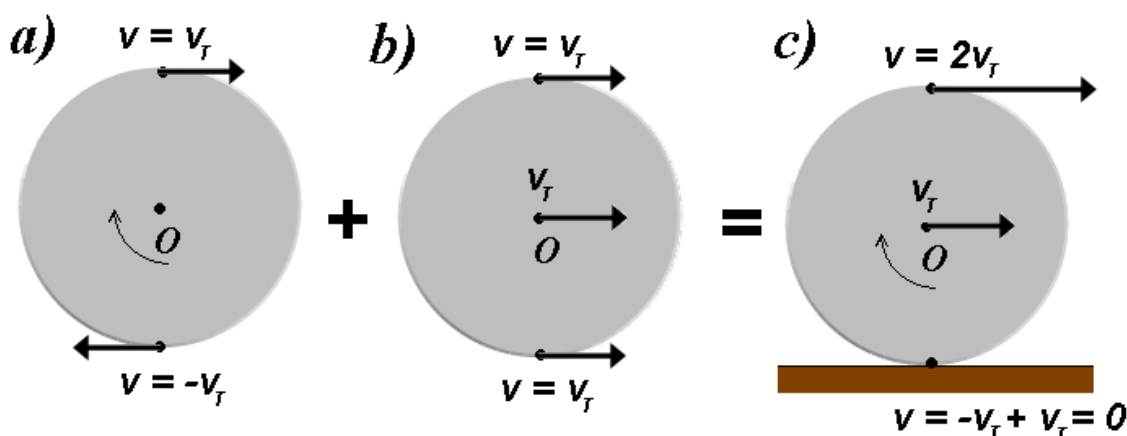
Ako teda jednoducho určiť hodnotu súčiniteľa šmykového trenia μ_s ? Stačí zmerať hodnoty d a h charakterizujúce naklonenú rovinu (Obr. 3.4), a tak vypočítať $\tan \alpha = h/d$, ktorý predstavuje hodnotu koeficientu statického šmykového trenia. (Riešenie ponechávame na samotnom čitateľovi po analýze videa v programe Tracker.)

3.2 Valivé trenie

Keďže sila trenia spomaľuje pohyb, snažíme sa ju zmenšiť. Preto sa medzi trecie plochy často umiestňujú guľôčky alebo valčeky, pretože sila valivého odporu je ďaleko menšia ako sila šmykového trenia (tento poznatok sa využíva v ložiskách). Pod valivým pohybom rozumieme taký pohyb, pri ktorom sa teleso otáča okolo okamžitej osi danej dotykovou priamkou na povrchu druhého telesa (napr. podložke). Ak budeme pozorovať pohyb bicyklového kolesa, ktoré sa pohybuje stálou rýchlosťou (presnejšie povedané geometrický stred kolesa sa pohybuje stálou rýchlosťou) po priamej dráhe a neprešmykuje, môžeme tento pohyb považovať za valivý pohyb. V prípade valenia kolesa bez prešmykovania platí vzťah (3.9)

$$v_T = \omega R, \quad (3.9)$$

kde v_T predstavuje obvodovú rýchlosť pohybu stredu kolesa, ω je uhlová rýchlosť otáčania kolesa okolo osi prechádzajúcej stredom kolesa, ktorá je rovnobežná s podložkou a R je polomer kolesa.



Obr. 3.5 Valenie kolesa ako zloženie a) otáčavého a b) posuvného pohybu

Ako ukazuje Obr. 3.5, môžeme tento pohyb chápať aj ako zloženie posuvného a otáčavého pohybu kolesa. Pri otáčavom pohybe, kedy os otáčania je v pokoji, ľubovoľný bod na vonkajšom obvode kolesa má obvodovú rýchlosť v_T danú vzťahom (3.9). Všetky body kolesa majú rovnakú uhlovú rýchlosť ω . Pri posuvnom pohybe (bez otáčania) sa všetky body kolesa pohybujú rovnakou rýchlosťou v_T . Zložením týchto dvoch pohybov dostaneme valivý pohyb. Zaujímavosťou je, že body nachádzajúce sa v blízkosti dotyku kolesa s podložkou sú v pokoji, zatiaľ čo body na vrchole kolesa sa pohybujú najväčšou rýchlosťou $v = 2v_T$ (Obr. 3.5c).

Úloha 3.2:

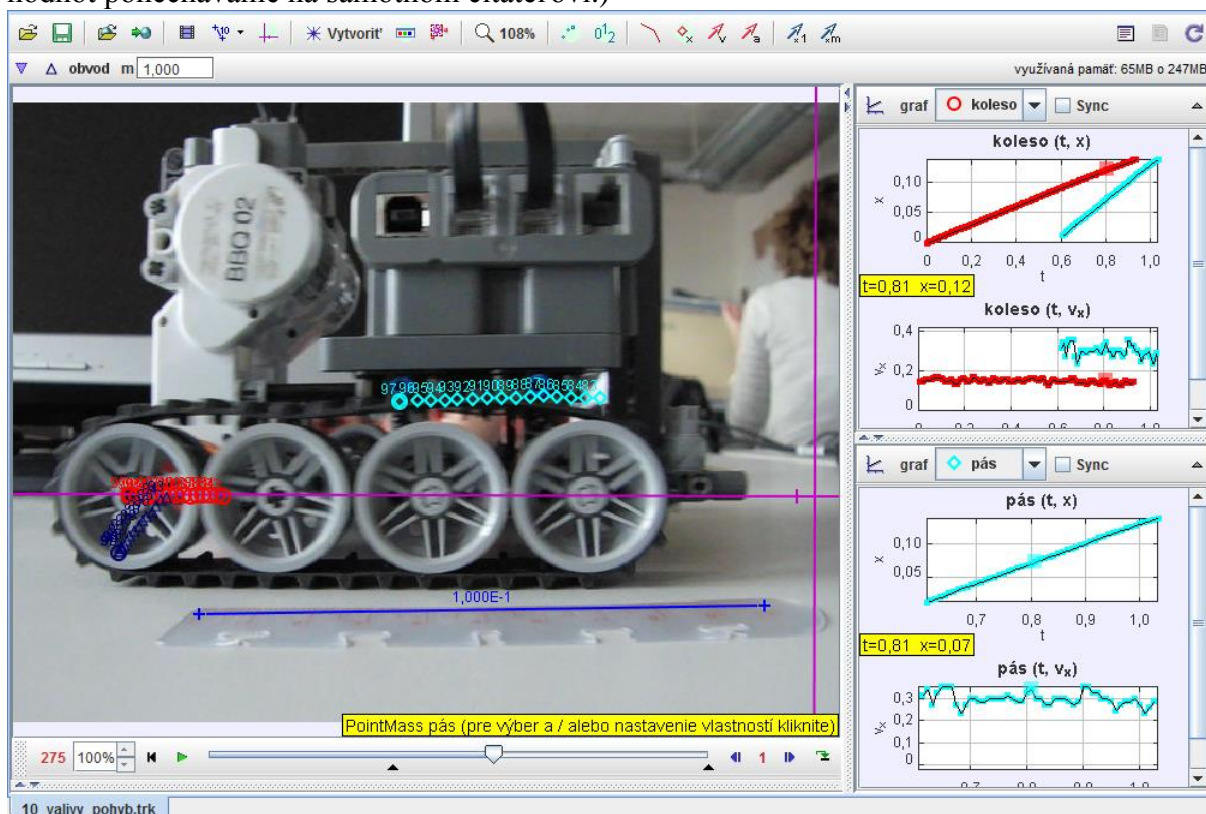
Analyzujte pohyb pásu vozíka. Akou rýchlosťou sa pohybuje vrch a spodok pásu vzhľadom k rýchlosti pohybu ťažiska kolesa?

(frekvencia snímok: 120 fps),

zdroj: [lego_robot.avi](#)

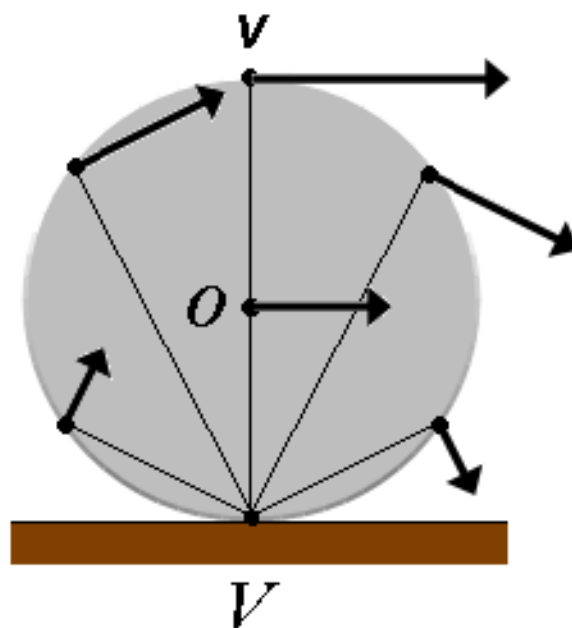
Riešenie:

Analýza rýchlosti v programe Tracker poukazuje na zaujímavé súvislosti medzi rýchlosťami vrchnej a spodnej časti pásu vo vzťahu k rýchlosti pohybu stredu kolesa Obr. 3.6 (porovnanie hodnôt ponechávame na samotnom čitateľovi.)



Obr. 3.6 Analýza a grafy časových závislostí rýchlosti vrchnej časti pásu a kolesa

Iný spôsob pohľadu na valivý pohyb ukazuje Obr. 3.7 Valivý pohyb kolesa môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom V dotyku podložky s kolesom.. Tento pohyb môžeme totiž interpretovať ako otáčanie okolo okamžitej osi, ktorá prechádza bodom dotyku kolesa V s podložkou a je kolmá na rovinu kolesa. Okamžité rýchlosti jednotlivých bodov valiaceho sa kolesa sú na Obr. 3.7 Valivý pohyb kolesa môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom V dotyku podložky s kolesom. označené šípkami.



Obr. 3.7 Valivý pohyb kola môžeme chápať aj ako otáčavý pohyb okolo osi, ktorá v každom okamihu prechádza bodom V dotyku podložky s kolesom.

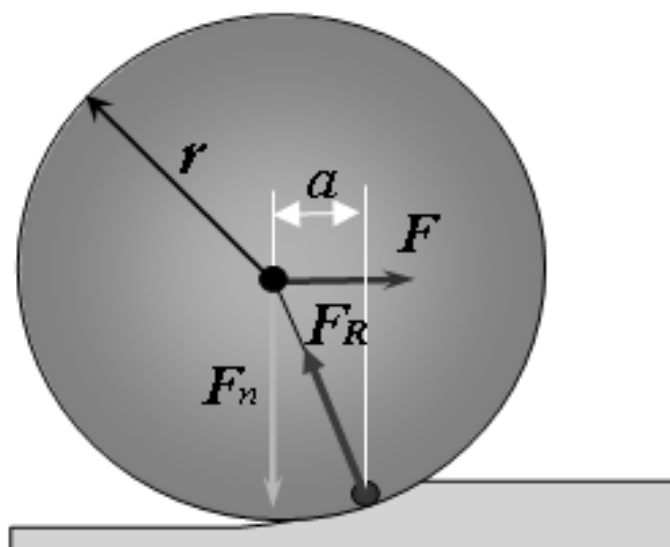
Aj pri valivom pohybe zohrávajú úlohu trecie sily. Je vôbec možné, aby sa koleso otáčalo po dokonale hladkej podložke? Ak by sme roztočili koleso uhlovou rýchlosťou ω a udelili mu vodorovnú rýchlosť veľkosti $v = \omega R$, kde R je polomer kola, možnože by sa to podarilo tak, aby v mieste dotyku kola s podložkou koleso neprekĺzavalo a nešmykalo sa po podložke. Podobným spôsobom môžeme uviesť koleso do valivého pohybu bez klzania i v prípade, že podložka nebude dokonale hladká.

Ak by sa koleso pohybovalo po podložke rovnomerne (pričom zatiaľ zanedbávame valivý odpor podložky proti pohybu) a žiadna ďalšia vodorovná sila by pohyb neudržiavala, musela by byť aj statická trecia sila nulová. Iná situácia však nastane, keď sa pokúsime zmeniť postupnú alebo uhlovú rýchlosť kola. V tomto prípade však musíme na koleso pôsobiť vodorovnou silou a pripustiť, že sa koleso v mieste dotyku s podložkou môže aj šmykať. Pokiaľ k šmyku nedôjde, bude podložka pôsobiť statickou trecou silou \vec{F}_s , ktorá bude smerovať „proti snahe“ kola prešmykovať. Ak k šmyku dôjde, dynamická trecia sila \vec{F}_d bude namierená proti skutočnému sklzu.

Doteraz sme uvažovali dokonalý kontakt medzi kolesom a podložkou, po ktorej by sa koleso v prípade rovnomerného pohybu po vodorovnej podložke valilo bez trenia. V skutočnosti však v dôsledku miernych deformácií oboch objektov (a posunu reakcie podložky oproti priamke prechádzajúcej stredom kola) vzniká valivý odpor podložky proti pohybu kola. Pohyb kola môže nastať len vtedy, keď moment reakcie vzhľadom na bod dotyku kola s podložkou ($F_n a$) bude vykompenzovaný momentom ťažnej sily (Fr), t.j. keď bude splnená podmienka

$$Fr = F_n a, \quad (3.10)$$

kde a je vzdialenosť pôsobiska reakcie podložky od zvislej priamky prechádzajúcej stredom kola a r je polomer kola (Obr. 3.8).



Obr. 3.8 Vznik valivého trenia

Z predchádzajúcej rovnice vyplýva vzťah pre valivé trenie pri valivom pohybe jedného telesa po inom

$$F_v = \frac{a}{r} F_n = \mu_{val} F_n, \quad (3.11)$$

kde μ_{val} je *súčiniteľ (koeficient) valivého trenia*, ktorý je vždy menší ako koeficient šmykového trenia, zvlášť ak sú valiace sa teleso a podložka z tvrdého a pružného materiálu. Dôsledkom toho je zhotovovanie guľových a valčekových ložísk, používanie kolies na vozidlách, atď. Z predchádzajúcej definície vyplýva, že podhustené pneumatiky automobilu zvyšujú valivé trenie. So zvyšovaním valivého trenia sa zároveň zvyšuje opotrebenie pneumatík a taktiež aj spotreba paliva (až o 5%). Sila valivého trenia je omnoho menšia ako šmykového trenia, preto je lepšie napr. sud valiť ako šmýkať. Valivé trenie teda spomaľuje pohyb v menšej miere ako šmykové trenie.

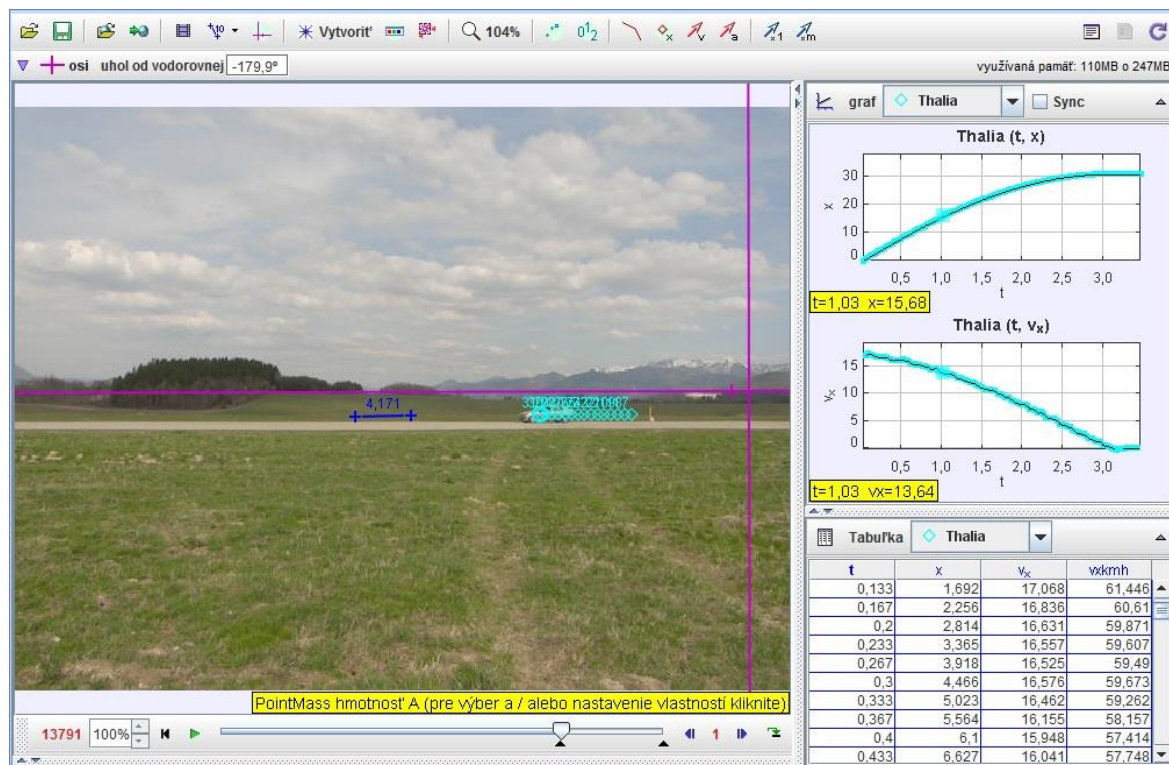
Úloha 3.3:

Určte brzdné dráhy auta Renault Thalia pri brzdení s rôznymi počiatočnými rýchlosťami na suchej vozovke a zimných pneumatikách.

(frekvencia snímok: 30 fps),

zdroj: [Thalia_sucho.wmv](#)

Riešenie:

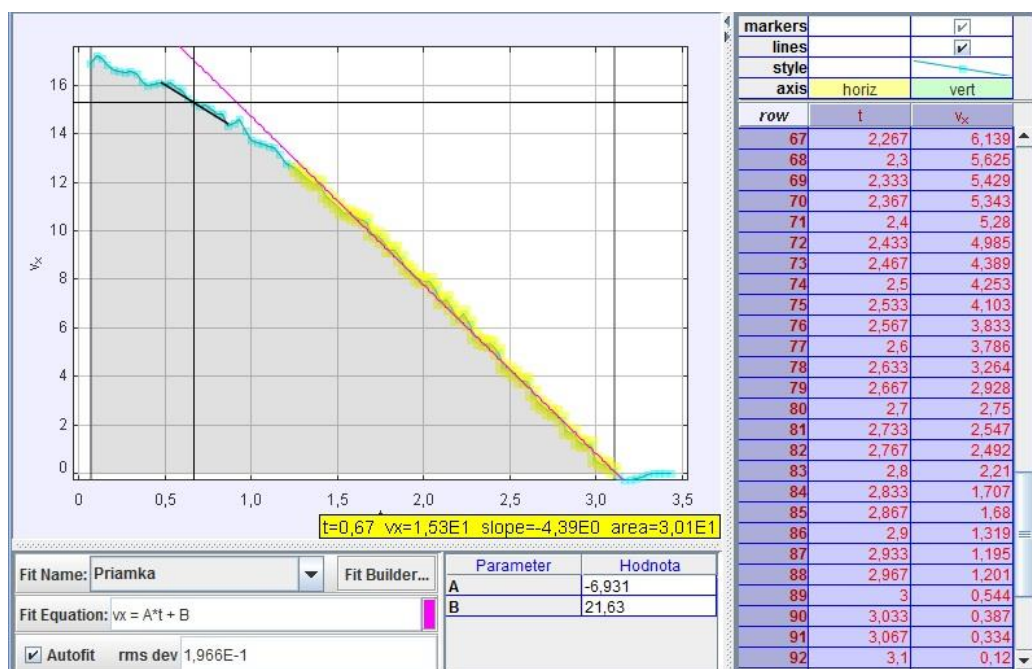


Obr. 3.9 Grafy časových závislostí brzdné dráhy a rýchlosti auta so zimnými pneumatikami

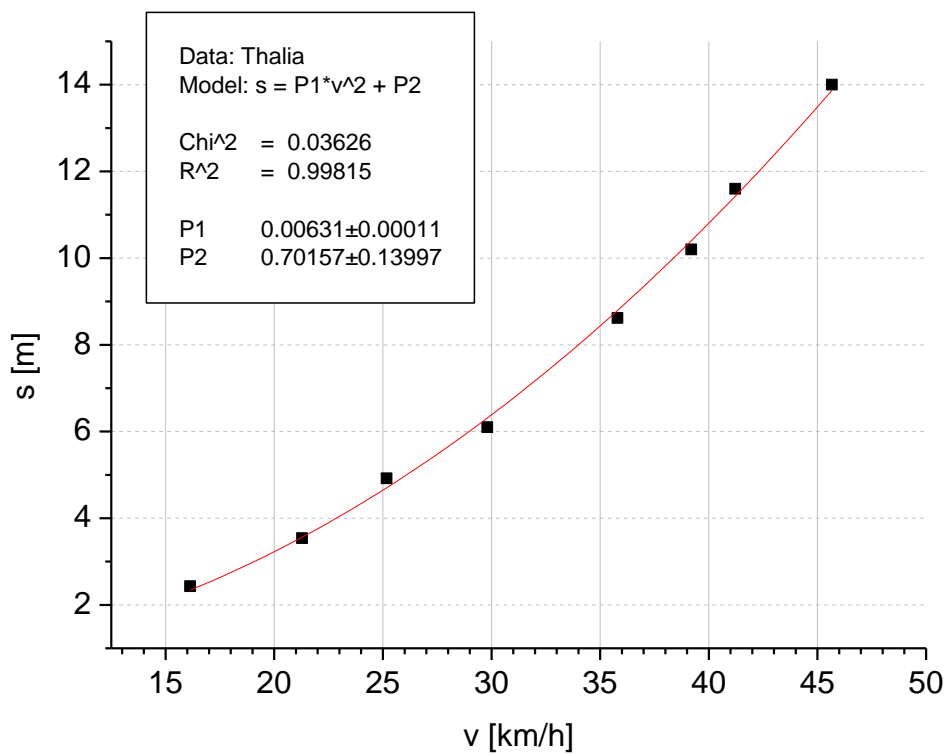
Obr. 3.10, auto sa od začiatku nasnímaného deja pohybovalo spomaleným pohybom, pričom v úvodnom procese brzdenia (približne do 1 s) veľkosť spomalenia narastala (v čase $t = 0,67$ s malo hodnotu $a = -4,39$ m/s^2) a v záverečnej fáze brzdenia dosahovalo priemernú hodnotu $a = -6,931$ m/s^2 . (Danú skutočnosť možno vysvetliť „jemnejším“ stlačením brzdného pedálu, keďže auto šoférovala žena.) Čo sa týka prejdenej dráhy pri brzdení automobilu s počiatočnou rýchlosťou $v = 16,898$ $m/s = 60,83$ km/h , tú možno určiť ako obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti na čase $s = 30,1$ m. Podobným spôsobom boli analyzované procesy brzdenia pri rôznych počiatočných rýchlostiach, pričom bola určovaná rýchlosť, pri ktorej auto brzdilo a prejdenej dráha. Dané hodnoty boli zaznamenávané do tabuľky a vnesené do grafu závislosti brzdné dráhy od rýchlosti, pri ktorej auto začalo brzditi (Obr. 3.11). Fitovaním nameraných údajov pomocou závislosti $s = P1*v^2 + P2$ boli určené parametre $P1$ a $P2$. Zo závislosti

$$s = \frac{v^2}{2g\mu} \quad (3.12)$$

bol určený faktor statického trenia medzi miestami mokrým asfaltom po topiacom sa snehu a gumenými zimnými pneumatikami, ktorého vypočítaná hodnota bola $\mu = 0,62$.



Obr. 3.10 Graf časovej závislosti rýchlosti v procese brzdenia auta so zimnými pneumatikami



Obr. 3.11 Graf závislosti brzdenj dráhy od rýchlosti, pri ktorej začalo auto brzdiť na miestami mokrej vozovke po topiacom sa snehu so zimnými pneumatikami.

Neriešené úlohy:

Úloha 3.4: Určte brzdné dráhy auta Citroen C6 pri brzdení na suchej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte priemerné spomalenia a faktor šmykového trenia.

(dĺžka auta: 4,908 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Citroen.wmv](#)

Úloha 3.5: Určte brzdné dráhy auta Citroen C6 pri brzdení na mokrej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte priemerné spomalenia a faktor šmykového trenia.

(dĺžka auta: 4,908 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Citroen mokro.wmv](#)

Úloha 3.6: Porovnajete brzdné dráhy auta Citroen C6 pri brzdení na vozovke s posypom (štrk po zimnej údržbe) a po úprave vozovky (odstránení posypu). Hodnoty spracujte graficky.

(dĺžka auta: 4,908 m, frekvencia snímok: 120 (30) fps)

zdroj: [Citroen posyp.wmv](#)

Úloha 3.7: Určte brzdné dráhy domiešavača ($m = 22$ ton) pri brzdení na suchej a mokrej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. (Hodnoty spracujte graficky.) Určte priemerné spomalenia a faktor šmykového trenia. Závisí dĺžka brzdných dráh od hmotnosti?

(dĺžka osobného auta: 4,605 m, výška: 1,430 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [domiesavac.wmv](#)

Úloha 3.8: Určte brzdné dráhy auta Mazda3 pri brzdení na suchej vozovke. Určte priemerné zrýchlenie a počiatočnú rýchlosť pri začatí brzdenia.

(dĺžka auta: 4,505 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Mazda3.wmv](#)

Úloha 3.9: Určte brzdné dráhy áut pri brzdení na zasneženej vozovke pri rôznych počiatočných rýchlostiach. Určte priemerné spomalenia áut.

(frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [auta_sneh.wmv](#)

Úloha 3.10: Určte brzdné dráhy auta Renault Thalia pri brzdení s rôznymi počiatočnými rýchlosťami na mokrej vozovke po topiacom sa snehu.

(dĺžka auta: 4,171 m, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [Thalia mokro.wmv](#)

4. Gravitačné pole

4.1 Newtonov gravitačný zákon

S pôsobením gravitačného poľa sa stretávame každý deň. Jeho pôsobenie si najviac uvedomíme, keď padáme na zem pri potknutí. Gravitačná sila je príťažlivá a pôsobí medzi každými dvoma hmotnými telesami. Jej smer je totožný so spojnicou ťažísk telies. Veľkosť a smer gravitačnej sily sa dá jednoznačne určiť z Newtonovho gravitačného zákona:

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{mM}{r^3} \vec{r}, \quad (4.1)$$

kde $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ je gravitačná konštanta. Keďže gravitácia je **vzájomné** silové pôsobenie telies na seba, aj druhé teleso pôsobí na prvé teleso silou $\vec{F}' = -\vec{F}$.

Každé hmotné teleso okolo seba vytvára gravitačné pole, ktoré charakterizujeme intenzitou. O jej existencii v ľubovoľnom mieste poľa sa môžeme jednoducho presvedčiť tak, že do tohto miesta umiestnime (vložíme) iné teleso. Na toto teleso bude pôsobiť gravitačná sila. **Intenzitu gravitačného poľa** môžeme všeobecne definovať ako pomer gravitačnej sily pôsobiacej na teleso k jeho hmotnosti. Intenzita poľa je vektorová veličina, ktorej smer a orientácia je daná vektorom gravitačnej sily a jej vzťah je

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad (4.2)$$

pričom rozmer intenzity gravitačného poľa v SI je $[K] = \text{N kg}^{-1} = \text{ms}^{-2}$. Jej jednotka je totožná so zrýchlením, gravitačné pole udeľuje v každom mieste poľa telesu zrýchlenie veľkosti K . Ak sa teleso nachádza v poli viacerých hmotných telies výsledná intenzita v mieste daného telesa je daná súčtom – superpozíciou intenzít jednotlivých telies $\vec{K} = \sum \vec{K}_i$.

Najznámejším a pre nás najdôležitejším gravitačným poľom je gravitačné pole Zeme. Pre jednoduchosť najprv predpokladajme, že naša Zem je guľa s homogénne rozloženou hmotnosťou. Pre veľkosť intenzity gravitačného poľa na povrchu Zeme platí:

$$K = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{5,98 \times 10^{24}}{(6,37 \times 10^6)^2} = 9,8065 \text{ m/s} = \text{g}. \quad (4.3)$$

Intenzita gravitačného poľa sa teda rovná **gravitačnému zrýchleniu**. Veľkosť gravitačného zrýchlenia nezávisí od hmotnosti telesa m . Ak by boli splnené zjednodušené predpoklady týkajúce sa tvaru Zeme, rozloženia hmotnosti v nej a Zem by sa neotáčala, veľkosť gravitačného zrýchlenia by bola na ktoromkoľvek mieste zemského povrchu rovnaká. Vzhľadom na to, že Zem má tvar geoidu (je na póloch sploštená) a rotuje, skutočné zrýchlenie, ktoré je telesám na zemskom povrchu udelené Zemou, sa nazýva **tiažové zrýchlenie**. Veľkosť tiažového zrýchlenia závisí od zemepisnej šírky.

4.2 Pohyby telies v gravitačnom poli Zeme

Podľa Newtonovho gravitačného zákona vzťah $F_g = m K$ (4.2) predstavuje silu, ktorou Zem pôsobí na teleso hmotnosti m vo vzdialenosti $r > R_Z$ od stredu Zeme. No teleso (dom, most, človek, ...), ktoré sa nachádza na povrchu Zeme sa aj s ňou pohybuje. Z tohto dôvodu nemôžeme

použiť len tak jednoducho daný vzťah na výpočet gravitačnej sily na naše teleso. Používame na to pojem tiažová sila $F_G = mg$. Ďalej si vysvetlíme rozdiel medzi gravitačným zrýchlením K a tiažovým zrýchlením g . Veľkosť tiažovej a gravitačnej sily Zeme sa však líši a to z nasledujúcich dôvodov:

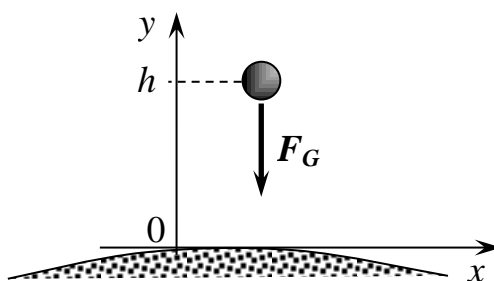
- Gravitačná sila závisí od vzdialenosti telesa od stredu Zeme, ale Zem nie je dokonalá guľa, je to elipsoid sploštený na pólach. Tiažové zrýchlenie rastie smerom od rovníka k pólu - mení sa so zemepisnou šírkou.
- Hustota Zeme sa mení v jednotlivých oblastiach pod povrchom Zeme. Preto tiež tiažové zrýchlenie je rôzne na rôznych miestach Zeme.
- Najväčší vplyv má však rotácia Zeme. Na teleso na povrchu Zeme pôsobí gravitačná sila F_g a súčasne aj odstredivá sila $F_o = m \omega r$, pretože Zem rotuje uhlovou rýchlosťou ω . Uhlová rýchlosť rotácie Zeme je na všetkých zemepisných šírkach rovnaká, no polomer otáčania r sa smerom od rovníka ($r = R_Z$) znižuje. Výsledná tiažová sila pôsobiaca na teleso je daná vektorovým súčtom gravitačnej a odstredivej sily, ak zanedbáme ostatné menej významné sily:

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_o$$

Napríklad na rovníku je gravitačné zrýchlenie $K = 9,83\text{m/s}^2$, no výsledná veľkosť tiažového zrýchlenia vplyvom odstredivej sily je

$$g = 9,80665 \text{ m.s}^{-2} \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

Táto hodnota bola prijatá ako **normálne tiažové zrýchlenie** na druhej generálnej konferencii pre váhy a miery v roku 1901. Odpovedá severnej zemepisnej šírke 45° na úrovni mora. Rovnice popisujúce rovnomerne zrýchlený pohyb platia pre zvislý vrh v blízkosti zemského povrchu (ak je odpor vzduchu zanedbateľný), t.j. do výšok zanedbateľne malých oproti zemskému polomeru, teda $h \ll 6.10^3 \text{ km}$. Medzi tieto pohyby patria tzv. vrhy ako šikmý vrh, vodorovný vrh, zvislý vrh nahor, zvislý vrh nadol a voľný pád. Pre ne sa odvodí všeobecný tvar pohybovej rovnice, z ktorej je možné jednoduchým dosadením počiatočných podmienok určiť výsledné vzťahy pre príslušný druh pohybu. Do druhej triedy pohybov zaradíme pohyby vo veľkej výške nad zemským povrchom, kde je veľkosť pôsobiacej sily určená z Newtonovho gravitačného zákona (4.1). V danej časti si vyšetříme pohyby po kruhovej (I. kozmická rýchlosť) a parabolickej dráhe v gravitačnom poli Zeme, prípadne pohyby nebeských telies.



Obr. 4.1. Orientácia tiažovej sily F_G v súradnicovom systéme zviazanom so zemským povrchom

4.2.1 Pohybová rovnica pre popis v malých výškach

Pri riešení všetkých pohybov v klasickej mechanike vychádzame z II. Newtonovho pohybového zákona matematicky sformulovaného vzťahom (2.1). Z daného zákona pre zrýchlenie teda platí

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i, \quad (4.4)$$

kde \vec{F} je výslednica všetkých síl pôsobiacich na teleso. Jednotlivé sily \vec{F}_i sú sily, ktoré jednak spôsobujú pohyb a tiež pôsobia proti pohybu. V našom prípade budeme uvažovať len pôsobenie gravitačnej sily

$$\vec{F}_G = (0, -mg, 0). \quad (4.5)$$

Značenie sa zhoduje s Obr. 4.1. V 11. kapitole Numerické modelovanie reálnych dejov budeme uvažovať aj so silami pôsobiacimi proti pohybu.

Keďže rovnica (4.4) je vektorová rovnica, predstavuje vlastne trojicu algebraických rovníc, pričom budeme uvažovať len gravitačnú silu (4.5). Často krát pohyb telies analyzujeme v pravouhlom súradnicovom systéme (x, y, z) . V kartézkom súradnicovom systéme majú algebraické rovnice vektorovej rovnice (4.4) tvar

$$a_x = 0, \quad a_y = -g, \quad a_z = 0, \quad (4.6)$$

kde a_x, a_y, a_z sú zložky vektora \vec{a} a F_x, F_y, F_z sú zložky výslednice vektora \vec{F} .

Na to aby sme mohli určiť rýchlosť v a dráhu s ako funkcie času t pre dané teleso potrebujeme vedieť okrem pôsobiacich síl aj *počiatočné podmienky*. Tie vo všeobecnosti určujú, akú malo teleso počiatočnú rýchlosť \vec{v}_0 a počiatočnú polohu \vec{r}_0 v čase $t = 0$,

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad (4.7)$$

t.j. v okamihu, keď na teleso začala pôsobiť sila \vec{F} .

Riešenie pohybových rovníc (4.6) s počiatočnými podmienky (4.7) si budeme ilustrovať na popise pohybu telies v tiažovom poli Zeme. Predpokladajme, že máme hmotný bod, ktorý sa môže nachádzať v nie príliš veľkých výškach nad zemským povrchom vo výške menšej ako 100 m. Tento predpoklad zabezpečí, že tiažovú silu pôsobiacu na teleso môžeme považovať za konštantnú (4.5). Ďalej predpokladajme, že hmotný bod sa nachádza vo vákuu. Takýto predpoklad zase zabezpečí, že nemusíme uvažovať odporové sily, ktoré by pôsobili na teleso pohybujúce sa v atmosfére. Pre ďalšie zjednodušenie budeme uvažovať len dvojrozmerný súradnicový systém xy tak, že os x bude rovnobežná so zemským povrchom a os y bude na ňu kolmá (viď. Obr. 4.1). Výsledné všeobecné vyjadrenia pre rýchlosti a dráhy hmotného bodu v x -ovej a y -ovej súradnici sú v tvare

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} , & v_y &= v_{0y} - gt , & (4.8) \\ x &= x_0 + v_{0x}t , & y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 , \end{aligned}$$

A teraz, keď poznáme všeobecné rovnice pre rýchlosti a dráhy, môžeme podrobnejšie charakterizovať možné pohyby hmotného bodu v spomínanom poli a určiť niektoré ich vlastnosti.

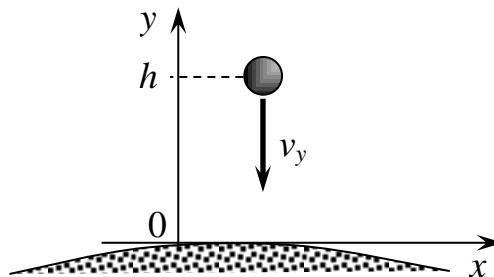
4.2.2 Vol'ný pád

Vol'ný pád je pohyb, ktorý vykonáva predmet spustený z určitej výšky h nad zemským povrchom (Obr. 4.2), pričom predpokladáme homogénne gravitačné pole. V tomto prípade sa neuvažujeme odpor vzduchu. Predpokladajme, že v čase $t = 0$ s boli počiatočné podmienky voľného pádu nasledovné: $v_{0x} = v_{0y} = 0$ (nulová rýchlosť) $x_0 = 0, y_0 = h$. Z našich všeobecných rovníc (4.4) pre voľný pád dostaneme

$$x=0, \quad y=h-\frac{1}{2}gt^2, \quad (4.9)$$

$$v_x=0, \quad v_y=-gt, \quad (4.10)$$

Z týchto rovníc vyplýva, že pri voľnom páde pohyb prebieha len v osi y -ovej a ide o pohyb rovnomerne zrýchlený smerom nadol. Jednoduchými výpočtami sa dajú určiť i niektoré vlastnosti voľného pádu.



Obr. 4.2 Vol'ný pád

Čas dopadu telesa t_d môžeme určiť z rovnice pre y -ovú súradnicu (4.9). Keď teleso dopadne, tak $y = 0$ a potom pre čas dopadu vyplýva

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4.11)$$

Ďalším dôležitým parametrom je rýchlosť dopadu v_d , s ktorou teleso dopadne na zemský povrch. Môžeme ju určiť zo vzťahu pre rýchlosť tak, že za čas t dosadíme t_d zo vzťahu (4.10). Pre absolútnu hodnotu rýchlosti takto dostaneme

$$v_d = \sqrt{2gh} \quad . \quad (4.12)$$

Na vzťahoch (4.11) a (4.12) je zaujímavé, že sa v nich nevyskytuje hmotnosť telesa. To ale znamená, že telesá s rôznymi hmotnosťami (napr. pierko sojky a 1 kg kniha) spustené z rovnakej výšky, by za našich predpokladov, ktoré sme si stanovili na začiatku (bezodporové prostredie a malá výška nad zemským povrchom), dopadli naraz a s rovnakými rýchlosťami. Vplyv odporovej sily na pohyb reálnych telies budeme riešiť v kapitole 8 Modelovanie v programe Tracker a 11 Numerické modelovanie reálnych dejov.

4.2.3 Vrh nahor

Tento pohyb predstavuje vyhodenie napr. lopty smerom nahor (vrh_nahor2.avi). Pri tomto pohybe sú počiatkové podmienky nasledujúce: teleso sa pohybuje len v smere osi y , teda x -ová zložka polohy a rýchlosti sa nemenia, sú nulové: $v_{0x} = 0 \text{ m/s}$, $x_0 = 0 \text{ m}$. Loptu vyhadzujeme z výšky $y_0 = h$ smerom nahor, v smere osi y , teda s počiatkovou rýchlosťou $v_0 > 0$. Zo všeobecných rovníc (4.8) a predošlých počiatkových podmienok dostaneme

$$x = 0 \text{ m}, \quad y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4.13)$$

$$v_x = 0 \text{ m}, \quad v_y = v_0 - g t. \quad (4.14)$$

Zo skúsenosti vieme, že teleso postupne spomaľuje, až nakoniec zastane v najvyššom bode svojho pohybu a potom začne voľne padať smerom nadol ako v predošlom prípade - voľný pád. Keďže teleso v najvyššom bode h_{\max} má nulovú rýchlosť $v_y(h_{\max}) = 0 \text{ m/s}$, dá sa z tejto informácie vypočítať aj kedy sa to stane:

$$t_v = \frac{v_0}{g} \quad . \quad (4.15)$$

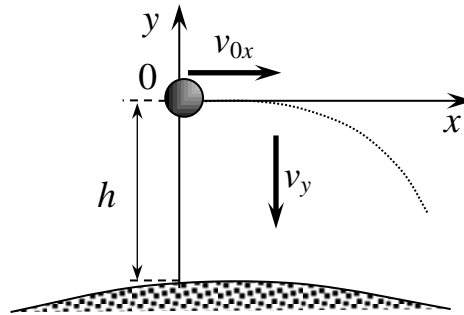
Teraz ak do vzťahu pre dráhu - výšku y (4.13) dosadíme za čas t čas t_v , potom pre maximálnu výšku h_{\max} dostaneme po úpravách vzťah

$$h_{\max} = h + \frac{v_0^2}{2g} \quad . \quad (4.16)$$

Riešenie voľného pádu a vrhu nahor sa dá aj z pohľadu zákona zachovania energií. V prípade voľného pádu i vrhu nahor máme dva stavy: I. maximálna výška a II. poloha telesa tesne pred dopadom. V I. stave uvažujeme len polohovú energiu telesa $E_I = E_p = m g h$, lebo teleso na začiatku (konci) pohybu má nulovú rýchlosť a v II. stave zase uvažujeme len kinetickú energiu $E_{II} = E_k = \frac{1}{2} m v^2$, polohová energia je nulová ($h = 0$). Keď dáme do rovnosti tieto energie dostávame vzťah buď pre rýchlosť dopadu pri voľnom páde (4.12) alebo pre maximálnu výšku vrhu nahor.

4.2.4 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh je pohyb, kedy je teleso v určitej výške h nad zemským povrchom vrhnuté vodorovne s počiatočnou rýchlosťou v_0 (Obr. 4.3).



Obr. 4.3. Vodorovný vrh

Jeho pohyb popisujú tie isté rovnice (4.8) ako pri voľnom páde a vrhu zvislom nahor, len s inými počiatočnými podmienkami. Oproti predošlým pohybom, tento pohyb treba riešiť v priestore. Vodorovný vrh sa dá zložiť z dvoch pohybov: voľný pád a rovnomerný pohyb v smere osi x . Počiatočné podmienky pre tento pohyb sú nasledovné: teleso je vstrelené v smere osi x ($x = 0$) s počiatočnou rýchlosťou v_0 z počiatočnej výšky $y_0 = h$. Po dosadení týchto počiatočných podmienok do rovníc (4.8) dostaneme

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4.17)$$

$$v_x = v_0, \quad v_y = -g t. \quad (4.18)$$

Pri vodorovnom vrhu sa teleso pohybuje po krivke, ktorá sa dá popísať parabolou v tvare: $y = h - x^2 g / (2v_0^2)$. Čas dopadu sa zhoduje s časom určeným pre voľnom páde $t_d = \sqrt{2h/g}$ (4.11). Vzdialenosť dopadu pri vodorovnom vrhu je možné určiť zo vzťahu pre x -ovú súradnicu (4.17) tak, že za čas t dosadíme čas dopadu t_d . Pre vzdialenosť dopadu x_d tak dostaneme

$$x_d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (4.19)$$

Výpočet rýchlosti dopadu je v tomto prípade zložitejší, lebo výsledná rýchlosť sa skladá z x -ovej zložky rýchlosti $v_x = v_0$ a y -ovej $v_y = -g t_d = \sqrt{2gh}$. Výsledná rýchlosť je teda daná vzťahom:

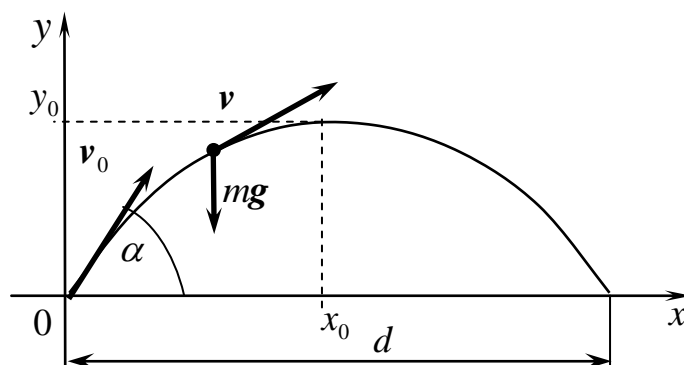
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \quad (4.20)$$

pričom s osou x zvierá uhol

$$\beta = \arctan(v_y / v_x) = \arctan(\sqrt{2gh} / v_0). \quad (4.21)$$

4.2.5 Šikmý vrh

Šikmý vrh je pohyb, kedy je teleso vrhnuté počiatkovou rýchlosťou \vec{v}_0 v rovine xy pod určitým uhlom α s osou x , t.j. so zemským povrchom (Obr. 4.4).



Obr. 4.4. Šikmý vrh

Pohyb telesa opäť aj v tomto prípade popisujú tie isté rovnice (4.8) ako pri predchádzajúcich vrhoch, len s inými počiatkovými podmienkami. Z Obr. 4.4 je zrejmé, že v čase $t = 0$ sú počiatkové podmienky nasledovné: $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ $x_0 = y_0 = 0$. Keď dosadíme tieto počiatkové podmienky do rovníc (4.8) dostaneme

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (4.22)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (4.23)$$

Z týchto rovníc opäť vidíme, že pohyb prebieha len v rovine xy . Rovnicu krivky vyjadrujúcu tvar dráhy dostaneme analogickým spôsobom ako pri vodorovnom vrhu, pričom je tvar je nasledovný: $y = x \tan \alpha - x^2 g / (2 v_0^2 \cos^2 \alpha)$ čo je tiež rovnica paraboly.

V prípade šikmého vrhu je tu viacero dôležitých parametrov, ktoré môžeme získať jednoduchou úpravou:

- čas dosiahnutia najvyššej výšky:

$$t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4.24)$$

- súradnice vrcholu:

$$x = \frac{v_0^2}{2g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad (4.25)$$

- čas dopadu:

$$t_d = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4.26)$$

- vzdialenosť dopadu:

$$x_d = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.27)$$

Výsledná rýchlosť dopadu sa počíta rovnako ako v prípade vodorovného pohybu (4.20) a uhol dopadu zase pomocou vzťahu (4.21).

4.3 Pohyb telies v gravitačnom - radiálnom poli Zeme

Dôležitými veličinami pre každé väčšie nebeské teleso (Slnko, planéty, mesiace) sú I. a II. kozmická rýchlosť. I. kozmická rýchlosť v_I je rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu v horizontálnom smere tesne nad povrchom planéty, aby obiehala okolo nej po kruhovej dráhe ako umelá družica. II. kozmická rýchlosť v_{II} predstavuje tzv. únikovú rýchlosť z povrchu planéty. Je to minimálna rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu z povrchu planéty smerom zvislo nahor, aby natrvalo opustilo jej gravitačné pole planéty.

4.3.1 Pohyb telesa po kruhovej dráhe okolo Zeme

Pokiaľ chceme, aby delová guľa vystrelená z dela neustále lietala okolo Zeme tesne nad jej povrchom, treba jej na začiatku pohybu udeliť dostatočnú počiatočnú rýchlosť v_I vodorovným smerom. Ak pri tomto pohybe zanedbáme odpor vzduchu, potom podmienka, ktorú treba splniť na jej obiehanie je, aby odstredivá sila $F = ma_n = mv^2 / (R_Z + h)$ bola rovnako veľká ako príťažlivá gravitačná sila (4.1) ktorou naň pôsobí Zem. V danom prípade sa bude teleso pohybovať po kruhovej dráhe. Musí teda platiť

$$m \frac{v_I^2}{R_Z + h} = \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2}. \quad (4.28)$$

Odtiaľ pre rýchlosť v_I vyplýva

$$v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}}. \quad (4.29)$$

Tento vzťah vyjadruje, akou optimálnou rýchlosťou sa má pohybovať družica na obežnej dráhe okolo Zeme vo výške h . Ak použijeme, že $h = 0$ m (polomer obežnej dráhy družice je prakticky zhodný s polomerom Zeme) dostávame potom z predošlej rovnice po úprave vzťah pre prvú kozmickú rýchlosť

$$v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} \doteq 7.9 \text{ km/s}. \quad (4.30)$$

4.3.2 Pohyb telesa po parabolickej dráhe v gravitačnom poli Zeme

Zväčšovaním počiatočnej rýchlosti v_0 telesa na väčšiu rýchlosť ako je prvá kozmická rýchlosť v_I dosiahneme, že dráha telesa bude eliptická. Zväčšovaním tejto rýchlosti sa bude meniť tvar eliptickej dráhy; elipsa sa stáva pretiahnutejšou. Akú teda rýchlosť musíme

minimálne udeliť kozmickej rakete, aby sa dostala z dosahu zemskej gravitácie? Odpoveď všetci dobre poznáme, táto rýchlosť má aj pomenovanie a volá sa **II. kozmická rýchlosť** a jej hodnota predstavuje okolo 11 km/s . Ukážme si teraz na základe akého postupu sme dospeli k spomínanej hodnote. Pri vzd'aloŕovaní rakety zo zemského povrchu sa koná práca

$$W = \int_{R_Z}^{\infty} F \cdot dr = \kappa \int_{R_Z}^{\infty} \frac{mM_Z}{r^2} \cdot dr .$$

ktorú keď vypočítame, dostaneme

$$W = \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} . \quad (4.31)$$

Celá táto energia alebo práca, ktorú treba dodať, sa hradí z kinetickej energie telesa, rakety. Ak dáme do rovnosti kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2} m v_{II}^2$ a danú potrebnú prácu dostaneme vzťah pre II. kozmickú rýchlosť:

$$v_{II} = \sqrt{2\kappa \frac{M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} = v_I \sqrt{2} , \quad (4.32)$$

$$v_{II} \doteq 11,2 \text{ km/s} .$$

Keď telesu udelíme druhú kozmickú rýchlosť dostane sa do oblastí priestoru slnečnej sústavy, v ktorých intenzitu gravitačného poľa Zeme môžeme zanedbať. Teleso sa stane družicou Slnka.

4.3.3 Pohyb, pri ktorom teleso opustí slnečnú sústavu

Pri ďalšom zväčšovaní počiatocnej rýchlosti v_0 telesa nad veľkosť druhej kozmickej rýchlosti v_{II} môže teleso dosiahnuť stav, že opustí slnečnú sústavu. Rýchlosť, ktorú treba telesu udeliť na povrchu Zeme, aby teda uniklo z gravitačného pôsobenia Slnka, nazývame tretia kozmická rýchlosť v_{III} . K odletu z miesta obežnej dráhy Zeme je treba rýchlosť $42,1 \text{ km/s}$, no dá sa však využiť obežná rýchlosť planéty Zem, ktorá je $29,8 \text{ km/s}$. Potrebná dodatočná rýchlosť tak klesne na $12,4 \text{ km/s}$. Raketa však musí prekonať ešte gravitačné pole Zeme. Tretia kozmická rýchlosť je preto

$$v_{III} \doteq 16,4 \text{ km/s} \quad (4.33)$$

pri štarte zo zemského povrchu (tak sa udáva najčastejšie), prípadne $13,8 \text{ km/s}$ pre odlet z vyčkávacej dráhy okolo Zeme.

Úloha 4.1:

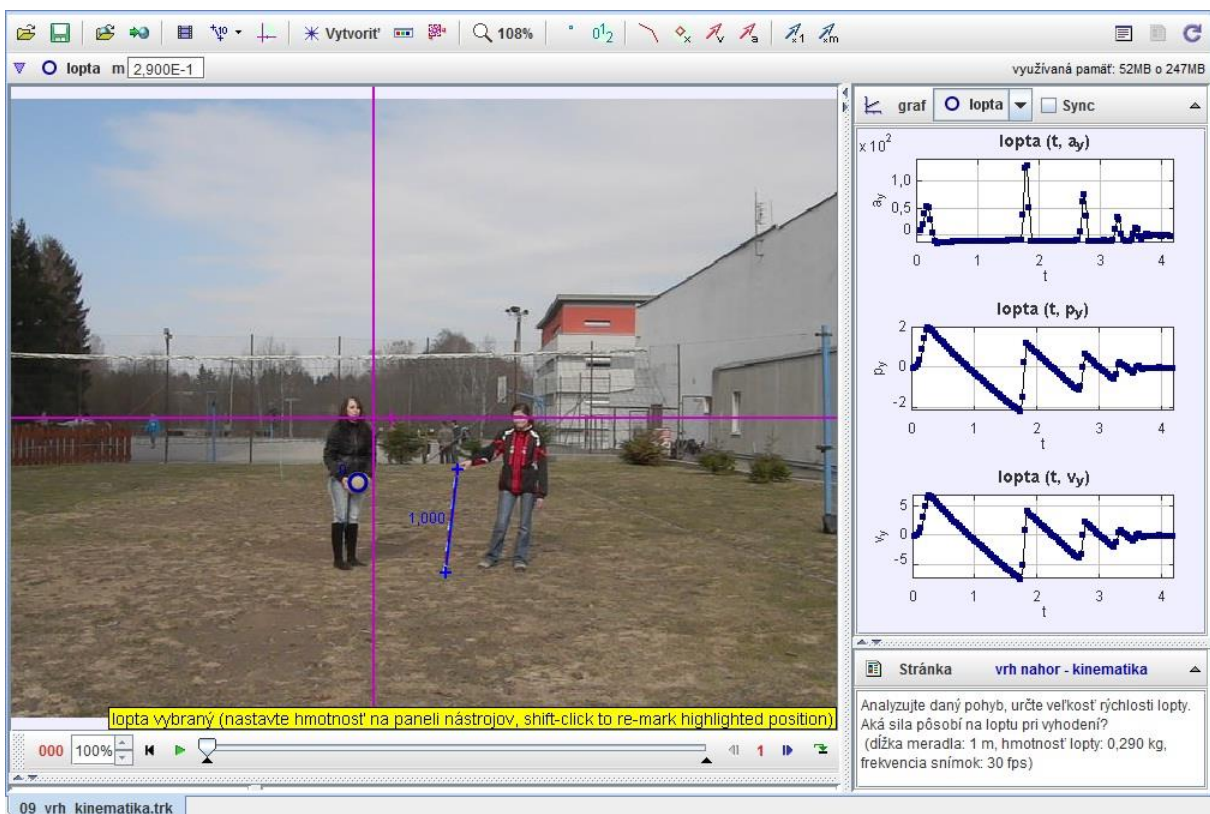
Analyzujte daný pohyb, určte rýchlosti lopty a veľkosť tiažového zrýchlenia v jej maximálnej výške.

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,290 kg, frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [vrh nahor2.avi](#)

Riešenie:

Na Obr. 4.5 je znázornená analýza pohybu lopty vyhodenej zvislo nahor. Hodnotu rýchlosti a zrýchlenia v maximálnej polohe lopty je možné určiť z časových závislostí. Ako zo skúseností vieme, rýchlosť lopty v maximálnej polohe bude nulová (v čase blízko 1s), problém však robí určenie zrýchlenia, ktoré mnohí študenti v maximálnej polohe lopty považujú za nulové. Hodnotu okamžitého zrýchlenia možno určiť aj ako smernicu dotyčnice ku grafu závislosti rýchlosti na čase a tá, bude rovnaká pre prípad pohybu lopty nahor (po opustení rúk), aj pre pohyb nadol (pokiaľ sa lopta neodrazí od zeme) a taktiež aj v maximálnej polohe lopty. Pre určenie hodnoty priemerného zrýchlenia je možné použiť lineárnu regresiu.



Obr. 4.5 Analýza zvislého vrhu smerom nahor

Neriešené úlohy:

Úloha 4.2: Určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme. Akou rýchlosťou je lopta vyhodená a akou rýchlosťou dopadne?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vrh nahor.avi](#)

Úloha 4.3: Určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme. Akou rýchlosťou sa lopta pohybuje vo vodorovnom smere? Aká sila pôsobí na loptu?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vodorovny vrh.avi](#)

Úloha 4.4: Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty vo vodorovnom a zvislom smere. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri kopnutí?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,421 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [sikmy vrh.avi](#)

Úloha 4.5: Analyzujte rýchlosť daného pohybu lopty, aká veľká sila pôsobí pri odrazoch?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,610 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vrh nadol.avi](#)

Úloha 4.6: Analyzujte daný pohyb, určte veľkosť rýchlosti lopty. Aká veľká sila pôsobí na loptu pri hodení dole?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť lopty: 0,580 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vrh nadol2.avi](#)

5. Tuhé teleso

Pri niektorých úvahách a fyzikálnej interpretácii nevystačíme s mysleným pojmom hmotného bodu (napríklad pri otáčavom pohybe). Môžeme však zanedbať zmeny tvaru a objemu telies, ktoré nastávajú pôsobením vonkajších síl, a tak zavádzame pojem **tuhé teleso**. *Tuhé teleso je ideálne teleso, ktorého objem a tvar sa účinkom ľubovoľne veľkých síl nemení.*

Bod, v ktorom sila pôsobí na teleso, nazývame *pôsobisko sily*. Účinok sily pôsobiacej na teleso nezávisí len od veľkosti a smeru sily, ale aj od jej pôsobiska. Pri tuhom telese budeme skúmať otáčavý pohyb daného telesa. Na rozdiel od posuvného pohybu, kedy všetky body telesa majú rovnakú okamžitú rýchlosť, pri otáčavom pohybe budú mať všetky body tuhého telesa rovnakú uhlovú rýchlosť.

5.1 Moment sily

Schopnosť sily \vec{F} otáčať teleso okolo pevnej osi závisí nielen na veľkosti a smere sily, ale aj od polohového vektora \vec{r} pôsobiska sily vzhľadom na os otáčania a charakterizuje ho fyzikálna veličina nazývaná **moment sily** \vec{M}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5.1)$$

Moment sily je vektorovou veličinou a jeho smer je kolmý k rovine vektorov \vec{r} a \vec{F} . Jeho smer určíme podľa pravidla pravej ruky: ak položíme pravú ruku na povrch telesa tak, aby prsty ukazovali smer pôsobiacej sily, ktorá spôsobuje otáčavý pohyb, vztýčený palec nám ukáže smer momentu sily. Jednotkou momentu sily je newton meter $[M] = \text{N} \cdot \text{m}$. Tak, ako hybnosť \vec{p} charakterizuje posuvný pohyb hmotného bodu, charakteristikou otáčavého pohybu okolo osi neprechádzajúcej hmotným bodom je **moment hybnosti** \vec{L}

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}), \quad (5.2)$$

kde \vec{r} je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na os otáčania.

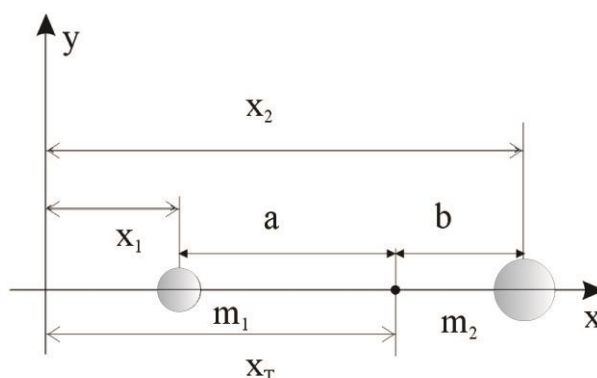
Tuhé teleso, ktoré sa môže otáčať okolo osi, bude v rovnovážnej polohe, keď vektorové súčty všetkých síl a všetkých momentov síl, ktoré na teleso pôsobia, budú nulové vektory.

5.2 Ťažisko telesa

Ťažisko telesa je definovaná ako pôsobisko tiažovej sily. Možno ho určiť ako priesečník ťažníc v telese. Ťažisko pravidelných rovnorodých telies, ktoré majú geometrický stred súmernosti: guľa, valec, obruč, kváder a pod. je v strede súmernosti daných telies. Ťažisko nerovnorodých telies alebo geometricky nepravidelných určíme zvyčajne pokusom. Ťažisko môže ležať aj mimo telesa, napr. ťažisko prstenca, dutej gule, nádoby.

5.2.1 Ťažisko sústavy dvoch a viacerých hmotných bodov

Pod pojmom ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov budeme rozumieť taký bod, na spojnici daných bodov (Obr. 5.1), pre ktorý platí daná podmienka:



Obr. 5.1 Určenie polohy ťažiska sústavy dvoch hmotných bodov

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.3)$$

Keďže z daného obrázka vyplýva, že $a = x_T - x_1$ a $b = x_2 - x_T$, po dosadení za a a b a úprave predošlej rovnice dostaneme:

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.4)$$

Daný vzťah je možné zovšeobecniť aj pre sústavu n bodov. Ak je poloha i -tého bodu x_i a jeho hmotnosť je m_i , potom pre x -ovú polohu ťažiska danej sústavy platí:

$$x_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (5.5)$$

kde m je celková hmotnosť sústavy rovná súčtu hmotností jednotlivých hmotných bodov $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

Keďže v trojrozmernom karteziánskom priestore je každý hmotný bod určený trojicou súradníc (x_i, y_i, z_i) , aj pre charakteristiku ťažiska by bolo potrebné určiť súradnice y_T a z_T , obdobne, ako tomu bolo v prípade x_T a pre polohový vektor ťažiska môžeme teda písať:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (5.6)$$

V prípade, že sústavu hmotných bodov nahradíme dokonale tuhým telesom so spojitou rozloženou hmotnosťou, môžeme pre polohový vektor ťažiska tuhého telesa písať:

$$\vec{r}_T = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}. \quad (5.7)$$

Úloha 5.1:

Analyzujte pohyb kladiva ako pohyb dvoch častí: poriska a kovovej časti kladiva, čo platí pre pohyb ich ťažiska?

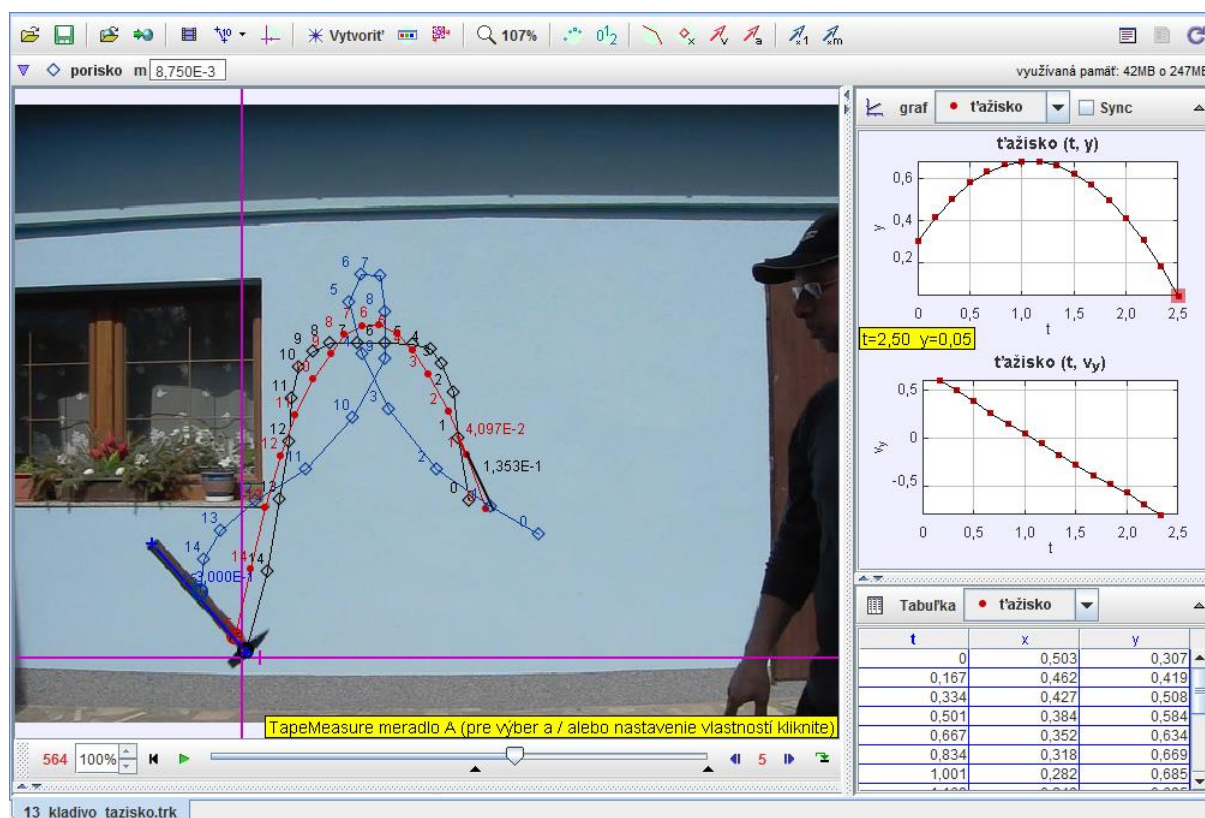
(dĺžka kladiva: 0,3 m, hmotnosť kladiva: 0,35 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kladivo.avi](#)

Riešenie:

Pohyb kladiva môžeme chápať ako pohyb dvoch hmotných bodov sústredených v ťažiskách poriska a kovovej časti. Program Tracker umožňuje analyzovať pohyb dvoch hmotných bodov a následne určiť, ako sa bude pohybovať ich ťažisko.

Na Obr. 5.2 je analyzovaný samostatne pohyb kovovej časti kladiva (čierny kosoštvorec) a drevenej časti poriska (modrý kosoštvorec) (obe časti považujeme za homogénne). Keďže poznáme celkovú hmotnosť kladiva a vieme určiť vzdialenosti medzi ťažiskami poriska a drevenej časti od ťažiska celého kladiva za pomoci meradla v programe Tracker, využitím vzťahu (5.3) dokážeme odhadnúť hmotností samostatnej kovovej a drevenej časti kladiva. Pokiaľ sme to správne určili, ťažisko sústavy dvoch hmotných bodov určené programom Tracker (červený bod) by sa malo pohybovať po ťažisku kladiva – bude na kladive označenom bielou páskou.



Obr. 5.2 Analýza pohybu kladiva ako sústavy dvoch hmotných telies

5.3 Moment zotrvačnosti a kinetická energia otáčavého pohybu

Budeme uvažovať o rovnomernom otáčavom pohybe tuhého telesa okolo osi. Keď sa tuhé teleso rovnomerne otáča uhlovou rýchlosťou ω , pohybujú sa všetky jeho častice, ktoré považujeme za hmotné body, uhlovou rýchlosťou ω . Pre veľkosť rýchlosti i -tej častice platí

$$v_i = \omega r_i, \quad (5.8)$$

kde v_i je veľkosť rýchlosti i -tej častice a r_i je vzdialenosť i -tej častice od osi otáčania. Pre kinetickú energiu i -tej častice môžeme písať

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_i \omega^2}{2}, \quad (5.9)$$

kde veličina J_i predstavuje **moment zotrvačnosti** i -tej častice vzhľadom na os otáčania. Výslednú kinetickú energiu telesa, ktoré koná rovnomerný otáčavý pohyb okolo nehybnej osi určíme súčtom kinetických energií jeho jednotlivých častíc:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (5.10)$$

kde $J = J_1 + J_2 + \dots + J_n$ sa nazýva moment zotrvačnosti telesa a je rovný súčtu momentov všetkých jeho častíc.

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (5.11)$$

Jednotkou momentu zotrvačnosti je $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Vo všeobecnosti výpočty momentov zotrvačností nie sú triviálne, a preto v tejto učebnici budeme pracovať len s momentami zotrvačností niektorých homogénnych telies: tenkého rovnorodého kotúča (valca), ktorého os prechádza stredom kolmo na rovinu kotúča: $J = \frac{1}{2} m r^2$, kde m je hmotnosť kotúča (valca) a r je polomer kotúča (valca); rovnorodéj gule s hmotnosťou m a polomerom r : $J = \frac{2}{5} m r^2$; dutéj gule s hmotnosťou m a polomerom r : $J = \frac{2}{3} m r^2$; tyče s hmotnosťou m a dĺžkou l , vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu stredom tyče: $J = \frac{1}{12} m l^2$ a koncovým bodom tyče $J = \frac{1}{3} m l^2$.

Ak teleso bude súčasne vykonávať posuvný pohyb s rýchlosťou ťažiska v_T a otáčavý pohyb okolo osi rotácie s uhlovou rýchlosťou ω , jeho celková kinetická energia bude potom daná ako súčet kinetickej energie posuvného a rotačného pohybu:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (5.12)$$

5.4 Pohybová rovnica telesa otáčajúceho sa okolo osi

Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy a bude vykonávať kmitavý pohyb s uhlovým zrýchlením ε , potom pohybová rovnica, ktorá charakterizuje jeho pohyb má tvar:

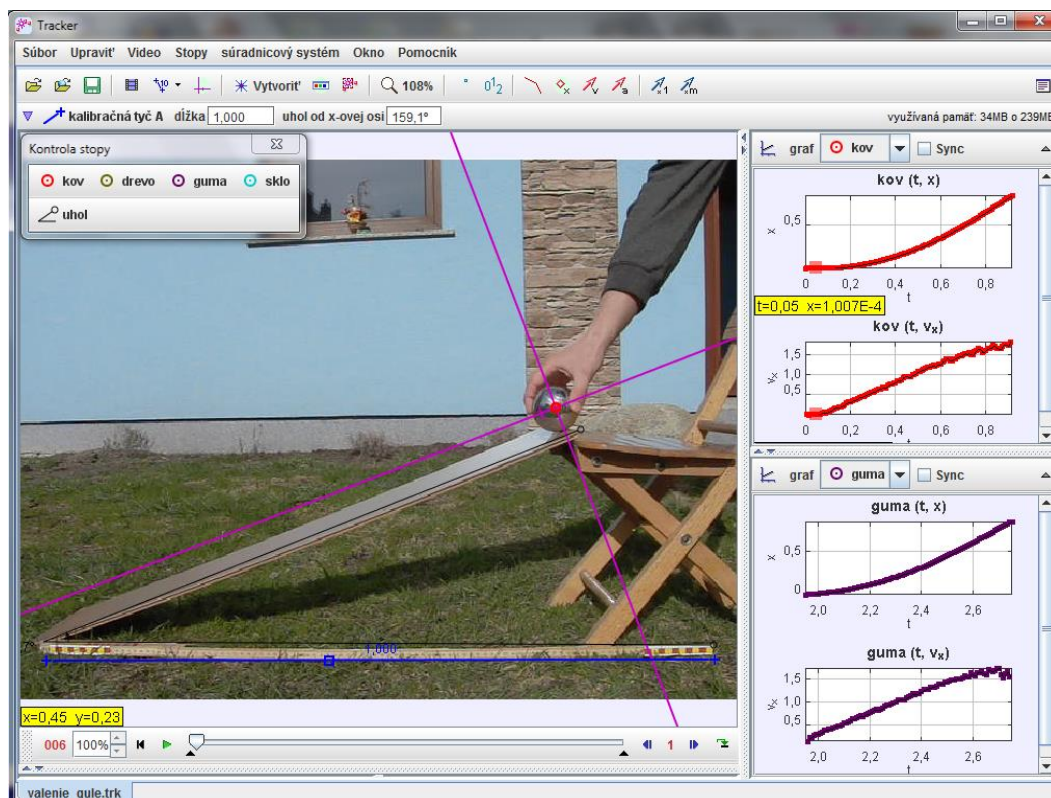
$$\vec{M} = J\vec{\epsilon} \quad (5.13)$$

kde \vec{M} predstavuje moment všetkých síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na os rotácie a J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania.

Úloha 5.2:

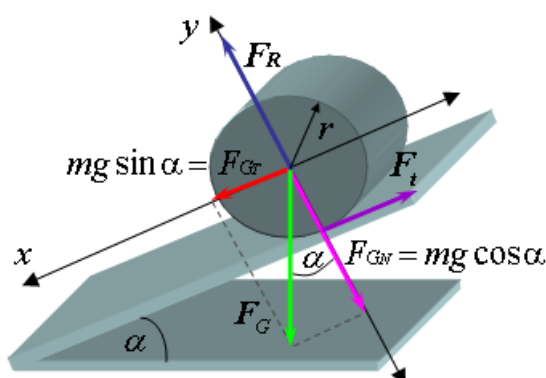
**Analyzujte valivý pohyb gúľ na naklonenej rovine. Ktorá z gúľ rôznych hmotností, priemerov a materiálov (kov ($m = 727 \text{ g}$, $d = 72 \text{ mm}$), drevo ($m = 5,9 \text{ g}$, $d = 29 \text{ mm}$), guma ($m = 6,6 \text{ g}$, $d = 23 \text{ mm}$)) dosahuje na konci naklonenej roviny najvyššiu rýchlosť? Vysvetlite! (frekvencia snímok: 120 fps, dĺžka meradla: 1m)
zdroj: [valenie_gule.avi](#) Závisí rýchlosť valenia gúľ od hmotnosti?**

Riešenie:



Obr. 5.3 Analýza valivého pohybu pre kovovú a gumenú guľu

Na príklade homogénneho telesa kruhového prierezu (valec, guľa) ktoré sa valí vplyvom svojej tiaže dole po naklonenej rovine si ukážeme určenie zrýchlenia ťažiska telesa a_T a rýchlosti v_T , ktorou sa pohybuje teleso po prejení dráhy s , keď v čase $t = 0s$ bolo v pokoji. Teleso má polomer r a hmotnosť m a naklonená rovina zvierá uhol α s vodorovnou rovinou.



Obr. 5.4 Teleso valiace sa po naklonenej rovine a sily, ktoré na neho pôsobia

Na Obr. 5.4 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na teleso: tiažová sila \vec{F}_G , reakcia podložky \vec{F}_R , ktorej pôsobisko sme posunuli pozdĺž jej vektorovej priamky do stredu telesa a trecia sila \vec{F}_t pôsobiaca v mieste dotyku podložky a telesa. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že hmotnosť telesa je rozložená symetricky vzhľadom k osi rotácie, a teda ťažisko splyva s geometrickým stredom telesa. Keďže sa teleso dotýka podložky nepatrnou plôškou, môžeme valivé trenie zanedbať. Keďže uvažujeme o pohybe okolo osi prechádzajúcej stredom telesa, budú momenty tiažovej sily \vec{F}_G a reakcie podložky \vec{F}_R rovné nule, a teda neprispievajú k urýchľovaniu otáčavého pohybu. Roztáčanie telesa proti smeru hodinových ručičiek spôsobuje výhradne trecia sila \vec{F}_t , ktorej rameno sily je \vec{r} .

Súradnicovú sústavu sme si zvolili tak, že os x je rovnobežná s naklonenou rovinou a os y je kolmá na naklonenú rovinu. Podľa vety o pohybe ťažiska je zrýchlenie ťažiska dané pohybovou rovnicou

$$\vec{F} = m\vec{a}_T, \quad (5.14)$$

ktorú si môžeme rozpísať zvlášť pre x -ovú a y -ovú zložku

$$ma_{Tx} = m \frac{d^2 x_T}{dt^2} = \sum F_x = F_{Gt} - F_t, \quad (5.15)$$

$$ma_{Ty} = m \frac{d^2 y_T}{dt^2} = \sum F_y = F_{Gn} - F_R. \quad (5.16)$$

kde x_T a y_T predstavujú súradnice ťažiska telesa. Keďže pohyb telesa sa bude uskutočňovať len v smere osi x a nie v smere kolmom na podložku (y -ová os), kde je ťažisko v pokoji, môžeme rovnicu (5.16) položiť rovnú nule

$$\frac{d^2 y_T}{dt^2} = 0, \text{ takže } F_{Gn} - F_R = 0, \quad (5.17)$$

čiže

$$F_{Gn} = mg \cos \alpha = F_R. \quad (5.18)$$

Dostali sme, že tlaková sila podložky F_R pôsobiaca na teleso je rovnako veľká ako normálová zložka tiažovej sily F_{GN} . Keďže sily ležia na jednej priamke, navzájom sa rušia. Vzhľadom k tomu, že v prvej pohybovej rovnici sú dve neznáme (a_{Tx} a F_t), je potrebná ešte jedna pohybová rovnica, ktorá súvisí s otáčavým pohybom telesa a momentom tretej sily vzhľadom na os otáčania, ktorá prechádza stredom či už valca alebo gule

$$I^* \varepsilon = \sum M = I^* \frac{d\omega}{dt} = F_t r . \quad (5.19)$$

Ak sa bude teleso valiť po naklonenej rovine bez šmýkania, bude pre rýchlosť ťažiska v každom okamihu platiť

$$v_T = \frac{dx_T}{dt} = \omega r . \quad (5.20)$$

Pre zrýchlenie ťažiska potom dostávame

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} . \quad (5.21)$$

Dosadením tohto výrazu do prvej pohybovej rovnice dostaneme

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha - F_t . \quad (5.22)$$

Vyjadrením tretej sily F_t z tretej pohybovej rovnice (5.19) a dosadením do predchádzajúcej dostaneme

$$mr \frac{d\omega}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{I_T}{r} \frac{d\omega}{dt} , \quad (5.23)$$

$$mr \frac{d\omega}{dt} \left(\frac{I_T}{mr^2} + 1 \right) = mg \sin \alpha . \quad (5.24)$$

a odtiaľ využitím rovnice (5.21) pre hľadané zrýchlenie dostávame

$$a_T = \frac{g \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1} . \quad (5.25)$$

Vzhľadom k tomu, že zrýchlenie telesa je konštantné a teleso sa začína rozbiehať z pokoja, bude vykonávať rovnomerne zrýchlený pohyb pre dráhu ktorého platí

$$s = \frac{1}{2} a_T t^2 . \quad (5.26)$$

Odtiaľ pre čas, za ktorý prejde dráhu s môžeme písať

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}. \quad (5.27)$$

Pre hľadajú rýchlosť ťažiska telesa v_T pohybujúceho sa z pokoja rovnomerne zrýchleným pohybom po prejdení dráhy s potom platí

$$v_T = a_T t, \quad (5.28)$$

$$v_T = a_T \sqrt{\frac{2s}{a_T}} = \sqrt{2sa_T}, \quad (5.29)$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2sg \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1}}. \quad (5.30)$$

Ak teraz budeme uvažovať, že po naklonenej rovine sa valí guľa ($I_{Tg} = 2/5mr^2$, v prípade valca by to bolo $I_{Tg} = 1/2mr^2$), pre hľadané zrýchlenie ťažiska valca a_{Tg} a rýchlosť v_{Tg} dostávame

$$a_{Tg} = \frac{g \sin \alpha}{\frac{2}{5} \frac{mr^2}{mr^2} + 1} = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (5.31)$$

$$v_{Tg} = \sqrt{\frac{2sg \sin \alpha}{\frac{2}{5} \frac{mr^2}{mr^2} + 1}} = \sqrt{\frac{10}{7} sg \sin \alpha}. \quad (5.32)$$

Ako si môžeme všimnúť, zrýchlenie/rýchlosť homogénnej gule (valca) na naklonenej rovine vôbec nezávisí od jeho polomeru a hmotnosti!

Z predchádzajúcich vzťahov je možné vyjadriť veľkosť trecej sily F_t

$$F_t = \frac{I_T a_T}{r^2} = \frac{I_T \frac{g \sin \alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1}}{r^2} = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mr^2}{I_T}}. \quad (5.33)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že veľkosť trecej sily F_t je menšia ako priemet tiažovej sily do smeru naklonenej roviny F_{GT} , ktorej veľkosť je $mg \sin \alpha$. Preto sa teleso bude valiť dole naklonenou rovinou zrýchleným pohybom. Valivý pohyb však nastane iba v tom prípade, ak trecia sila bude menšia ako maximálna statická trecia sila, čiže

$$F_t < \mu_s F_n = \mu_s mg \cos \alpha . \quad (5.34)$$

Pre veľký uhol sklonu naklonenej roviny môže teda dôjsť k čiastočnému sklzávaniu telesa.

Neriešené úlohy:

Úloha 5.3: Analyzujte pohyb sekery ako pohyb dvoch častí: poriska a kovovej časti sekery, čo platí pre pohyb ich ťažiska?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť sekery: 1,5 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [sekera tazisko.avi](#)

Úloha 5.4: Analyzujte pohyb plechovic na naklonenej rovine. Ktorá z plechovic je plná ($m = 523,2$ g) a prázdna ($m = 15,8$ g)? Určte momenty zotrvačností daných plechovic.

(frekvencia snímok: 120 fps, dĺžka meradla: 1m, priemer plechovice $d = 65,6$ mm)

zdroj: [plechovice.avi](#)

Závisí rýchlosť pohybu valcov na naklonenej rovine od ich hmotností? Vysvetlite!

Úloha 5.5: Analyzujte pohyb pukov po naklonenej rovine. Určte zrýchlenie a silu, ktorá pôsobí na puk.

(1 dielik: 1cm, frekvencia snímok: 120 fps, hmotnosť oranžového puku: 50 g, modrého: 157 g, lopty: 60,4 g)

zdroj: [naklonena rovina puk.avi](#), [naklonena rovina puk lopta.avi](#)

Úloha 5.6: Jedna z gúl je 10 násobne ťažšia ako druhá. Gule sa valia po vodorovnej rovine približne rovnakou rýchlosťou. Na konci stola padnú na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri dopade?

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť svetlejšej lopty: 0,0025 kg, tmavšej: 0,025 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [vodorovny vrh.avi](#)

Úloha 5.7: Gule sa valia po naklonenej rovine a na konci roviny pokračujú pádom na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri ich dopade na zem? Analyzujte pre rôzne ťažké gule a s rôznou výplňou (plné, duté).

(dĺžka meradla: 1 m, hmotnosť svetlejšej lopty: 0,0025 kg, tmavšej: 0,025 kg, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [zo strechy.avi](#), [zo strechy2.avi](#) ($m_{\text{sivá}} = 18,7$ g; $m_{\text{oranžová}} = 60,4$ g).

Úloha 5.8: Valce (gule) rôznych hmotností sa valia po naklonenej rovine. Na konci naklonenej roviny začnú padat' na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od steny pri dopade? (Rozmery valcov sú rovnaké.)

(dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps, hmotnosti valcov: 1,807 kg, 0,640 kg, 0,264 kg)

zdroj: [strecha_valce.avi](#),

(120fps, hmotnosti guľ: 727 g, 870 g, 25 g, 5,9 g, 6,6 g),

zdroj: [strecha_gule.avi](#),

(120 fps, hmotnosti diskov: 233 g, 86 g, 55 g)

[strecha_disky.avi](#),

Úloha 5.9: Guľa a valec sa valia po naklonenej rovine a na konci roviny pokračujú pádom na zem. Čo platí pre ich vzdialenosti od podstavy stola pri ich dopade na zem?

(dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps, $m_{gule} = 727$ g, $m_{valca} = 640$ g)

zdroj: [strecha_gula_valec.avi](#)

6. Kvapaliny

Samostatné postavenie v mechanike telies má mechanika kvapalín. Z hľadiska vnútornej štruktúry sa kvapaliny od látok pevného skupenstva líšia tým, že ich molekuly už nie sú viazané na istú rovnovážnu polohu a konajú neusporiadané posuvné a rotačné pohyby. Vzdialenosti medzi molekulami bývajú v kvapalinách zvyčajne väčšie ako v tuhých telesách. Kvapaliny si zachovávajú svoj objem, nezachovávajú si však určitý tvar, ich tvar je daný tvarom nádoby. Plyny na rozdiel od kvapalín nemajú ani určitý tvar, ani objem, sú rozpínavé, stlačiteľné a pružné.

6.1 Tlak v kvapalinách

Tlak v kvapaline p je definovaný prostredníctvom sily F pôsobiacej kolmo na rovinnú plochu a veľkosťou danej plochy S :

$$p = \frac{F}{S}. \quad (6.1)$$

Jednotkou tlaku je pascal, Pa ($Pa = N/m^2 = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$).

6.1.1 Pascalov zákon

Pre tlak vyvolaný vonkajšou silou platí **Pascalov zákon**, ktorý hovorí: **tlak vyvolaný vonkajšou silou pôsobiaceou na povrch kvapaliny alebo plynu je vo všetkých miestach a smeroch rovnaký**. To sa využíva hlavne v hydraulických zariadeniach, ktoré obsahujú dva valce s rôznymi priermi, čiže obsahmi plôch $S_1 < S_2$, ktoré sú spojené trubicou a naplnené kvapalinou. Ak na piest s obsahom S_1 bude pôsobiť sila F_1 , vyvolá v kvapaline tlak $p_1 = F_1/S_1$. Ten sa bude šíriť kvapalinou a v mieste väčšieho piestu s obsahom S_2 bude kvapalina pôsobiť silou veľkosti

$$F_2 = p_2 S_2 = p_1 S_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}, \quad (6.2)$$

čiže pôsobením menšou silou F_1 môžeme vyvolať väčšiu silu F_2 .

6.1.2 Hydrostatický tlak

Tlak v kvapaline spôsobený vlastnou tiažou kvapaliny vytvára **hydrostatický tlak**. Ak máme v nádobe kvapalinu hustoty ρ_k , tak v hĺbke h bude na plochu S pôsobiť hydrostatická tlaková sila F_h

$$F_h = Sh\rho_k g, \quad (6.3)$$

ktorá v hĺbke h vyvolá hydrostatický tlak

$$p_h = \frac{F_h}{S} = h\rho_k g. \quad (6.4)$$

Veľkosť daného tlaku nezávisí od tvaru nádoby ani od množstva kvapaliny v nej (*hydrodynamický paradox*), podľa vzťahu (6.4) závisí len od hĺbky, hustoty kvapaliny a tiažového zrýchlenia.

Úloha 6.1:

Určte, aká je hustota kvapaliny v U-trubici. (Fialová kvapalina je voda, jej hustota je rovná 1000 kg/m^3).

zdroj: [hustota.jpg](#)

Riešenie:

Na Obr. 6.1 je znázornená časť U-trubice, v ktorej sú naliate kvapaliny s rozdielnymi hustotami. Ak by sme urobili úsečku v mieste dielika 10 (pod 0), kde sa spájajú obe kvapaliny, mohli by sme povedať, že kvapalina v ľavej aj pravej časti pôsobí na kvapalinu pod nimi rovnakou silou, pretože je celá sústava v pokoji. Keďže prierez trubíc je rovnaký, aj plocha je v oboch trubiciach rovnaká, a teda tlak pôsobiaci v mieste dielika 10 (pod 0) je v ľavej aj pravej trubici rovnaký:

$$p_L = h_L \rho_{k1} g = p_P = h_P \rho_{k2} g, \quad (6.5)$$

odtiaľ vyplýva

$$\frac{\rho_{k1}}{\rho_{k2}} = \frac{h_P}{h_L}. \quad (6.6)$$

Odčítaním dielikov zo stupnice a vynásobením hustotou vody dostávame pre neznámu tekutinu $\rho_{k1} = 60/75 * 1000 = 800 \text{ kg/m}^3$.



Obr. 6.1 U trubica

6.2 Archimedov zákon

Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované hydrostatickou vztlakovou silou, ktorej veľkosť je rovná tiaži kvapaliny vytlačenej ponorenou časťou telesa. Danú formuláciu nazývame Archimedov zákon a matematicky to môžeme vyjadriť nasledovne:

$$F_{vz} = Sh\rho_k g = V\rho_k g, \quad (6.7)$$

kde V predstavuje objem ponorenej časti telesa (objem vytlačenej kvapaliny ponorenou časťou telesa).

Úloha 6.2:

Odhadnite hustotu dreva plávajúceho vo vode.

(dĺžka meradla: 0,15 m)

zdroj: [drevo.jpg](#)

Riešenie:



Obr. 6.2 Aplikácia Archimedovho zákona

Na Obr. 6.2 je znázornené teleso (kus dreva) plávajúce na vode. Ak označíme objem telesa V_T a hustotu telesa ρ_t , na teleso bude pôsobiť tiažová sila $F_G = V_T \rho_t g$. Zároveň však na teleso bude pôsobiť hydrostatická vztlaková sila, ktorej veľkosť je $F_{vz} = V_k \rho_k g$, kde V_k predstavuje objem vytlačenej kvapaliny (ponorenej časti telesa). Ak dáme oba vzťahy do rovnosti, dostaneme

$$V_T \rho_t g = V_k \rho_k g. \quad (6.8)$$

Odtiaľ vyplýva

$$\frac{\rho_t}{\rho_k} = \frac{V_k}{V_T} = \frac{h_k}{h_T}, \quad (6.9)$$

kde h_k , h_T predstavujú hrúbku ponorenej časti telesa a celého telesa, keďže plocha S je pre ponorenú časť telesa a celé teleso rovnaká. Stačí už len určiť pomer hrúbky ponorenej časti telesa voči hrúbke celého telesa pomocou meracích nástrojov v programe Tracker, prenásobiť hustotou vody ($\rho_k = 1000 \text{ kg/m}^3$) a dostaneme hľadanú hustotu telesa.

6.3 Povrchová vrstva kvapaliny

Už ste sa istotne stretli s tým, že na povrchu kvapaliny sa dokážu udržať predmety z materiálov, ktorých hustota je väčšia, ako je hustota vody (tenká ihla, žiletka, hliníková minca s pod.). Aj kvapka vody na konci vodovodného kohútika sa postupne zväčšuje až kým sa nevytvorí zúžený krčok a potom sa odtrhne. Tieto javy súvisia s **povrchovou vrstvou kvapaliny**, kedy kvapalina na rozhraní voda-vzduch sa správa podobne ako tenká pružná blana. Povrchová vrstva kvapaliny pôsobí na vnútro kvapaliny tlakovou silou, ktorá vytvára tzv. molekulový (kohézny) tlak. Povrchová vrstva kvapaliny má energiu, ktorú nazývame **povrchová energia E** . Ak sa zmení povrch daného objemu kvapaliny o hodnotu ΔS , zmení sa aj povrchová energia o hodnotu

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (6.10)$$

kde veličina σ sa nazýva **povrchové napätie**. Povrchové napätie závisí od druhu kvapaliny a prostredia nad voľným povrchom kvapaliny, pričom so zvyšujúcou teplotou sa povrchové napätie kvapaliny voči danému prostrediu znižuje. Kvapalina daného objemu má snahu nadobudnúť taký tvar, aby jej povrchová energia bola minimálna, a teda aj jej povrch bol čo najmenší. Preto aj voľné kvapky rosy alebo hmly majú guľový tvar, pretože spomedzi všetkých geometrických útvarov pri danom objeme má guľa najmenší povrch. Pri väčších kvapkách je však aj guľový tvar deformovaný v dôsledku tiažovej sily a tlakovej sily podložky.

Povrchové napätie σ je taktiež rovné podielu veľkosti **povrchovej sily F** a dĺžky okraja povrchovej blany l , na ktorý sila pôsobí kolmo v povrchu kvapaliny:

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (6.11)$$

Jednotkou povrchového napätia je $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. V prípade, že je povrch kvapaliny zakrivený, potom má povrchová sila smer dotýčnice k povrchu kvapaliny v danom bode.

Úloha 6.3:

Voda vyteká hrubostennou kapilárou tak, že na konci kapiláry sa tvoria kvapky. Analýzou daného javu určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom!

(dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps)

Zdroj: [povrchove_napatie.avi](#)

Riešenie:

Analýzou daného deja možno určiť moment, kedy sa kvapka „odtrháva“, t.j. moment, kedy sú v rovnováhe tiažová sila s povrchovou silou Obr. 6.3. Využitím predchádzajúcich vzťahov (6.11) možno teda písať:

$$F = \sigma l = F_g = mg, \quad (6.12)$$

kde m je hmotnosť kvapky. Využitím znalostí, že l je obvod kruhu v zúženom mieste a kvapka má tvar gule môžeme písať:

$$\sigma \pi d_k = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d_g}{2} \right)^3 \rho g. \quad (6.13)$$

Odtiaľ pre povrchové napätie dostávame

$$\sigma = \frac{d_g^3 \rho g}{6d_k}. \quad (6.14)$$

Po dosadení hodnôt zistených v programe Tracker bola určená hodnota povrchového napätia vody pri styku so vzduchom $\sigma = 76 \text{ mN/m}$.

The screenshot shows the Tracker software interface. The main window displays a video of a hand holding a glass tube with a water droplet at the tip. Several measurement lines are overlaid on the video: a blue line for the tube diameter (3.061E-3), a yellow line for the tube height (1.264E-2), a red line for the droplet diameter (5.247E-3), and a green line for the droplet radius (2.527E-3). The data panel on the right contains the following information:

- Stránka: Nepomenovaný
- kapilára: d_{kap} = 3.693 mm, vyska h = 1.264 cm
- kvapka: d_g = 5.247 mm, r_g = 2.527 mm
- m_g = 1/6 pi d_g³ . 9.81 . 1000
- F = sigma.l = si. pi. d_k
- si = 1/6 (0.00524³ . 9.81 . 1000 / 0.003061
- si = 76 mN/m

Below the data panel, there is another section titled "Povrchové napätie" with the text: "Určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom! (dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps)". At the bottom of the interface, a yellow box contains the text: "priemer vybraný (pre meranie vzdialeností a uhlov ťahajte konce)".

Obr. 6.3 Určovanie povrchového napätia vody pri styku so vzduchom

6.3.1 Kapilarita

Zo skúseností vieme, že keď do sklenej nádoby nalejeme vodu, pri stenách nádoby nebude povrch kvapaliny kolmý na stenu, ale bude zakrivený. To zakrivenie je tým väčšie, čím je nádoba užšia (najvýraznejšie je to pri tenkých kapilárach). Dutý povrch vytvorí voda aj lieh v sklenej nádobe – hovoríme, že kvapalina zmáča steny nádoby. Ak do sklenej nádoby nalejeme ortuť, povrch kvapaliny bude pri stenách nádoby vypuklý – hovoríme, že kvapalina nezmáča steny nádoby. Zakrivenie voľného povrchu kvapaliny pri stenách nádoby (hlavne v úzkych rúrkach – kapilárach), pri kvapkách a bublinách spôsobuje, že výslednica povrchových síl, ktorá pôsobí kolmo na voľný povrch kvapaliny je nenulová. Táto sila vyvoláva **kapilárny tlak**, p_k , ktorý je pre voľný povrch kvapaliny guľového tvaru daný vzťahom

$$p_k = \frac{2\sigma}{R}, \quad (6.15)$$

kde R je polomer guľového povrchu a σ je povrchové napätie.

Pri tenkej guľovej mydlovej bubline s polomerom R (a dvoma povrchmi kvapaliny) je kapilárny tlak vnútri bubliny rovný

$$p_{kb} = \frac{4\sigma}{R}. \quad (6.16)$$

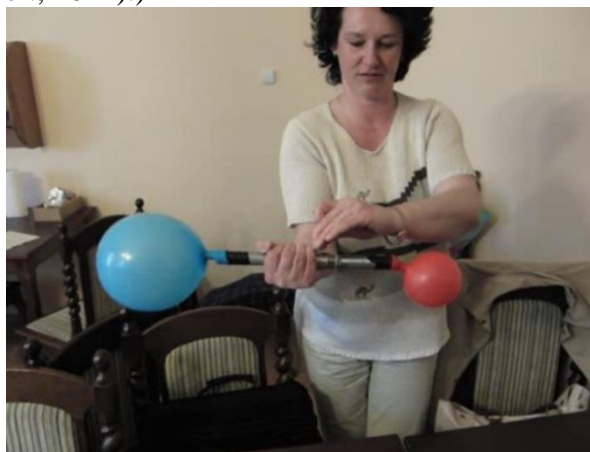
Úloha 6.4:

Máme dva balóniky s rôznymi priermi nafúkané vzduchom navzájom prepojené trojcestným kohútikom. V ktorom balóniku je väčší tlak, s väčším objemom alebo menším objemom vzduchu? Čo sa stane po otvorení prepojovacieho ventilu? Vysvetlite!

Zdroj: [tlak plynu.avi](#)

Riešenie:

Na nasledujúcom obrázku Obr. 6.4 je znázornený pokus s nafúknutými balónmi prepojenými trojcestným ventilom. Po otvorení prepojovacieho ventilu, aj keď je to pre mnohých študentov prekvapujúce a nečakané, prejde vzduch z menšieho balónika do väčšieho. (Komplexné riešenie danej úlohy však presahuje rámec tejto učebnice, viac v literatúre (Ješková a kol., 2012).)



Obr. 6.4 Pokus s nafúknutými balónmi prepojenými trojcestným ventilom

Ak by sme mali miesto balónikov mydlové bubliny, situácia z predchádzajúceho pokusu by sa zopakovala, väčšia bublina by sa zväčšovala a menšia by sa zmenšovala až by nakoniec zanikla, pretože v menšej bubline by bol väčší kapilárny tlak ako vo väčšej. Vo všeobecnosti možno konštatovať, že čím je polomer guľového povrchu menší a povrchové napätie väčšie, tým je kapilárny tlak vyšší, čo potvrdzuje vzťah (6.16).

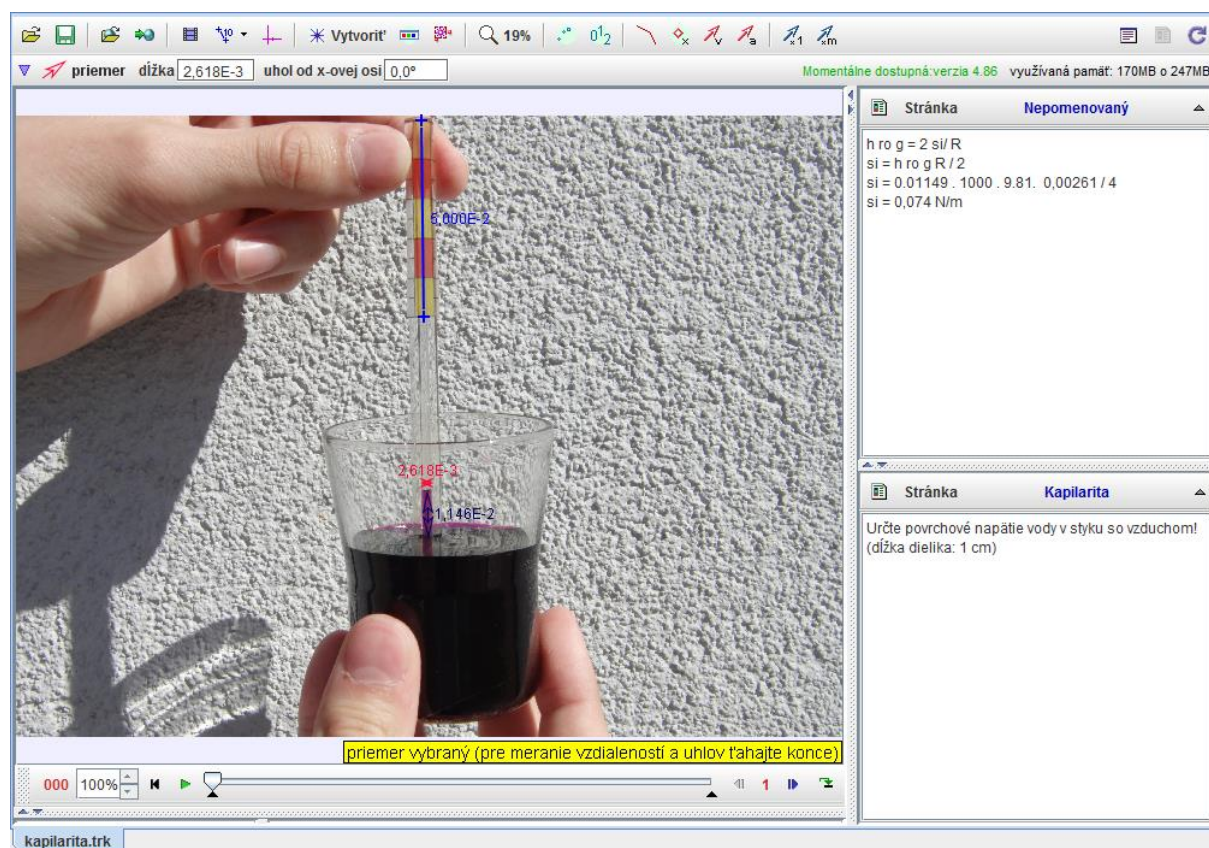
Keď do širokej nádoby s vodou ponoríme kapiláru – úzku sklenú rúrku, v kapiláre vystúpi voda do výšky h nad voľnou hladinou v nádobe (Obr. 6.5). Zvýšenie voľnej hladiny kvapaliny v kapiláre sa nazýva **kapilárna elevácia** a nastáva pri kvapalinách, ktoré zmáčajú steny nádoby. Ak by sme do sklenej nádoby naliali ortuť a ponorili by sme do nej kapiláru, pozorovali by sme zníženie voľnej hladiny ortuti v kapiláre oproti voľnej hladine ortuti v nádobe. Toto zníženie voľnej hladiny ortuti v kapiláre sa nazýva **kapilárna depresia** a pozorujeme ju pri kvapalinách, ktoré nezmáčajú steny kapiláry. Kapilárna elevácia a kapilárna depresia sa súhrne nazývajú **kapilarita**.

Úloha 6.5:

Analýzou kapilárneho javu určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom!
(dĺžka dielika: 1 cm)

Zdroj: [kapilarita.jpg](#)

Riešenie:



Obr. 6.5 Určovanie povrchového napätia vody pri styku so vzduchom za pomoci kapilarity

Ako znázorňuje Obr. 6.5, po ponorení kapiláry do vody, sa v kapiláre s polomerom R (určíme pomocou meracích nástrojov programu Tracker) vytvorí dutý povrch, ktorý po

zjednodušení môžeme považovať za tvar polgule s polomerom R . Zakrivený dutý povrch kvapaliny v kapiláre pôsobí na kvapalinu silou v smere von z kvapaliny. Výška hladiny v kapiláre sa bude zväčšovať dovtedy, pokiaľ sa daná sila nevyrovná hydrostatickej tlakovej sile, teda kapilárny tlak zodpovedajúci zakriveniu povrchu sa vyrovná hydrostatickému tlaku odpovedajúcemu stĺpcu s výškou h :

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} = h\rho g = p_h. \quad (6.17)$$

Odtiaľ pre hľadané povrchové napätie vody v styku so vzduchom dostávame:

$$\sigma = \frac{h\rho g R}{2}. \quad (6.18)$$

Po zadaní parametrov určených v programe Tracker sme vyrátali hodnotu povrchového napätia vody pri styku so vzduchom $\sigma = 0,074 \text{ N/m}$.

6.4 Rovnica spojitosti

Doteraz sme uvažovali o kvapaline v pokoji, prípadne o rovnovážnom stave po ustálení kvapaliny. Teraz budeme uvažovať o ideálnej kvapaline (bez vnútorného trenia, dokonale nestlačiteľnej), ktorá prúdi trubicou alebo potrubím. Pri prúdení ideálnej kvapaliny bude vo všetkých bodoch prierezu prúdovej trubice rovnaká rýchlosť. Ak označíme plochu prierezu vybranej prúdovej trubice S a veľkosť rýchlosti prúdenia kvapaliny v tomto priereze v , za 1 sekundu pretečie týmto prierezom objem kvapaliny, ktorý nazývame **objemový prietok** $Q_V = S v$.

Keďže kvapalina nemôže stenami trubice ani vytečť, ani pritečť, musí byť objemový prietok pre ľubovoľne veľký prierez rovnaký, čo môžeme vyjadriť

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (6.19)$$

Danú rovnicu nazývame **rovnicaou spojitosti (kontinuity)** pre ideálnu kvapalinu. Daná rovnica vyjadruje zákon zachovania hmotnosti v prúdiacich kvapalinách.

Úloha 6.6:

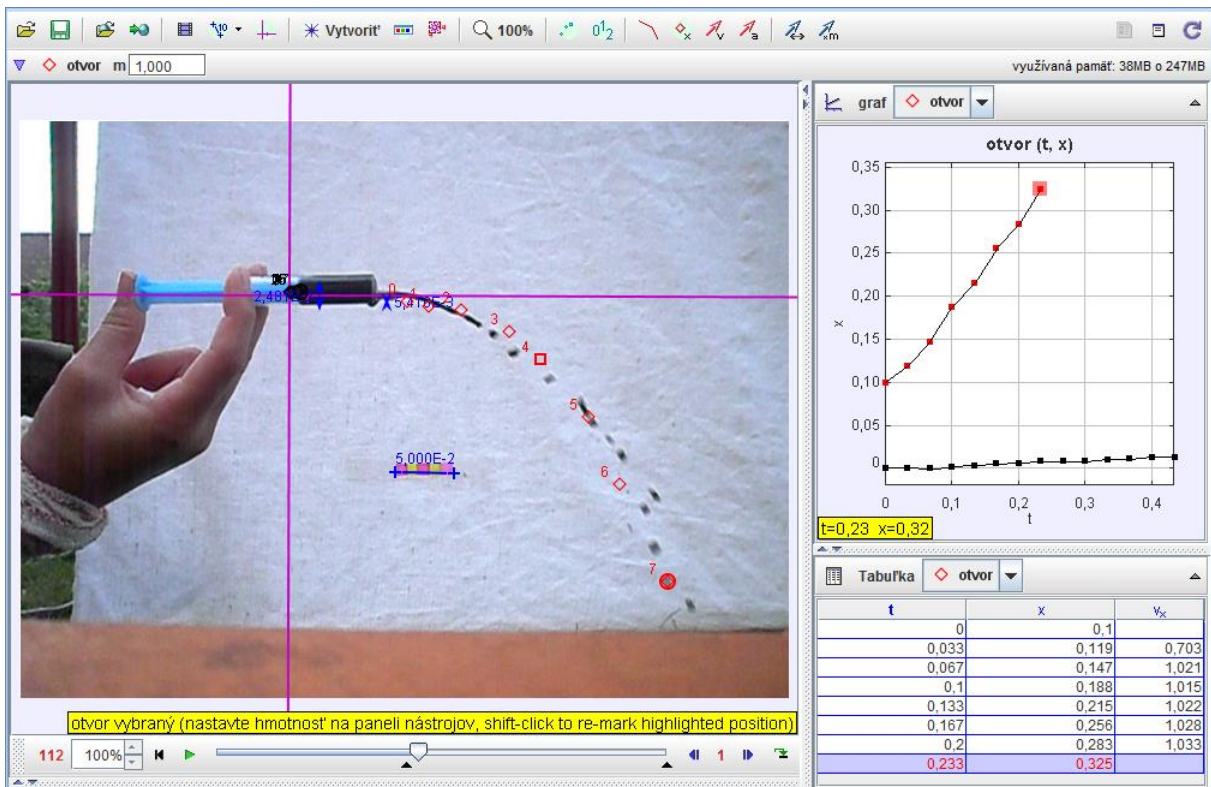
Určte rýchlosť, akou vystrekuje kvapalina zo striekačky a porovnajte ju s rýchlosťou pohybu piesta. Overte platnosť rovnice spojitosti - kontinuity.

(dĺžka dielika: 0,01 m, frekvencia snímok: 30 fps)

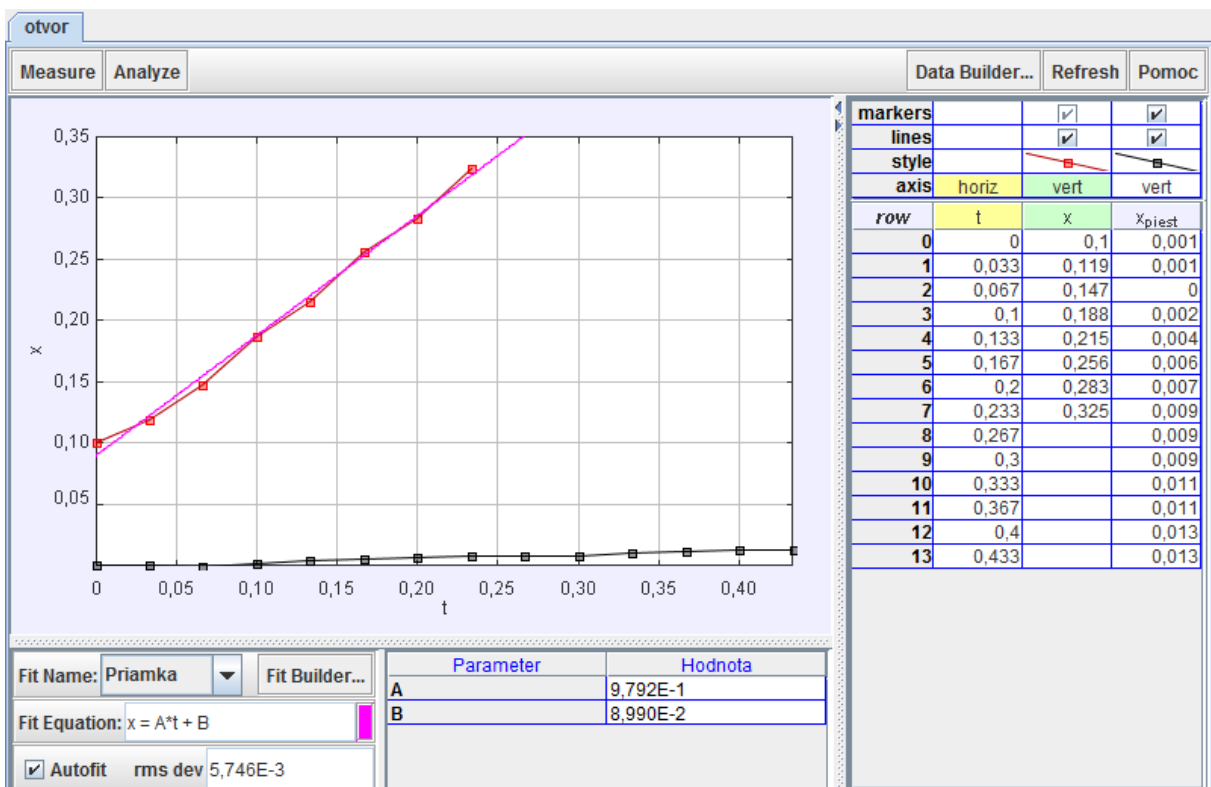
zdroj: [rovnica spojitosti.avi](#)

Riešenie:

Analýzou v programe Tracker boli vyšetované rýchlosti pohybu piesta a vytekajúcej kvapaliny v smere osi x Obr. 6.6 a Obr. 6.7. Na základe lineárnej regresie boli stanovené rýchlosť vytekajúcej kvapaliny v smere osi x $v_k = 0,9792 \text{ m/s}$ a rýchlosť pohybu piesta $v_p = 0,0327 \text{ m/s}$. využitím meracích nástrojov boli stanovené taktiež priemery výtokovej časti striekačky $d_k = 0,00541 \text{ m}$ a piestu $d_p = 0,02481 \text{ m}$. Následne využitím vzťahu (6.19) možno potvrdiť platnosť rovnice spojitosti. (Ponechávame na samotnom čitateľovi).



Obr. 6.6 Analýza pohybu piesta a vytekajúcej kvapaliny



Obr. 6.7 Lineárna regresia a stanovenie rýchlosti

6.5 Bernoulliho rovnica

Keďže prúdiaca kvapalina môže prekonávať výškové rozdiely, má aj určitú potenciálnu energiu a môže konať prácu - napr. roztáčať koleso vodnej turbíny. Prúdiaca kvapalina pozostáva z častíc, ktoré majú hmotnosť aj rýchlosť, preto je možné priradiť aj kinetickú energiu. Ak budeme uvažovať prúdenie ideálne kvapaliny, zo zákonov zachovania po istých matematických úpravách by sme sa dopracovali ku vzťahu

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g + p_2, \quad (6.20)$$

ktorý sa nazýva **Bernoulliho rovnica**, kde v_1 a v_2 predstavujú rýchlosti prúdenia kvapaliny v dvoch rôznych prierezoch trubice S_1 a S_2 , h_1 a h_2 predstavujú výšky, v ktorých sa časti trubice s prierezmi S_1 a S_2 nachádzajú, p_1 a p_2 predstavujú tlak v kvapaline v mieste s prierezmi S_1 a S_2 .

Daná rovnica predstavuje zákon zachovania mechanickej energie pri prúdení ideálnej kvapaliny. Prvý člen rovnice predstavuje kinetickú energiu kvapaliny jednotkového objemu, druhý potenciálnu energiu kvapaliny jednotkového objemu a tretí člen možno interpretovať ako tlakovú potenciálnu energiu objemovej jednotky kvapaliny. Z Bernoulliho rovnice vyplýva, že súčet kinetickej, potenciálnej a tlakovej potenciálnej energie objemovej jednotky ideálnej prúdiacej kvapaliny je všade v kvapaline rovnaký.

Úloha 6.7:

Aký je vzťah medzi výškou hladiny tekutiny nad dnom nádoby a výškami otvorov v stene nádoby h_1 a h_2 od dna nádoby, ak tekutina striekala z oboch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

zdroj: [vytok vody.flv](#)

Riešenie:

Rýchlosť vytekania kvapaliny z nádoby z otvoru v hĺbke h pod hladinou udáva **Torricelliho vzťah**

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.21)$$

Daná rýchlosť je rovnaká ako rýchlosť, ktorú by teleso získalo voľným pádom z výšky h . Ak označíme h_1 vzdialenosť prvého (vyššieho) otvoru od dna hladiny a vzdialenosť h_2 vzdialenosť druhého otvoru od dna, pre rýchlosti vytekajúcej kvapaliny z otvorov dostávame

$$v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)} \text{ a } v_2 = \sqrt{2g(h-h_2)}. \quad (6.22)$$

Keďže podľa zadania má voda dopadať do rovnakej vzdialenosti od nádoby, musí pre x -ové vzdialenosti platiť:

$$x_1 = v_1 t_1 = x_2 = v_2 t_2, \quad (6.23)$$

Kde t_1 a t_2 predstavujú časy voľného pádu, kedy kvapalina z daných otvorov dopadne na zem. Môžeme teda písať:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \text{ a } t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}. \quad (6.24)$$

Dosadením vzťahov (6.22) a (6.24) do rovnice (6.29) a ich úpravou dostávame

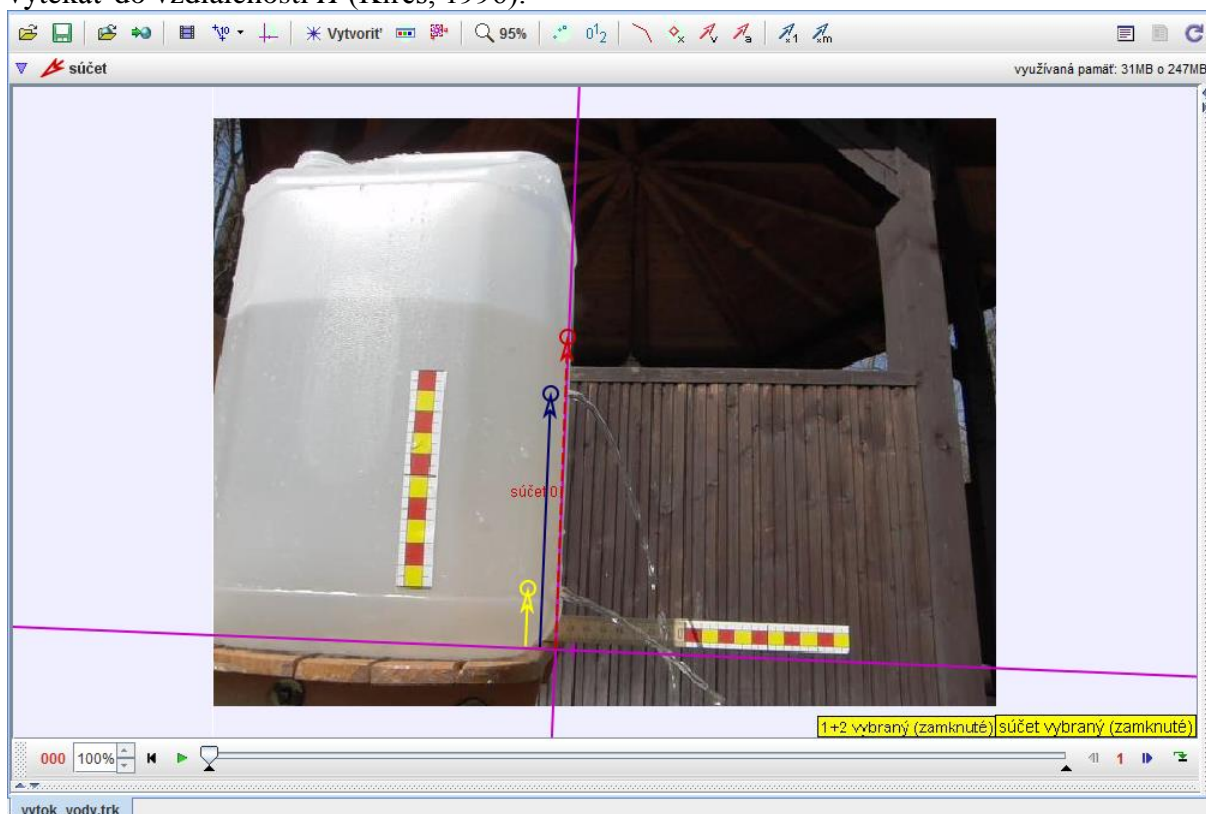
$$(h - h_1)h_1 = (h - h_2)h_2, \quad (6.25)$$

$$h(h_1 - h_2) = h_1^2 - h_2^2. \quad (6.26)$$

Odtiaľ dostávame

$$h = h_1 + h_2, \quad (6.27)$$

čo potvrdzuje aj obrázok Obr. 6.8, voda vytekajúca z otvorov v dvoch rôznych výškach odo dna bude dopadať do rovnakej vzdialenosti, keď vodná hladina bude vo výške rovnajúcej sa súčtu výšok oboch otvorov odo dna nádoby. Dá sa taktiež ukázať, že z každých dvoch symetricky vzdialených otvorov voči stredu budú vodné prúdy dopadať do rovnakej vzdialenosti od nádoby. Ak je otvor v strede medzi dnom a hladinou vo výške H , bude voda vytekať do vzdialenosti H (Kireš, 1996).



Obr. 6.8 Vytekánie kvapaliny z otvorov nádoby

6.6 Obtiekanie telies

Pri prúdení reálnej kvapaliny sa objavujú v kvapaline sily, ktoré brzdia jej pohyb. Dané sily majú pôvod vo vzájomnom silovom pôsobení častíc kvapaliny a nazývajú sa silami vnútorného trenia. Viskózne vlastnosti kvapaliny charakterizuje koeficient dynamickej viskozity η . Jednotkou dynamickej viskozity je 1Pa.s. Koeficient dynamickej viskozity je pri väčšine kvapalín rádovo 10^{-3} Pa.s, pričom jeho hodnota je závislá od teploty a tlaku.

Úloha 6.8:

Určte koeficient dynamickej viskozity kvapaliny v odmernom valci. Hustota skla, z ktorého je guľôčka vyrobená, je 2500 kg/m^3 , hustota glycerínu je 1260 kg/m^3 .

(dĺžka dielika: 1 cm (mierka na valci má 10 cm), frekvencia snímok: 30 fps)

zdroj: [viskozita.avi](#)

Riešenie:

Po pustení malej guľôčky do skúmanej kvapaliny sa guľôčka v kvapaline nebude pohybovať veľkými rýchlosťami, takže okolo nej nebudú vznikať víry a teda obtekanie telesa možno považovať za laminárne. V tomto prípade bude odporová sila spôsobená len viskozitou kvapaliny. Pri tomto prúdení bude odporová sila daná Stokesovým zákonom, podľa ktorého je odporová sila úmerná prvej mocnine rýchlosti, koeficientu dynamickej viskozity a lineárnym rozmerom telesa. Podľa tohto zákona je odporová sila guľôčky F_o pri rovnomernom pohybe v kvapaline vyjadrená pomocou tzv. **Stokesovho vzorca** v tvare

$$F_o = 6\pi\eta r v, \quad (6.28)$$

kde η je koeficient dynamickej viskozity kvapaliny, r je polomer guľôčky a v je rýchlosť jej pohybu v nepohybujúcej sa kvapaline. Na základe znalosti Stokesovho vzorca a ustálenej rýchlosti guľôčky vo viskózne kvapaline je možné určiť koeficient dynamickej viskozity. Guľôčka po uvoľnení v kvapaline bude padať voľným pádom. Výsledná sila pôsobiaca na guľôčku sa dá zapísať ako

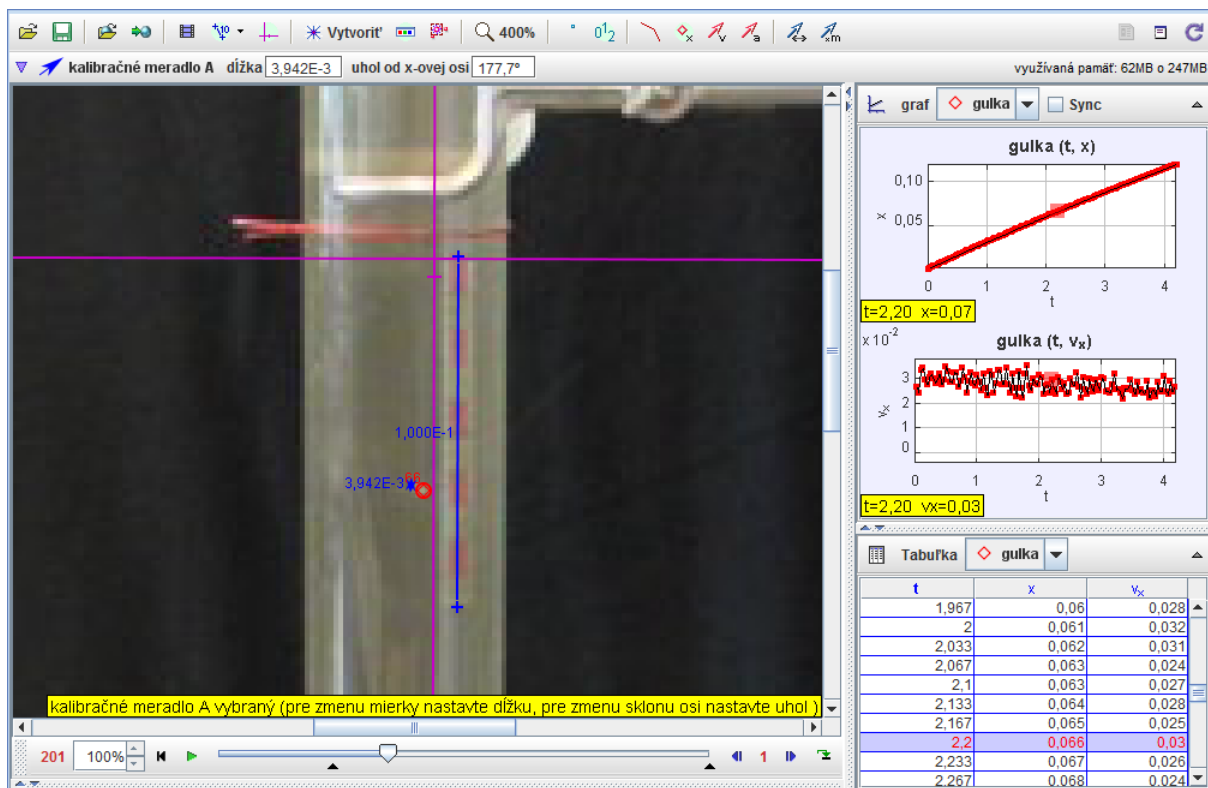
$$F = G - F_{vz} - F_o. \quad (6.29)$$

Pri páde guľôčky bude jej rýchlosť postupne rásť, no so zvyšovaním rýchlosti bude narastať aj odporová sila. V určitom okamihu dosiahne odporová sila takú veľkosť, že všetky sily sa navzájom vykompenzujú, výsledná sila pôsobiaca na guľôčku bude nulová a guľôčka sa bude pohybovať rovnomerným pohybom. Po dosadení jednotlivých síl (tiažovej $F_G = mg = V \rho_t g$, vztlakovej $F_{vz} = V \rho_k g$) do predchádzajúceho vzťahu (6.29) a odporovej sily F_o zo vzťahu (6.28) dostaneme

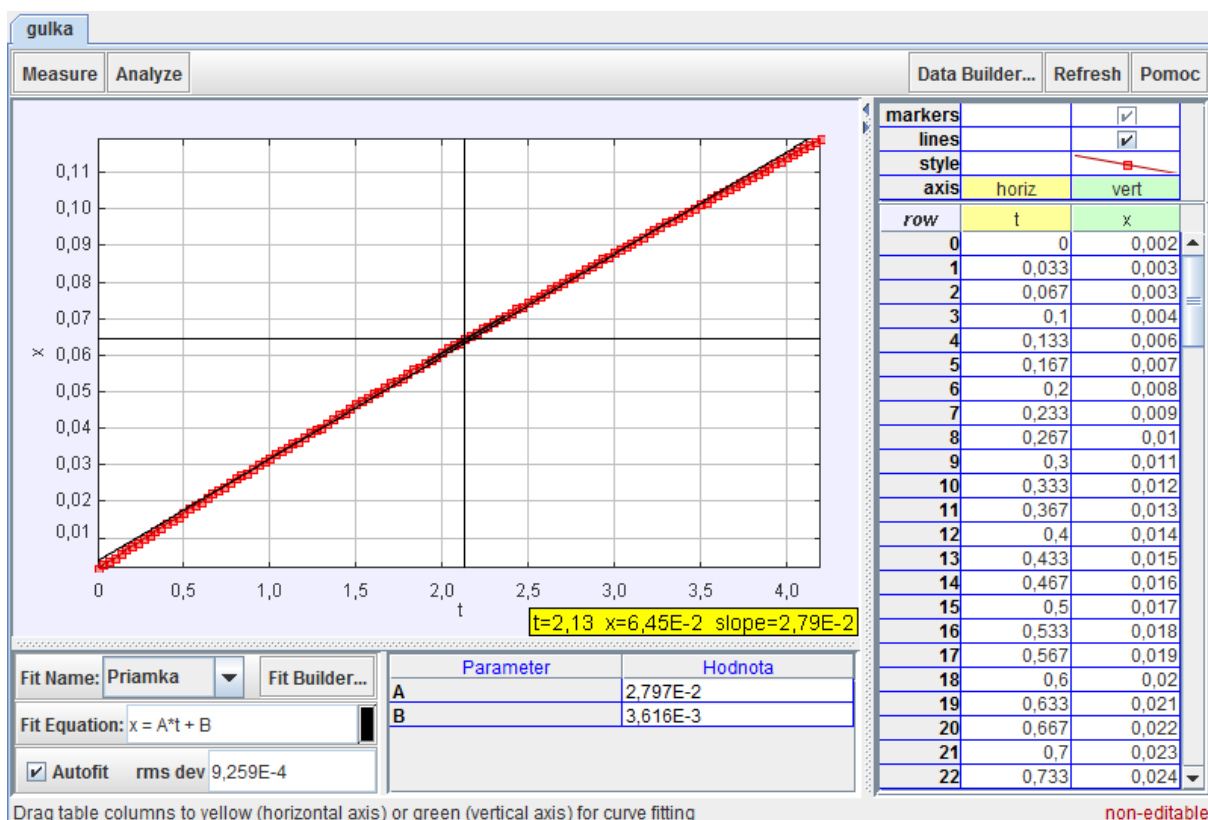
$$V \rho_t g = V \rho_k g + 6\pi\eta r v. \quad (6.30)$$

kde $V = 4/3 \pi r^3$ je objem guľôčky (zároveň aj vytlačenej kvapaliny), ρ_t a ρ_k sú hustoty telesa a kvapaliny. Úpravou predošlého vzťahu pre hľadaný koeficient dynamickej viskozity dostávame

$$\eta = \frac{2(\rho_t - \rho_k)gr^2}{9v} \tag{6.31}$$



Obr. 6.9 Určovanie koeficientu dynamickej viskozity



Obr. 6.10 Určovanie priemernej a okamžitej rýchlosti guľôčky

Dosadením parametrov určených v programe Tracker určíme koeficient dynamickej viskozity, ktorý pre glycerín sa pohybuje v rozmedzí $0,1 - 1,5 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ v závislosti od množstva vody v danom glyceríne a okolitej teplote. (Kalkuláciu ponechávame na samotnom čitateľovi.)

Neriešené úlohy:

Úloha 6.9: *Odhadnite, akou rýchlosťou dopadá voda zo strechy zámku na jeho nádvorie. (predpokladajme výšku človeka 1,7 m.)*

zdroj: [wawel.jpg](#)

zdroj: [kopernik.jpg](#), zdroj: [sekera_tazisko.avi](#)

Úloha 6.10: *Určte povrchové napätie vody v styku so vzduchom.*

(dĺžka dielika: 1 cm, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kvapka.avi](#)

Úloha 6.11: *Určte kapilárny tlak vo vnútri mydlovej bubliny.*

(dĺžka dielika: 1 cm, povrchové napätie roztoku mydla vo vode v styku so vzduchom je 40 mN/m)

zdroj: [bublina.jpg](#),

Úloha 6.12: *Z dvoch nádob vyteká voda rovnakého objemu. Na konci prvej nádoby je kratšia slamka, na konci druhej dlhšia. Z ktorej nádoby vytečie kvapalina skôr? Odôvodnite.*

zdroj: [vytekanie kvapaliny.avi](#)

7. Kmitavý pohyb

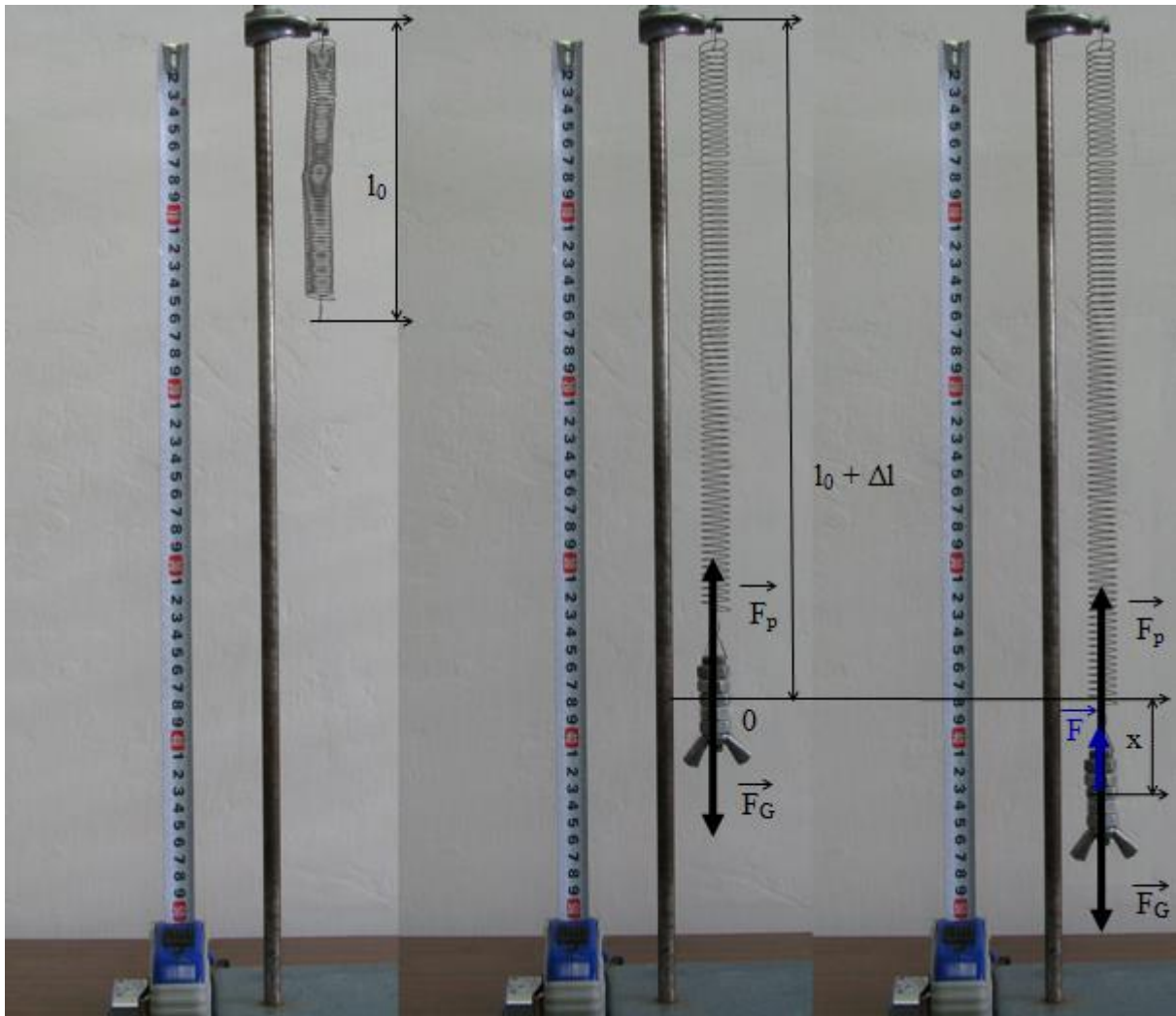
S kmitavými pohybmi sa stretávame všade okolo nás. Niekedy je kmitanie žiaduce (chvenie v prípade hudobných nástrojov), inokedy je nežiaduce (napr. kmitanie auta, práčky). Niekedy ho vnímame (chvenie struny, membrány v reproduktore), inokedy si ho uvedomujeme veľmi málo (kmitanie molekúl vzduchu, ktoré prenášajú zvuk, kmitanie kremenných kryštálov v náramkových hodinkách).

V reálnom svete je kmitanie zvyčajne tlmené. Trecie sily a odpor prostredia postupne premieňajú mechanickú energiu na teplo, a tak sa pohyb postupne znižuje. Ak budeme energiu dopĺňať, nielenže zabránime stratám, ale za určitých podmienok sa môže výchylka pri kmitavom pohybe zväčšovať (napr. pohyb detí na hojdačke).

7.1 Harmonický pohyb

Akýkoľvek pohyb, ktorý sa opakuje v pravidelných intervaloch sa nazýva **periodický pohyb** alebo **kmitanie**. Podľa veličín, s ktorými sa pri kmitaní stretávame, hovoríme o kmitoch mechanických, elektrických, atď. Po pojmom **harmonický oscilátor** budeme rozumieť každé voľné zariadenie, ktoré môže voľne kmitať bez vonkajšieho pôsobenia, napríklad závažie zavesené na pružine po vychýlení z rovnovážnej polohy, fyzikálne kyvadlo pri malých odchýlkach a pod. Potom hovoríme, že mechanické oscilátory vykonávajú **kmitavý pohyb**. Trajektória kmitavého pohybu môže byť priamočiara aj krivočiara, ale pohyb sa vždy uskutočňuje po tej istej krivke (alebo aspoň jej časti). **Rovnovážna poloha** predstavuje polohu, v ktorej sú sily pôsobiace na oscilátor v rovnováhe, t.j. ich výslednica sa rovná nule. Je to poloha, v ktorej by sa kmitajúci objekt nachádzal, keby bol v pokoji. Kmitanie oscilátorov spôsobuje buď sila pružnosti, ktorá vzniká pri deformácii pružiny alebo tiažová sila. (Predpokladáme pri tom, že nedochádza k trvalým zmenám pružiny a pre deformáciu pružiny (predĺženie alebo stlačenia) platí Hookov zákon a deformácia pružiny je priamoúmerná pôsobiacej sile.) Na úvod sa budeme venovať jednoduchým kmitavým pohybom po priamke. Tejto požiadavke najlepšie vyhovuje kmitanie závažia zaveseného na pružine. Takýto oscilátor sa nazýva **pružinový oscilátor** (Obr. 7.1). Najjednoduchším mechanickým oscilátorom, ktorého kmitanie spôsobuje tiažová sila a pohyb sa uskutočňuje po časti kružnice je **kyvadlo**. V minulosti malo veľký význam ako zariadenie pre meranie času (kyvadlové hodiny). Hlavnou črtou oscilátora je, že po istom čase sa dostane do rovnakej polohy, má tú istú rýchlosť a zrýchlenie. Periodicky sa opakujúcu časť kmitavého pohybu nazývame **kmit**, polovička kmitu je **kyv**. Charakteristické veličiny kmitavého pohybu sú **perióda (doba kmitu) T** alebo **frekvencia (kmitočet) f** , s ktorými sme sa už stretli v kinematike hmotného bodu. Perióda predstavuje dobu, za ktorú oscilátor prebehne jeden kmit a vráti sa do zvoleného počiatočného stavu. Jednotkou periódy je sekunda. Frekvencia sa rovná počtu kmitov, ktoré prebehnú za jednu sekundu. Je teda prevrátenou hodnotou periódy a udáva sa v hertzoch (Hz). Ak je možné kmitavý pohyb matematicky popísať jednou harmonickou funkciou, hovoríme, že teleso vykonáva **harmonický kmitavý pohyb**. Ak na teleso bude pôsobiť výsledná sila, ktorá je priamoúmerná jeho výchylke pri pohybe po priamke budeme takúto kmitajúcu sústavu označovať **netlmený lineárny harmonický oscilátor**. V prípade priamočiareho pohybu, kedy už uvažujeme o odpore prostredia hovoríme o kmitajúcej sústave ako o **tlmenom lineárnom harmonickom oscilátore**. Ak na takýto oscilátor bude pôsobiť vonkajšia periodická sila, hovoríme o **vynútených kmitoch**. Ak bude kmitanie prebiehať bez vplyvu vonkajších síl, budeme hovoriť o **vlastných kmitoch**.

7.1.1 Kinematika a dynamika kmitavého pohybu



Obr. 7.1 K vysvetleniu kmitania mechanického oscilátora

Kým pružina oscilátora nie je zaťažená závažím, má dĺžku l_0 (Obr. 7.1). Keď na pružinu zavesíme závažie, pružina sa pôsobením tiaže $\vec{G} = m\vec{g}$ závažia predĺži na dĺžku $l = l_0 + \Delta l$, pričom sa pružina deformuje (v inerciálnej vzťažnej sústave majú tiažová sila \vec{F}_G , ktorou je závažie priťahované k Zemi a tiaž \vec{G} , ktorou pôsobí závažie na záves, rovnakú veľkosť aj smer). V dôsledku pružnosti pružiny vznikne sila \vec{F}_p , ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje a ktorá má opačný smer ako tiažová sila \vec{F}_G . Jej veľkosť je $F_p = k(l - l_0) = k\Delta l$, kde k je tuhosť pružiny. **Tuhosť pružiny** $k = F_p / \Delta l$ odpovedá sile, ktorá spôsobí predĺženie o jeden meter. Sila F_p sa bude zväčšovať až do okamihu, pokiaľ nenastane rovnovážny stav, teda sily \vec{F}_G a \vec{F}_p sa nevyrovnajú. Pri tomto stave pôsobia na závažie sily rovnako veľké ale opačne orientované. Závažie sa ustáli v rovnovážnej polohe O , do ktorej umiestnime začiatok vzťažnej sústavy, v ktorej platí $\vec{F}_p = -\vec{F}_G$. Ďalším predĺžením pružiny sa rovnováha poruší. Sila pružnosti sa zväčší, kým tiažová sila ostáva konštantná. Výslednica pôsobiacich síl bude pôsobiť nahor smerom do rovnovážnej polohy. (To platí, ak predĺženie smeruje nadol, v opačnom prípade stlačenia pružiny nahor bude výslednica síl smerovať nadol, ale opäť do rovnovážnej polohy.) To znamená, že na oscilátor v prípade akejkoľvek deformácie pružiny bude pôsobiť premenlivá sila, ktorá je príčinou kmitavého pohybu.

Ak teda vychýlime závažie z rovnovážnej polohy vo zvislom smere a teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a závažie bude voľne kmitať. Okamžitá poloha závažia je určená súradnicou x , ktorú nazývame **okamžitá výchylka**. Okamžitá výchylka vzhľadom na rovnovážnu polohu dosahuje kladné aj záporné hodnoty. Najväčšia hodnota okamžitej výchylky sa nazýva **amplitúda výchylky** alebo **výkmit** x_m .

Pri okamžitej výchylke x bude pôsobiť na oscilátor celková sila veľkosti

$$F = F_G - F_p = mg - k(\Delta l + x). \quad (7.1)$$

Keďže platí $mg = k\Delta l$, je príčinou kmitania sila, ktorej priemet do osi x je

$$F = -kx. \quad (7.2)$$

Môžeme teda konštatovať, že harmonický pohyb mechanického oscilátora je spôsobený silou F , ktorá stále smeruje do rovnovážnej polohy a je priamoúmerná okamžitej výchylke. Keďže uvažujeme, že pohyb oscilátora nie je ovplyvňovaný vonkajšími silami (prípadne ich vplyv môžeme zanedbať), môžeme jeho harmonický pohyb považovať za **vlastné kmitanie**. (Vlastné kmitanie oscilátora prebieha iba s istou uhlovou frekvenciou ω_0 , ktorá súvisí s vlastnosťami oscilátora.) Sústava pružina + teleso na Obr. 7.1 sa nazýva **harmonický**, niekedy aj **lineárny harmonický oscilátor**, čo znamená, že sila je úmerná prvej (a nie inej) mocnine výchylky x .

Ak chceme riešiť pohybovú rovnicu vlastného kmitania oscilátora, prepíšeme si ju do tvaru

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (7.3)$$

Krátkou úpravou dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (7.4)$$

Keď zavedieme substitúciu $\omega_0^2 = k/m$, dostaneme rovnicu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0. \quad (7.5)$$

Daná rovnica (7.5) je lineárnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu. Jej spôsob riešenia presahuje rámec tejto knihy, preto v ďalšom kroku budeme používať zovšeobecnené riešenie pohybovej rovnice pre vlastné (netlmené) kmitanie harmonického oscilátora, ktoré má tvar

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (7.6)$$

kde x predstavuje okamžitú výchylku v čase t , x_m je maximálna výchylka (spodný index m znamená maximum) alebo aj **amplitúda kmitov**, argument $(\omega_0 t + \varphi)$ je **fáza kmitu** a φ je **fázová konštanta** (alebo začiatočná fáza kmitavého pohybu v čase $t = 0$.) Môže mať kladnú

aj zápornú hodnotu a meria sa v zvyčajne v radiánoch. Obidve konštanty x_m a φ vyplývajú z počiatočných podmienok a určujú hodnotu výchylky v začiatočnom okamihu (v čase $t = 0s$). Keďže funkcia kosínus v rovnici (7.6) sa mení medzi krajnými hodnotami ± 1 , výchylka $x(t)$ sa bude meniť medzi krajnými hodnotami $\pm x_m$.

Vysvetlíme si teraz fyzikálny význam konštanty ω_0 . Doba, za ktorú sa teleso dostane znova do tej istej polohy a nazýva sa **perióda kmitov** (T_0). Z toho vyplýva, že pre ľubovoľný čas t musí platiť $x(t) = x(t + T_0)$. Pre jednoduchosť uvažujme $\varphi = 0 \text{ rad}$ a zapracujme túto úvahu do rovnice (7.6). Následne dostávame

$$x_m \cos(\omega_0 t) = x_m \cos(\omega_0(t + T_0)). \quad (7.7)$$

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou $2\pi \text{ rad}$, z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\omega_0 t + 2\pi = \omega_0(t + T_0), \quad (7.8)$$

Odtiaľ

$$2\pi = \omega_0 T_0. \quad (7.9)$$

Ak zakomponujeme do predchádzajúceho vzťahu známy vzťah medzi periódou a frekvenciou a použijeme substitúciu z rovnice (7.5), dostávame

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.10)$$

Veľčina ω_0 definovaná predchádzajúcim vzťahom sa nazýva **uhlová frekvencia** (tiež **kruhová frekvencia**) pohybu a jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je s^{-1} . Jednoduchý kmitavý pohyb je periodický, priamočiary a nerovnomerný. Využitím predchádzajúceho vzťahu môžeme vyjadriť **periódu vlastných kmitov** netlmeného harmonického oscilátora

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (7.11)$$

Frekvencia netlmených kmitov f_0 predstavuje počet kmitov za jednotku času

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.12)$$

Zaujímavosťou je, že frekvencia kmitania nijako nezávisí od toho, ako veľmi sme pružinu natiahli, čiže od veľkosti amplitúdy kmitov. Ako môžeme zo vzťahu (7.12) vidieť, závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a konštanty – tuhosti pružiny. Nezávisí taktiež na veľkosti gravitačného zrýchlenia.

V literatúre sa taktiež môžeme stretnúť s riešením pohybovej rovnice (7.5) v tvare $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, čo odpovedá rovnici (7.6), ibaže hodnota fázovej konštanty je posunutá o $\pi/2$, čo vyplýva z vlastností funkcie sínus a kosínus.

Pre vyjadrenie rýchlosti kmitavého pohybu využijeme znalosti z kinematiky hmotného bodu, kedy rýchlosť telesa pohybujúceho sa po priamke je daná ako derivácia jeho polohy podľa času. Môžeme teda písať

$$v = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.13)$$

Podobne, ako bol parameter x_m v rovnici (7.6) nazvaný amplitúdou, z predchádzajúcej rovnice vyplýva, že amplitúda rýchlosti je rovná $v_m = x_m \omega_0$. Zrýchlenie kmitavého pohybu telesa určíme ako deriváciu rýchlosti daného telesa podľa času (prípadne druhú deriváciu výchylky podľa času).

$$a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) = -\omega_0^2 x. \quad (7.14)$$

Kladná veličina $x_m \omega_0^2$ predstavuje v tomto prípade amplitúdu zrýchlenia a_m . Za povšimnutie stojí, že rýchlosť predbieha výchylku vo fáze o $\pi/2$ a zrýchlenie predbieha výchylku vo fáze o uhol π (Obr. 7.2). Zo vzťahu taktiež vyplýva, že zrýchlenie kmitavého pohybu je priamo úmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer.

Z predchádzajúceho vzťahu pre zrýchlenie kmitavého pohybu $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$ a substitúcie zavedenej v rovnici (7.4) dostávame

$$a(t) = -\frac{k}{m} x(t), \text{ kde } \frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (7.15)$$

Zo vzťahu vyplýva, že zrýchlenie kmitajúceho telesa je úmerné jeho výchylke a má opačné znamienko, pričom konštantou úmernosti je druhá mocnina uhlovej frekvencie, ktorá zas závisí len od vlastností samotného oscilátora, t.j. od jeho hmotnosti a tuhosti pružiny (tieto veličiny sa nazývajú tiež aj parametre oscilátora). Najväčšia kladná hodnota výchylky bude odpovedať zápornému zrýchleniu s najväčšou veľkosťou a naopak. Ak bude výchylka nulová, zrýchlenie bude taktiež nulové, avšak veľkosť rýchlosti kmitavého pohybu v danom okamihu bude maximálna.

Časový priebeh harmonického kmitania telesa je znázornený na Obr. 7.2. Súradnicovú sústavu sme pre lepšiu analýzu pootočili o $\pi/2$, takže kladný smer osi x bude smerovať zvislo nahor.

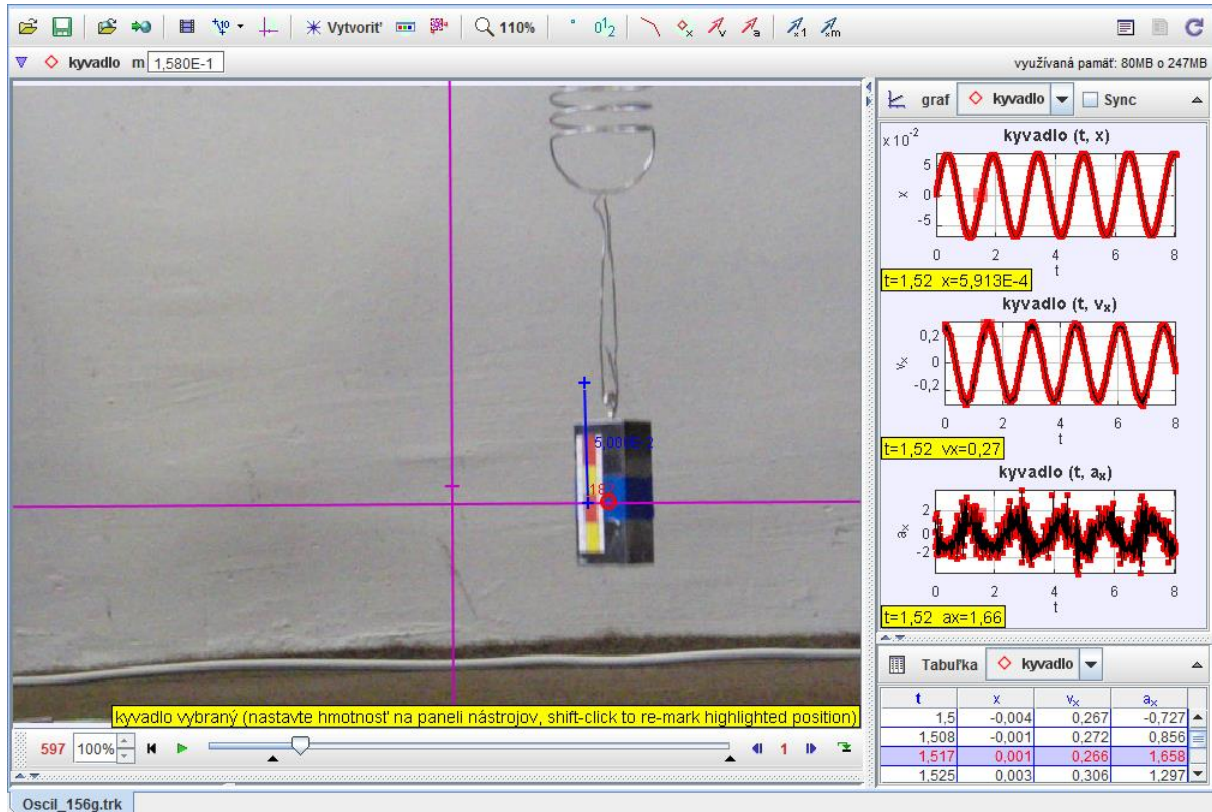
Úloha 7.1:

Popíšte rovnicami kmitavý pohyb telesa (vzťahy pre okamžitú výchylku, rýchlosť a zrýchlenie), určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu.

(frekvencia snímkov: 120 fps)

zdroj: [kmity_pruzina2.avi](#)

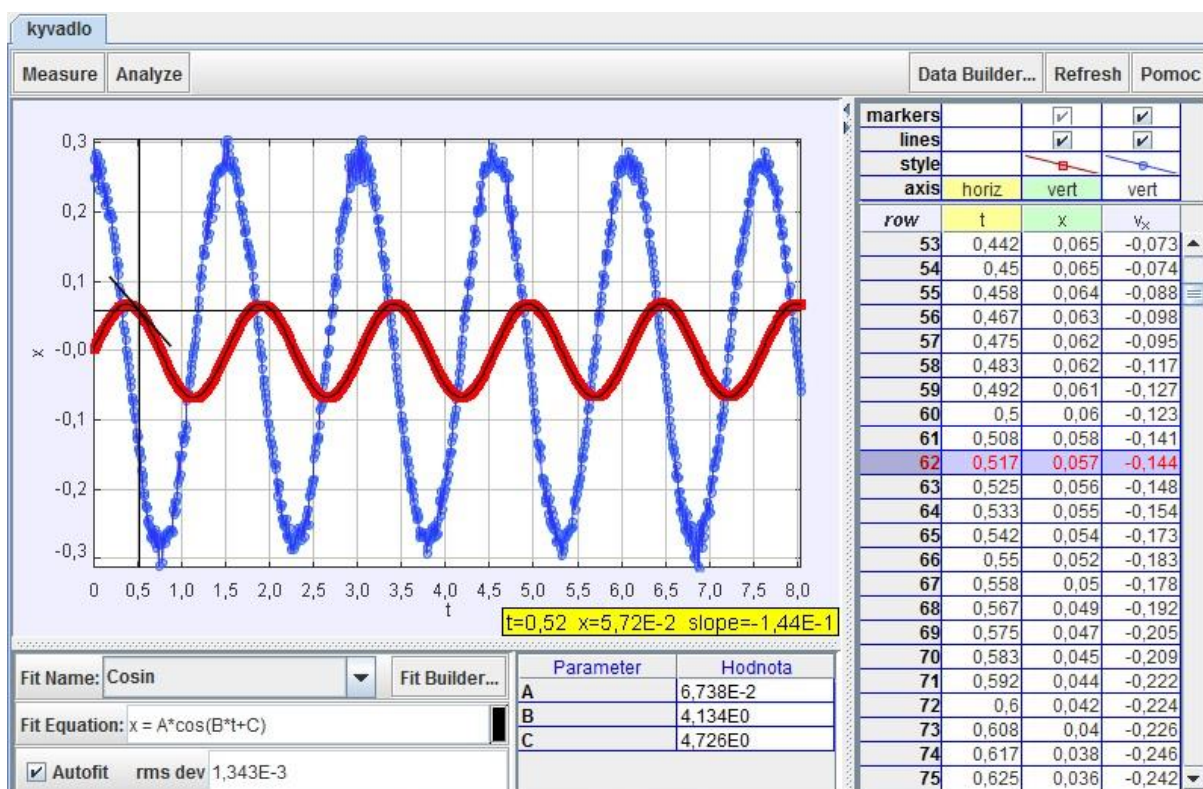
Riešenie:



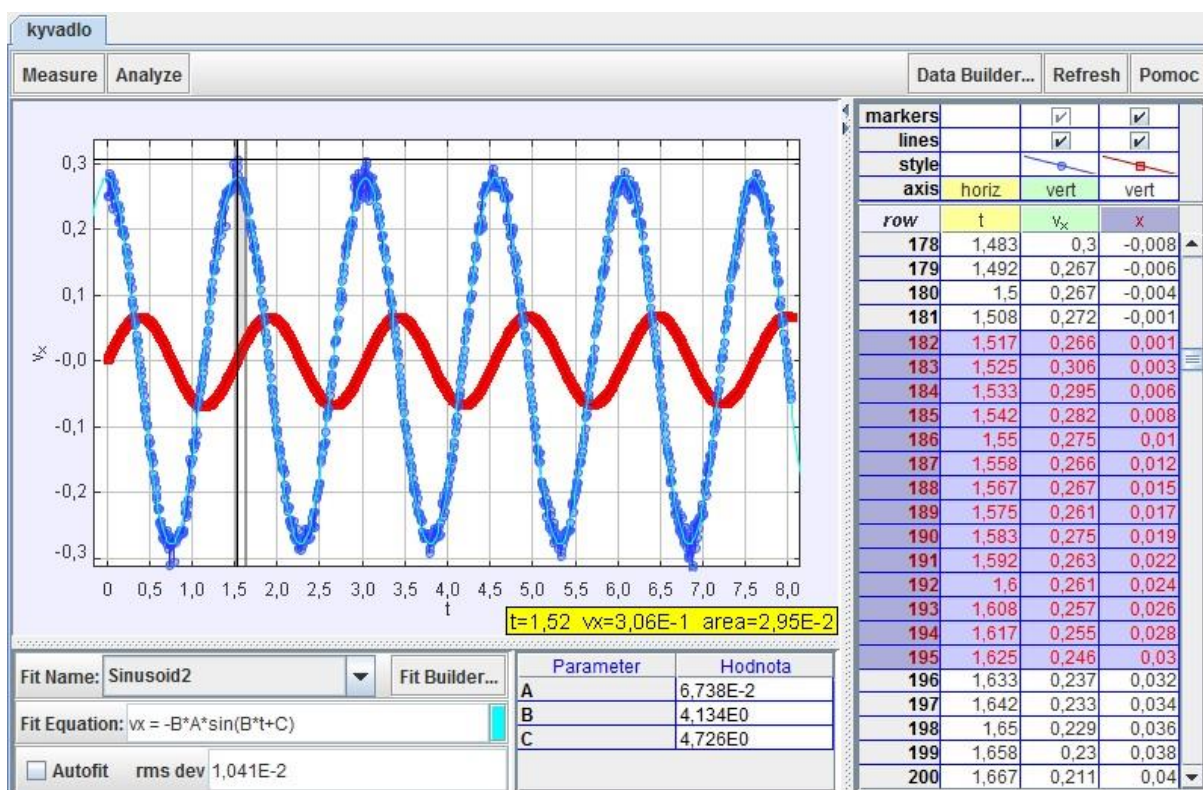
Obr. 7.2 Analýza vlastných kmitov harmonického pohybu pružinového oscilátora

Detailnejšou analýzou časových závislostí možno usúdiť (Obr. 7.3, Obr. 7.4), že kmitavý pohyb možno popísať rovnicami $x(t) = 0,06738 \cos(4,134t + 4,726)$ (okamžitú výchylku oscilátora predstavujú štvorčeky červenej farby) a $v_x = -4,134 \cdot 0,06738 \cos(4,134t + 4,726)$ (okamžitá rýchlosť je znázornená modrými guľôčkami), z čoho vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,067m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 4,134 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx 4,726 \text{ rad}$.

Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť rýchlosť kmitavého pohybu v čase t ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (Obr. 7.3 – v čase $t = 0,52s$ má smernica dotyčnice hodnotu $-0,144 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, čo odpovedá rýchlosti pohybu v danom čase určenej z tabuľky: $v_x(0,517s) = -0,144 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) a okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti na čase (Obr. 7.4 - obsah vyznačenej plochy je $0,0295m$, čo približne odpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{195} - t_{182} = 1,625s - 1,517s = 0,108s$: $\Delta x = x_{195} - x_{182} = 0,029m$).



Obr. 7.3 Analýza výchylky pružinového oscilátora z rovnovážnej polohy



Obr. 7.4 Analýza rýchlosti pružinového oscilátora z rovnovážnej polohy

Ako netlmený harmonický pohyb si s dostatočnou prednosťou môžeme predstaviť pohyb hmotnej gule zavesenej na vlákne zanedbateľnej hmotnosti oproti guli po slabom vychýlení z rovnovážnej polohy (uvažujeme o výchylkách do 5°, kedy $\sin \alpha \sim \alpha$). Takýto oscilátor v ideálnom prípade môžeme považovať za matematické kyvadlo. Ak bude uhlová

výchylka matematického kyvadla malá, môžeme ho považovať za harmonický oscilátor, podobný sústave pružina-teleso. Úlohu tuhosti pružiny k tu bude zohrávať veličina mg/L . Pre periódu matematického kyvadla môžeme teda použiť upravený vzťah (7.11), v ktorom doba kmitu matematického kyvadla nezávisí na hmotnosti kyvadla

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (7.16)$$

Úloha 7.2:

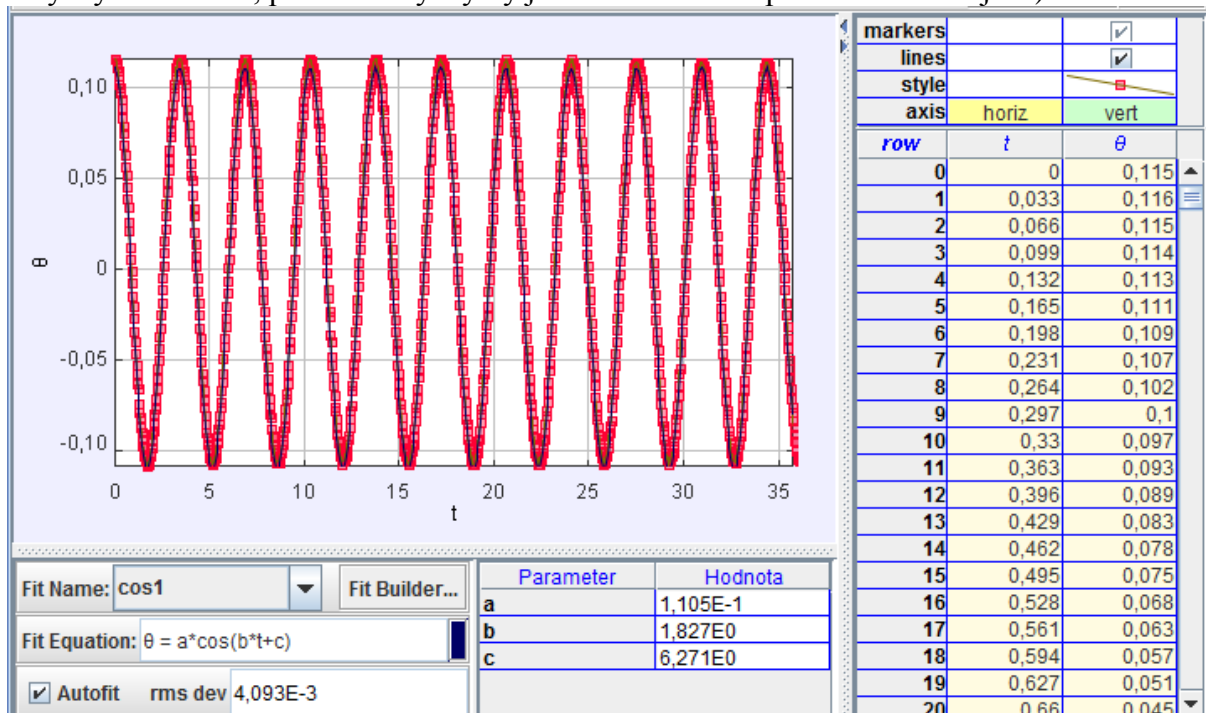
Popíšte rovnicami pohyb matematického kyvadla (vzťahy pre uhlovú výchylku, uhlovú rýchlosť a uhlové zrýchlenie), určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu a z doby kmitu určte hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme!

(dĺžka meradla: 1 m, dĺžka závesu: 3 m)

zdroj: [matematicke kyvadlo.avi](#)

Riešenie:

Analýzou uhlovej výchylky θ z rovnovážnej polohy (Obr. 7.5) (prípadne okamžitej výchylky v smere osi x) sa možno dopracovať jednak k uhlovej frekvencii kyvadla a následne k perióde kmitov. Daný priebeh môžeme popísať rovnicou $\theta(t) = 0,111 \cos(1,827t + 6,27)$ (prípadne pre okamžitú výchylku vo zvislom smere bude platiť $x(t) = 0,33 \cos(1,827t + 6,27)$), z čoho vyplýva, že uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 1,827 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a fázová konštantu kmitavého pohybu je $\varphi = 6,27 \text{ rad}$. Z hodnoty uhlovej frekvencie kmitavého pohybu kyvadla môžeme určiť periódu kmitavého pohybu, ktorá je $T_0 = 3,44 \text{ s}$. (Tú môžeme odhadnúť aj z grafu Obr. 7.5, keď dokážeme odčítať čas desiatich kmitov.) Odtiaľ už nie je problém určiť zo vzťahu (7.16) aj hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme, ktoré pri dĺžke daného kyvadla $L = 3 \text{ m}$ a z určených parametrov vychádza $g = 10,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. (Pri analýze sme uvažovali o výchylkách do 5° , pre veľké výchylky je riešenie daného problému zložitejšie.)



Obr. 7.5 Analýza uhlovej výchylky matematického kyvadla

7.1.2 Premeny energie v mechanickom oscilátore

Aby sme mechanický oscilátor uviedli do kmitavého pohybu, musíme ho vychýliť z rovnovážnej polohy. Ak teleso uvoľníme, nadobudnutá potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu kmitajúceho telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať (prípadne ňahovať v závislosti od počiatočného vychýlenia) a kinetická energia pružiny sa mení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky je potenciálna energia pružnosti oscilátora najväčšia. Potom sa oscilátor vracia späť do rovnovážnej polohy, jeho okamžitá výchylka sa znižuje, no na druhej strane sa zväčšuje rýchlosť závažia a jeho kinetická energia E_k je pri prechode rovnovážnou polohou najväčšia a rovná potenciálnej energii pri najväčšej výchylke z rovnovážnej polohy. Po prechode rovnovážnou polohou sa rýchlosť oscilátora bude opäť znižovať, pružina oscilátora sa ňahuje a zväčšuje sa jeho potenciálna energia. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky, bude rýchlosť závažia, a teda aj kinetická energia opäť nulová. Pri harmonickom pohybe sa periodicky premieňa potenciálna energia oscilátora na kinetickú a naopak. Celková energia oscilátora je pritom konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie.

Ak budeme uvažovať o netlmenom harmonickom pohybe, celková mechanická energia v izolovanej sústave, v ktorej pôsobí iba konzervatívna sila, je konštantná a je rovná súčtu kinetickej a potenciálnej energie. V miestach s maximálnou výchylkou je rýchlosť oscilátora nulová (kinetická energia je taktiež nulová) a celková mechanická energia je rovná potenciálnej energii, pre ktorú platí:

$$E = E_{p \max} = \int_{x_m}^0 -kx \, dx = \frac{1}{2} kx_m^2. \quad (7.17)$$

Rovnakú hodnotu celkovej energie dostaneme, keď budeme analyzovať kinetickú energiu, ktorá dosahuje maximálne hodnoty pri prechode oscilátora rovnovážnou polohou, pričom potenciálna energia je nulová. Po dosadení maximálnej hodnoty rýchlosti zo vzťahu (7.13) do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$E = E_{k \max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2. \quad (7.18)$$

Pre okamžité hodnoty kinetickej a potenciálnej energie platí

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.19)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (7.20)$$

Možno sa presvedčiť, že súčet okamžitých hodnôt kinetickej a potenciálnej energie harmonického oscilátora nezávisí na čase:

$$E_{\text{celk}} = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{2} k x_m^2, \quad (7.21)$$

pričom sme využili, že pre každý uhol α platí

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (7.22)$$

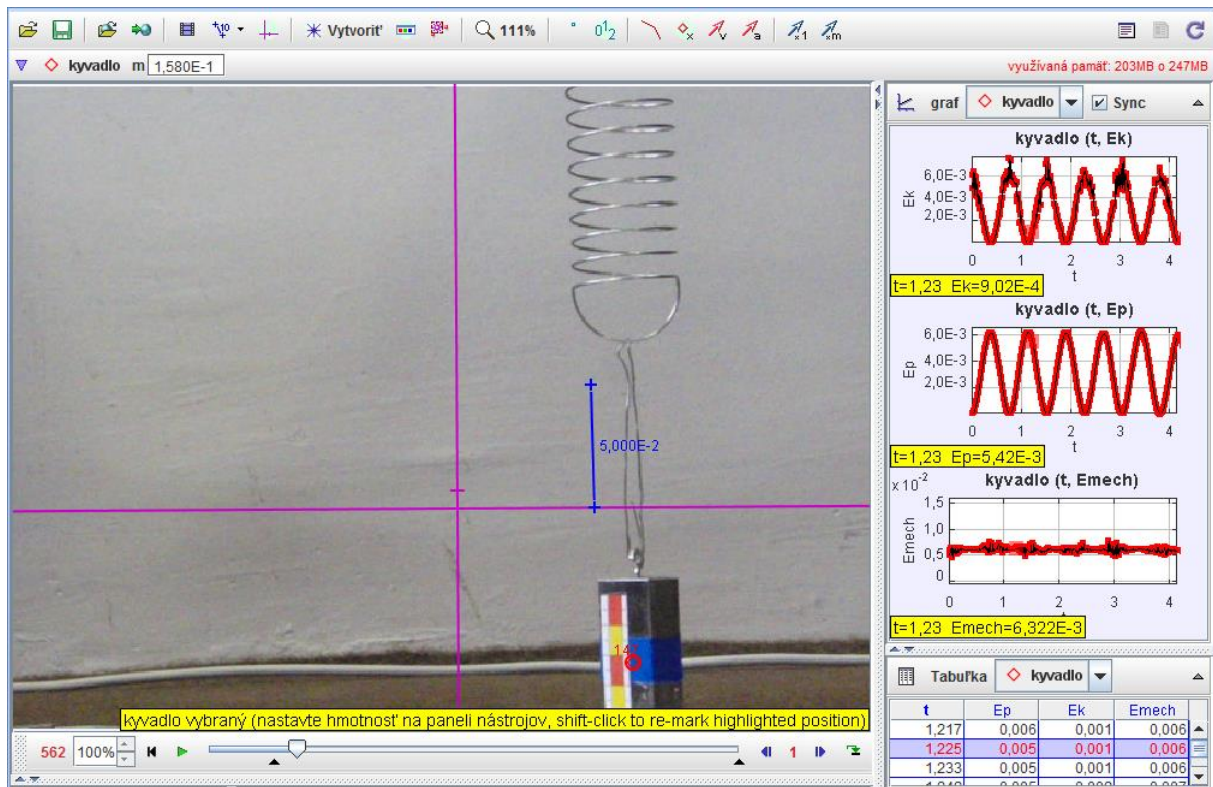
Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, celková mechanická energia netlmeného harmonického oscilátora je konštantná a priamo úmerná tuhosti pružiny a štvorcovej amplitúdy kmitov.

Úloha 7.3:

Analyzujte kmitavý pohyb z hľadiska energií (kinetická, potenciálna, celková).
(1 dielik je 1cm, frekvencia snímok: 120 fps)

zdroj: [kmity_pruzina2.avi](#)

Riešenie:



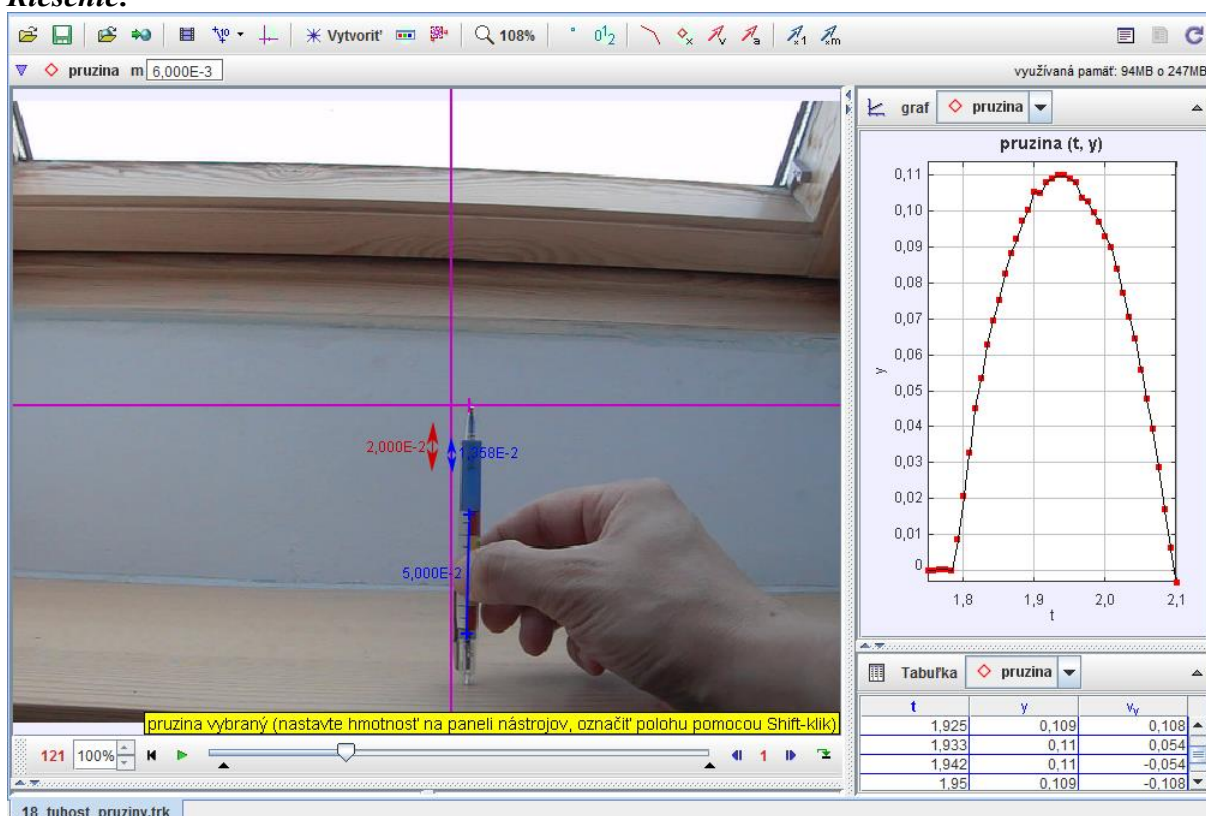
Obr. 7.6 Analýza časového vývoja energií kyvadla

Ako možno z predchádzajúceho Obr. 7.6 vidieť, pri kmitavom pohybe pružinového oscilátora dochádza k periodickým zmenám kinetickej energie E_K na potenciálnu E_P , pričom v každom okamihu platí, že ich súčet E_{mech} je konštantný (odpor prostredia zanedbávame, menšie fluktuácie vznikajú pri výpočte rýchlosti kyvadla, čo sa prejaví aj pri vypočítanej kinetickej energii).

Úloha 7.4:

Určte tuhosť pružiny. Hmotnosť pera je 6 gramov.
(1 dielik = 1 cm, 120 fps). zdroj: [tuhost_pruziny.avi](#)

Riešenie:



Obr. 7.7 Analýza pohybu pera

Ak využijeme znalosť vzťahu (7.18) a (2.26), dáme ich do rovnosti a pomocou analýzy v Trackeri určíme maximálne stlačenie pružiny x_m a výšku h , do ktorej vyletí pero, vieme sa dopracovať k tuhosti pružiny, ktorá v tomto prípade vychádza $k = 311 \text{ N/m}$.

7.2 Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie

Predchádzajúce úvahy boli robené za predpokladu, že v priebehu harmonického kmitania nepôsobia na oscilátor žiadne iné vplyvy. Za daného ideálneho predpokladu by sa amplitúda výchylky nemenila a oscilátor by kmital neobmedzene dlho. V skutočnosti však na oscilátor pôsobia sily, ktoré sú príčinou premeny mechanickej energie na inú formu energie, zväčša na jeho vnútornú energiu. To sa prejaví postupným znižovaním amplitúdy výchylky, až postupne kmitanie zanikne. Tomuto procesu hovoríme **tlmené kmitanie**.

Príčinou tlmeného kmitania oscilátora je najčastejšie trecia sila, ktorá vzniká vzájomným pôsobením oscilátora a prostredia, v ktorom sa oscilátor pohybuje. Ak je tlmenie oscilátora príliš veľké, kmitanie nenastane a oscilátor sa po vychýlení vráti do rovnovážnej polohy (aperiodický pohyb).

V praxi, keď sa vyžaduje malé tlmenia, príčiny tlmenia sa obmedzujú, a naopak, tam, kde je kmitanie nežiaduce, tlmenie sa umelo zväčšuje (napr. tlmiče perovania v automobiloch, tlmenie pohybu rúčok meracích prístrojov a pod.).

Vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené. Časový priebeh tlmenia závisí jednak od vlastností oscilátora, ale aj od prostredia, v ktorom sa kmitanie uskutočňuje. Tlmenie ovplyvňuje amplitúdu výchylky aj periódu kmitania. Tlmený oscilátor má väčšiu periódu kmitania ako rovnaký oscilátor bez tlmenia.

Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením kmitajúcej sústavy – harmonického oscilátora do viskózne kvapaliny (prípadne nechať

oscilátor kmitať dostatočne dlho na vzduchu). Predpokladajme pri danom pohybe, že odpor prostredia je priamo úmerný rýchlosti $F_{\text{odp}} = -k'v$, kde $k' > 0$. Sila odporu prostredia bude smerovať proti smeru rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v pohybovej rovnici

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt}. \quad (7.23)$$

Ak použijeme substitúciu (vzťah (7.10))

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ a } \frac{k'}{m} = 2b, \quad (7.24)$$

pohybová rovnica prejde na tvar

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.25)$$

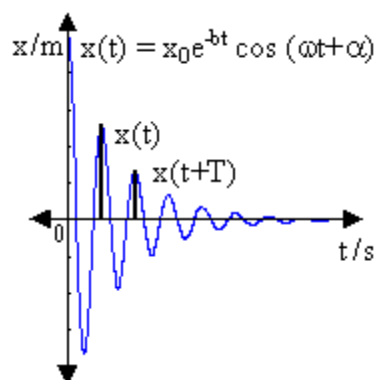
Konštantu $b = \frac{k'}{2m}$ charakterizuje vplyv trenia a nazýva sa **koeficient útlmu**, ω_0 je vlastná uhlová frekvencia, t.j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Všeobecné riešenie predchádzajúcej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi). \quad (7.26)$$

Uhlová frekvencia ω je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní ω_0 tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá:

$$x_m = x_0 e^{-bt}. \quad (7.27)$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je znázornený na obrázku.



Obr. 7.8 Tlmené harmonické kmity

Prísne vzaté nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T

môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}, \quad (7.28)$$

pričom $T > T_0$, kde T_0 predstavuje periódu vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda kmitavého pohybu sa takmer rovná perióde netlmených kmitov a predchádzajúci vzťah sa zmení na vzťah (7.11). Pri zväčšovaní tlmenia bude aj perióda tlmených kmitov narastať. Pre mechanickú energiu tlmeného oscilátora bude platiť, že sa s časom znižuje. Pre slabé tlmenie môžeme amplitúdu x_m v rovnici (7.21) nahradiť výrazom (7.26) a získame tak závislosť

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k x_0^2 \exp(-2bt). \quad (7.29)$$

Podiel amplitúdy dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek na tú istú stranu nazývame **útlm** a označujeme λ , pričom platí

$$\lambda = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \frac{x_0 e^{-bt}}{x_0 e^{-b(t+T)}} = e^{bT}. \quad (7.30)$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu** δ a využijúc predchádzajúcu rovnicu môžeme písať

$$\delta = \ln \lambda = bT. \quad (7.31)$$

Čím bude väčší je logaritmický koeficient útlmu, tým je potrebný menší počet kmitov na určité zníženie amplitúdy.

Úloha 7.5:

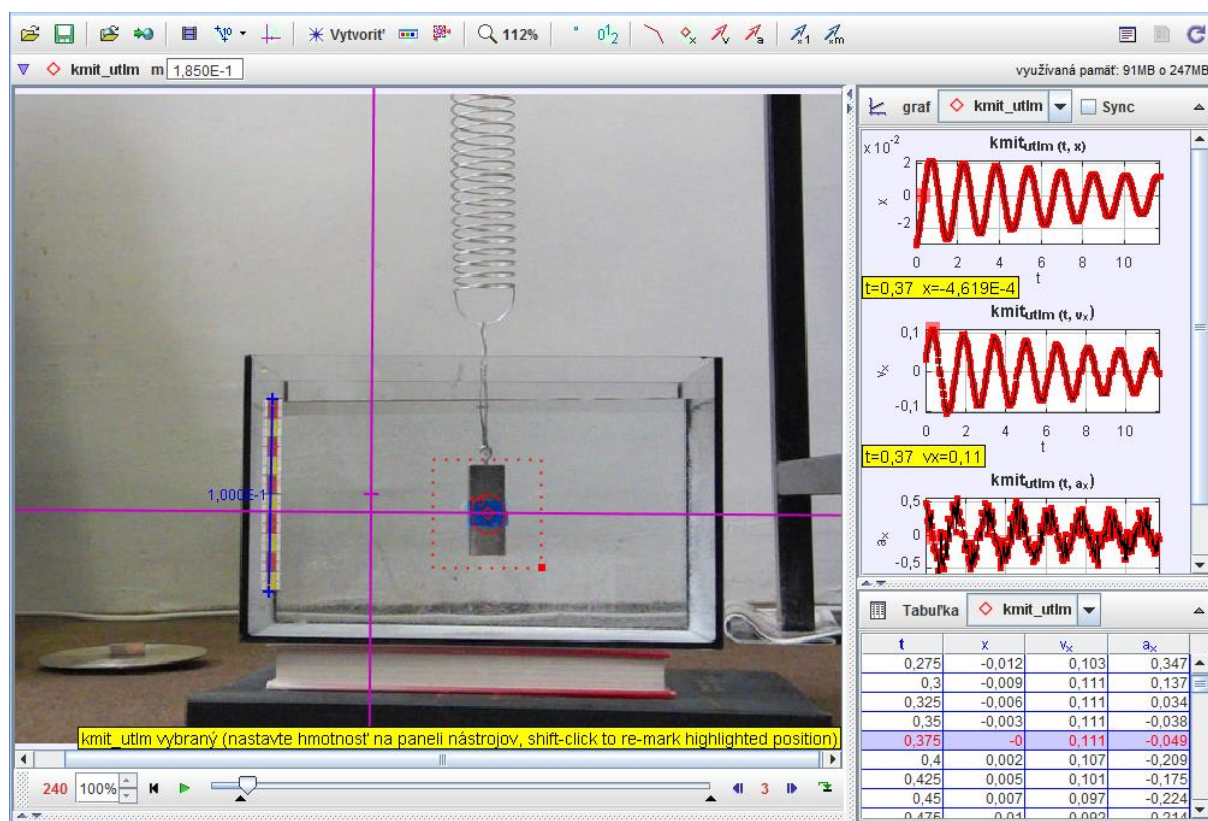
Analyzujte tlmený kmitavý pohyb (nájdite vzťahy pre okamžitú výchylku, rýchlosť a zrýchlenie, určte uhlovú frekvenciu a fázovú konštantu kmitavého pohybu).

(dĺžka meradla: 0,1 m, frekvencia snímok: 120 fps).

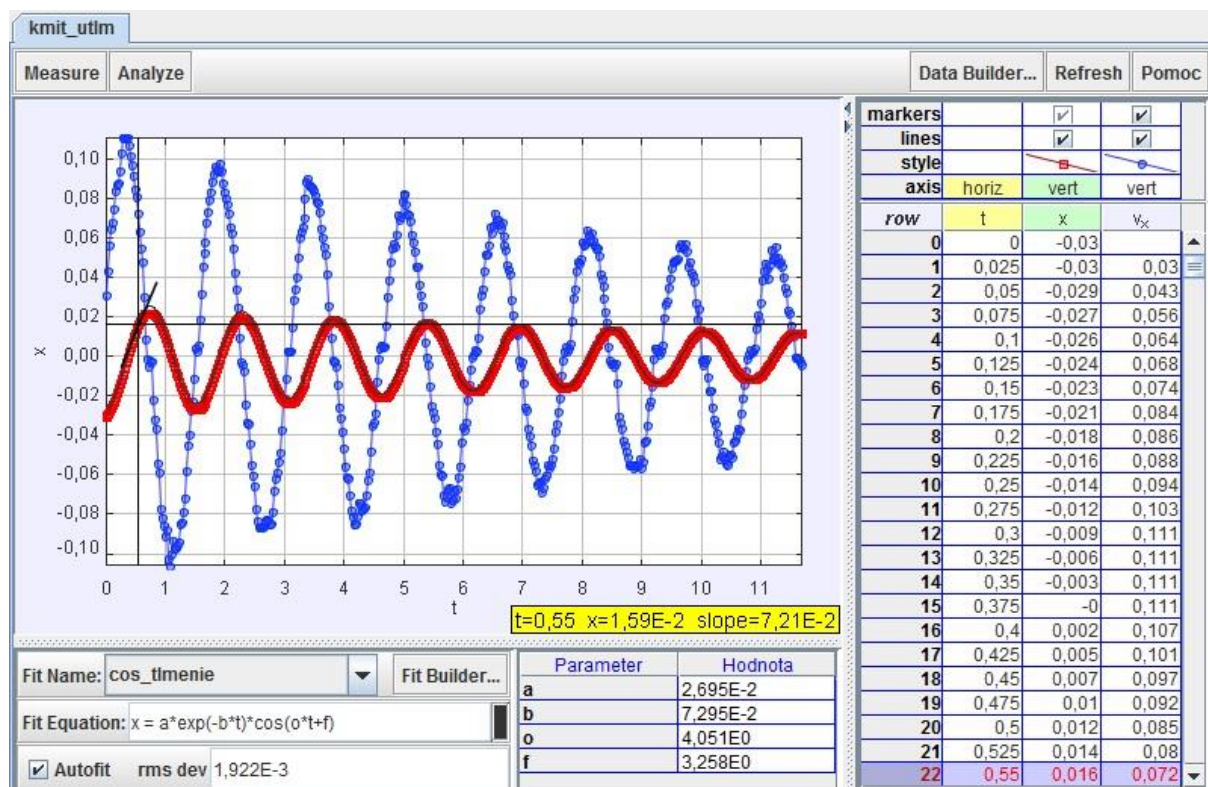
zdroj: [tlmene kmity2.avi](#)

Riešenie:

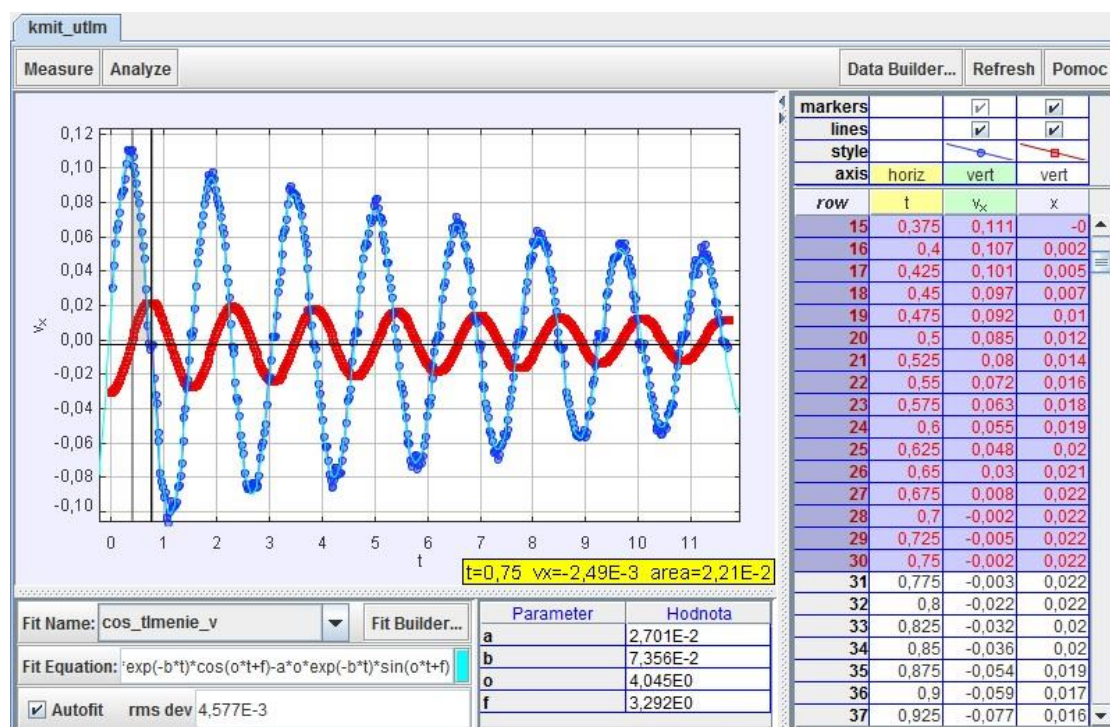
Na nasledujúcom Obr. 7.9 je prevedená analýza tlmených harmonických kmitov pružinového oscilátora – závažia z predchádzajúcej úlohy (Úloha 7.3) zaveseného na pružine a ponoreného do kvapaliny. Ako aj v predchádzajúcom prípade netlmeného pružinového oscilátora, aj v tomto prípade si môžeme všimnúť fázový posun medzi okamžitou výchylkou, rýchlosťou a zrýchlením kyvadla v danom čase.



Obr. 7.9 Analýza tlmených kmitov harmonického pohybu kyvadla



Obr. 7.10 Analýza okamžitej výchylky tlmených harmonických kmitov kyvadla



Obr. 7.11 Analýza okamžitej rýchlosti tlmených harmonických kmitov kyvadla

Analýzou časových závislosti možno usúdiť (Obr. 7.10, Obr. 7.11), že sa jedná o tlmený harmonický pohyb, keďže amplitúda okamžitej výchylky a rýchlosti sa s časom znižuje. Okamžitú výchylku tlmeného kmitavého pohybu možno popísať rovnicou v tvare: $x(t) = 0,02695 \exp(-0,07295t) \cos(4,051t + 3,258)$. Smernica dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky má v čase $t = 0,55s$ hodnotu $0,0721m \cdot s^{-1}$, čo odpovedá okamžitej rýchlosti v smere osi x určenej z tabuľky: $v_x(t = 0,55s) = 0,072m \cdot s^{-1}$. Analýza rýchlosti tlmeného harmonického oscilátora je v tomto prípade trochu zložitejšia, nakoľko rýchlosť tlmeného kmitavého pohybu dostaneme, keď zderivujeme výchylku kyvadla podľa času, ktorá v tomto prípade predstavuje zloženú funkciu ($\exp(\cdot) \cdot \cos(\cdot)$). Takže danú matematickú funkciu musíme derivovať ako súčin. (Samotnú deriváciu ponechávame na čitateľovi.) Po zderivovaní výchylky tlmeného harmonického pohybu kyvadla v smere osi x ($x(t)$) dostávame rovnicu v tvare:

$$v_x(t) = 0,02701 \cdot (-0,07356) \cdot \exp(-0,07356t) \cdot \cos(4,045t + 3,292) - 0,02701 \cdot 4,045 \cdot \exp(-0,07356t) \cdot \sin(4,045t + 3,292).$$

(Vyjadrenie zrýchlenia ponechávame na samotnom čitateľovi, nakoľko sa jedná o dvojnásobnú deriváciu súčinu.)

Zo získaných vzťahov pre výchylku a rýchlosť kmitavého pohybu vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,027m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega = 4,05rad \cdot s^{-1}$ (menšia, ako v prípade netlmeného pohybu), koeficient útlmu $b = 0,07295$ ($0,07356$) s^{-1} a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx 3,26(3,29)rad$.

Aj pri tomto pohybe je možné v ktoromkoľvek okamihu určiť okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti na čase (Obr. 7.11) - obsah vyznačenej plochy je $0,0221m$, čo odpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{30} - t_{15} = 0,75s - 0,375s = 0,375s$: $\Delta x = x_{30} - x_{15} = 0,022m - 0m = 0,022m$.

Vplyvom trenia pri kmitavom pohybe vo vode bude dochádzať k stratám mechanickej energie, ktorá sa mení na energiu tepelnú a pohyb bude postupne zanikať. Ak chceme v kmitajúcej sústave pohyb udržať, musíme sústave vhodným spôsobom dodávať energiu.

Za istých podmienok je možné dosiahnuť, aby výchylky oscilátora boli väčšie, ako samotná počiatočná amplitúda kmitavého pohybu.

7.3 Vynútený kmitavý pohyb

V každom kmitajúcom systéme pôsobia určité trecie sily, pričom voľné kmity vyvolané v takomto systéme budú vždy tlmené. Aby sme v systéme dosiahli netlmené kmity, je potrebné kompenzovať energetické straty vyvolané trením pomocou vonkajšieho zdroja. Pod vynúteným kmitavým pohybom budeme rozumieť taký pohyb, ktorý nastane, keď na kmitajúcu sústavu bude okrem sily veľkosti kx a odporovej sily prostredia bv pôsobiť aj periodická sila. Môžeme si predstaviť napríklad dieťa na hojdačke, ktoré sa snaží hojdať jeho rodič stojaci pred(za) ním periodickým dodávaním energie. Ak by rodič postrkával hojdačku s frekvenciou rovnou vlastnej frekvencii hojdačky, dosiahol by tak veľké amplitúdy výchylky aj rýchlosti. Ako možno zo skúsenosti vieme, je možné naučiť sa takto rozhojdať hojdačku metódou pokus-omyl. Ak by sme ju rozhojdávali s inou frekvenciou, buď vyššou alebo nižšou, amplitúdy výchylky a rýchlosti by boli malé. Ak by hojdačku nerozhojdával rodič, ale dieťa by sa hojdalo samé, pričom by sa udržiavalo stále kmitanie pravidelne sa meniacim vnútorným parametrom – napr. kývaním nôh, vtedy hovoríme o tzv. **parametrickej rezonancii**. Rezonančná frekvencia takéhoto mechanizmu hojdania sa je dvojnásobná oproti vlastnej frekvencii hojdačky. Ďalšou zvláštnosťou parametrickej rezonancie oproti vynúteným kmitom je to, že ňou možno zosilniť už existujúce kmity, ale nemožno sa ňou rozhojdať z úplného pokoja.

Uvažujme teraz o tom, že časová závislosť vynucujúcej sily má tvar $F_v = F_0 \cos(\Omega t)$, kde F_0 je amplitúda pôsobiacej sily a Ω je jej kruhová frekvencia. Pod vplyvom takejto sily vzniknú v systéme kmity, ktoré nazývame **vynútené**. Výslednicu síl pôsobiacich na teleso hmotnosti m môžeme zapísať v tvare

$$F = -kx - k' \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t . \quad (7.32)$$

Pohybová rovnica má pre vynútený kmitavý pohyb tvar

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - k' \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t , \quad (7.33)$$

čo môžeme s využitím substitúcie prepísať do tvaru

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t , \quad (7.34)$$

kde $f_0 = F_0/m$ a b a ω_0 majú ten istý význam, ako pri tlmenom kmitavom pohybe. Od predchádzajúcich pohybových rovníc sa táto rovnica líši tým, že jej pravá strana sa nerovná nule a v matematike ju poznáme pod pojmom diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou. Všeobecné riešenie danej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t + \alpha) . \quad (7.35)$$

Z rovnice vyplýva, že ak vonkajšia periodická sila bude pôsobiť na teleso dostatočne dlhý čas, sústava bude konať len vynútené harmonické kmity s amplitúdou B a frekvenciou rovnajúcou sa frekvencii vynucujúcej sily, pričom fáza vynútených kmitov bude posunutá o uhol α vzhľadom na vonkajšiu pôsobiacu silu, keďže prvý člen rovnice exponenciálne zaniká. V ustálenom stave je riešenie kmitajúceho systému s vonkajšou silou $F_v = F_0 \cos(\Omega t)$ dané vzťahom

$$x = B \cos(\Omega t + \alpha). \quad (7.36)$$

Pre amplitúdu vynútených kmitov platí

$$B = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}. \quad (7.37)$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, amplitúda vynútených kmitov bude závisieť od amplitúdy vynucujúcej sily F_0 , ale aj od vzťahu medzi vlastnou frekvenciou kmitajúceho systému ω_0 a vynucujúcou frekvenciou Ω . Najväčšia hodnota amplitúdy B sa dosiahne, keď sa obe frekvencie budú rovnať, t.j. $\omega_0 = \Omega$. Daný jav sa nazýva **rezonancia**. Kmity s maximálnou amplitúdou sa nazývajú **rezonančné kmity** a frekvencia pri ktorej dochádza k takýmto kmitom sa nazýva **rezonančná frekvencia amplitúdy**. Rezonančnú frekvenciu je možné určiť z podmienky extrému funkcie $B(\Omega)$. Ako si môžeme všimnúť, rezonančná frekvencia nezávisí na veľkosti tlmenia. Maximálna hodnota amplitúdy B je dosahovaná vzťahom

$$B = \frac{F_0}{2mb\Omega}. \quad (7.38)$$

Všetky mechanické sústavy vykazujú jednu alebo viacero vlastných frekvencií. Keď na ne bude pôsobiť veľká vonkajšia sila s frekvenciou blízko jednej z vlastných frekvencií sústavy, môžu vznikajúce vynútené kmity spôsobiť mechanické porušenie. Mechanické rezonancie môžu mať veľké negatívne účinky. Už pôsobením malej sily môže dôjsť k veľkým amplitúdam kmitov, pričom sa môže porušiť pevnosť materiálov, mostov, čo môže spôsobiť ich deštrukciu (Obr. 7.12). Preto musia aj letecký konštruktéri zaistiť, aby sa vlastná frekvencia krídel líšila od frekvencie piestov pri otáčkach motora behom letu.



Obr. 7.12 Most Tacoma Narrows Bridge v krátkych okamihoch za sebou počas fúkania vetra a silného krútenia mosta

V roku 1940 postavili v štáte Washington visutý most cez Tacomskú úžinu, ktorý otvorili 1. 7. Vietor, ktorý sa opieral do mosta, spôsoboval nekontrolovateľné vlnenie vozovky. 7.11. dosiahla sila vetra rýchlosť 70 km/hod a to spôsobilo také silné krútenie mosta, že to most nevydržal a zrútil sa do rieky.

7.4 Skladanie kmitov

Kmitavý pohyb môže byť niekedy vytvorený zložením rôznych pohybov v rôznych smeroch. V závere tejto časti si popíšeme, čo vznikne zložením dvoch kmitov rovnakej amplitúdy ale rôznej (prítom blízkej) frekvencie. Pre jednoduchosť budeme uvažovať kmitavé pohyby s rovnakými amplitúdami x_0 a fázovými konštantami pohybu φ , pričom uhlová frekvencia prvého kmitania je ω_1 a druhého ω_2 . Potom pre okamžité výchylky z rovnovážnych polôh pohybov platí:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (7.39)$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (7.40)$$

Využitím vlastností goniometrických funkcií pre výchylku výsledného pohybu x zloženého z dvoch kmitavých pohybov x_1 a x_2 ($x = x_1 + x_2$) dostaneme:

$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right), \quad (7.41)$$

pričom sme využili známy vzťah z trigonometrie

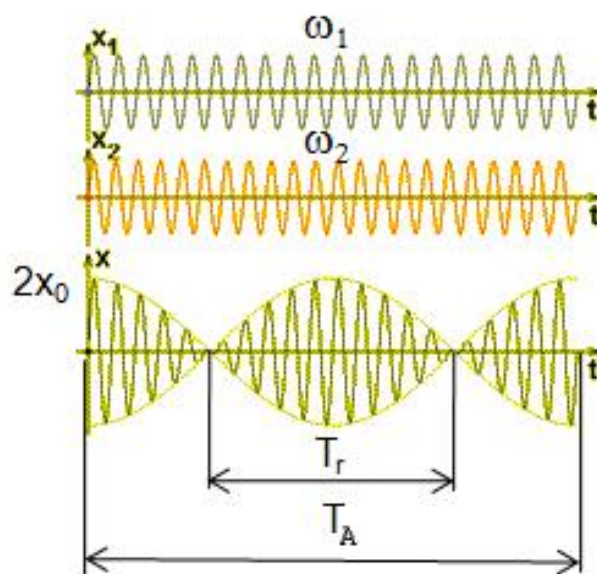
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (7.42)$$

Prvá časť výsledného vzťahu (7.41) sa mení oveľa pomalšie a charakterizuje amplitúdu pohybu a druhá časť predstavuje fázu pohybu. Výsledný pohyb môžeme preto chápať ako kmitanie s uhlovou frekvenciou $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$ a pomaly sa meniacou amplitúdou. Výsledný priebeh kmitania je znázornený na Obr. 7.13. Výsledná amplitúda kmitavého pohybu je kladné číslo, takže môžeme pre ňu písať

$$A(t) = \left| 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \right|. \quad (7.43)$$

Uhlová frekvencia výsledného pohybu bude mať tvar

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}}{2} = \frac{\pi(T_1 + T_2)}{T_1 T_2}. \quad (7.44)$$



Obr. 7.13 Vznik rázov

Pre periódu výsledného pohybu môžeme teda písať:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}. \quad (7.45)$$

Amplitúda výsledného pohybu (7.43) sa s časom mení periodicky a pre periódu jej zmeny platí:

$$T_A = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}. \quad (7.46)$$

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia, t.j. **rúzy**, pre periódu rázov platí:

$$T_r = \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi(f_1 - f_2)} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{\left| \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right|} = \frac{T_1T_2}{|T_2 - T_1|}. \quad (7.47)$$

Pre výslednú frekvenciu rázov môžeme teda písať:

$$f_r = |f_2 - f_1|. \quad (7.48)$$

Úloha 7.6:

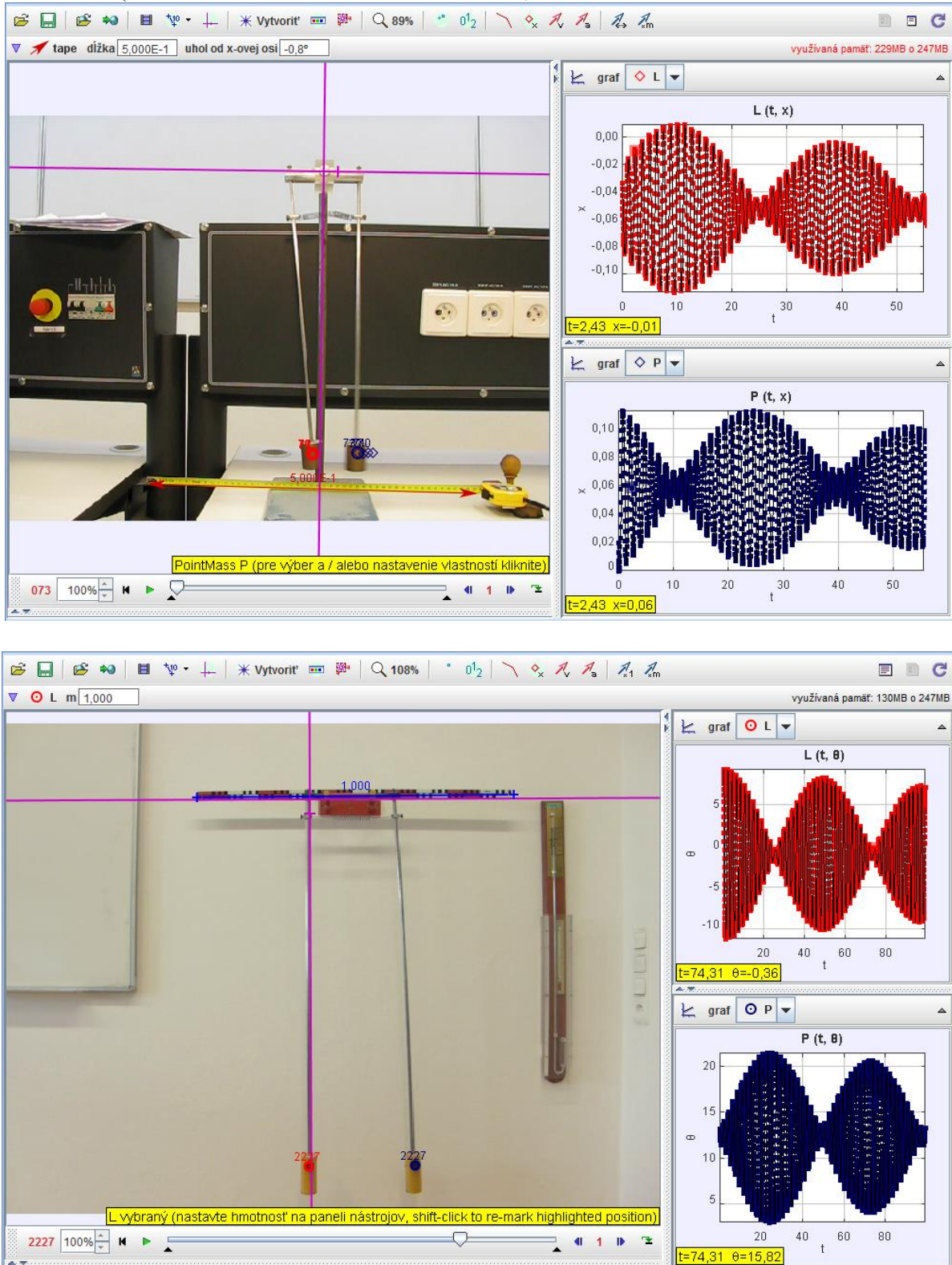
Analyzujte pohyb spriahnutých kyvadiel, určte frekvenciu rázov!

(dĺžka meradla: 0,5 m; 1m, frekvencia snímok = 30 fps)

zdroj: [spriahnute kyvadla.avi](#), [spriahnute kyvadla 2.avi](#)

Riešenie:

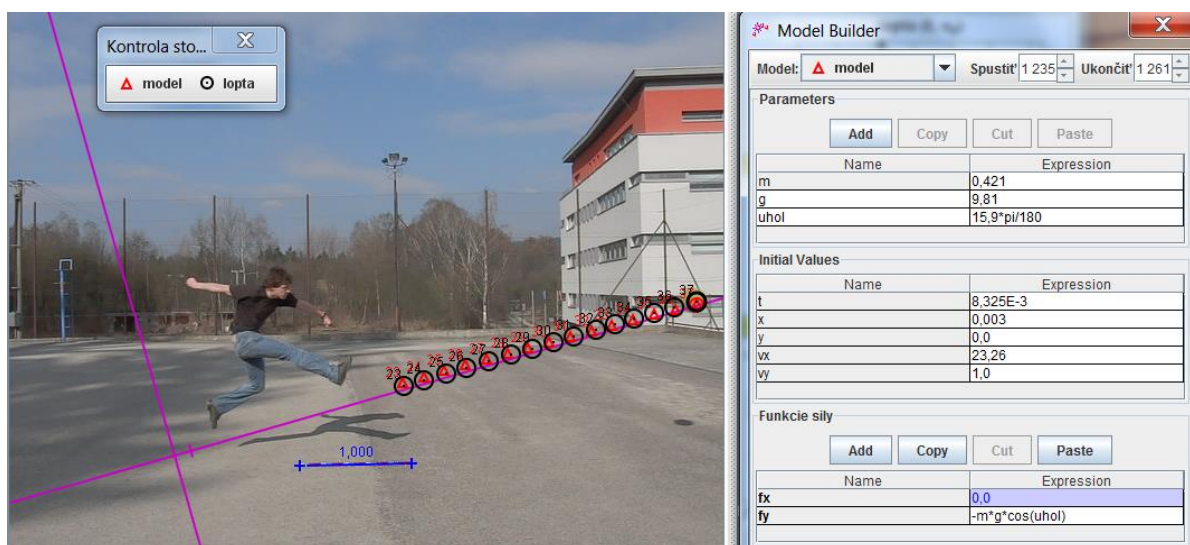
Nasledujúci Obr. 7.14 znázorňuje analýzu spriahnutých kyvadiel v programe Tracker. Na základe vyššie uvedených vzťahov je možné určiť periódu rázov a následne hľadanú frekvenciu. (Ponechávame na samotnom čitateľovi.)



Obr. 7.14 Analýza kmitov spriahnutých kyvadiel

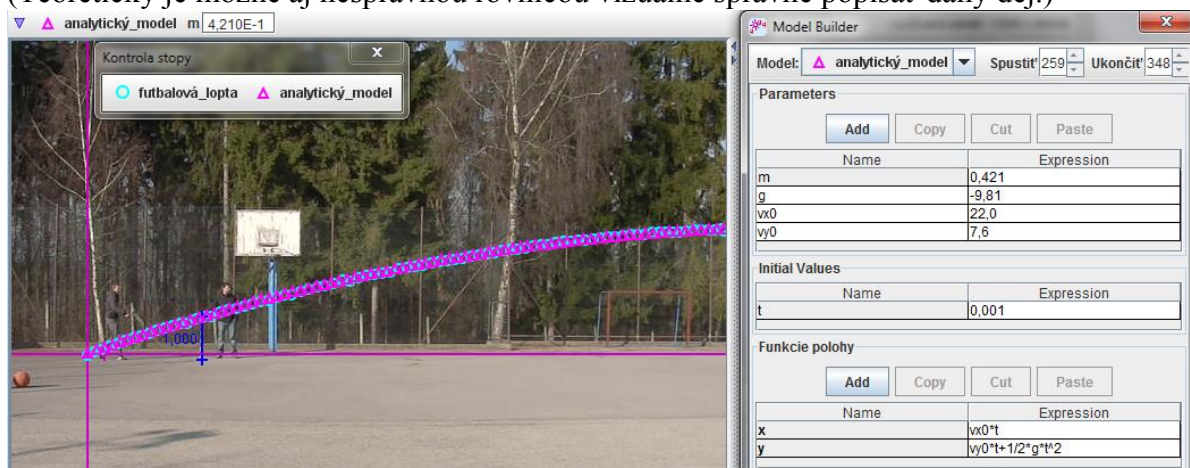
8. Modelovanie reálnych dejov v programe Tracker

Program Tracker umožňuje taktiež modelovať daný dej využitím analytického modelu (určenie rovníc pre $x(t)$ a $y(t)$) alebo dynamického (rovnice F_x , F_y). Po kliknutí na položku Vytvoriť sa nám otvorí okno, kde môžeme vybrať Analytický časticový model, prípadne Dynamický časticový model. To je pre študentov príležitosť overiť si, do akej miery je ich predstava o prebiehajúcom deji odpovedajúca skutočnosti. Týmto spôsobom možno korigovať mylné predstavy o tom, že lopta sa v smere x-ovej osi pohybuje preto, lebo na ňu pôsobí konštantná sila. Ako možno vidieť z dynamického modelu deja po kopnutí do lopty (Obr. 8.1), uvažovali sme o nulovej sile v smere osi x (ak samozrejme zanedbávame vplyv odporu prostredia a zložku tiažovej sily smere osi x v takto zvolenej sústave, ktorá má predsa len nejakú hodnotu (po prepočte veľkosť danej hodnoty vychádza $F_x = 0,020\text{ N}$)).



Obr. 8.1 Dynamické modelovanie deja (Δ - model, O – reálny dej)

Pri tvorbe dynamického modelu (Obr. 8.1) je nutné na začiatku zadať konštanty a parametre (m , g a pod.) a počiatkové hodnoty pre polohu a rýchlosť v smere osi x , y . v tomto prípade sú dané hodnoty taktiež individuálne a závisia od počiatkového navolenia súradnicovej sústavy. Pokiaľ model odpovedá jednotlivým polohám hmotného bodu v časových intervaloch, je dosť veľká pravdepodobnosť, že daná funkcia správne popisuje daný dej. Odporúčame však vykonať rozmerovú analýzu, aby dané rovnice mali rozmer sily. (Teoreticky je možné aj nesprávnou rovnicou vizuálne správne popísať daný dej.)



Obr. 8.2 Analytické modelovanie deja (Δ - model, O – reálny dej)

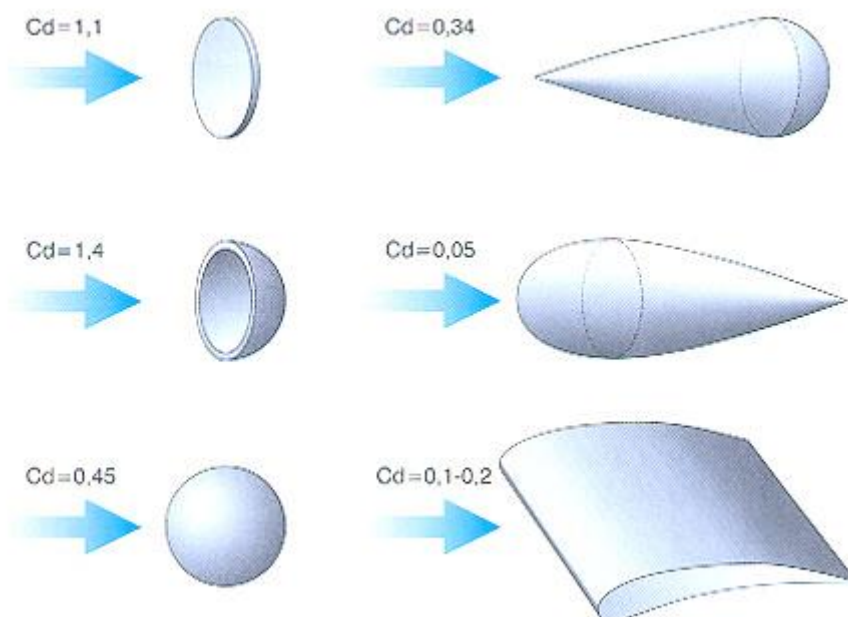
Zmenou parametrov možno sledovať, ako sa mení modelovaný dej oproti reálnemu, prípadne, čo by sa dialo, ak by sa zmenila pôsobiaca sila, či by priebeh deja ovplyvnilo zarátanie odporu vzduchu.

Na Obr. 8.2 je prezentovaný vytvorený analytický model (pomocou rovníc pre výchylku v smere osi x a y) inej situácie a jeho porovnanie s reálnou situáciou pri odkope futbalovej lopty. Taktiež je potrebné v úvode zadať parametre (a ich hodnoty), ktoré sa vyskytnú pri popise polohy v smere osi x a y . Tiež aj v tomto prípade odporúčame vykonať rozmerovú analýzu. Z navrhovaného analytického modelu vyplýva, že v smere osi x koná lopta pohyb rovnomerný (ak zanedbávame vplyv odporu prostredia, v ktorom sa teleso pohybuje) s počiatočnou rýchlosťou $v_{x0} = 22 \text{ m/s}$ a v smere osi y je daný pohyb modelovaný ako rovnomerne spomalený s počiatočnou rýchlosťou $v_{y0} = 7,6 \text{ m/s}$. Ak teraz hľadáme odpoveď na otázku, akú počiatočnú rýchlosť mala lopta v čase kopu, je ešte potrebné využiť poznatky z vektorového počtu a určiť veľkosť rýchlosti lopty po odkope. Po krátkom výpočte by sme sa dopracovali k hodnote $v = 23,28 \text{ m/s}$, čo je podobné, ako pri videu na Obr. 8.1 ($v = 23,28 \text{ m/s}$).

V predchádzajúcich prípadoch bolo možné odpor vzduchu zanedbať. Avšak niekedy sa stretne s prípadmi, kedy to možné nie je. V reálnom prípade musíme uvažovať aj o odpore vzduchu, ktorý je spôsobený vírovým obtekaním vzduchu okolo lopty, aj keď to nie sú veľké rýchlosti. Veľkosť odporovej sily je daná vzťahom:

$$F_0 = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \quad (8.1)$$

kde S je čelný prierez telesa (vzhľadom k smeru jeho rýchlosti), ρ je hustota prostredia, v je rýchlosť a C je tzv. koeficient aerodynamického odporu. Obtekanie telesa pri turbulentnom prúdení je veľmi komplikovaný problém, hodnotu koeficientu odporu C je preto potrebné určovať experimentálne v tzv. veternom tuneli.

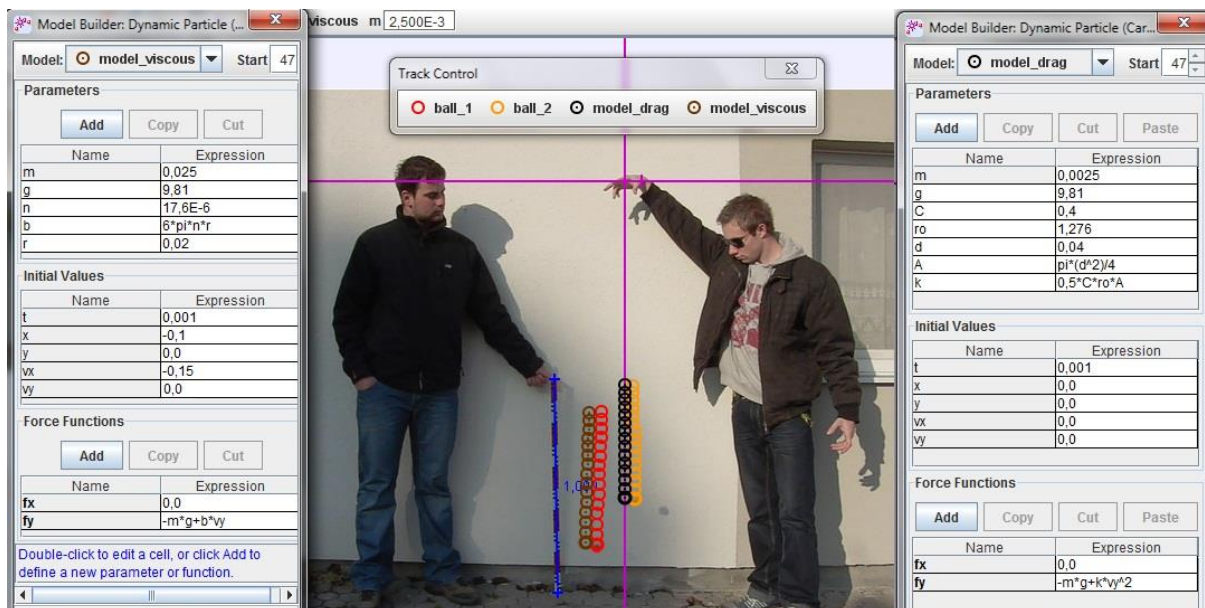


Obr. 8.3 Veľkosť koeficientu odporu pre rôzne tvary telies

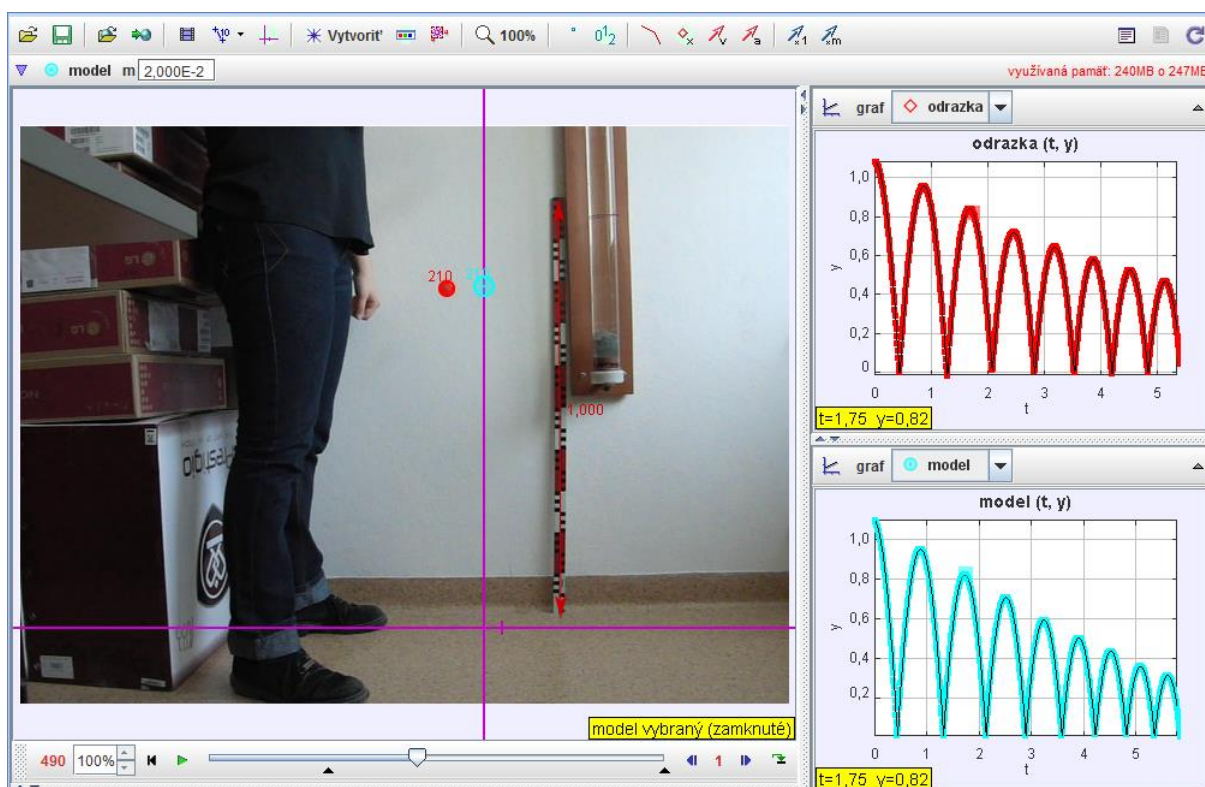
<http://cs.autolexicon.net/articles/aerodynamika/>

Na nasledujúcom obrázku Obr. 8.4 je znázornená analýza pohybu dvoch voľne pustených guľôčok a porovnanie s modelmi – viskóznym a odporovým, prvý súvisí so Stokesovou silou (6.28) a druhý s odporovou silou (8.1), ktorá sa využíva aj pri pohybe telies vysokými rýchlosťami.

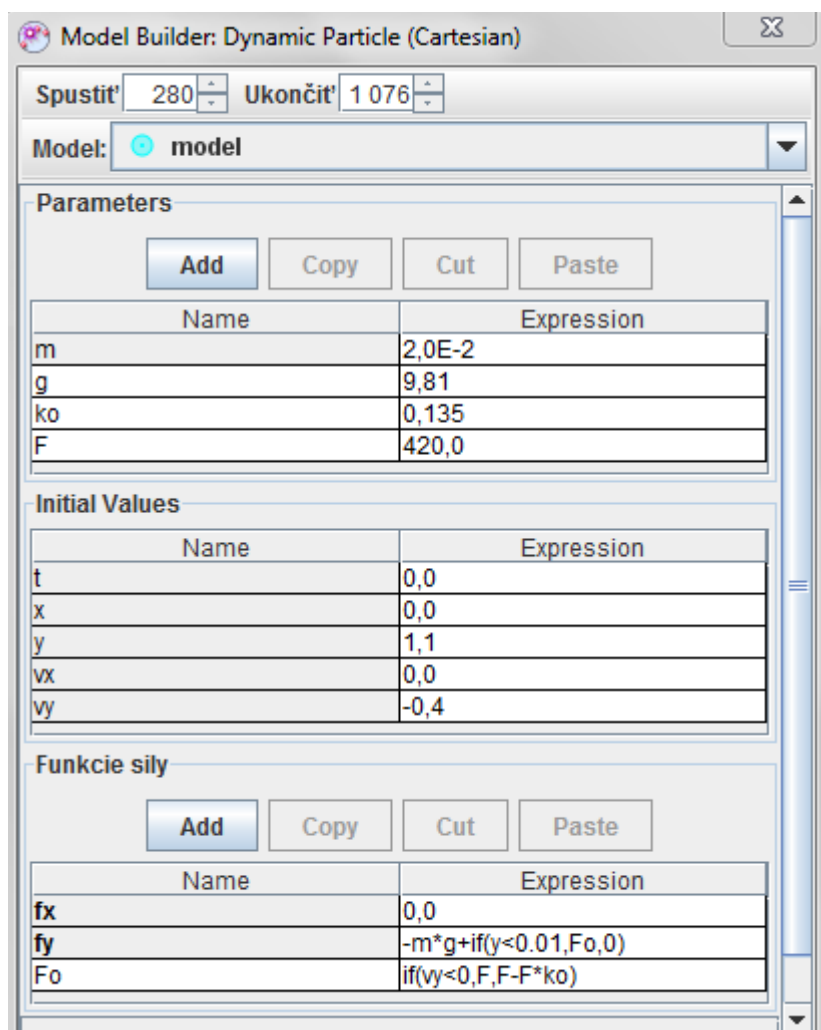
Tak, ako aj v predchádzajúcich prípadoch, je potrebné v dynamickom modeli nadefinovať parametre – hmotnosť guľôčky, tiažové zrýchlenie, polomer/priemer guľôčky, koeficient dynamickej viskozity vzduchu, hustotu vzduchu, koeficient odporu a pod., zadať počiatočné hodnoty polohy a rýchlosti v jednotlivých smeroch (závisia na počiatočnej voľbe vzťažnej sústavy) a nakoniec vzťahy pre pôsobiace sily v jednotlivých smeroch.



Obr. 8.4 Analýza a modelovanie pohybu pre voľný pád dvoch guľôčok



Obr. 8.5 Analýza a modelovanie pohybu odrážajúcej sa guľôčky

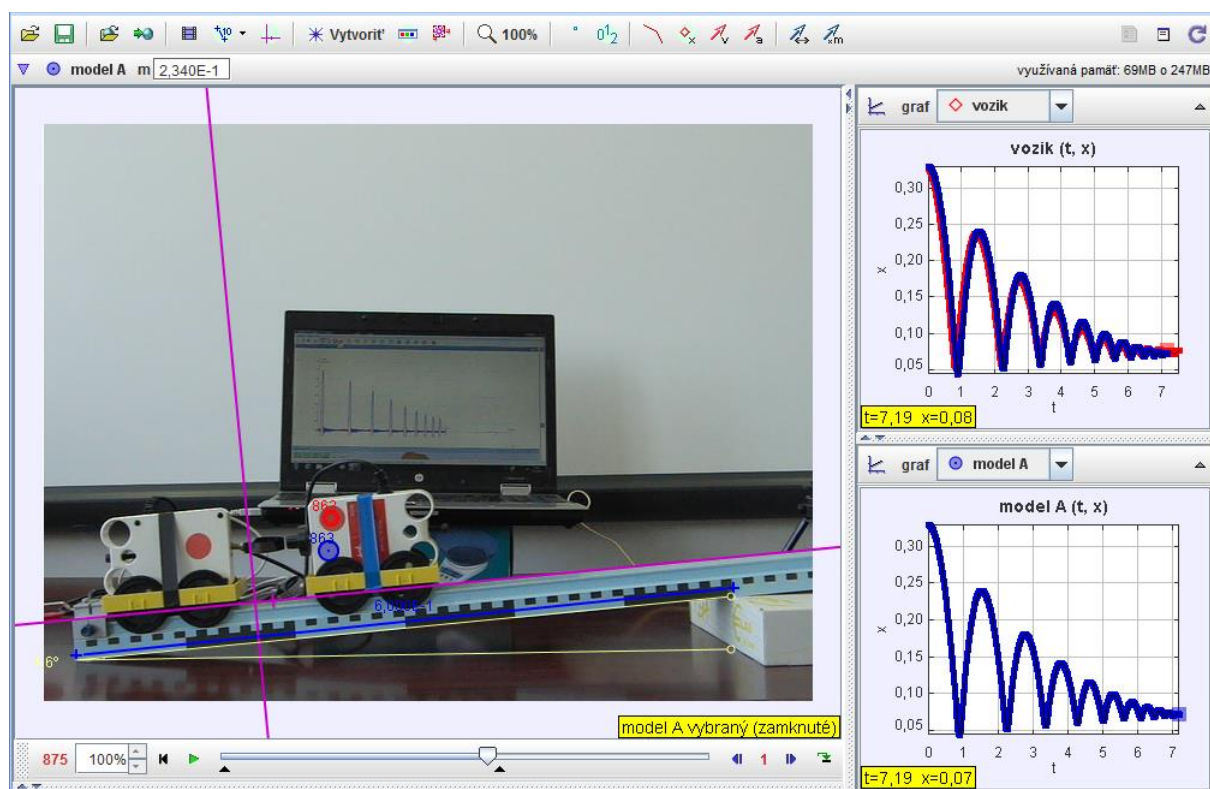


Obr. 8.6 Dynamický model pre odrážajúcu sa guľôčku

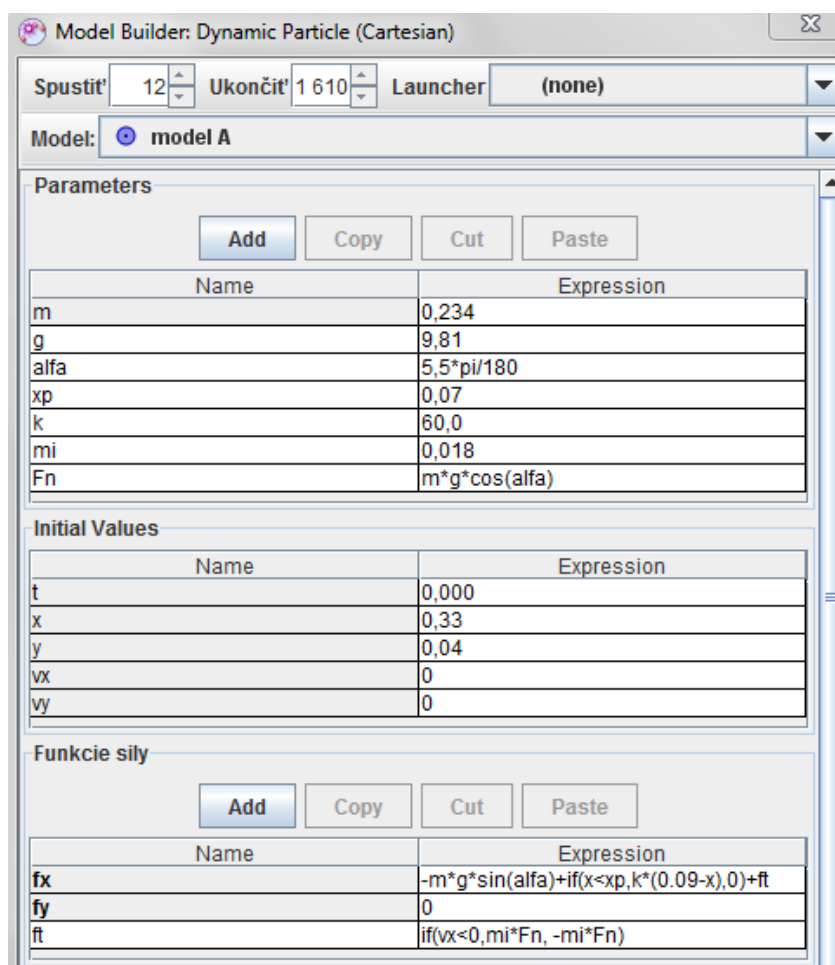
Na Obr. 8.5 a Obr. 8.6 je znázornené modelovanie a popis samotného modelu charakterizujúceho odrazy guľôčky. Na to, aby sme vytvorili model, ktorý v dostatočnej miere bude popisovať skutočný priebeh deja, je potrebné správne analyzovať dej – o aký pohyb sa jedná a zakomponovať podmienku (if) ktorá hovorí, že pri istej fyzikálnej veličine nastane zmena – konkrétne v tomto prípade (závisí na voľbe súradnicovej sústavy) – ak loptička dosiahne výchylku menšiu ako $0,01\text{ m}$, nech pôsobí navyše na loptičku v opačnom smere sila F_o , inak nulová sila. Keďže sa pri odrazoch loptičky časť energie nevratne premieňa na iné formy energie, je aj to potrebné zakomponovať do charakteristiky sily F_o , ktorá sa po každom odraze zmenší. Pokiaľ je rýchlosť loptičky záporná (loptička padá), nech má sila F_o počiatočnú hodnotu F (vieme určiť zo zmeny hybnosti v čase), no pri odraze nech sa táto sila zmení o istú hodnotu súvisiacu so stratami energie a tlmením (koeficient ko).

Na nasledujúcich Obr. 8.7 a Obr. 8.8 je znázornená analýza a modelovanie pohybu vozíka po naklonenej rovine po niekoľkonásobných odrazoch. Porovnanie pohybu vozíka – reálneho deja (červená farba) a modelovaného deja (modrá farba) naznačuje, do akej miery sa podarilo stotožniť namodelovaný dej s reálnym dejom. V tomto prípade je do pohybu zakomponovaný aj odpor prostredia pri pohybe vozíka (odporová sila f_i), ktorá sa mení v závislosti na smere pohybu vozíka. Pri náraze vozíka na pružinu pôsobí sila pružnosti, ktorá závisí do veľkosti stlačenia danej pružiny.

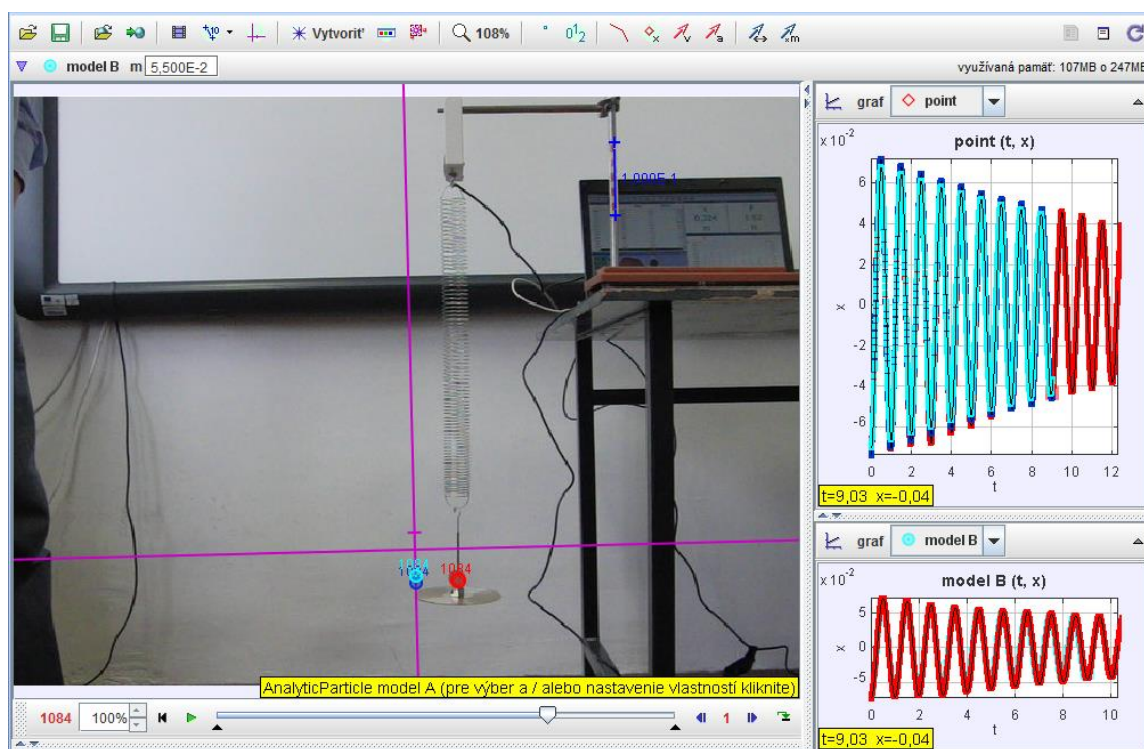
Obr. 8.9 a Obr. 8.10 znázorňujú analýzu a modelovanie tlmeného kmitavého pohybu prostredníctvom analytického a dynamického modelu.



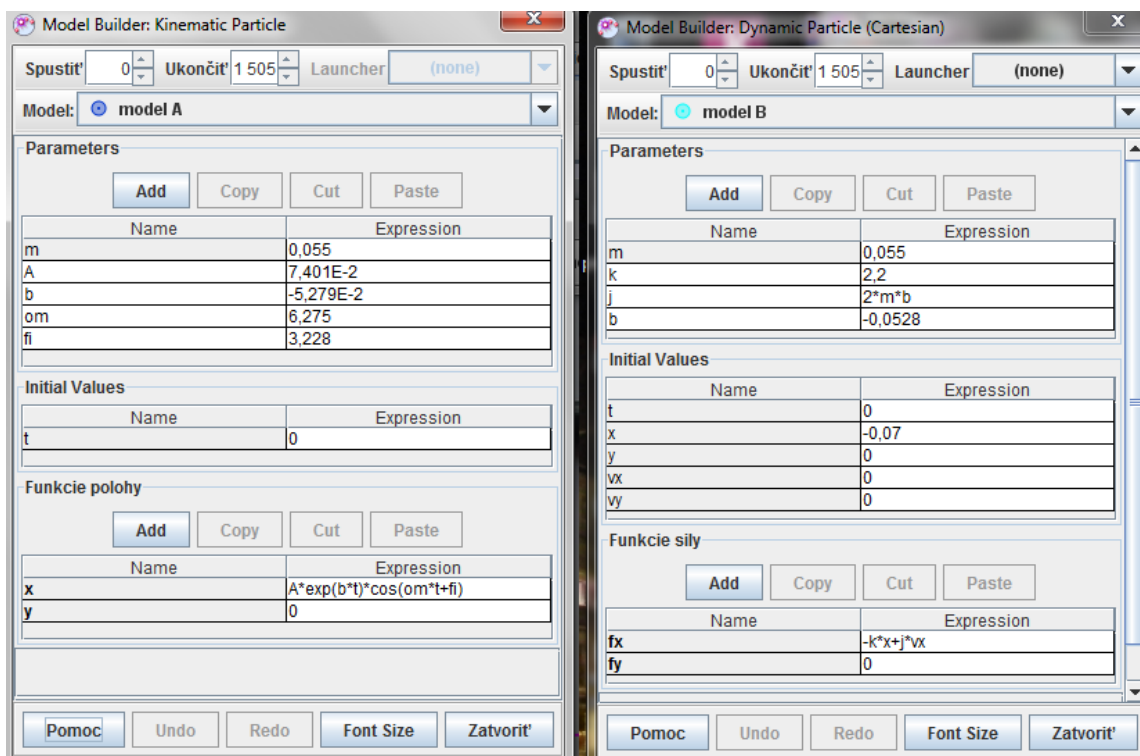
Obr. 8.7 Analýza pohybu a odrazov vozíka



Obr. 8.8 Dynamický model pohybu a odrazov vozíka



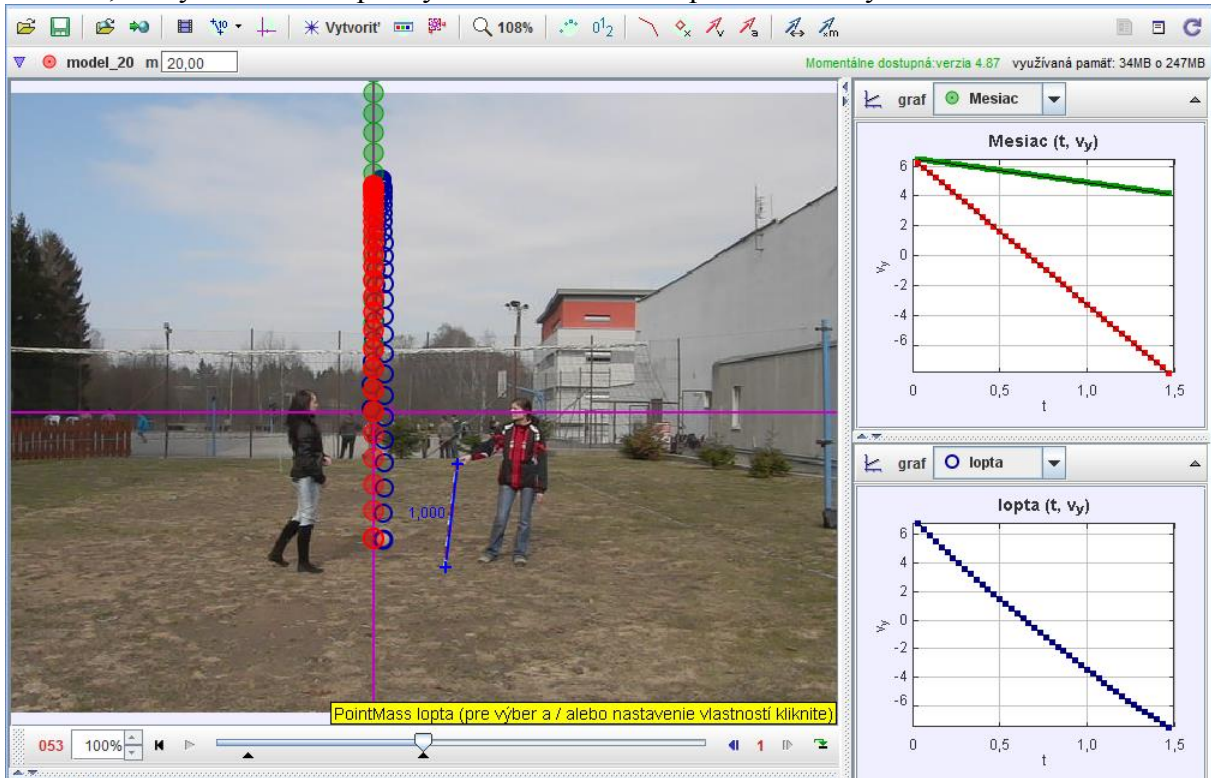
Obr. 8.9 Analýza tlmeného kmitavého pohybu



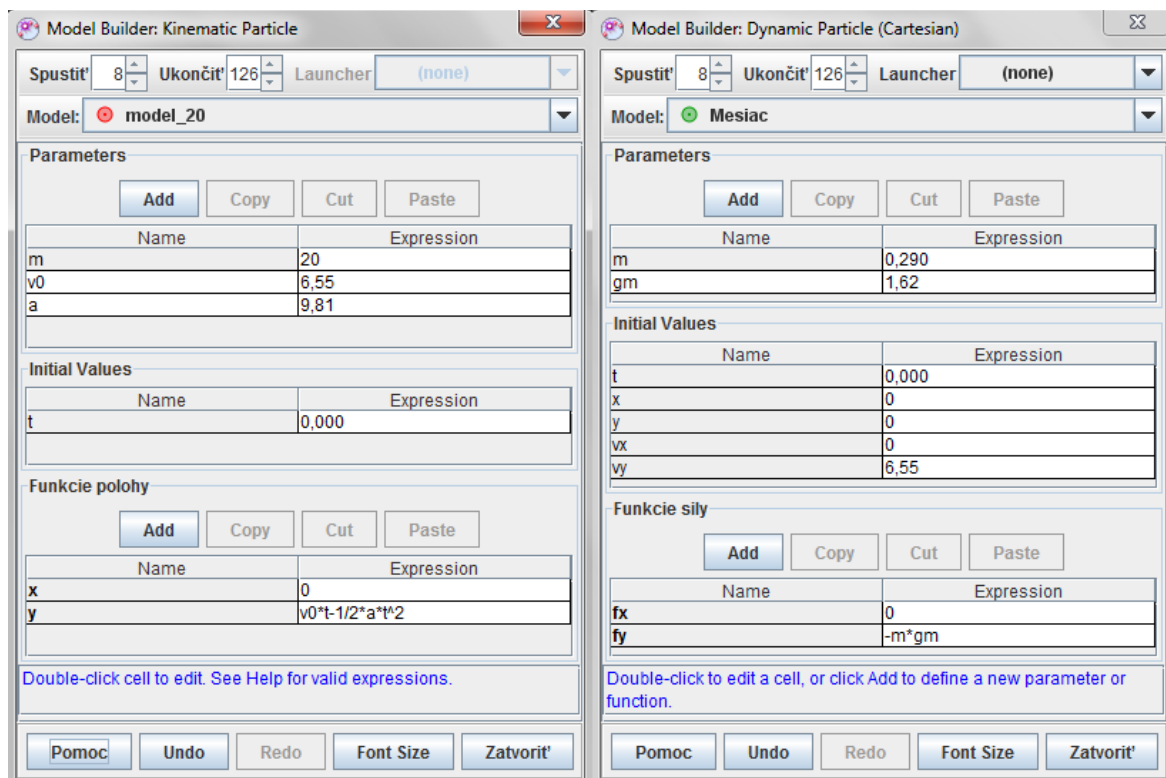
Obr. 8.10 Analytický a dynamický model tlmeného kmitavého pohybu

Vizuálne porovnanie modelu s reálnym dejom nám ukáže, do akej miery sme sa dokázali priblížiť skutočnosti. Je však treba pamätať aj na to, že matematickými vzťahmi dokážeme popísať čokoľvek, čo však nemusí mať správnu fyzikálnu interpretáciu. Preto je potrebné naučiť sa správne charakterizovať elementárne fyzikálne deje a vedieť ich aj exaktne matematicky popísať.

Ďalšou z užitočných vlastností programu Tracker je za pomoci zmeny parametrov vystupujúcich v modeli skúmanie vlastností sústavy, t.j. čo by sa zmenilo, keby sa zmenili parametre systému. Napríklad pri zvislom vrhu nahor (Obr. 4.5), zmenilo by sa niečo, keby vzduchom letela lopta hmotnosti nie 290 gramov ale 20 kilogramov? Prípadne, čo by sa zmenilo, ak by sme danú loptu vyhadzovali tou istou počiatočnou rýchlosťou na Mesiaci?



Obr. 8.11 Analýza a modelovanie zvislého vrhu nahor



Obr. 8.12 Analytický a dynamický model pre vrh 20 kg lopty na Zemi a 290g na Mesiaci

Nasledujúci obrázok (Obr. 8.11) znázorňuje analýzu pohybu vyhodenej lopty (modrá guľa) a porovnanie so situáciou, keby rovnakou počiatkovou rýchlosťou letela 20 kilogramová guľa na Zemi (červená guľa) a rovnako ťažká guľa na Mesiaci (zelená guľa). Ako si možno z časových závislosti rýchlosti vo zvislom smere všimnúť, hmotnosť lopty neovplyvní jej pohyb na Zemi pri rovnakej počiatkovej rýchlosti. Ak by sme však loptu rovnakou počiatkovou rýchlosťou vyhodili na Mesiaci, jej pohyb by bol odlišný v porovnaní s pohybom na Zemi – kým v čase 1,5 sekundy je už lopta pri povrchu Zeme, na Mesiaci by pokračovala v rovnomernej spomalenom pohybe smerom nahor (v čase 1,5s by mala rýchlosť 4 m/s).

Obdobnú analýzu možno použiť aj pri analýze brzdných dráh automobilov.

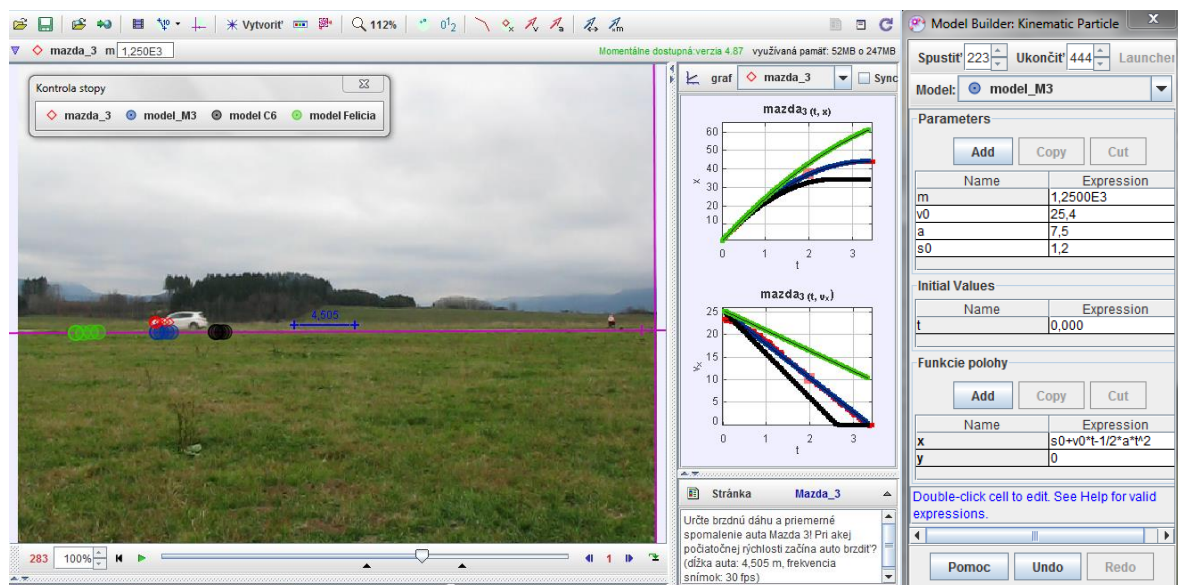
Úloha 8.1:

Na akej dráhe a za aký čas zabrzdí automobil (Mazda 3, Citroen C6, Škoda Felicia) pri počiatkovej rýchlosti 91 km/h, ak vodič brzdí maximálnym zošliapnutím brzdového pedálu a to tak, aby auto nešlo do šmyku?

(frekvencia snímkov = 30 fps)

zdroj: [Citroen.wmv](#), [Mazda3.wmv](#), [felicia mokro.avi](#)

Riešenie:



Obr. 8.13 Analýza brzdných dráh: Mazda3 a porovnanie s modelom Citroen C6 a Škoda Felicia

Ako si možno z Obr. 8.13 všimnúť, model pre Mazdu 3 (modrá farba) odpovedá hmotnému bodu, ktorý zastupuje vyšetované auto (červená farba). Ak však využijeme brzdné spomalenia, ktoré boli získané videoanalýzou ďalších automobilov (pre C6 bolo maximálne spomalenie $a = 9,7 \text{ m/s}^2$ a pre Feliciu $a = 4,5 \text{ m/s}^2$) zistíme, že kým C6 už je v pokoji (čierna farba), Mazda3 má rýchlosť okolo 5 m/s a Felicia (zelená farba) viac ako 13 m/s . Kým C6 zastaví za čas $2,67\text{s}$, Mazde 3 to bude trvať $3,33\text{s}$ a Škoda Felicia zastaví po takmer $5,8\text{s}$. (Určenie brzdných dráh ponechávame na samotnom čitateľovi.) (Je potrebné ešte pripomenúť, že dané parametre ovplyvňuje povrch vozovky a samotné pneumatiky áut, predchádzajúca analýza bola prevedená pri brzdení na suchej vozovke, pri brzdení na mokrej a zasneženej vozovke ako aj pri brzdení šmykom (autá bez ABS) sa časy brzdenia a súčasne aj brzdné dráhy áut predlžujú.)

9. Programátorské prostredie

V súčasnosti v čase mohutného rozvoja informatiky a informačných technológií je veľa programovacích jazykov a je na danom užívateľovi alebo komunite kam patrí, pre ktorý sa rozhodne. Od svojich začiatkov programovacie jazyky prešli dlhú cestu od DOSovských okien až po moderné operačné systémy prispôsobené dnešným grafickým nárokom. My v tejto knihe numerické simulácie budeme robiť v jazyku Pascal, ktorý sa používa prostredím Delphi a Lazarus.

Táto kapitola nie je o tom, ako sa naučiť programovať v Pascale, ale ako používať dané vývojové prostredie. Budeme predpokladať, že už máte základy programovania a ovládate základy daného vývojového prostredia. Ak však chce čítajúci naplno využiť to, čo mu táto kapitola ponúka, mal by mať aspoň aký taký prehľad o tom, čo je to integer a čo boolean. Tí, čo pochopili, zrejme sú za vodou a môžu sa pokojne pustiť do čítania, ostatní sa môžu do čítania pustiť tiež, ale aspoň základy programovania v jazyku Pascal by mali mať, inak im napríklad uvedené príkazy veľa hovoriť nebudú, to však neznamená, že by túto príručku nemali čítať, práve naopak. Existuje viacero príručiek, kde si osvojíte základy: Pascal (Canneyt, 2011), Delphi 7 (Blaho, 2012) a Lazarus (Kabátová, 2009; Blaho, 2012) a pravdaže množstvo iných zdrojov. To, čo treba spraviť, kde kliknúť, čo napísať a nastaviť, budeme vysvetľovať v rámci jednotlivých krokov.

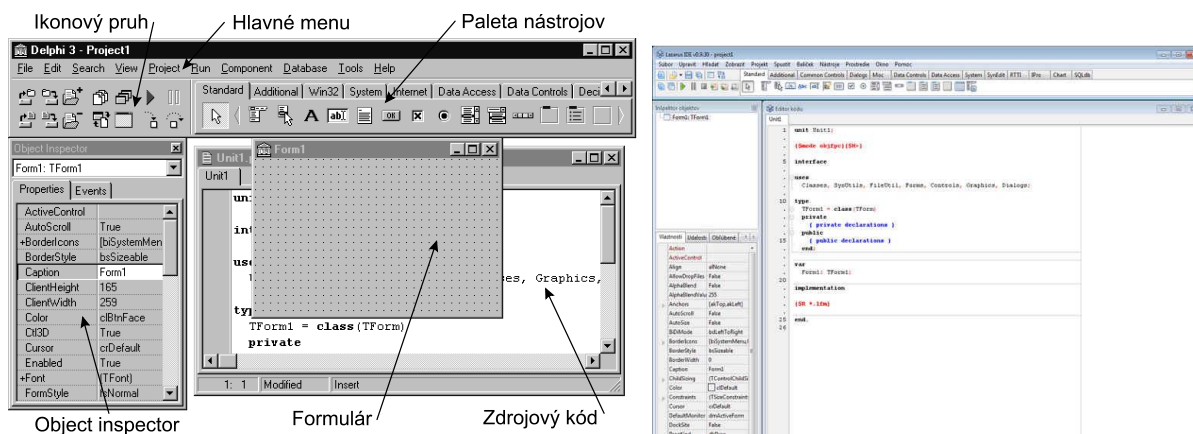
Celá naša snaha o numerické simulácie pohybov predpokladá, že výsledky budeme znázorňovať pomocou grafov. Grafické znázornenie je pre porovnávanie pohybov v určitých rysoch omnoho výhodnejšie ako len numerický výpis čísiel. V našom prípade sa budeme učiť aplikovať numerické modely na reálne prípady pohybov, teda v grafickom znázornení budeme okamžite vidieť, či náš model dáva reálne alebo nezmyselné výsledky.

9.1 Zoznámenie sa s prostredím

Delphi a Lazarus je typickým príkladom vizuálneho programovacieho jazyka. Pri ich spustení sa na obrazovke monitora objaví programovacie prostredie skladajúce sa z viacerých okien ako vidíme napr. na Obr. 9.1. Najčastejšie sa používajú nasledovné časti:

- **hlavné menu (main menu)** - umožňuje nahrať projekt na disk, skompilovať, spustiť, nastaviť parametre okien a mnoho iných užitočných operácií,
- **ikonový pruh (speedbar)** - obsahuje sadu tlačidiel užitočných pri manipulácii s projektom.
- **formulár (form)** – do tohto okna (window) umiestňujeme potrebné prvky z palety nástrojov a výsledný celok je vizuálnym rozhraním medzi aplikáciou a užívateľom. V rámci jedného programu, aplikácie sa dá používať aj viacero formulárov.
- **paleta nástrojov (palette)** – tu sú umiestnené nástroje (hovoríme im aj objekty či komponenty), ktoré pridávame do projektu, teda na formulár. Je to veľa nástrojov rozmiestnených do viacerých záložiek. Ich použitie v programe je veľmi jednoduché. Klikneme na daný nástroj, potom jednoducho klikneme na formulár, kde ho chceme mať umiestnený a potiahneme myšou do požadovanej veľkosti.
- **inšpektor (object inspector)** – v tejto časti sa dajú meniť všetky vlastnosti (properties) a udalosti (events) aktuálneho objektu vybraného na formulári. V prípade, že toto okno nevidíte, stačí stlačiť *F11*.




- **zdrojový kód (source)** - program v jazyku *object pascal*, ktorý riadi činnosť výslednej aplikácie. Ak má aplikácia viac okien, či podprogramov, prepína sa medzi nimi pomocou záložkovej lišty v hornom riadku. Zdrojový kód je uložený v *unitoch*, pričom každému bežnému *formuláru* zodpovedá jeden *unit*. Medzi zobrazením zdrojového kódu a formulára sa prepnete klávesom *F12*.



Obr. 9.1 Prostredie DELPHI a Lazarus.

9.2 Menu Delphi

Po základnom oboznámení sa s programovacím prostredím si teraz ukážeme postup od otvorenia nového projektu (programu), jeho uloženie a následné spustenie nášho prvého programu. Nebudeme tu vysvetľovať všetky jednotlivé položky Hlavného menu alebo Ikonového pruhu, to sa dá nájsť v rôznych literatúrach (Kabátová, 2009; Blaho, 2012). Tie najhlavnejšie, ktoré budeme potrebovať sú:

- **File - New Application** - nový projekt vytvoríte najrýchlejšie voľbou z menu.
- **File - Open** - pri otváraní existujúceho projektu, použijete tlačidlo  alebo ponuku. K naposledy používaným súborom sa dostanete cez **File - Reopen**.
- **File - Save Project As...** - Prácu je dobré uložiť si na disk. Robí sa tak ikonou , prípadne cez menu. Keďže vytváraná aplikácia alebo *projekt (project)* pozostáva z niekoľkých (až mnohých) súborov, je výhodné ukladať projekt do nového adresára (zložky). Je dôležité si uvedomiť, že výsledný „exe“ program bude mať názov projektu. Unit je len súbor, kde je uložený zdrojový kód programu.
- **Project - Compile (Ctrl+F9)** - prostredníctvom tejto voľby vykonávame kompiláciu programu.
- **Run - Run (F9)** - umožní spustiť projekt, dá sa to aj ikonou  z ikonového pruhu. Prostredníctvom menu *Run* môžete tiež program „krokovat“, či ladiť, vrátane možnosti sledovania premenných.

9.3 Tlačidlo - Button

Aplikácie pre Windows sa skladajú z dvoch častí:

- používateľské rozhranie (okná, dialógy, tlačidlá ...)
- programový kód.

Používateľské rozhranie, teda vizuálna časť je výtvorom, ktorý má slúžiť na pohodlný vstup a výstup údajov. Na to má Delphi a Lazarus pripravené obrovské množstvo komponentov v palete nástrojov. Ako teda taký vizuálny návrh aplikácie vlastne vyzerá?

Pri spustení Delphi, Lazarusu sa automaticky vytvorí nová aplikácia s pripraveným oknom formulára *Form1* (túto operáciu môžete zrealizovať aj voľbou *File - New Application* z hlavného menu). Je vhodné si hneď uložiť daný projekt s názvom: *Tlacidlo* do nového adresára: *Pokus1*. Vytvorený je tiež automaticky súbor *unit1.pas*, v ktorom je nasledovný programový kód:

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs;

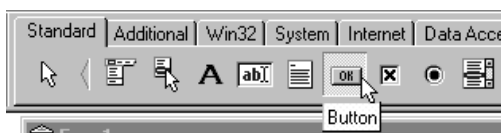
type
  TForm1 = class(TForm)
  Private { Private declarations }
  public { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;

implementation

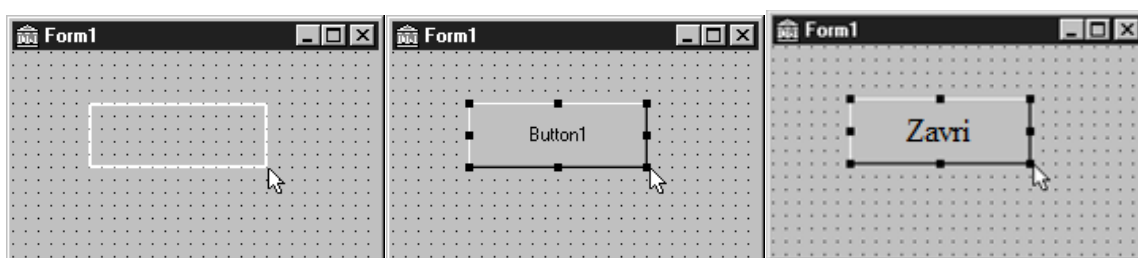
{$R *.dfm}
end.
```

Prázdna aplikácia je okamžite po svojom vytvorení funkčná. Bez akéhokoľvek zásahu do programového kódu získate po skompilovaní pomocou *Run / F9* funkčný program. Výsledné okno má všetky štandardné vlastnosti (minimalizácia, maximalizácia, zatvorenie, zmena veľkosti, posúvanie,...).



Obr. 9.2 Výber tlačidla z palety nástrojov

Vkladať komponenty do pripraveného formulára je jednoduchou záležitosťou: kliknete myšou na príslušný objekt z palety nástrojov (Obr. 9.2) a následne na formulári (Obr. 9.3a) „natiahneme“ rámik, kde sa po pustení myši komponent objaví (Obr. 9.3b). Text napísaný na *Button1* sa dá zmeniť veľmi jednoducho. Keď už máme označený objekt vo *Form1* tak sa automaticky v *Object Inspector* ukážu jeho vlastnosti. Stačí si len vybrať záložku *Properties – Caption* a dať nový názov: *Zavri* (Obr. 9.3c). Taktiež možno nastaviť typ štýlu, veľkosť atď.



Obr. 9.3 Naznačenie rámika a vytvorenie komponentu po uvoľnení myši

Na začiatku pre vás nemusí byť zo symbolu nástroja v palete úplne zrejmé, o aký komponent v skutočnosti ide, preto ak nad ktoroukoľvek ikonou podržíte niekoľko sekúnd myš, objaví sa stručný popis - *hint*. To platí pre všetky dôležité ovládacie prvky - a nielen v Delphi. V rámci procedúr sa dá tiež prepísať názov `Button1` nasledovne:

```
Button1.Caption := 'Zavri';
```

Zmenu všetkých vlastností daného komponentu je možné zmeniť podobne.

Ak dvakrát klikneme na komponent `Button1` automaticky sa v časti `Unit1` vygeneruje nasledovná časť programového kódu:


```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
end;
```

Daná procedúra má síce komplikovaný názov, ale presne pomocou neho ju dokážeme identifikovať a nájsť jej vlastnosti v záplave údajov. `Form1` znamená, že je umiestnená v danom formulári, `Button1` predstavuje názov vloženého komponentu a tiež pod akým názvom hľadať jeho vlastnosti v *Object inspektor*. `Click` predstavuje aká akcia, event, má nastať po kliknutí na daný komponent v spustenej aplikácii.


Ak napríklad napíšeme do procedúry príkaz: `Close()`; tak po kliknutí na `Zavri` sa aplikácia (program) automaticky zavrie.

9.4 Vybrané komponenty

V tejto časti si vysvetlíme použitie niektorých komponentov v rámci jednej aplikácie. Zameriame sa hlavne na tie, ktoré budeme používať v ďalších kapitolách. Tlačidlo `Button1` sme sa už naučili používať v predošlom odseku.


Ďalší dôležitý komponent je *Edit (Standard)*, ikona . Po použití vo `Form1` nám vytvára dialógový riadok, kde môžeme vkladať text alebo číslo. Ak sme vložili číslo, najprv musíme načítať dané textové pole a až potom ho konvertovať na predpokladané číslo podľa nasledovných príkazov

```
s = Edit1.Text;      {s:string;    načítanie reťazca, textu}
j = StrToInt(s);    {j:integer;   prevod na celé číslo}
k = StrToFloat(s);  {k:real;     prevod na reálne číslo}
```

Keď potrebujeme niečo oznámiť v rámci programu (načítanie, vypočítaný výsledok, ...), najjednoduchšie je použiť komponent *Memo (Standard)*, ikona . Použitie je nasledovné:


```
Memo1.Lines.Add(s+' Saturn '+IntToStr(j));
```

V rámci príkladu je naznačené ako vypísať textový reťazec v *s* alebo daný text „ Saturn “. Ak chceme vypísať celé číslo - integer, je ho nutné opäť skonvertovať na *string*. Jedna z nevýhod *Memo* je, že vždy sa dá vypísať len celý riadok ukončený Enterom.

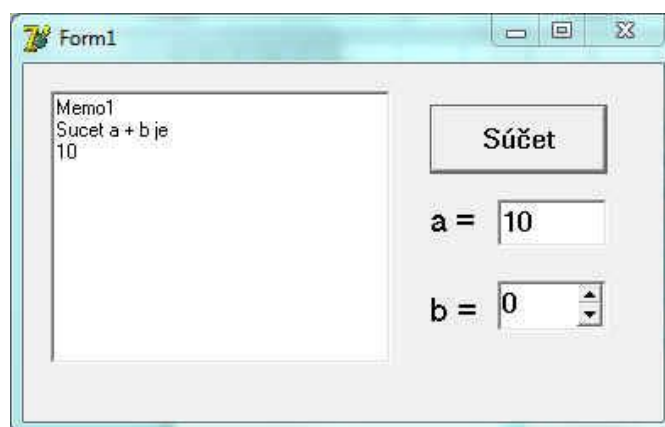
Ďalšou možnosťou je vložiť číslo do programu pomocou komponentu *SpinEdit* (*Samples*), ikona . Načítanie sa vykonáva príkazom:

```
i := SpinEdit1.Value;           { i: integer; }
```


V rámci výberu je možné nastaviť minimálnu i maximálnu hodnotu.

Úloha 9.1:

Pripravte jednoduchý program, ktorý urobí súčet čísel zadaných cez *Edit* a *SpinEdit*. Výsledok súčtu zapíše do *Memo1*. Pracovné okno pripravte podľa Obr. 9.4.



Obr. 9.4 Predloha programu pre súčet dvoch čísel.

Dôležitý komponent na otvorenie textového súboru je *OpenDialog* (*Dialogs*), ikona . Do *Form1* si teda vložíme *OpenDialog* a ďalší *Button2*, kde po jeho dvojkliku do tela procedúry napíšeme

```
openDialog.Filter := 'Text files only|*.txt';
If OpenDialog1.Execute then
    Edit1.Text := OpenDialog1.FileName;
```

Pre výber súboru v programe sa otvára klasické Windows okno, kde vyberáme hľadaný textový súbor a stlačíme OK. V rámci výberu možno zadefinovať len vyhľadávanie súborov s koncovkou *txt*. Po vybrání súboru sa vypíše celá cesta k danému súboru do dialógového riadku *Edit1*.

Niekedy kvôli prehľadnosti, „kráse“ programu si niektoré údaje môžeme vložiť do nového *Form1*, odkiaľ sa dajú tiež bez problémov načítať. Najprv si musíme vytvoriť nový *Form1*: **File – New – Form**. Automaticky sa tiež vygeneruje aj súbor *Unit2*. Aby bolo možné načítať dáta z nového *Form2*, treba dopísať do *Unit1* hneď za implementation

```
uses Unit2;
```

V ďalšom kroku si do *Form1* umiestnime ďalší *Button3*, kde do tela procedúry napíšeme

```
Form2.Show;
```

Keď potom v spustenej aplikácii klikneme na *Button3*, otvorí sa nové okno *Form2*. Tu môžu byť potrebné parametre pre chod programu. V rámci programovania nesmieme potom pre načítanie údajov zabudnúť na dopísanie *Form2* pred požadovanú veličinu, napr. $i := Form2.SpinEdit1.Value$.

9.5 Knižnica Canvas

V jazyku Pascal, prostredí Delphi alebo Lazarus je naprogramovanie grafického výstupu pomerne jednoduché. Je tu veľa príkazov na definovanie čiary, tvaru a iných vlastností objektov. Na kreslenie sa používa plocha odpovedajúci komponent **Image (Additional)**, ikona



Na kreslenie sa používa knižnica **TCanvas** (unit graphics) - v slovenčine by sme mu asi hovorili „malierske plátno“. Daná knižnica sa automaticky priradzuje do programu, v *Unit1* je v *uses Graphics*. Obsahuje veľké množstvo príkazov s doplnkami, z ktorých si popíšeme len niektoré.

V tejto časti si preberieme len niektoré z najpoužívanejších procedúr:

- **procedure** MoveTo(X, Y: Integer); - presunie grafický kurzor do bodu [X,Y],
- **procedure** LineTo(X, Y: Integer); - nakreslí čiaru z aktuálnej pozície do bodu [X,Y],
- **procedure** Rectangle(X1, Y1, X2, Y2: Integer); - nakreslí obdĺžnik s okrajovými bodmi [X1,Y1], [X2,Y2],
- **procedure** TextOut(X, Y: Integer; const Text: string); - umožňuje výpis textu nastaveným fontom od súradnice [X,Y],
- **procedure** Ellipse(X1, Y1, X2, Y2: Integer); - vykreslí elipsu do plochy ohraničenej ľavým horným [X1,Y1] a pravým dolným rohom [X2,Y2].

Množstvo ďalších procedúr a funkcií pre prácu s plátnom (aj s konkrétnymi príkladmi) nájdete v Help.

TPen (unit Graphics) - určuje vlastnosti pera, ktorým sa práve maľuje na plátno. Najdôležitejšie z jeho vlastností sú:

- **Color**: TColor; - farba pera (teda aj grafických útvarov): clRed, clBlue, clYellow, clGray, clAqua, clWhite (prednastavená je farba clBlack),
- **Mode**: TPenMode; - kresliaci mód,
- **Width**: Integer; - hrúbka čiary v pixeloch: hodnota je vždy celé číslo, čím je väčšie, tým je čiara hrubšia,
- **Style**: TPenStyle; - typ "vzhľad" čiary (či je čiarkovaná, bodkovaná, neprerušená a podobne), hodnoty: psSolid, psDash, psDot, psDashDot, psDashDotDot, psClear, psSolid (default).

Sú aj ďalšie unity:

- **Brush.Color**: TColor; - clRed, clBlue, clGreen, clYellow, clGray, clAqua, clWhite,
- **Brush.Style**: TBrushStyle ;nastavenie „štetca“ na výplň plôch - jeho vzor, farba...

bsSolid, bsClear, bsHorizontal, bsVertical, bsFDiagonal, bsBDiagonal, bsCross, bsDiagCross,

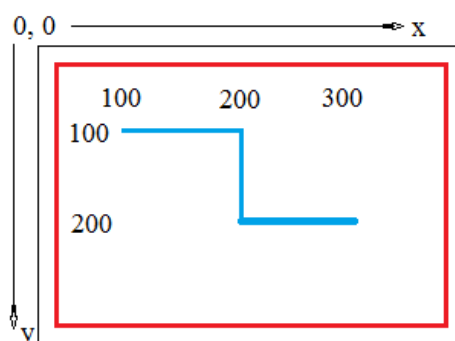
- **Font:** TFont; - keď píšete na plátno, môžete si nastaviť typ, veľkosť a rez písma,
- **PenPos:** TPoint; - aktuálne X-ové a Y-ové súradnice pera.

Najjednoduchšie je maľovanie na samotný formulár. Skúsme teda niečo namaľovať... Najprv si do globálnych premenných zadefinujeme novú premennú

```
G1:TCanvas;
```

kvôli jednoduchšiemu zápisu.

Pri kreslení si treba uvedomiť, kde sa nachádza začiatok súradnicovej sústavy a kam smerujú osi (Obr. 9.5). Počiatok je vľavo hore, os x má smer ako sme naučení (zľava doprava) a os y má opačný smer – zhora nadol. V rámci pochopenia základov si nakreslíme obdĺžnik a pár čiar ako je znázornené na Obr. 9.5.



Obr. 9.5 Grafický systém v Delphi.

Do *Form1* si umiestnime *Image1* aspoň veľkosti 420 x 370, ak bude menší nezobrazí sa celý výsledok maľovania. Program môžeme umiestniť do tela procedúry iného *Button* alebo urobíme dvojklik na prázdnu plochu *Form1* a potom vpisujeme priamo do procedure `TForm1.FormCreate(Sender: TObject)`; čo znamená že pripravený program sa vykoná okamžite po spustení aplikácie. Daný program má tvar:

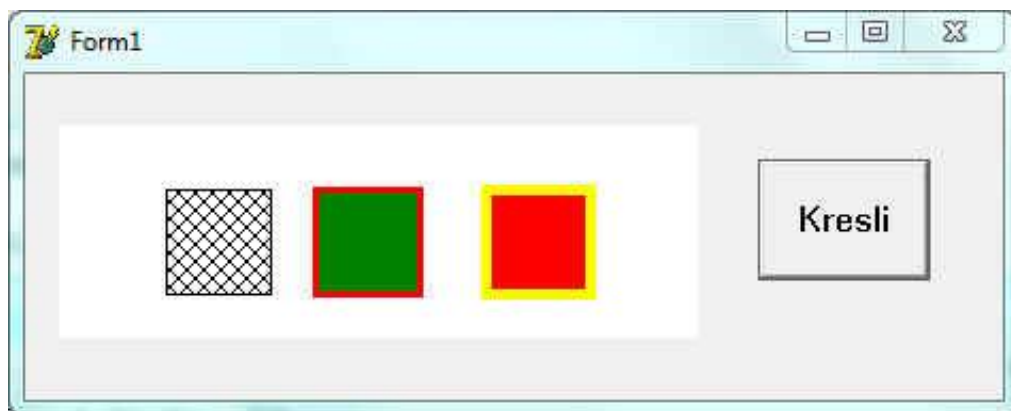
```
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
  G1 := Image1.Canvas;           {definícia pointu}
  G1.Pen.Color := clRed;        {výber červenej farby pre obdĺžnik}
  G1.Pen.Width := 2;           { hrúbka čiary 2}
  G1.Rectangle(20, 20, 400, 350); {kreslenie obdĺžnika}
  G1.Pen.Color := clBlue;      {výber modrej farby pre čiaru}
  G1.MoveTo(100, 100);         {nastavenie polohy pera}
  G1.LineTo(200, 100);         {kreslenie čiary do daného bodu}
  G1.LineTo(200, 200);         {kreslenie čiary do ďalšieho bodu}
  G1.Pen.Width := 4;           { hrúbka čiary 4}
  G1.LineTo(300, 200);         {kreslenie čiary do nového bodu}
end;
```

V prípade programovacieho prostredia Lazarus je tu jeden malý detail pri kreslení do okna *Image*. Ide o to, že preddefinované je čierne pozadie na plátne. Čierne pozadie sa dá jednoducho zmeniť nakreslením bieleho obdĺžnika vyplňajúceho celé plátno *Image* pomocou príkazu v tvare

```
G1.Rectangle(-1,-1,Image1.Width+1,Image1.Height+1);
```

Úloha 9.2:

Napišme program, ktorý nakreslí vedľa seba štvorce s rôznymi obrysami a výplňami podľa Obr. 9.6.



Obr. 9.6 Predloha na kreslenie štvorcov s rôznymi obrysami a výplňami.

Riešenie.

Na plochu si umiestnite najprv *Image* s veľkosťou (300, 100) a potom *Tlačidlo* - *Button1*. Po dvojkliku na dané *Tlačidlo* do tela procedúry napíšte nasledovné príkazy:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
  G1 := Image1.Canvas;

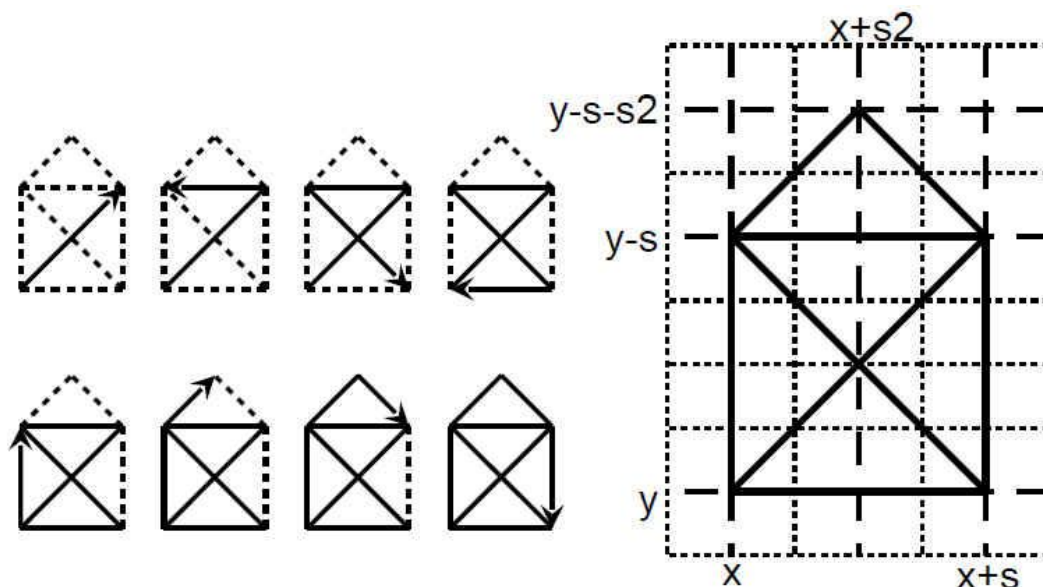
  G1.Brush.Style := bsDiagCross;
  G1.Brush.Color := clBlack;
  G1.Rectangle(50,30,100,80);

  G1.Brush.Style := bsSolid;
  G1.Brush.Color := clGreen;
  G1.Pen.Color := clRed;
  G1.Pen.Width := 3;
  G1.Rectangle(120,30,170,80);

  G1.Brush.Color := clRed;
  G1.Pen.Color := clYellow;
  G1.Pen.Width := 5;
  G1.Rectangle(200,30,250,80);
end;
```

Úloha 9.3:

Nakreslite domček podľa postupu zobrazeného na Obr. 9.7. Začnite v bode $(x, y) = (100, 300)$ pričom $s = 200$. Medzi každým krokom kreslenia počkajte pomocou `Sleep(500)`.



Obr. 9.7 Schéma pre kreslenie domčeka.

9.6 Knižnica Grafy

Keďže ďalej budeme riešiť rôzne fyzikálne aplikácie a ich výsledky zakresľovať do grafu, pripravili sme pre Vás knižnicu **Grafy**. Výhodou tejto knižnice je, že nemusíme robiť komplikované prepočty, a iné výpočty aby sme dosiahli klasický graf na zakreslenie výsledkov. Tvar knižnice je nasledovný:

```
unit Grafy;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,  
Dialogs, ExtCtrls;
```

```
var
```

```
i:integer;
```

```
Deltax, deltay, Krokx, Kroky, XXmin, YYmin:real;
```

```
Procedure Graf(G2:TCanvas;Xmin,Xmax,Ymin,Ymax:real;Nx,Ny:integer);
```

```
Procedure PolozPero(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);
```

```
Procedure Kresli(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);
```

```
Procedure PopisOsi(G2:TCanvas;Osx,Osy:String);
```

implementation

uses unit1; {názov pascalovského súboru, kde chceme používať danú knižnicu}

Procedure Graf(G2:TCanvas;Xmin,Xmax,Ymin,Ymax:real;Nx,Ny:integer);

Var xr:real; {Vykreslenie grafu, keď os x = (Xmin, Xmax) }
 X1:string; {os y = (Ymin, Ymax) a delenie osí je na Nx a Ny dielov }

Begin

XXmin := Xmin;

YYmin := Ymin;

Deltax:= Xmax-Xmin;

Krocx := (Form1.Image1.Width-40)/Nx;

Deltay:= Ymax-Ymin;

Kroky := (Form1.Image1.Height-40)/Ny;

G2.Rectangle(0,0,Form1.Image1.Width,Form1.Image1.Height);

G2.Rectangle(20,20,Form1.Image1.Width-20,Form1.Image1.Height-20);

G2.Pen.Style := psDot;

For i := 1 to Nx-1 do begin

G2.MoveTo(round(20+i*Krocx),20);

G2.LineTo(round(20+i*Krocx),Form1.Image1.Height-20);

end;

For i := 0 to Nx do begin

xr := (Xmin+i*Deltax/Nx);

Str(xr:1:1,X1);

G2.TextOut(round(18+i*Krocx),Form1.Image1.Height-14,X1);

end;

For i := 1 to Ny-1 do begin

G2.MoveTo(20,round(20+i*Kroky));

G2.LineTo(Form1.Image1.Width-20,round(20+i*Kroky));

end;

For i := 0 to Ny do begin

xr := (Ymin+i*Deltay/Ny);

Str(xr:1:1,X1);

G2.TextOut(1,Form1.Image1.Height-round(30+i*Kroky),X1);

end;

G2.Pen.Style := psSolid;

End;

Procedure PolozPero(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);

Begin

Ax := (Form1.Image1.Width-40)*(Ax-XXmin)/Deltax;

Ay := (Form1.Image1.Height-40)*(Ay-YYmin)/Deltay;

G2.MoveTo(20+round(Ax), Form1.Image1.Height-20-round(Ay));

G2.Pen.Width := 5;

G2.LineTo(20+round(Ax), Form1.Image1.Height-20-round(Ay));

```
G2.Pen.Width := 1;
End;

Procedure Kresli(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);
Begin
  Ax := (Form1.Image1.Width-40)*(Ax-XXmin)/Deltax;
  Ay := (Form1.Image1.Height-40)*(Ay-YYmin)/Deltay;
  G2.LineTo(20+round(Ax), Form1.Image1.Height-20-round(Ay));
  G2.Pen.Width := 5;
  G2.LineTo(20+round(Ax), Form1.Image1.Height-20-round(Ay));
  G2.Pen.Width := 1;
End;

Procedure PopisOsi(G2:TCanvas;Osx,Osy:String);
Begin
  G2.TextOut(Form1.Image1.Width-50,Form1.Image1.Height-40,Osx);
  G2.TextOut(30,5,Osy)
End;

end.
```

Ako vidíme knižnica *Grafy* obsahuje 4 procedúry, ktorých význam si teraz vysvetlíme:

- **Graf(G2:TCanvas;Xmin,Xmax,Ymin,Ymax:real;Nx,Ny:integer);**
Najprv nastavíme pointer *G2* na *Image1*, v ktorom chceme kresliť. V tomto prípade nie je podstatné aký veľký je *Image1*, výsledok sa prispôsobuje odpovedajúcim rozmerom. Toto nastavenie platí pre všetky procedúry v danej knižnici. Ďalšie 4 čísla predstavujú minimálnu a maximálnu hodnotu pre os *x* a *y*. Posledné dve čísla predstavujú na koľko dielov sa majú rozdeliť os *x* a *y*, musia to byť celé čísla.
- **PolozPero(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);**
Kde sa položí pero na začiatku kreslenia, v podstate obdoba procedúry *MoveTo*.
- **Kresli(G2:TCanvas;Ax, Ay:real);**
Nakreslí čiaru do definovaného bodu od miesta kde zostalo naposledy položené pero, v podstate obdoba procedúry *LineTo*.
- **PopisOsi(G2:TCanvas;Osx,Osy:String);**
Popíše osi *x* a *y* definovanými reťazcami.

Teraz sme si prebrali základy programovacieho prostredia Delphi a Lazarus plus knižnicu *Grafy*. V nasledujúcich kapitolách sa už teda môžeme konečne pustiť do omnoho zaujímavejších simulácií vo fyzike.

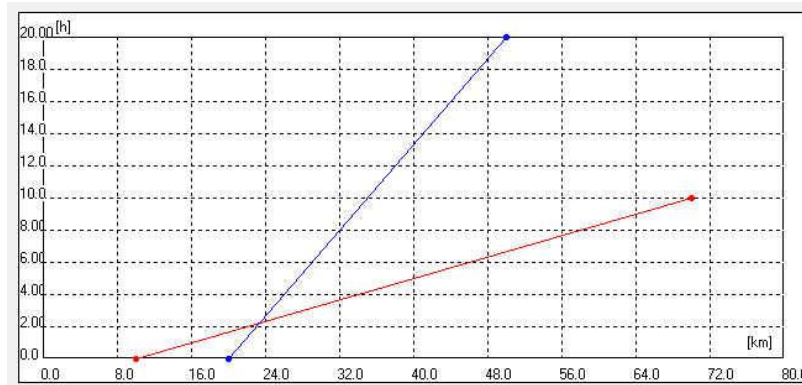
Úloha 9.4:

Napište program, ktorý spraví rovnaký grafický výstup ako je na Obr. 9.8

Riešenie:

Program je veľmi jednoduchý. Ako prvé vložíte komponent *Image1* na plochu *Form1*. Jej rozmer môže byť napr. 400 x 200. Potom urobíte dvojklik na plochu *Form1* a otvorí sa procedúra, do ktorej budete vpisovať odpovedajúci program. Výhodou tejto procedúry je,

že sa automaticky spustí pri spustení programu. Do procedúry sa najprv zadefinuje rozmer grafu s popisom osí. Potom vyberieme farbu pera a umiestnime ho do počiatočného bodu (10,0). Z tohto bodu spravíme priamku do druhého bodu (70,10). Podobný postup je aj pre druhú čiaru.



Obr. 9.8 Grafický výstup použitím knižnice Grafy.

```

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
  Graf(G1,0,80,0,20,10,10);
  PopisOsi(G1,['km'],'[h]');

  G1.Pen.Color := clRed;
  PolozPero(G1,10,0);
  Kresli(G1,70,10);
  G1.Pen.Color := clBlue;
  PolozPero(G1,20,0);
  Kresli(G1,50,20);
end;

```

Úloha 9.5:

Dva automobily, označené "A" a "B", sa vydali na misiu z bodov A a B. Ako prvý automobil "A" vychádza rýchlosťou v_a . S oneskorením t_0 vychádza v opačnom smere automobil "B" rýchlosťou v_b . Obidve autá sa stretávajú niekde medzi bodmi A a B. Pokiaľ je oneskorenie príliš veľké, obchádza auto "A" automobil "B" až v jeho počiatočnej pozícii – v bode "B". Riešte najprv numericky a časový priebeh dráh zakreslite do grafu a určte čas i polohu stretnutia pre $v_a > v_b$.

Úloha 9.6:

Nakreslite priebeh izoterm pre Van der Waalsovú stavovú rovnicu. Riešte pre Kyslík: $a = 0,136 \text{ J m}^3 / \text{mol}^2$ a $b = 31,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{mol}^2$. ($R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$).

$$\left(p + \frac{a}{V}\right)(V - b) = RT$$

Úloha 9.7:

Magnetické pole cievky. Magnetické pole vo vzdialenosti x na osi závitů sa počíta podľa vzťahu

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

kde R je polomer závitů a I je pretekajúci prúd. Majme cievku s N závitmi umiestnenú v rovine yz . Prvý závit nech je umiestnený v polohe $x = 0$ a ďalšie nech sú umiestnené v smere osi x . Vzdialenosti medzi závitmi je d . Zakreslite priebeh magnetického poľa $B(x)$ na osi cievky v jej vnútri a tiež mimo nej: $x \in \langle 0, 2 * N * d + R \rangle$. Riešte pre $R = 1 \text{ cm}$, $I = 1 \text{ A}$, $N = 10$ (50, 100) a $d = 1$ (0.1, 10) mm.

Úloha 9.8:

Zdvíhanie ponoreného stĺpu. Na dne bazénu naplneného vodou leží betónový stĺp. Na jednom konci ho zavesíme na lano a zdvíhame dotedy kým sa celý nevynorí nad hladinu. Počas zdvíhania sa mení sila, ktorou pôsobí stĺp na lano. Zakreslite závislosť tejto sily na výške hornej podstavy stĺpu nad dnom a súčasne prácu vonkajších síl. Predpokladajme, že hĺbka vody h v bazéne je menšia ako dĺžka stĺpu l .

Postup dvíhania sa dá rozdeliť do nasledovných krokov:

1. Celý stĺp je zatiaľ pod vodou, $x \leq h$. Pre silu platí: $F = \frac{1}{2}(G - F_v)$
2. Časť stĺpu je vynorená, stĺp zaujíma vo vode šikmú polohu, $h < x < l$. Veľkosť sily

$$F = \frac{G}{2} - \frac{1}{2} \rho_v g V_{st} \frac{h^2}{x^2}$$
3. Stĺp je už v zvislej polohe no stále ponorený. Veľkosť sily: $F = G - \rho_v g V_{st} \frac{1+h-x}{l}$

10. Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc

Riešenie sústav lineárnych rovníc patrí medzi veľmi dôležité časti numerickej matematiky. Vo fyzike, technických vedách ale aj v mnohých ďalších odboroch je veľa praktických úloh spojených s riešením takýchto sústav, no veľmi často dost' rozsiahlych. K obrovským sústavám rovníc dospejeme napr. pri hľadaní rozloženia danej fyzikálnej veličiny v skúmanom telese. Z teoretického hľadiska je možné sa pri riešení takýchto úloh oprieť o výsledky známe z lineárnej algebry, kde je otázka riešiteľnosti sústav lineárnych rovníc komplexne vyriešená. Pri numerickom prístupe riešení sústav lineárnych rovníc sa však stretávame s novými aspektmi ako je náročnosť výpočtu, podmienenosť úloh alebo vplyv zaokrúhľovacích chýb. Tiež nesmieme zabudnúť na tvar matice a hodnoty jej koeficientov, čo má hlavný vplyv na to, ktorú metódu je vhodné a účelné na riešenie použiť.

V tejto kapitole sa oboznámime s dvoma základnými prístupmi pri riešení sústav lineárnych rovníc. Prvá z nich je založená na tzv. priamych metódach, ktorá po konečnom počte krokov dáva výsledok. Do tejto skupiny metód patrí aj najznámejšia Gaussova eliminačná metóda. Druhou skupinou metód sú metódy iteračné, ktoré dávajú riešenie ako limitu postupnosti vektorov. V rámci textu sa nachádza aj listing procedúr použitých výpočtov a jednotlivých metód.

Na konci tejto kapitoly sú viaceré príklady využitia získaných informácií pri riešení algebrických rovníc.

10.1 Sústava lineárnych rovníc

Uvažujeme sústavu n -lineárnych algebrických rovníc s n -neznámymi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{10.1}$$

pričom čísla a_{ij} pre $i, j = 1, 2, \dots, n$ sa nazývajú koeficientmi, čísla b_i pre $i = 1, 2, \dots, n$ sú absolútnymi členmi sústavy (10.1) a x_1, x_2, \dots, x_n sú neznáme.

Sústavu (10.1) môžeme zapísať pomocou maticového tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}, \tag{10.2}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

sa nazýva maticou sústavy (10.1) a

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

pričom \vec{x} je stĺpcový vektor neznámych a \vec{b} vektor pravých strán.

Pri určitých metódach je výhodné upravovať súčasne i stĺpcový vektor \vec{b} s maticou \mathbf{A} , preto sa zavádza tzv. **rozšírená matica** sústavy (10.1) v tvare

$$\mathbf{A}_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right). \quad (10.5)$$

Riešením sústavy (10.1) sa nazýva každá usporiadaná n -tica reálnych čísel $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$, ktorá spĺňa všetky rovnice danej sústavy. Vyriešiť sústavu znamená nájsť všetky jej riešenia. (Môže mať jedno riešenie, nekonečne veľa riešení, prípadne nemá riešenie). To, či sústava lineárnych rovníc má riešenie, môžeme zistiť pomocou vety:

Frobéniova veta. Sústava lineárnych rovníc (10.1) má riešenie práve vtedy, ak hodnosť matice sústavy (10.1) sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy (10.5), t.j. $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$.

Dôsledok Frobéniovej vety pre nehomogénnu sústavu lineárnych rovníc

Ak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) = n$, kde n je počet neznámych sústavy (10.1) \Rightarrow sústava má jediné riešenie.

Ak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) < n \Rightarrow$ sústava (10.1) má nekonečne veľa riešení.

Ak $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}_r) \Rightarrow$ sústava (10.1) nemá riešenie.

10.2 Základné operácie s maticami

Skôr ako pristúpime k numerickému výpočtu sústav lineárnych rovníc typu (10.1) v jazyku Pascal, uvedieme niekoľko pár definícií a ukážky základných operácií.

V nasledujúcich odstavcoch budeme často pracovať a načítavať rôzne vektory a matice. Kvôli uľahčeniu práce s týmito dátami si dodefinujeme dve nové štruktúry v nasledovnom tvare:

Type Matica = array[1..10,1..11] of real;
 Vektor = array[1..10] of real;

Vkladať údaje z matice do programu postupne je komplikované a bez možnosti opravy. Najjednoduchšie je, keď dáta matice sú uložené v textovom súbore, ktorý na začiatku len jednoducho načítame. Nasledujúca procedúra predstavuje načítanie *rozšírenej matice* (10.5) z textového súboru *matica.txt*, ktorá sa nachádza v rovnakom adresári ako je daná aplikácia, no dá sa jednoduchou úpravou nastaviť i iný súbor (*OpenDialog*). Aby daná procedúra fungovala správne a načítanie prebehlo bez komplikácií, zápis matice v súbore musí mať nasledovný tvar:

1. V prvom riadku je číslo, ktoré predstavuje dimenziu matice.
2. Na druhom riadku sú čísla matice z prvého riadku oddelené medzerami a na konci je ENTER.
3. V ďalších riadkoch sú ďalšie riadky čísla matice tiež oddelené medzerami.

Procedúra *Nacitaj* po načítaní matice zo súboru *subor*, vráti jej dimenziu *dim* a načítanú rozšírenú maticu **AA**.

```
Procedure NacitajMaticu(subor:string; Var dim:integer;Var AA:Matica);
Var i,j: integer;
    t: TextFile;
begin
    AssignFile(t, subor);           {otvorenie súboru}
    Reset(t);
    readln(t,dim);                 {dimenzia matice}
    for i := 1 to dim do
    begin
        for j := 1 to (dim+1) do
            read(t,AA[i,j]);       {A: matica}
            readln(t);             {načítanie konca riadku - ENTER}
        end;
    CloseFile(t);                 {uzavretie súboru}
    end;
```

Ďalšia procedúra vypisuje maticu do okna Memo1. Procedúra sa používa v tvare *WriteMatrix(dim,AA)*, kde *dim* predstavuje dimenziu matice **AA**.

```
Procedure Vypis(dim:integer; AA:matica);
Var i,j:integer;
    Subor,Data:string;
Begin
    Form1.Memo1.Lines.Add('Matica');
    Data := ' ';                   {vynulovanie reťazca}
    for i := 1 to dim do begin
        for j := 1 to dim+1 do begin
            str(AA[i,j]:2:2, Subor); {načítanie j-tého člena matice}
            Insert(Subor+' ',Data,Length(Data)); {pridanie do reťazca}
        end;
        Form1.Memo1.Lines.Add(Data); {vypísanie i-tého riadku matice}
        Data := ' ';
    end;
end;
```

Procedúry pre sčítanie a odčítanie matíc si dokážeme spraviť veľmi jednoducho pomocou $c[i,j] := a[i,j] \pm b[i,j]$. Pri násobení je to už o niečo komplikovanejšie. Procedúra pre násobenie matíc *A* a *B*, pričom výsledok je matica *C*, je nasledovná

```
Procedure MMatrix(dim:integer;A,B:Matica; Var C:Matica);
Var i,j:integer;
begin
    for i := 1 to n do begin
        for j := 1 to n do begin
            s := 0;                 {pomocná premenná}
```

```

    for k := 1 to n do
      s := s + a[i,k]*b[k,j];      {násobenie riadka so stĺpcom}
      c[i,j] := s;
    end;
  end;
end;

```

Pri definícii procedúry *MMatrix(dim:integer;A,B:Matica; Var C:Matica); dim* predstavuje dimenziu násobených matic *A* a *B*. Výsledná matica *C* je definovaná pomocou *Var*, čo znamená, že daná procedúra vracia vypočítanú maticu *C*. Dá sa to spraviť aj bez tejto definície, no to už nie je z hľadiska objektového programovania nevhodné.

10.3 Výpočet hornej trojuholníkovej matice

Najjednoduchším tvarom matice **A** na výpočet vektoru neznámych \vec{x} je horná alebo dolná trojuholníková matica. V prípade takejto matice potom výpočet jednotlivých neznámych počítame postupne buď od dolnej alebo hornej neznámej. Systém s hornou trojuholníkovou maticou vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{nn}x_n &= b_n,
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

Výpočet teda začíname od neznámej $x_n = b_n/a_{nn}$ a potom postupujeme smerom nahor podľa vzťahu

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i}^{j=n} a_{ij}x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1
 \tag{10.7}$$

Procedúra pre tento výpočet má nasledovný tvar

```

Procedure IteraciaUp(dim:integer; AA:Matica; bb:vektor; var xx:Vektor);
Var i,j:integer;
    s:real;
begin
  for i := dim downto 1 do begin      {začínáme od spodného riadku}
    s := 0;
    for j := i+1 to dim do s := s + AA[i,j]*xx[j];  {postupné sčítavanie}
    xx[i] := (bb[i]-s)/AA[i,i];      {vyjadrenie neznámej}
  end;
end;

```

10.4 Riešenie pomocou inverznej matice a Cramerovho pravidla

Ako prvý výpočet sústavy lineárnej rovníc si spomenieme riešenie pomocou inverznej matice. Tomuto typu riešenia sa nebudeme veľmi venovať, lebo procedúra pre výpočet

inverznej matice si vyžaduje vyššie programátorské schopnosti. Uvádzame ju len kvôli prehľadu.

Majme sústavu n lineárnych rovníc s n neznámymi zapísanú v maticovom tvare $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (10.2), kde \mathbf{A} je regulárna matica. Potom k \mathbf{A} existuje inverzná matica \mathbf{A}^{-1} . Riešenie sa počíta v maticovom tvare, pričom rovnosť (10.2) vynásobíme zľava \mathbf{A}^{-1} a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1} \vec{b}, \text{ odkiaľ} \\ \mathbf{E} \cdot \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}, \text{ kde } \mathbf{E} \text{ je jednotková matica a teda} \\ \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Riešenie sústavy lineárnych rovníc (10.1) s regulárnou maticou \mathbf{A} sa vypočíta podľa vzťahu (10.8). V programe Matlab, ktorý využíva maticový zápis, sa tento typ riešenia aplikuje veľmi ľahko zápisom $\vec{x} = \vec{b}/\mathbf{A}$

Z algebry vieme, že ak je matica \mathbf{A} sústavy (10.3) je regulárna, tak táto sústava má práve jedno riešenie a môžeme ho nájsť aj pomocou Cramerovho pravidla

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.9)$$

kde $|A|$ je determinant matice (10.3) a $|A_i|$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice \mathbf{A} nahradením i -tého stĺpca členmi vektore \vec{b} . Výpočet determinantu si tiež vyžaduje určité programátorské schopnosti.

Z numerického hľadiska je však riešenie sústavy (10.1) podľa týchto metód úplne nevhodné. Už pri relatívne malej sústave (o pár desiatkami rovníc) by výpočet trval neúmerne dlho, pretože výpočet determinantu je časovo extrémne náročný. Numerické metódy pre riešenie systémov lineárnych rovníc možno rozdeliť do dvoch skupín, na *metódy priame (konečné)* a *iteračné*.

Priame metódy – metódy, ktoré (v prípade, že výpočty sa prevádzajú presne bez zaokrúhľovania) vedú k získaniu presného riešenia sústavy po konečnom počte aritmetických operácií. No v dôsledku zaokrúhľovaných chýb, ktorým sa pri praktických aplikáciách nevyhneme, získame len aproximáciu presného riešenia. K tejto metóde patrí LU-metóda a Gaussova eliminačná metóda plus jej modifikácie.

Iteračné metódy – sú charakterizované tým, že vychádzajú z určitej počiatočnej aproximácie riešenia, z ktorej vhodným algoritmom vypočítame novú aproximáciu. Túto novú vypočítanú aproximáciu znova použijeme v danom algoritme. Presné riešenie je potom limitou postupnosti týchto aproximácií, za predpokladu, že konverguje. Medzi najpoužívanejšie iteračné metódy patrí: Jacobiho a Gauss-Seidlova metóda.

10.5 LU metóda

V prípade Gaussovej eliminačnej metódy sme pôvodnú sústavu upravovali na trojuholníkový tvar. Takto upravenú sústavu môžeme potom bez problémov vyriešiť. V prípade *metódy LU-rozkladu* postupujeme iným spôsobom. Vytvoríme dve trojuholníkové matice (hornú a dolnú), pričom ich súčin je matica \mathbf{A} . Hľadáme teda matice \mathbf{L} , \mathbf{U} tak aby platilo $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$, kde

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10.10)$$

Základná myšlienka riešenia systému (10.2) metódou LU-rozkladu spočíva v riešení dvoch systémov s trojuholníkovou maticou,

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{U} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \quad (10.11)$$

Najprv riešime systém

$$\mathbf{L} \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{b}} \quad (10.12)$$

s dolnou trojuholníkovou maticou a s pomocným vektorom neznámych $\bar{\mathbf{y}}$. Potom riešime sústavu

$$\mathbf{U} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}} \quad (10.13)$$

s hornou trojuholníkovou maticou. Riešením tejto sústavy získame riešenie pôvodného systému. Táto metóda nachádza uplatnenie hlavne vtedy, keď riešime viac systémov s rovnakou maticou, ale rôznymi pravými stranami.

Systém riešenia touto metódou vyzerá veľmi jednoducho, no najzložitejšou časťou je vytvorenie matic \mathbf{L} a \mathbf{U} . V tejto učebnici si vysvetlíme *Croutov algoritmus LU rozkladu*. Tento algoritmus je v podstate veľmi jednoduchý no prácny na ručné počítanie. Jedná sa o to, že robíme postupne súčin matic \mathbf{L} a \mathbf{U} , čo je vlastne matica \mathbf{A} . Z prvého súčinu dostaneme len člen $u_{11} = a_{11}$. Z druhého súčinu máme rovnicu $l_{21} \cdot u_{11} = a_{21}$, z ktorej dostaneme vyjadrenie pre l_{21} . Takto postupujeme ďalej, kým si vyjadríme všetky prvky hľadaným matic:

$$\begin{aligned} &\text{for } j = 1 \text{ to } n && \{ \text{postupujeme po stĺpcoch} \} \\ &\quad \text{for } i = 1 \text{ to } j && \{ \text{prvky matice } \mathbf{U} - \text{naddiagonálne} \} \\ &\quad \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \\ &\quad \text{for } i = j+1 \text{ to } n && \{ \text{prvky matice } \mathbf{L} - \text{poddiagonálne} \} \\ &\quad \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right) \end{aligned}$$

Výhodou tejto metódy je tiež, že môžeme použiť len jednu maticu, napr. \mathbf{B} , pre vyjadrenie matic \mathbf{L} a \mathbf{U} . Pritom však musíme mať na pamäti, že dolná časť pod diagonálou matice \mathbf{B} je matica \mathbf{L} , ktorá má na diagonále len 1. Zase horná časť nad diagonálou plus diagonálne členy je matica \mathbf{U} . Toto zjednotenie sa používa hlavne vtedy, keď máme veľké matice a chceme ušetriť pamäťové miesta.

Ďalšia výhoda tejto *LU-metódy* je, že súčin diagonálnych členov matice \mathbf{U} dáva hodnotu determinantu matice \mathbf{A} . Determinant matice \mathbf{L} je rovný 1.

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = \prod_{j=1}^n u_{j,j} . \quad (10.14)$$

Procedúra pre výpočet matíc **L**, **U** z matice **A** vyzerá nasledovne:

```

Procedure LUMetoda(dim:integer; AA:matica; Var L,U:Matica);
Var i,j,k:integer;
Begin
  for i := 1 to dim do begin
    for j := 1 to dim do begin
      U[i,j] := 0; L[i,j] := 0;           {vynulovanie matíc L a U}
    end;
  end;
  for j := 1 to dim do begin
    for i := 1 to j do begin
      sum := 0;
      for k := 1 to i-1 do               {výpočet matice U}
        sum := sum+l[i,k]*u[k,j];
      u[i,j] := AA[i,j]-sum;
    end;
    for i := j+1 to dim do begin
      sum := 0;
      for k := 1 to j-1 do               {výpočet matice L}
        sum := sum+l[i,k]*U[k,j];
      L[i,j] := (AA[i,j]-sum)/U[j,j];
    end;
  end;
  for k := 1 to dim do
    L[k,k] := 1;                         {doplnenie 1 na diagonálu matice L }
  End;

```

10.6 Gaussova eliminačná metóda

Táto metóda predstavuje klasickú úpravu rozšírenej matice (10.5) sústavy (10.1) na hornú trojuholníkovú maticu a súčasne patrí k najčastejšie používaným metódam (Klimova, 1985; Pirč, 1993). Jej princíp je založený na ekvivalentných úpravách a odčítania rovníc. Pomocou týchto úprav dostaneme z danej sústavy novú sústavu, ktorá má tú istú množinu riešení.

Ekvivalentné úpravy rovníc sú tieto:

1. výmena poradia rovníc v sústave,
2. vynásobenie niektorej rovnice sústavy nenulovým číslom k ,
3. pripočítanie k -násobku jednej rovnice k inej rovnici sústavy.

V nasledujúcej časti si zopakujeme postup úpravy, aby sme vedeli správne pochopiť procedúru GEM. V prvom kroku pomocou pripočítania vhodných násobkov prvej rovnice sa snažíme z ostatných rovníc eliminovať x_1 . (Ak je $a_{11} = 0$, vymeníme prvú rovnicu s inou rovnicou, ktorá nemá na prvom mieste nulu.) Postupným odpočítavaním prvej rovnice vynásobené číslom a_{i1}/a_{11} od i -tej rovnice, pre $i = 2, 3, \dots, n$, dostaneme

10.7 Eliminácia s výberom hlavného prvku

Eliminácia s výberom hlavného prvku je modifikácia Gaussovej eliminačnej metódy, ktorá napomáha k zmenšeniu zaokrúhľovacích chýb. Ak je absolútna hodnota niektorého z deliteľov $a_{ki}^{(i-1)}$ menšia v porovnaní s absolútnou hodnotou prvkov $a_{ki}^{(i-1)}$, $k > i$; hrozí nebezpečenstvo veľkých zaokrúhľovacích chýb. Zaokrúhľovacia chyba v absolútnej hodnote malého čísla spôsobuje totiž veľkú chybu v jeho prevrátenej hodnote a následne sa premieta aj do vypočítaných hodnôt pri eliminácii.

Existuje veľmi jednoduchý spôsob vyhnutia sa deleniu číslami, ktoré sú malé vzhľadom k ostatným veličinám. Je to postup pomenovaný výber hlavného prvku (pivota), alebo inak povedané výmena riadku j za riadok kp pre maticu \mathbf{A} a vektor \vec{b} . V predošlej procedúre GEM použijeme novú procedúru `find_pivot` (naznačenú v GEM), v ktorej je už známa matica \mathbf{A} a vektor \vec{b} .

```

procedure find_pivot(j:integer;var kp:integer);
var i:integer;
    pivot:real;
begin
    pivot := abs(AA[j,j]);
    kp := j;
    for i := j+1 to n do begin
        if abs(AA[i,j]) > pivot then begin
            pivot := abs(AA[i,j]);
            kp := i;
        end;
    end;
end;

```

10.8 Iteračné metódy

V prípade riešenia sústavy lineárnych rovníc (10.2) iteračnou metódou, začíname s vhodnou počiatočnou aproximáciou $\vec{x}^{(0)}$ riešenia \vec{x} danej sústavy a postupne generujeme postupnosť vektorov $\vec{x}^{(k)}$, ktorá konverguje k riešeniu \vec{x} . Vo väčšine iteračných techník postupujeme tak, že daný systém (10.2) prevedieme na systém tvaru: $\vec{x} = \mathbf{H} \cdot \vec{x} + \mathbf{h}$, kde \mathbf{H} je tzv. **iteračná matica**. Ak $\vec{x}^{(0)}$ je zvolená počiatočná aproximácia, potom postupnosť vektorov konvergujúcich k riešeniu sústavy je daná predpisom

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{H} \cdot \vec{x}^{(k)} + \mathbf{h}. \quad (10.17)$$

Jednotlivé iteračné techniky sa líšia odlišným tvarom iteračnej matice \mathbf{H} . Využitelnosť iteračných metód v malých dimenziách je otázna, lebo v takýchto prípadoch sú priame metódy efektívnejšie. V prípade veľkých systémov, ktoré majú vysoké percento nulových prvkov v matici sústavy, však prinášajú tieto metódy značné časové úspory.

V predošlých častiach tejto kapitoly sme sa nevenovali zvlášť konvergencii jednotlivých metód a podmienke riešiteľnosti sústav. V prípade iteračných metód, si však najprv musíme

pripomenúť základné vektorové a maticové normy, ktoré sa používajú pri definícii konvergencií iteračných metód.

Maticovou normou nazývame reálnu funkciu $\|\cdot\|$, ktorá je definovaná na množine všetkých štvorcových matic rádu n a má také vlastnosti, že pre ľubovoľné dve matice \mathbf{A} , \mathbf{B} a ľubovoľné reálne číslo platí

- i. $\|A\| > 0$, $\|A\| = 0$ práve vtedy keď \mathbf{A} je nulová matica,
- ii. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,
- iii. $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$,
- iv. $\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$.

Jednotlivé kritéria konvergencie sú definované pri odpovedajúcich iteračných metódach. Pri týchto definíciách sa využívajú viaceré typy maticových noriem:

- i. riadková $\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$,
- ii. stĺpcová $\|A\| = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$,
- iii. Euklidovská $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

Ďalší pojem, ktorý je dôležitý pri iteračnom procese, je tzv. spektrálny polomer matice, ktorý úzko súvisí s pojmom vlastná hodnota matice. Spektrálny polomer $\rho(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} je definovaný vzťahom

$$\rho(A) = \max |\lambda|, \quad (10.18)$$

kde λ je vlastná hodnota matice \mathbf{A} . V iteračných výpočtoch je nutnou a postačujúcou podmienkou pre konvergenciu, aby spektrálny polomer iteračnej matice, resp. jej norma bola menšia ako 1. V praxi však môže byť výpočet tejto veličiny značne komplikovanou záležitosťou. Z toho dôvodu si neskôr uvedieme iné kritéria, ktorú sú jednoduchšie overiteľné.

V nasledujúcich krokoch sa zoznámime sa dvoma najpoužívanejšími iteračnými metódami pre riešenie systému lineárnych rovníc. Pri použití iteračných techník je dôležité si správne pripraviť iteračnú maticu \mathbf{H} , ktorá sa líši od metódy k metóde.

10.8.1 Jacobiho metóda

Majme regulárnu maticu \mathbf{A} , ktorá sa dá zapísať v tvare

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}, \quad (10.19)$$

kde \mathbf{D} je diagonálna matica, \mathbf{L} je dolná trojuholníková matica s nulovou diagonálou a \mathbf{U} je horná trojuholníková matica s nulovou diagonálou. Predpokladajme, že \mathbf{D} je regulárna. (Pokiaľ má hlavná diagonála matice \mathbf{A} nulový prvok, potom regularitu \mathbf{D} dostaneme prehodením riadkov matice \mathbf{A} .) Sústavu (10.2) môžeme teda zapísať v tvare:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\bar{x} &= \bar{b} && \text{odtiaľ} \\ \mathbf{D}\bar{x} &= -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\bar{x} + \bar{b}, && \text{t.j.} \\ \bar{x} &= \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\bar{x} + \mathbf{D}^{-1}\bar{b}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Ak označíme v predchádzajúcom vzťahu $\mathbf{H} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ a $\mathbf{h} = \mathbf{D}^{-1}\bar{b}$, získame iteračný predpis (10.17), ktorým bude určená *Jacobiho iteračná metóda (metóda postupných aproximácií)*. Pri Jacobiho iteračnej metóde $k+1$ -vú iteráciu vyjadrujeme z k -tej iterácie nasledovným spôsobom v maticovom zápise:

$$\bar{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}[\bar{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\bar{x}^{(k)}], \quad (10.21)$$

alebo ak sa jedná o maticu 3×3 , potom zápis vyzerá

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)}_1 \\ x^{(k+1)}_2 \\ x^{(k+1)}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} \\ 1/a_{22} \\ 1/a_{33} \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)}_1 \\ x^{(k)}_2 \\ x^{(k)}_3 \end{pmatrix} \right].$$

Procedure Jacobi(dim:integer; A:matrix, b,x:vector, var y: vector);

(* x je k-ta iteracia, y ke k+1-vá iterácia*)

Var i,j:integer;

begin

 for i:=1 to dim do begin

 y[i]:=0;

 for j:=1 to dim do

 if i<>j then Y[i]:=Y[i]+A[i,j]*x[j];

 Y[i]:=(b[i]-Y[i])/A[i,i];

 end;

end;

Veta: Pokiaľ je matica \mathbf{A} diagonálne dominantná, potom Jacobiho metóda konverguje.

Dôkaz: Pre diagonálne dominantnú maticu platí

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad (10.22)$$

a teda maximová norma matice $\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\| < 1$.

10.8.2 Gaussova-Seidelova metóda

Modifikáciou Jacobiho metódy dostaneme tzv. *Gaussovú-Seidelovu metódu*. Pri výpočte $(k + 1)$ -vej iterácie neznámej x_j (j -tá zložka vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$) používame už vypočítané hodnoty (predchádzajúce výpočty) $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$. Z tohto dôvodu sa táto metóda tiež niekedy volá metóda postupných opráv. Výpočet sa dá maticovo zapísať:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\vec{b} - \mathbf{L}\vec{x}^{(k+1)} - \mathbf{U}\vec{x}^{(k)}] \quad (10.23)$$

alebo ak sa jedná o maticu 3x3, potom zápis vyzerá

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)}_1 \\ x^{(k+1)}_2 \\ x^{(k+1)}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} \\ 1/a_{22} \\ 1/a_{33} \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k+1)}_1 \\ x^{(k+1)}_2 \\ x^{(k+1)}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)}_1 \\ x^{(k)}_2 \\ x^{(k)}_3 \end{pmatrix} \right] \quad (10.24)$$

Veta Postačujúce podmienky konvergencie Gaussovej-Seidelovej metódy sú:

1. \mathbf{A} je diagonálne dominantná matica.
2. Matica \mathbf{A} je kladne definitná.

Ak je $\|\mathbf{H}\| < 1$, potom pre odhad chyby iteračnej metódy platí

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{H}\|}{1 - \|\mathbf{H}\|} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\| \quad (10.25)$$

kde $\|\mathbf{H}\|$ je maticová norma priradená (súhlasná) s vektorovou normou $\|\vec{x}\|$.

Úloha 10.1:

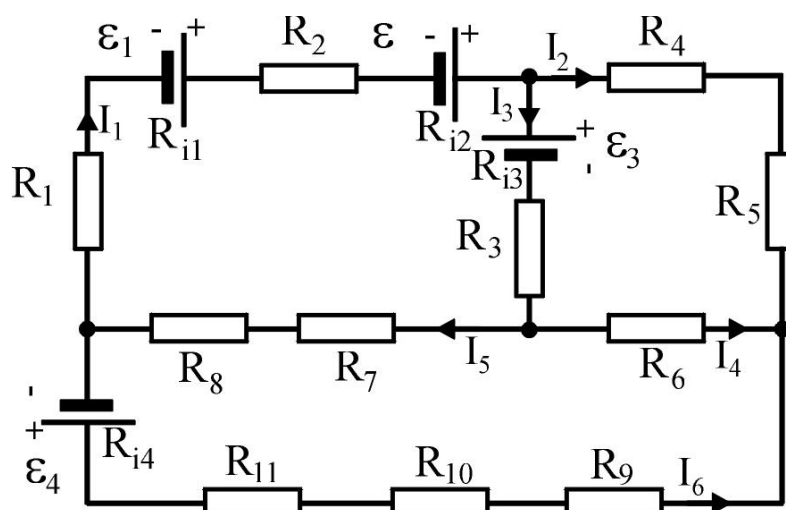
Metóda Kirchhoffových zákonov. Na Obr. 10.1 je obvod s troma elementárnymi slučkami. Úlohou je vyriešiť neznáme vetvové prúdy takéhoto zloženého obvodu. Hodnoty odporov sú: $R1 = 10 \Omega$, $R2 = 20 \Omega$, $R3 = 25 \Omega$, $R4 = 15 \Omega$, $R5 = 20 \Omega$, $R6 = 30 \Omega$, $R7 = 10 \Omega$, $R8 = 15 \Omega$, $R9 = 15 \Omega$, $R10 = 10 \Omega$, $R11 = 5 \Omega$, $Ri1 = 2 \Omega$, $Ri2 = 2 \Omega$, $Ri3 = 2 \Omega$, $Ri4 = 2 \Omega$ a elektromotorických napätí: $U1 = 10 V$, $U2 = 5 V$, $U3 = 10$ a $U4 = 5 V$.

Riešenie

Riešením elektrického obvodu rozumieme určenie neznámych elektrických veličín v obvode, akými sú elektrický prúd, napätie prípadne odpor. Podľa zapojenia jednotlivých elementov obvodu, zadania známych veličín a určenia jednej, respektíve niekoľkých neznámych veličín sa volí najvýhodnejšia metóda riešenia. V našom prípade je to metóda pomocou Kirchhoffových zákonov. Pre istotu si pripomenieme znenie daných zákonov.

Prvý Kirchhoffov zákon: Súčet prúdov smerujúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla vytekajúcich

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (10.26)$$



Obr. 10.1 Obvod s viacerými zdrojmi a zmiešaným zapojením rezistorov

Druhý Kirchhoffov zákon hovorí, že algebraický súčet elektromotorických napätí v uzavretej slučke elektrického obvodu sa rovná algebraickému súčtu úbytkov napätí na všetkých spotrebičoch v tejto slučke:

$$\sum_{k=1}^n U_{vk} = \sum_{k=1}^n R_k I_k \quad (10.27)$$

Touto metódou je možné riešiť ľubovoľne zložitý elektrický obvod. Pri riešení obvodu – zápisu rovníc pomocou Kirchhoffových zákonov je dôležité dodržať nasledovné postupy:

1. Pri riešení touto metódou sa najprv oboznámime s topológiou obvodu, t.j. určíme počet nezávislých uzlov, vetiev a slučiek a označíme ich v obvode.
2. Zvolia sa predpokladané smery prúdov vo vetvách a kladné smery slučiek.
3. Podľa prvého Kirchhoffovho zákona sa zostaví $(n-1)$ rovníc, pričom n je počet nezávislých uzlov.
4. Určí sa počet elementárnych slučiek v obvode a zostaví sa podľa druhého Kirchhoffovho zákona m rovníc, pričom m je počet elementárnych slučiek obvodu.

Pre tri prúdové uzly zostavíme sústavu rovníc z prvého Kirchhoffovho zákona a pre tri slučky zostavíme sústavu rovníc z druhého Kirchhoffovho zákona:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_5 - I_6 &= 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ I_2 + I_4 + I_6 &= 0 \\ (R_1 + R_{i1} + R_2 + R_{i2})I_1 + (R_3 + R_{i3})I_3 + (R_7 + R_8)I_5 &= U_1 + U_2 - U_3 \\ (R_4 + R_5)I_2 - (R_3 + R_{i3} - R_6)I_3 &= U_3 \\ R_6 I_4 - (R_7 + R_8 - R_6)I_5 - (R_9 + R_{10} + R_{11} + R_{i4})I_6 &= -U_4 \end{aligned}$$

Dosadením známych veličín do rovníc sa dajú určiť neznáme prúdy v obvode riešením sústavy rovníc so šiestimi neznámymi. Výsledná rozšírená matica má tvar:

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 34 & 0 & 27 & 0 & 25 & 0 & 5 \\ 0 & 35 & -27 & 30 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & -25 & -32 & -5 \end{pmatrix}$$

Hlavná časť programu na riešenie pomocou Gaussovej eliminačnej metódy pomocou procedúr, ktoré sme doposiaľ zadefinovali má tvar:

```

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
var ii:integer;
begin
  NacitajMaticu('text.txt', n, A);
  WriteMatrix(n,A);

  GEM(n, A, A1);
  WriteMatrix(n,A1);          {vypíše maticu po Gaussovej eliminácii}

  for ii:=1 to n do
    b[ii]:=A1[ii,n+1];       {vyberie vektor b z rozšírenej matice A1}

  IteraciaUp(n,A1,b,x);

  for ii:=1 to n do         {výpis získaných hodnôt}
    Form1.Memo1.Lines.Add('x('+IntToStr(ii)+' ) = '+FloatToStr(x[ii]));
end;

```

Výsledné riešenie je:

$$\begin{array}{lll} x(1) = 0.227 & x(2) = 0.231 & x(3) = -0.231 \\ x(4) = -0.143 & x(5) = 0.140 & x(6) = -0.087 \end{array}$$

Úloha 10.2:

V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách:

linka	A	B	C
1.	40 min.	30 min.	25 min.
2.	25 min.	20 min.	20 min.
3.	10 min.	10 min.	5 min.

Vypočítajte, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 4500 minút, pre 2. linku 3050 minút a pre 3. linku 1200 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu. Riešte Gauss eliminačnou metódou $[x_T = (50; 50; 40)]$

Úloha 10.3:

Elektromotorické napätie článku v teplotnom rozsahu (20, 80) °C sa dá aproximovať polynómom 3-stupňa. Určte koeficienty daného polynómu, ak viete elektromotorické napätia pre vybrané teploty. Potrebné hodnoty nájdete v nasledovnej tabuľke:

t [°C]	20	40	60	80
U [V]	1,4	1,5	1,65	1,85

Riešenie

Polynóm tretieho stupňa má tvar:

$$U(t) = a + b t + c t^2 + d t^3, \quad (10.28)$$

kde a , b , c , d sú koeficienty, ktoré treba určiť. Pomocou tabuľky môžeme pre každú teplotu určiť jednu rovnicu, celkom 4. Máme teda sústavu 4 rovníc so 4 neznámymi, ktorej maticový tvar vyzerá nasledovne

$$\begin{pmatrix} 1 & 20 & 20^2 & 20^3 \\ 1 & 40 & 40^2 & 40^3 \\ 1 & 60 & 60^2 & 60^3 \\ 1 & 80 & 80^2 & 80^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 1,5 \\ 1,65 \\ 1,85 \end{pmatrix}.$$

Systém riešime Gaussovou eliminačnou metódou. Výsledok je:

$$a = 1.35; b = 1.25 \cdot 10^{-3}, c = 6.25 \cdot 10^{-5}, d = 9.25 \cdot 10^{-21}.$$

Keďže koeficient d je veľmi malý a aj násobenie s treťou mocninou teploty je stále zanedbateľné číslo rádu 10^{-14} . Z tohto vyplýva, že asi v danom rozsahu nám stačí funkcia len druhého rádu.

Úloha 10.4:

Sústavu rovníc riešte pomocou Jacobiho metódy:

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie

Pri riešení tejto matice použijeme požadovanú Jacobiho metódu (10.21). Komplexné riešenie celej úlohy je v nasledovnej procedúre:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var x,y,b:Vektor;
    A:Matica;
```

```

i,n,Pocet:integer;
e,s>Error:real;

begin
  NacitajMaticu(Edit2.Text,n,A);
  Memo1.Clear;
  Vypis(n,A);
  e:=1;
  Pocet:=1;
  for i:=1 to n do
    x[i]:=0;           {vstupný nulový vektor}
  Error:=StrToFloat(Edit1.Text);
  while(e>Error) do begin   {porovnanie k a k+1 iterácie}
    inc(Pocet);
    if Pocet = 100 then break;   {ukončenie výpočtu po 100 krokoch}
    for i:=1 to n do b[i]:=A[i,n+1]; {určenie vektoru b z rozšírenej matice A}
    Jacobi(n, A, b, x, y);       {Jacobiho metóda}
    S:=0;
    for i:=1 to n do S:=S+abs(x[i]-y[i]); {výpočet chyby}
    x:=y;                       {výmena vektorov}
    e:=S;
  end;
  for i:=1 to n do
    Form1.Memo1.Lines.Add(IntToStr(Pocet)+'x('+IntToStr(i)+'
                          =' +FloatToStr(x[i]));
end;

```

Program sa spustí po kliknutí na Rataj (Button1). Najprv načíta súbor *.txt kde sa nachádza matica, ktorú následne vypíše. V ďalšom kroku načíta chybu iteračného procesu a nasleduje iterácia pomocou procedúry Jacobi. Program využíva procedúry v knižnici *LibMatice*. Po odpovedajúcom počte krokov vypíše výsledný vektor, ktorý má hodnoty:

$$x^T = (1.0564, 1.3642, 0.65069)^T$$

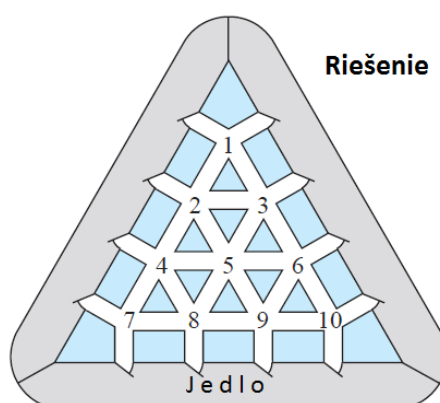
Úloha 10.5:

Obr. 10.2 je diagram bludiska používaného v laboratórnom experimente. Experiment sa začína umiestnením myši na jeden z desiatich vnútorných priesečníkov bludiska. Ako náhle sa myš objaví vo vonkajšom koridore, nemôže sa vrátiť do bludiska. Ak je myš v jednom z vnútorných priesečníkov jej voľba ciest sa predpokladá za náhodnú.

Aká je pravdepodobnosť toho, že sa myš objaví v " koridore jedlo", keď začína na *i*-tej križovatke? (college web)

Riešenie

Nech pravdepodobnosť výhry (získanie potravy) začínajúcej na *i*-tej križovatke je reprezentovaná pravdepodobnosťou p_i . Potom tvar lineárnej rovnice zahŕňajúcej p_i sa rovná pravdepodobnostiam spojeným so susediacimi priesečníkmi s *i*-tou križovatkou.



Obr. 10.2 Diagram bludiska.

Napríklad: myš na prvej križovatke má pravdepodobnosť výberu dolných správnych ciest a straty. Strata (0) odpovedá pravdepodobnosti výberu ľavej a pravej hornej cesty. Pravdepodobnosť "výhry" odpovedá výberu správnych spodných ciest. Pravdepodobnosť (1) odpovedá výberu "Jedla". Výsledná pravdepodobnosť prvej križovatky je teda:

$$p_1 = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3 \quad (10.29)$$

horný doný
 limit limit

Pomocou podobného uvažovania sa dá napísať ďalších deväť pravdepodobností:

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{5}p_5 \\
 p_3 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_1 + \frac{1}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_6 \\
 p_4 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7 + \frac{1}{5}p_8 \\
 p_5 &= \frac{1}{6}p_2 + \frac{1}{6}p_3 + \frac{1}{6}p_4 + \frac{1}{6}p_6 + \frac{1}{6}p_8 + \frac{1}{6}p_9 \\
 p_6 &= \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}p_3 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_9 + \frac{1}{5}p_{10} \\
 p_7 &= \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}p_4 + \frac{1}{4}p_8 \\
 p_8 &= \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}p_4 + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_7 + \frac{1}{5}p_9 \\
 p_9 &= \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}p_5 + \frac{1}{5}p_6 + \frac{1}{5}p_8 + \frac{1}{5}p_{10} \\
 p_{10} &= \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4}p_6 + \frac{1}{4}p_9
 \end{aligned}$$

Prepísaním týchto rovníc do štandardnej formy sa vytvára systém desiatich lineárnych rovníc pre desať premenných, ktorých rozšírená matica má tvar

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pomocou Gaussovej-Seidelovej iteračnej metódy s počiatočnou aproximáciou $p_1 = p_2 = \dots = p_{10} = 0$ dostávame (po 18 iteráciách) nasledovnú aproximáciu

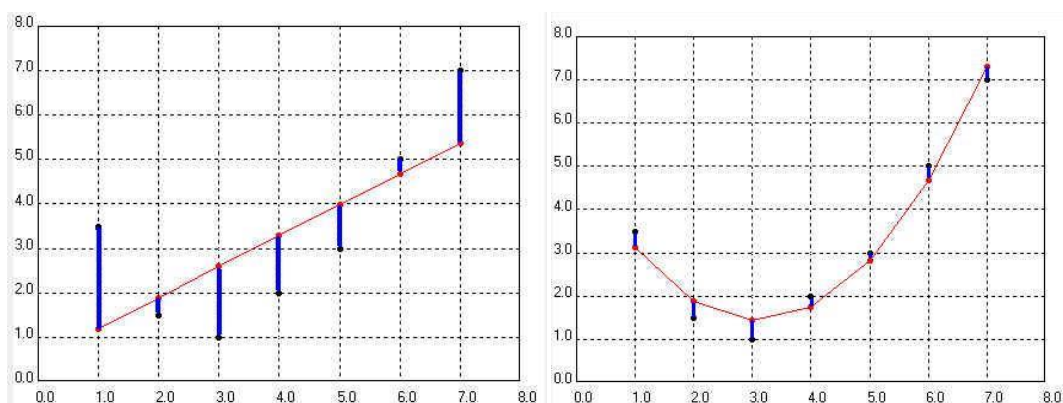
$$\begin{array}{ll} p_1 = 0.090, & p_2 = 0.180 \\ p_3 = 0.180, & p_4 = 0.298 \\ p_5 = 0.333, & p_6 = 0.298 \\ p_7 = 0.455, & p_8 = 0.522 \\ p_9 = 0.522, & p_{10} = 0.455 \end{array}$$

Problém štruktúry pravdepodobnosti popísaný v danom príklade sa vzťahuje k tzv. metóde konečných prvkov, ktorá sa používa v mnohých technických problémoch. Všimnite si, že matica vytvorená v tomto príklade sa väčšinou skladá z núl. Tieto matice sú tzv. riedke. Pre riešenie sústav rovníc s riedkymi koeficientmi matice sú Jacobiho a Gauss-Seidlova metóda oveľa účinnejšie ako Gaussova eliminácia.

10.9 Metóda najmenších štvorcov

Majme z merania súbor n bodov so súradnicami (x_i, y_i) , u ktorých predpokladáme lineárnu závislosť: $y = a_0 + a_1 x$. Pomocou metódy najmenších štvorcov dokážeme určiť parametre a_0, a_1 danej priamky tak, aby čo najlepšie odpovedala nameraným bodom. Podstata spočíva v tom, že sa hľadá taký súčet štvorcov (druhých mocnín) vzdialeností jednotlivých bodov y_i od predpokladanej priamky, aby bol čo najmenší možný (Obr. 10.3). Túto podmienku môžeme zapísať vzťahom

$$\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (10.30)$$



Obr. 10.3 Preloženie (a) priamky ($R = 0,92984$) a (b) kvadratickej ($R = 0,9946$) funkcie cez namerané body. Modrou zvislou čiarou sú znázornené vzdialenosti jednotlivých bodov y_i od predpokladanej krivky. Z obrázkov je zrejmé že kvadratická funkcia výrazne lepšie popisuje namerané body.

Z matematiky vieme, že lokálny extrém funkcie získame vtedy, keď jej prvú deriváciu (prvé parciálne derivácie) položíme rovnú nule

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \left(\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2 \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2 \right) = 0.$$

Keďže vieme, že daná funkcia má určité lokálne minimum, nepotrebujeme už k tomu druhú deriváciu. Po prvej derivácii dostávame výraz, ktorý je funkciou dvoch premenných a_0 a a_1 a po jednoduchej úprave dostávame sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi

$$2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) = 0, \quad 2 \sum_{i=1}^n x_i \cdot (a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) = 0.$$

Túto sústavu rovníc môžeme ďalej upraviť rozpísaním na súčty

$$a_0 \cdot \sum_{i=1}^n 1 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \quad a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Jednotlivé sumy sa v daných výrazoch dajú spočítať a ich vyjadrenie si označme nasledovne:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n 1 &= S0 = n, & \sum_{i=1}^n x_i &= S1, & \sum_{i=1}^n x_i^2 &= S2, \\ \sum_{i=1}^n y_i &= T0, & \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i &= T1, & \sum_{i=1}^n y_i^2 &= T. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Po zavedení týchto vyjadrení môžeme sústavu rovníc prepísať do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 \\ S_1 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \end{pmatrix}$$

Takýto prepis do maticového tvaru má výhodu hlavne pri metóde najmenších štvorcov pri použití interpolačnej funkcie vyššieho rádu. V tomto prípade pre interpoláciu priamkou $y = a_0 + a_1 x$ pre jej koeficienty platia nasledujúce vzťahy:

$$a_1 = \frac{n T_1 - S_1 T_0}{n S_2 - S_1^2} \quad a_0 = \frac{T_0 - a_1 S_1}{n} \quad (10.32)$$

Veľmi často je aj dôležité vedieť aká je korelácia medzi nameranými bodmi a interpolačnou funkciou. K tomuto sa používa *koeficient korelácie*, R , ktorý má nasledovný tvar:

$$R = \frac{n T_1 - S_1 T_0}{\sqrt{n S_2 - S_1^2} \sqrt{n T - T_0^2}} \quad (10.33)$$

Odvodenie daného koeficientu možno nájsť vo viacerých publikáciách (Navara, 2003; Pang, 2006). Štvorec koeficientu korelácie, R^2 , ktorý sa nazýva *koeficientom determinácie*, je významným činiteľom pre posúdenie vhodnosti modelu. Testovaním modelu pomocou koeficientu determinácie sa overuje jeho štatistická významnosť.

Pre interpoláciu získaných dát kubickou funkciou $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ má matica nasledovný tvar

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \quad (10.34)$$

pričom vyjadrenie pre S_3 až S_6 , T_2 a T_3 je evidentné zo vzťahov (10.31). Na riešenie takejto a podobnej sústavy rovníc s viacerými neznámymi sa dá potom využiť jedna z iteračných metód, ktoré sme popísali v predchádzajúcich odsekoch.

V prípade exponenciálnej závislosti $y = a e^{bx}$ je potrebné túto funkciu upraviť tak, aby bolo možné použiť túto metódu. Logaritmovaním danej rovnice dostávame

$$\ln y = \ln a + b x. \quad (10.35)$$

Pri použití nasledovných prepisov: $v = \ln y$, $a_0 = \ln a$, $a_1 = b$ dostávame lineárnu závislosť v tvare

$$v = a_0 + a_1 x, \quad (10.36)$$

kde sa dá už aplikovať MNS. Jediné čo treba po výpočte urobiť, je späť prepočítať vypočítaný koeficient a_0 pomocou vzťahu $a = e^{a_0}$ a druhý je rovný $b = a_1$.

Nasledujúca procedúra slúži na vytvorenie matice typu (10.34) pomocou metódy najmenších štvorcov, pričom rád interpolačnej funkcie je určený číslom *rad*

```
procedure MNSMatica;
Var      rad,i,j:integer;           {definícia jednotlivých premenných}
          Subor:string;
          T1:TextFile;

begin
  Subor := Edit1.Text;              {súbor na načítanie z počítača}
  rad := SpinEdit1.Value;           {mocnina interpolačnej krivky}

  AssignFile(T1,Subor);             {otvorenie súboru}
  Reset(T1);
  ReadLn(T1,n);                     {počet čísel}
  for i := 1 to n do                {XY matica typu n x 2}
    Read(T1,XY[i,1],XY[i,2]);       {načítanie jednotlivých dvojíc}
  CloseFile(T1);                    {uzatvorenie súboru}

  for j := 1 to rad+3 do begin
    S[j] := 0;T[j] := 0;
    for i := 1 to n do begin
      S[j] := S[j]+Power(XY[i,1],j-1); {výpočet koeficientov Sx}
      T[j] := T[j]+XY[i,2]*Power(XY[i,1],j-1); {výpočet koeficientov Tx}
    end;
  end;

  for j := 1 to rad+1 do begin      {vytváranie rozšírenej matice}
    for i := 1 to rad+1 do
      A[j,i] := S[i+j-1];           {A:matice}
      b[j] := T[j];
    end;

  Memo1.Lines.Add('Matica OK');
  VypisMaticu(rad+1,A);
end;
```


11. Numerické modelovanie reálnych dejov

S diferenciálnymi rovnicami sa stretne na každom kroku vo fyzike, v technike ako aj v iných prírodných vedách. Je to hlavne pri formulácii zákonov a pri riešení príkladov ako je napr.: pohyb Mesiaca, Zeme či Slnka, dynamika rakety alebo šírenie oceánskych vln. Zostavenie DR je tiež dôležitou časťou matematického spracovania úlohy. Diferenciálne rovnice, s ktorými ste sa stretli vo fyzike medzi prvými, boli rovnice vyjadrujúce rýchlosť a zrýchlenie pohybu hmotného bodu (1.10), (1.21):

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

pričom ich riešením sú $x = v t + v_0$, $x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + a_0$.

Diferenciálna rovnica predstavuje základnú úlohu integrálneho počtu. Najjednoduchšia diferenciálna rovnica má tvar:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t). \quad (11.1)$$

Ako riešenie stačí nájsť takú funkciu: $g(t) = y$, ktorej derivácia bude funkcia $f(t)$. Riešením je potom neurčitý integrál:

$$y = g(t) = \int f(t) dt + C, \quad (11.2)$$

Diferenciálnu rovnicu (11.1) pre násobíme dt , čím dostaneme výsledok $dy = f(t)dt$, ktorý už len preintegrujeme podľa času. V riešení diferenciálnej rovnice vystupuje integračná konštanta C . Takéto riešenie voláme *všeobecné riešenie*. Diferenciálna rovnica má nekonečne veľa riešení. Všeobecné riešenie: $y = g(t, C) \rightarrow$ sústava kriviek. Ak však máme počiatočnú podmienku, potom riešenie predstavuje len jednu krivku: $y = g(t, C_0)$ (nech všeobecné riešenie je: $y = t^2 + C$ a počiatočná podmienka $y(1) = 1$, potom riešenie je presne definované ako: $y = t^2$).

Diferenciálna rovnica spolu so začiatočnou podmienkou sa volá *Cauchyho úloha*:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (11.3)$$

Z uvedeného možno vidieť, že úloha riešiť diferenciálnu rovnicu sa zovšeobecňuje na úlohu hľadať neurčitý integrál k danej funkcii. Zo znalostí z matematiky vieme, že vypočítať neurčitý integrál nie je vždy jednoduchá vec, ale daný integrál je už riešenie rovnice. Nájsť a zostaviť takýto integrál v jednoduchej diferenciálnej rovnici nie je až také zložité, no pri diferenciálnych rovniciach vyššieho rádu je to komplikovanejšie.

11.1 Eulerova metóda

Eulerova metóda je najjednoduchšou jednokrokovou metódou. Z tejto metódy vychádzajú numerické metódy založené na diskretizácii premenných. Výsledné riešenie teda nie je spojitá funkcia, ale generuje sa ako postupnosť uzlov v časoch $t_0 = a, t_1, t_2, \dots$, pre ktoré sa vypočítajú čísla $y_0 = c, y_1, y_2, \dots$. Tieto vypočítané hodnoty aproximujú presné riešenia: $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots$. Vzdialenosti časových uzlov $t_i - t_{i-1}$ sú definované ako krok, pričom výber kroku závisí od typu problému. Najjednoduchší prípad je keď sú uzly ekvidistantné, rovnako vzdialené o dĺžku h . Ak teda potrebujeme vedieť riešenie na intervale $\langle a, b \rangle$ rozdeleného na n bodov a posledný časový uzol je $t_n = b$, potom pre časový krok platí: $\Delta t = (b - a) / n$ a $t_i = a + i h, i = 0, 1, \dots, n$.

Na odvodenie vzťahu pre Eulerovu metódu použijeme Taylorov rad. Pomocou tohto radu sa dá zapísať funkčná hodnota funkcie $y(t_1)$ v bode $t_1 = t_0 + h$ pomocou známej hodnoty $y(t_0)$ v predchádzajúcom bode t_0 v nasledovnom tvare

$$y(t_1) = y(t_0) + \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t_0} (t_1 - t_0)^2. \quad (11.4)$$

Ak zoberieme do úvahy, že časový krok $\Delta t = t_1 - t_0$ je malý, potom všetky členy rádu Δt^2 a vyššieho možno zanedbať. Ďalej vieme presnú hodnotu derivácie funkcie, ktorá je daná diferenciálnou rovnicou so začiatkovou úlohou skúmaného problému (11.3). Spojením všetkých týchto informácií dostávame predpis pre Eulerovu metódu:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) \Delta t, \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11.5)$$

kde $y_n = y(t_n)$.

Chyba v jednom kroku tejto metódy je úmerná Δt^2 . Počet krokov k dosiahnutiu odpovedajúceho výsledku je $n = (t_n - t_0) / \Delta t$. Teda celková chyba: $\varepsilon \approx n \Delta t^2 \approx \Delta t$, čo je aj dôvod, že tejto metóde hovoríme **metóda prvého rádu**.

```

Procedure Euler;
begin
  a := 0;           { počiatok simulácie }
  b := 1;           { koniec simulácie }
  dt := 0.05;       { časový krok }
  n := round ( (b - a) / dt ); { počet krokov }

  y[0] := 1;        { počiatková podmienka }
  for i := 1 to n do
    y[i] := y[i-1] + dt * f(i*dt); { f – definovaná funkcia }
  end;

```

Keď urobíme rozbor chýb danej metódy, zistíme, že spočiatku je veľmi presná, ale táto presnosť neustále klesá. Je to z toho dôvodu, lebo hodnota derivácie v začiatku každého intervalu sa používa pre určenie odhadu na konci intervalu. V každom kroku daná metóda produkuje chybu, ktorá sa neustále kumuluje.

Úloha 11.1:**Riešte nasledovnú Cauchyho úlohu**

$$\dot{y} = (1 - 0.01t)t, \quad y(t_0 = 0) = 1$$

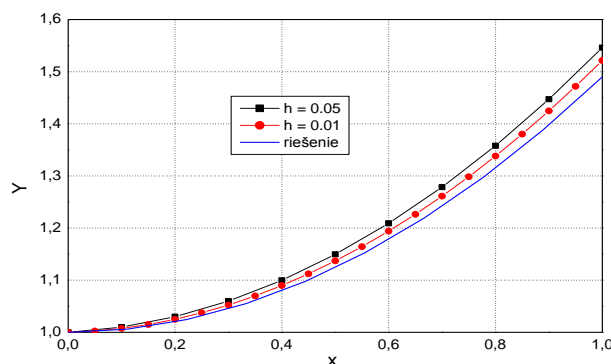
na intervale $(0, 1)$ pomocou Eulerovej metódy pre časové kroky $\Delta t = 0.1$ a 0.05 a 0.01 . Výsledky v čase $t = 1$ s porovnajte s presným riešením.

Riešenie:

Zo zadania danej úlohy vieme, že v čase $t_0 = 0$ s je $y(t_0 = 0) = 1$. Pre funkciu $f(t)$ podľa vzťahu (11.5) platí: $f(t) = (1 - 0.01t)t$ a výpočet pre $\Delta t = 0.1$ je

$$\begin{aligned} y_1 &= y(0) + f(0.1) \cdot 0.1 \\ y_1 &= 1 + 0.1 (1 - 0.01 \cdot 0.1) \cdot 0.1 = 1.00999 \\ y_2 &= 1.00999 + 0.1 (1 - 0.01 \cdot 0.1) \cdot 0.1 = 1.02995 \\ y_3 &= 1.05986, \dots, y_{10} = 1.54615 \end{aligned}$$

Pre kroky $h = 0.05$ a 0.01 riešte pomocou počítačového programu. Výsledky sú: (1. 5214125, 1. 5016165). Presné riešenie je $y = \frac{1}{2}t^2 - 0.01t^3 / 3 + 1$ a $y(t = 1) = 1.496666$.



Obr. 11.1 Porovnanie výsledkov pre kroky $\Delta t = 0.05$ a 0.01 s presným riešením.

11.1.1 Newtonov zákon chladenia /ohrievania

Newtonov empirický zákon o chladení / zahrievaní predstavuje rýchlosť zmeny teploty telesa s časom. Táto zmena je úmerná teplote telesa i rozdielu medzi teplotou telesa a teplotou okolitého prostredia. Tento zákon vyjadruje tiež vzťah medzi rýchlosťou výmeny energie spôsobenej konvekčným transferom tepla na rozhraní medzi tuhým telesom a tekutým alebo plynným prostredím.

Newtonov zákon chladenia sa používa na modelovanie zmeny teploty telesa (objektu) umiestneného v prostredí s odlišnou teplotou. Zákon možno vyjadriť nasledovne:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_p), \quad (11.6)$$

kde $T = T(t)$ reprezentuje teplotu telesa v čase t , T_p je teplota okolitého prostredia a k je konštanta výmeny. Exaktným riešením tejto diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou $T(0) = T_0$ dostávame pre časovú zmenu teploty telesa vyjadrenie v tvare:

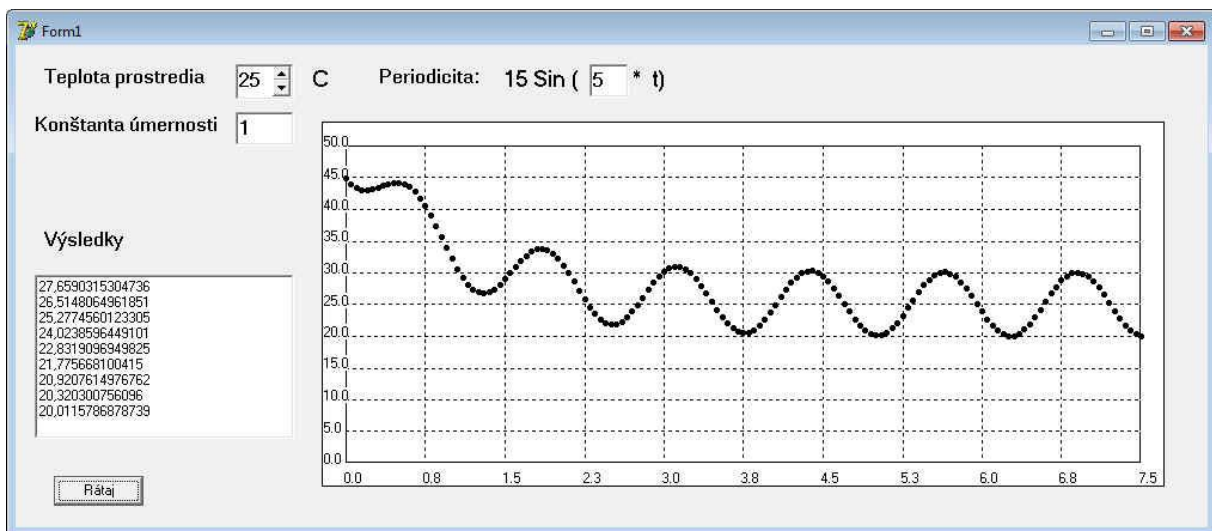
$$T = T(t) = (T_0 - T_p)e^{-kt} + T_p. \quad (11.7)$$

Úloha 11.2:

Riešte Newtonov zákon chladenia pre periodickú zmenu teploty. V rovnici (11.6) nahrad'te T_p funkciou $T_p(t) = T_p + T_A \sin(\omega t)$, kde T_A je amplitúda periodickej zmeny teploty prostredia okolo T_p a ω je uhlová frekvencia danej zmeny. Riešte pre parametre: $T_0 = 45^\circ\text{C}$, $T_p = 25^\circ\text{C}$ a $T_A = 15^\circ\text{C}$. Zistite, ako vplyvajú zmeny parametrov k a ω na výsledok.

Riešenie.

Aj v tomto prípade budeme používať Eulerovu metódu (11.5), keďže sa nejedná o rýchle zmeny teploty. Ak teplota prostredia je konštantná a nižšia ako začiatočná teplota telesa, nastáva len exponenciálny pokles teploty telesa na teplotu prostredia. Rýchlosť poklesu závisí od veľkosti konštanty k , čím je väčšia, tým rýchlejší je pokles. V tomto prípade výsledná teplota telesa sa tiež periodicky mení, pričom jej priebeh závisí na uhlovej rýchlosti ω a konštante k (Obr. 11.2).



Obr. 11.2 Riešenie Newtonovho zákona chladenia pre periodickú zmenu teploty $T_p(t) = 25 + 15 \sin(5 t)$, počiatočná teplota budovy 45°C a $k = 1$.

11.2 Modelovanie pohybovej rovnice

Na riešenie základných numerických modelov pohybu v gravitačnom poli Zeme stačí na začiatok aj Eulerova metóda, ktorú bez problémov zvládajú aj stredoškólači. Pri týchto

pohyboch je diferenciálna rovnica pomerne jednoduchá a väčšinou vyjadruje, ako sa mení zrýchlenie \vec{a} . Vyjadriť zrýchlenie sa dá z II. Newtonovho zákona (2.1) v nasledovnom tvare:

$$\vec{a} = \frac{F(t, \vec{r}, \vec{v})}{m} = \vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v}). \quad (11.8)$$

Zo zrýchlenia dokážeme bez problémov určiť rýchlosť a polohu daného telesa v nasledujúcom časovom okamihu. Z vypočítaných hodnôt potom zostrojíme grafy časových závislostí daných kinematických veličín, alebo v určitej mierke zobrazíme trajektóriu pohybu, na ktorej môžeme vyznačiť postupnosť okamžitých polôh hmotného bodu či telesa.

Ak zvolíme dostatočne malý časový krok, môžeme v intervale $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ považovať výslednú silu, ktorá pôsobí na teleso, a teda aj jeho zrýchlenie, za konštantné. Z tohto predpokladu platí:

$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t \quad (11.9)$$

$$r_{i+1} = r_i + v_i \Delta t \quad (11.10)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t, \quad (11.11)$$

kde a_i, v_i, r_i sú zrýchlenie, rýchlosť a poloha v čase t_i , a $a_{i+1}, v_{i+1}, r_{i+1}$ sú zrýchlenie, rýchlosť a poloha v čase $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

Vzťahy (11.8) až (11.11) musíme pri numerickom výpočte opakovane používať v určitom vopred zvolenom poradí, pričom (11.8) musí byť pred (11.9) a vzťah (11.11) obvykle radíme ako posledný. Máme teda tri možnosti usporiadania výpočtu, ktorý podľa poradia krokov v programovom cykle označujeme skratkami ARV, AVR a RAV (A. . . výpočet zrýchlenia, V. . . výpočet zmeny rýchlosti, R. . . výpočet zmeny polohy). Postup výpočtu pre jednotlivé metódy je podľa poradia zapísaný v nasledujúcej tabuľke (Šedivý, 2005):

ARV	AVR	RAV
$a_i = a(t_i, y_i, v_i)$	$a_i = a(t_i, y_i, v_i)$	$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$
$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$	$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$	$a_i = a(t_i, y_{i+1}, v_i)$
$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$	$y_{i+1} = y_i + v_{i+1} \Delta t$	$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$
$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$t_{i+1} = t_i + \Delta t$	$t_{i+1} = t_i + \Delta t$

Tabuľka 11.1 Vzťahy pre jednotlivé metódy.

Metódy ARV a RAV sa líšia, len keď zrýchlenie hmotného bodu závisí na jeho polohe. Napríklad pri štúdiu pohybu v homogénnom gravitačnom poli dávajú obe metódy rovnaký výsledok.

Keďže používame Eulerovu metódu, ktorá má presnosť len prvého rádu, treba si pozorne vybrať ten správny model. Pri výbere nesprávnej postupnosti výpočtov môžeme dostávať nesprávne fyzikálne výsledky. Pri výpočte pádu telesa v homogénnom gravitačnom poli dostávame približne vždy rovnaké výsledky. No pri kmitavom pohybe už použitie ARV modelu vedie k nesprávnym výsledkom (Obr. 11.3), lebo zrýchlenie a teda aj sila závisia na polohe: $F = -kx$ (7.2).

Úloha 11.3:

Harmonický oscilátor: Znázorníte kmitavý pohyb závažia s hmotnosť 156 g zaveseného na pružine s konštantou tuhosti 2,2 N/m.

zdroj: kmity_pruzina2.avi

Riešenie:

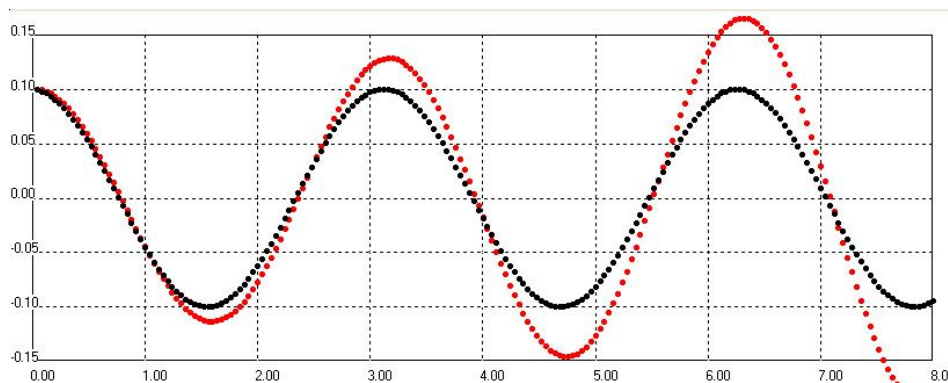
Pri jednoduchom harmonickom kmitavom pohybe sila spôsobujúca pohyb je úmerná výchylke: $F = -k y$ (7.2). Pre simuláciu vystačíme s Eulerovou metódou, pričom použijeme metódu AVR s časovým krokom Δt . Pohybovú rovnicu popisujúcu pohyb v smere osi y jednoducho upravíme a dostaneme nasledovné vyjadrenie pre y-ovú zložku zrýchlenia:

$$a_y = -\frac{k}{m} y . \quad (11.12)$$

Výsledný kmitavý pohyb harmonického oscilátora sa dá popísať napr. funkciou kosínus s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{k/m}$ v tvare:

$$y(t) = A \cos(\omega t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right),$$

pričom perióda pohybu je $T = 2\pi\sqrt{k/m}$ a jej hodnota je 3.2 s.



Obr. 11.3 Simulácia kmitavého pohybu: čierna krivka AVR a červená ARV metóda. Z obrázku je zrejmé, že použitie metódy ARV dáva nesprávne výsledky.

Na Obr. 11.3 je znázornená simulácia kmitavého pohybu pre 2 rôzne metódy: čierna krivka AVR a červená ARV metóda. Z obrázku na základe skúseností môžeme povedať, že pri použití metódy ARV dostávame určite nesprávne výsledky. Zo skúseností vieme, že výchylka s časom klesá a určite nerastie. Pri výpočte polohy zo zrýchlenia (metóda AVR) dostávame správne výsledky.

```

Harmonický oscilátor. AVR metóda
//- ---- premenné, konštanty -----
dt = 0.04 ;                               { časový krok [s] }
k = 2.2;                                  { konštantna tuhosti [N/m] }
m = 0.055;                                { hmotnosť telesa [kg] }
// ---- počiatočné hodnoty -----

```

```

y := 0.1; v := 0; t := 0 ;
//----- model -----
Graf(g,-0.15,0.15,0,8,8,6);           {rozmery grafu sú prispôsobené výsledku}

for i := 1 to 200 do begin
  a := -(k/m) * y; v := v + a*dt;      { zrýchlenie a rýchlosť }
  y := y + v*dt;      t := t + dt;    { poloha a čas }
  PolozPero(g, t, y);
end;

```

Úloha 11.4:

Pád telesa a vrh nahor: Zistíte, ako vplyva odporová sila na pád guľičiek a pri pohybe lopty po vyhodení nahor vo vzduchu.

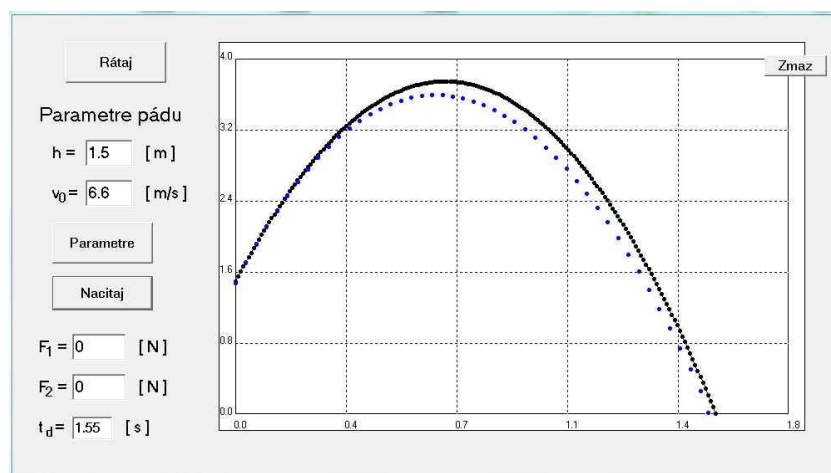
zdroj: vrh_nahor2.avi

Riešenie:

Tento prípad je zaujímavý aj tým, že sa mení smer odporovej – aerodynamickej sily (8.1), čo treba správne zapísať v programe. Pri pohybe smerom nahor je výsledná sila väčšia ako v prípade pádu nadol. Ak zachováme, že rýchlosť je kladná pri pohybe nahor (v smere osi y) a záporná pri páde (proti smere osi y), potom môžeme výslednú silu zapísať v tvare

$$F = -mg - \frac{1}{2} C S \rho v|v| . \quad (11.13)$$

Napriek tomu, že sa jedná už o zložitejšiu numerickú simuláciu, aj v tomto prípade použijeme Eulerovu – AVR metódu. Jedná sa o krátky časový okamih, teda môžeme dať kratší časový krok, a tým kompenzovať nepresnosť danej metódy.



Obr. 11.4 Porovnanie reálnych výsledkov získaných z Trackeru s numerickou simuláciou. Čierna krivka – neuvažoval sa odpor vzduchu, modré bodky – dáta z reálneho merania získané pomocou Trackeru.

```

Pád loptičiek a Vrh nahor loptou. AVR metóda
{ - - - - - premenné, konštanty - - - - - }
C = 0.48;           { súčiniteľ odporu }
rho = 1.3;          { hustota vzduchu [kg.m-3] }
R = 0.10;           { polomer lopty [m] }
m = 0.258;          { hmotnosť lopty [kg] }
g = 9.8;            { tiažové zrýchlenie [m.s-2] }
dt = 0.02;          { časový krok [s] }
A = C*pi*R2*rho/m   { súhrnná konštanta }

{ - - - - - počiatočné hodnoty - - - - - }
y0 = 1.5;           { počiatočná výška [m] }
v0 = 6.6;           { počiatočná rýchlosť [m/s] }
t = 0;      y = y0;      v=v0;

{ - - - - - model - - - - - }
Graf(g,0,1.6,0,4,5,5);      { rozmery grafu sú prispôsobené výsledku }

for i = 1 to 1000 do begin
  a = -g - A*v*abs(v);      { zmena zrýchlenia vplyvom odporu vzduchu }
                             { v mení smer odporovej sily }
  v = v + a*dt;             { poloha }
  y = y + v*dt;             { rýchlosť }
  if y < 0 then break;      { dopad na zem }
  t = t + dt;               { nárast času }
  PolozPero(g, t, y);       { vykresľovanie vypočítanej polohy }
end;

```

Z výsledkov prezentovaných na Obr. 11.4 je jasne vidieť, že v prípade zanedbania odporovej sily – čierna krivka, pozorujeme výraznejšie nepresnosti ako je maximálna výška a čas dopadu. To sa zhoduje s našim predpokladom a bežnými skúsenosťami s odporom vzduchu. Tu vidíme, že v prípade zanedbania odporovej sily teleso doletí vyššie, prípadne ďalej. Modré bodky sú z reálneho experimentu získané pomocou Trackera. Na obrázku nie je znázornená numerická simulácia so zarátaním aerodynamického odporu, lebo sa úplne stotožňuje s reálnymi dátami.

V rámci definícií rozsahu zakreslenia výsledkov do grafu je treba vedieť maximálne hodnoty času letu a dosiahnutej výšky. Tieto hodnoty dostaneme jednoduchým výpočtom, keď zanedbáme odpor vzduchu. Dráha a rýchlosť rovnomerne spomaleného pohybu HB je daná rovnicami:

$$s = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v = v_0 - g t \quad ,$$

kde h je počiatočná výška z ktorej vyhadzujeme teleso počiatočnou rýchlosťou v_0 (4.13) (4.14). Maximálna výška sa dosahuje, keď je rýchlosť telesa $v_y = 0$ m/s, teda v čase $t_m = v_0/g$ a jej hodnota je

$$s(t_m) = h_m = h + \frac{1}{2} v_0^2 / g \quad .$$

Po dosiahnutí maximálnej výšky teleso padá voľným pádom čas t_d . Jeho hodnotu určíme znova zo vzťahu pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu nasledujúcim výpočtom:

$$h_m = \frac{1}{2} g t_d^2 \quad \Rightarrow \quad t_d = \sqrt{\frac{2h + v_0^2 / g}{g}} .$$

Keď už teraz poznáme čas letu do maxima t_m a čas pádu t_d , pre celkový čas platí len ich jednoduchý súčet:

$$t_c = t_m + t_d .$$

11.3 Modifikovaná Eulerova metóda

Eulerova metóda nevyhniká veľkou presnosťou. Keď urobíme rozbor chýb danej metódy, zistíme, že spočiatku je dosť presná, ale táto presnosť neustále klesá. Je to z toho dôvodu, lebo hodnota derivácie v začiatku každého intervalu sa používa pre určenie odhadu na konci intervalu. V každom kroku teda daná metóda produkuje chybu, ktorá sa neustále kumuluje. Vylepšenie tejto metódy je založené na použití priemernej hodnoty namiesto derivácie podľa vzorca:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_n + \Delta t, y_n)}{2} \Delta t . \quad (11.14)$$

Tomuto zápisu sa hovorí *modifikovaná Eulerova metóda*. Pri jej použití však nepoznáme hodnotu funkcie na konci druhého kroku. V tomto prípade potrebujeme použiť vhodnú metódu odhadu. Modifikovaná metóda používa k tomuto začiatočnému odhadu pôvodnú Eulerovu metódu. V tomto prípade existujú dve možnosti a to odhad v polovičnom kroku, alebo na konci kroku. Pre prehľadnejší zápis modifikovanej Eulerovej metódy sa používajú dve pomocné premenné: k_1 a k_2 .

Ak si vyberieme možnosť pre odhad riešenia v polovici kroku, dostávame **prvú modifikovanú Eulerovu metódu**. Počítame ju podľa vzorcov:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{2} \Delta t, y_n + \frac{1}{2} \Delta t \cdot k_1\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t \cdot k_2, \quad \Delta t = x_{n+1} - x_n . \end{aligned} \quad (11.15)$$

V prípade druhej možnosti, kde urobíme odhad riešenia na konci kroku, dostávame **druhú modifikovanú Eulerovu metódu**. V tomto prípade sú vzorce nasledovné:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} \Delta t \cdot (k_1 + k_2), \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n . \end{aligned} \quad (11.16)$$

Prvá aj druhá modifikovaná metóda sa používa aj pod pojmom Runge Kutta 2. rádu.

Algoritmus *prvej modifikovanej Eulerovej metódy* vyzerá nasledovne:

```

Procedure Euler2(x0,y0,n,h,var xx,yy:Vektor)
  Var i:integer
      k1, k2:real;

```

```

Begin
  xx[1] := x0;
  yy[1] := y0;
  for i := 1 to n do
    k1 := h*f(xx[i],yy[i]);
    k2 := h*f(xx[i]+h/2,yy[i]+k1/2);
    xx[i+1] := xx[i]+h;
    yy[i+1] := yy[i]+k2;
  end;
End;

```

11.4 Metódy Runge Kutta

Tieto metódy sú veľmi univerzálne a v technickej praxi často používané. V podstate sú založené na Taylorovom rozvoji funkcie, ale nie priamo tak, aby sme nemuseli určovať hodnoty derivácií funkcie. Tieto sa aproximujú výpočtom samotnej funkcie vo vhodne zvolených strategických bodoch. Ich všeobecná schéma má tvar

$$y_{k+1} = y_k + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \dots + a_p k_p, \quad (11.17)$$

$$k_r = h \cdot f \left(x_k + \alpha_r h, y_k + \sum_{j=1}^p \beta_{rj} k_j \right), \quad r = 1, 2, 3, \dots, p, \quad (11.18)$$

kde a_i , α_i , β_i sú vhodne vybrané konštanty.

Podľa hodnoty β_i rozdeľujeme danú metódu na:

- explicitná metóda: $\beta_{rj} = 0, \quad j \geq r$, postupne určujeme koeficienty k_i
- implicitná metóda: $\beta_{rj} \neq 0, \quad j \geq r$, na získanie k_i musíme riešiť sústavu rovníc.

V prípade explicitnej metódy neznáme koeficienty volíme tak, aby riešenie určené rovnicou po rozvinutí do Taylorovho radu malo čo najviac členov rovnakých ako v rozvoji presného lokálneho riešenia. Ide vlastne o postupné určovanie koeficientov k_i pomocou už vypočítaných predchádzajúcich koeficientov $k_j, j < i$.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_k, y_k) \\
 k_2 &= hf(x_k + \alpha_2 h, y_k + \beta_2 k_1) \\
 k_3 &= hf(x_k + \alpha_3 h, y_k + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) \\
 y_{k+1} &= y_k + a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 \quad .
 \end{aligned} \quad (11.19)$$

V nasledujúcej časti uvedieme len najznámejšie metódy.

Metóda Runge-Kutta 2. rádu

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_k, y_k) \\
 k_2 &= f \left(x_k + \frac{h}{2\alpha}, y_k + \frac{h}{2\alpha} k_1 \right) \\
 y_{k+1} &= y_k + h \cdot (1-\alpha) \cdot k_1 + h \cdot \alpha \cdot k_2 \quad \alpha = 1 \quad \text{alebo} \quad 1/2 \quad .
 \end{aligned}$$

Ako už bolo povedané, jedná sa o modifikovanú Eulerovu metódu (11.15), (11.16).

Najčastejšie uvádzaná a najpoužívanejšia z metód typu Runge-Kutta je metóda *Runge-Kutta 4. rádu*. Postup je nasledovný: najprv vypočítame hodnoty pravej strany v 4 bodoch a potom nová hodnota v nasledujúcom bode je lineárna kombinácia týchto hodnôt:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2) \\ k_3 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (11.20)$$

11.5 Riešenie sústav diferenciálnych rovníc

Vo viacerých prípadoch máme dve prípadne viacero neznámych, ktoré sú zviazané systémom diferenciálnych rovníc. Majme nasledovný systém dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f_1(t, y, z) \\ \dot{z} &= f_2(t, y, z) \\ y(t_0) &= y_0, \quad z(t_0) = z_0 \end{aligned} \quad (11.21)$$

Metóda Runge-Kutta 2. rádu pre systém rovníc

$$\begin{aligned} k_1 &= f_1(t_i, y_i, z_i) \\ l_1 &= f_2(t_i, y_i, z_i) \\ k_2 &= f_1(t_i + \Delta t, y_i + h \cdot k_1, z_i + h \cdot l_1) \\ l_2 &= f_2(t_i + \Delta t, y_i + h \cdot k_1, z_i + h \cdot l_1) \end{aligned} \quad (11.22)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2} (k_1 + k_2), \quad z_{i+1} = z_i + \frac{\Delta t}{2} (l_1 + l_2) \quad .$$

V prípade metódy Runge-Kutta 4. rádu je viacej výpočtov, lebo počítame až 4 x 2 pomocných koeficientov. Z napísaného je však dosť jasné, ako to bude teraz vyzerat'.

Úloha 11.5:

Šikmý vrh – hod loptou: Každý z nás už určite hádzal tenisovou loptičkou, loptou alebo iným teleso a vie, že d'aleko dohodit', znamená tiež zvolit' vhodný uhol. Ako vlastne letí loptička? Počiatočná rýchlosť loptičky nech je v_0 a s vodorovnou rovinou zvierá uhol α . Počas letu tu pôsobia dve sily: tiažová sila, smerujúca zvisle dole a odpor prostredia, sila smerujúca proti smeru pohybu loptičky. Obe sily vieme určiť: $F_G = mg$ a $F_0 = \frac{1}{2} C_x \rho v^2 S$, kde konštanta C_x závisí na tvare telesa (gul'a $C_x = 0,4$), ρ je hustota vzduchu, v je veľkosť okamžitej rýchlosti a S je jeho plocha. V každom okamihu letu loptičky platí vektorová

rovnicou $m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_0$. Pre vodorovnú zložku okamžitej rýchlosti dostávame z predchádzajúcej rovnice platí: $m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} \rho v^2 S C_x \cos \alpha$ a pre zvislú zložku rýchlosti zase platí: $m \frac{dv_y}{dt} = -mg - \frac{1}{2} \rho v^2 S C_x \sin \alpha$. **Zakreslite priebeh letu loptičky.**

Úloha 11.6:

Lotka a Volterra: Riešte dve navzájom zviazané diferenciálne rovnice metódou Runge - Kutta alebo tzv. problém predátor - korisť (líšky a zajace).

Riešenie:

Tento problém asi všetci dobre poznáte: Majme malý biologický mini-eko-systém, pozostávajúci z dvoch druhov, z ktorých jeden je v potravinovom reťazci vyššie a ten druhý nižšie (inými slovami, dravec požíra svoju obeť, lebo hlad je skrátka hlad). Obyčajne sa hovorí o líškach a zajacoch. Začal to v roku 1926 matematik Vito Volterra článok, keď publikoval jednoduchý model predátorov vysvetľujúci kolísanie populácie rýb v Stredozemnom mori po 1. svetovej vojne. Nezávisle na ňom dospel k rovnakým diferenciálnym rovniciam i Alfred Lotka. Lotka popisoval hypotetické chemické reakcie, na ktorých by mohol vysvetliť periodické chovanie koncentrácie reagujúcich látok. Lotka a Volterra sú považovaní za priekopníkov zlatej éry teoretickej ekológie.

To, o čo nám v tejto úlohe ide, je známy problém riešenia dvoch navzájom zviazaných diferenciálnych rovníc metódou Runge -Kutta.

Sformulujme teda úlohu a stanovme stratégiu na jej riešenie. Zmena počtu zajacov y_1 závisí od prirodzeného prírastku daného koeficientom a a počtu zajacov zjedených líškami, koeficient b . Zmena počtu líšok y_2 závisí od koeficientu ich vzájomnej potravinovej konkurencie c a koeficientu dostupnosti potravy d . Výsledné rovnice majú teda tvar:

$$\begin{aligned}y_1' &= (a - b y_2) y_1 \\y_2' &= (-c + d y_1) y_2\end{aligned}$$

$$y_1(t_0) = 80, y_2(t_0) = 90$$

Použite nasledovné koeficienty $a = 1.2$; $b = 0.01$; $c = 1$; $d = 0.02$ a potom experimentujte s počiatočným počtom zajacov a líšok.

11.6 Diferenciálne rovnice vyššieho rádu

Vo fyzike sa stretávame aj s diferenciálnymi rovnicami druhého rádu. Medzi takú najznámejšiu patrí už spomínaný II. Newtonov zákon (2.1), ale aj mnohé ďalšie (prúd v RLC obvode, pohybová rovnica kruhového pohybu, ...). Daný typ diferenciálnej rovnice má nasledovný tvar s n začiatočnými podmienkami:

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) &= f(t, y, y'(t), y''(t), y'''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\y^{(i)}(t) &= y_i(0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1\end{aligned} \quad (11.23)$$

Rovnica sa dá zjednodušiť zavedením nasledovných substitúcií: $y_1(x) = y'(x)$, $y_2(x) = y_1'(x)$, $y_3(x) = y_2'(x)$, ... Takouto jednoduchou substitúciou dostávame miesto diferenciálnej rovnice n -tého rádu pre neznámu funkciu $f(\bar{x})$ systém diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie:

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \dots \quad (11.24)$$

Riešenie takéhoto systému diferenciálnych rovníc sme si už ukázali v predošlom odseku.

Zníženie rádu diferenciálnej rovnice ukážeme na II. Newtonovom pohybovom zákone, ktorý sa používa pri riešení pohybov telies. V tomto prípade zavedenie známu substitúciu v tvare: $v(t) = y'(t)$ a výsledná sústava rovníc pre pohyb v jednom smere má známy tvar:

$$\begin{aligned} a(x) &= f(t, y, v) \\ v(t) &= y'(t) \\ y(0) &= y_0, \quad v(0) = v_0 \end{aligned}$$

Tu by sme mohli použiť postup riešenia ako v predošlom prípade. No, keďže tento spôsob je dosť komplikovaný bolo odvodené jednoduchšie riešenie.

Runge-Kutta 2. rádu pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu má tvar:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_k \\ k_2 &= a\left(t_k + 2\Delta t/3, v_k + k_1 2\Delta t/3, y_k + v_k 2\Delta t/3 + k_1 2\Delta t^2/9\right) \\ y_{k+1} &= y_k + v_k \Delta t + (k_1 + k_2)\Delta t^2/4 \\ v_{k+1} &= v_k + (k_1 + 3k_2)\Delta t/4 \\ t_{k+1} &= t_k + \Delta t \end{aligned} \quad (11.25)$$

Jedno z využití je pri výpočte pohybu telesa po kružnici, kde zrýchlenie je dané výrazom (1.75)

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} - \frac{v^2}{R} \vec{\rho}.$$

V tomto prípade je použitie Eulerovej metódy nevhodné, lebo dáva úplne nesprávne metódy.

Runge-Kutta 4. rádu pre diferenciálnu rovnicu 2. rádu je v nasledovnom tvare:

$$\begin{aligned} k_1 &= a_k \\ k_2 &= a\left(t_k + \Delta t/2, v_k + k_1 \Delta t/2, y_k + v_k \Delta t/2 + k_1 \Delta t^2/8\right) \\ k_3 &= a\left(t_k + \Delta t/2, v_k + k_2 \Delta t/2, y_k + v_k \Delta t/2 + k_2 \Delta t^2/8\right) \\ k_4 &= a\left(t_k + \Delta t, v_k + k_3 \Delta t, y_k + v_k \Delta t + k_3 \Delta t^2/2\right) \\ y_{k+1} &= y_k + v_k \Delta t + \frac{\Delta t^2}{6} \cdot (k_1 + k_2 + k_3) \\ v_{k+1} &= v_k + \frac{\Delta t}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ t_{k+1} &= t_k + \Delta t \end{aligned} \quad (11.26)$$

Úloha 11.7:

Spriahnuté kyvadlá. Riešte sústavu dvoch spriahnutých matematických kyvadiel pomocou pružiny s tuhosťou k . Matematické kyvadlá majú dĺžku závesu l s rôznymi hmotnými závažiami m_1 a m_2 . Skúmajte nasledovné možnosti:

- Obidve kyvadlá vychýľte na rovnakú stranu.
- Jedno kyvadlo vychýľte na opačnú stranu ako druhé.
- Jedno kyvadlo vychýľte z rovnovážnej polohy a druhé nechajte v rovnovážnej polohe ($k=3\text{N/m}$).

Riešte pre parametre: $k = 10 \text{ N/m}$, $l = 1 \text{ m}$, $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $m_1 \neq m_2$.

Riešenie:

Diferenciálnu rovnicu popisujúcu kmitavý netlmený pohyb jedného kyvadla možno nájsť v literatúre (Hockicko, 2013). Daná rovnica sa dá prepísať na tvar: $m_l \ddot{x} = -mgx$, kde x je výchylka v smere osi x , m hmotnosť telesa a l dĺžka závesu. V prípade dvoch kyvadiel spriahnutých pružinou s tuhosťou k dostávame dve diferenciálne rovnice:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -m_1 g x - k(x - y) \\ m_2 \ddot{y} &= -m_2 g y - k(y - x), \end{aligned}$$

kde m_1, m_2 je hmotnosť jedného a druhého závažia a x, y výchylka prvého a druhého závažia v čase. Pre jednotlivé výchylky dostaneme nasledovný tvar sústavy diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{g}{l} x - \frac{k}{m_1 l} (x - y) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1 l}\right) x + \frac{k}{m_1 l} y \\ \ddot{y} &= -\frac{g}{l} y + \frac{k}{m_2 l} (x - y) = +\frac{k}{m_2 l} x - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_2 l}\right) y. \end{aligned}$$

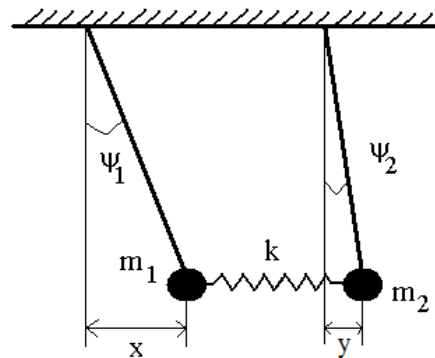
V tomto prípade vyjadríme diferenciálnu rovnicu 2. rádu pomocou Eulerovej metóda a teda systém rovníc prejde na nasledovný tvar:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{x_{n-1} - 2x_n + x_{n+1}}{t^2} = a_{11}x_n + a_{12}y_n & x_{n+1} &= t^2(a_{11}x_n + a_{12}y_n) + 2x_n - x_{n-1} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{t^2} = a_{21}x_n + a_{22}y_n & y_{n+1} &= t^2(a_{21}x_n + a_{22}y_n) + 2y_n - y_{n-1}, \end{aligned}$$

kde prvky matice A sú členmi zodpovedajúcim predošlým rovniciam.

Celý proces výpočtu umiestnime do tlačidla Button:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
  k, l, m1, m2, v1, v2: real;
  x,y: array[1..101] of real;
  i: integer;
begin
  { Načítaj jednotlivé údaje --- k, m1,m2,l ----- }
  { x[1], v1 – počiatočná poloha a rýchlosť 1. kyvadla }
  { x[2], v2 – počiatočná poloha a rýchlosť 2. kyvadla }
```



```

{-----Vytvorenie matice odpovedajúcimi prvkami-----}
A[1,1] := -(k/(l*m1) + g/l);
A[1,2] := k/(l*m1);
A[2,1] := k/(l*m2);
A[2,2] := -(k/(l*m2) + g/l);
{----- Výpočet polohy v 2. kroku a ďalších krokoch -----}
x[2] := v1*t+x[1];
y[2] := v2*t+y[1];

for i := 2 to 100 do begin
  x[i+1] := t*t*(A[1,1]*x[i]+A[1,2]*y[i])+2*x[i]-x[i-1];
  y[i+1] := t*t*(A[2,1]*x[i]+A[2,2]*y[i])+2*y[i]-y[i-1];
end;
{-----Kresli -----}
Graf(g1, 0,100, -2,2,5,6);

g1.Pen.Color := clRed; {---- vykresľovanie pohybu 1. kyvadla ----}
PolozPero(g1,0,10*x[1]+1);
for i:=2 to 100 do
  Kresli(g1,i,10*x[i]+1);

g1.Pen.Color := clGreen; {---- vykresľovanie pohybu 2. kyvadla ----}
PolozPero(g1,0,10*y[1]-1);
for i:=2 to 100 do
  Kresli(g1,i,10*y[i]-1);
end;

```

Úloha 11.8:

Pád gule v kvapaline. Laminárne obtekanie telies je súčasťou stredoškolského kurzu fyziky. Keď si uvedieme i Stokesov vzorec pre výpočet odporu prostredia pri laminárnom obtekaní gule, sme schopní zostaviť pohybovú rovnicu pre pád gule v kvapaline v tvare: $m a = G - F_V - F_S$, kde m je hmotnosť gule, a jej zrýchlenie, F_V vztlaková sila a F_S odpor prostredia. Pre veľkosť odporu prostredia platí: $F_S = 6 \pi \eta r v$, kde zase r je polomer gule, v veľkosť rýchlosti a η je dynamická viskozita kvapaliny. Zakreslite priebeh rýchlosti a dráhy gule v kvapaline, kým nedosiahne 99% finálnej rýchlosti.

11.7 Viackrokové metódy

Jednokrokové metódy pre numerické riešenie diferenciálnych rovníc sú veľmi často používané aj napriek ich komplikovanosti a chýb vznikajúcich pri ich výpočtoch. Je to z dôvodu, že v rámci výpočtu novej hodnoty y_i používajú odhad integrálu

$$y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt,$$

z pár hodnôt funkcie v bodoch získaných z predchádzajúceho výpočtu x_{i-1} , y_{i-1} a pomocných krokov. Tieto hodnoty sú skombinované tak, aby vykompenzovali vznikajúce chyby pri

výpočtoch. Takýmto spôsobom sú za cenu väčšej zložitosti odvodené aj metódy vyšších rádov (prvá a druhá modifikácia Eulerovej metódy – 2. rád, metódy Runge-Kutta – 4. rád).

Pri viackrokových metódach sa používa na výpočet riešenia v nasledovnom uzle siete y_i (lepšieho odhadu integrálu) niektoré predchádzajúce uzly a riešenia: $x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}$ a $f_i = f(x_i, y_i)$. Toto dovoľuje napríklad zvýšiť rád metódy bez toho, aby sme potrebovali ďalšie pomocné kroky, ako je to v Runge-Kutta metódach. V ďalšej časti sa venujeme len metódam s konštantným krokom kvôli jednoduchosti.

Viackrokovou alebo k -krokovou metódou budeme volať metódu danú vzťahom

$$y_{i+1} = \sum_{j=1}^k a_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=0}^k b_j f_{i+1-j}, \quad (11.27)$$

kde a_j a b_j sú konštanty. V prípade ak $b_j = 0$, jedná sa o explicitnú metódu, ak $b_j \neq 0$, ide o tzv. implicitnú metódu.

Zrejmom nevýhodou viackrokovej metódy je, že riešenie v prvých k uzlových bodoch x_0, \dots, x_k musíme získať iným spôsobom. K tomuto účelu sa väčšinou používajú jednokrokové metódy rovnakého rádu presnosti, aký má ďalej používaná viackroková metóda.

11.7.1 Adamsove-Basforthove metódy (explicitné)

Tieto metódy tu uvádzame ako jeden z príkladov z explicitných metód (Navara, 2003). Vychádza sa z toho, že hodnotami pravej strany $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$ (odpovedajúce uzlovým bodom $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-s+1}$) preložíme interpolačný polynóm φ_i a ten integrujeme namiesto neznámej funkcie $f(t, y(t))$ v tvare

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_{i-s+1}}^{x_i} \varphi_i(t) dt. \quad (11.28)$$

V skutočnosti však nie je treba počítať interpolačný polynóm φ_i . Z numerického výpočtu integrálov lichobežníkovou alebo Simpsonovou metódou vieme, že výsledok závisí lineárne na predchádzajúcich hodnotách

$$y_{i+1} - y_i = h \sum_{j=0}^{s-1} w_j f_{i-j}, \quad (11.29)$$

kde w_j sú vopred vypočítané konštanty pre danú metódu. Jeden krok metódy teda predstavuje len jeden výpočet pravej strany a jednu lineárnu kombináciu s hodnôt. Rád metódy s teda predstavuje aj počet použitých bodov.

Ak $s = 1$, polynóm $\varphi_i = f_i$ je konštantný a jednokroková Adamsova-Bashforthova metóda je totožná s Eulerovou metódou.

Ak $s = 2$, φ_i je lineárny polynóm preložený bodmi: $(t_i, f_i), (t_{i-1}, f_{i-1})$, t.j.

$$\varphi_i = f_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h} (t - t_i).$$

Výsledná dvojkroková Adamsova-Bashforthova metóda má potom predpis

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{h}{2}(f_i - f_{i-1}) = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) . \quad (11.30)$$

Troj kroková a štvorkroková Adamsove-Bashforthove metódy sú dané predpismi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}) \quad (11.31)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) . \quad (11.32)$$

Aj tieto metódy majú svoje nevýhody. Koeficienty v lineárnych kombináciách majú rôzne znamienka, vďaka čomu vznikajú zaokrúhľovacie chyby. Druhá vážna chyba je, že pri zostavovaní polynómu používame interval, ktorý je mimo uzlových bodov – extrapolácia. Z tohto dôvodu sa tieto metódy používajú skorej ako súčasť zložitejších metód, hlavne pri metóde prediktor-korektor.

11.7.2 Adamsove-Moultonove metódy (implicitné)

Tieto metódy používajú podobnú myšlienku ako predošlé Adamsove-Bashforthove metódy, teda pravú stranu $f(t, y(t))$ tiež aproximujú interpolačným polynómom. Aby sme sa vyhli veľkým chybám vzniknutým pri extrapolácii, na prípravu interpolačného polynómu φ používame okrem hodnôt $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-s+1}$ i hodnoty pravej strany v bode t_{i+1} t.j.

$$f_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) .$$

Tento výsledok však už závisí i na výslednej hodnote y_{i+1} . Rovnako ako u Adamsovej-Bashforthovej metódy sa aj v tomto prípade postup redukuje na výpočet lineárnej kombinácie hodnôt pravej strany

$$y_{i+1} - y_i = h \sum_{j=1}^{s-1} w_j f_{i-j} , \quad (11.33)$$

kde w_j sú vopred vypočítané konštanty pre daný rád metódy. Oproti vzťahu (11.29) koeficient j začína už na hodnote -1. Po dosadení za f_{i+1} dostávame rovnicu

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{s-1} w_j f_{i-j} , \quad (11.34)$$

ktorej hovoríme implicitná metóda pre neznámu hodnotu y_{i+1} . Nevýhodou je, že len v malom počte prípadov sa dá riešiť analyticky a tým realizovať náš zámer výpočtu novej hodnoty. Používa sa tiež v metóde prediktor-korektor, čo je hlavný spôsob využitia implicitných metód.

Ak $s = 1$, φ_i je lineárna funkcia preložená bodmi $(t_i, f_i), (t_{i+1}, f_{i+1})$, t.j.

$$\varphi_i = f_i + \frac{f_{i+1} - f_i}{h}(t - t_i) .$$

Adamsova-Moultonova metódu 2. rádu je daná rovnicou

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i). \quad (11.35)$$

Adamsova-Moultonova metóda 3. a 4. rádu sú dané rovnicami

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}), \quad (11.36)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (11.37)$$

11.8 Metóda prediktor – korektor

Tu zaraďujeme široké spektrum metód, ktoré sa vo veľkom počte používajú hlavne v úlohách, kde dosiahnutie vysokej presnosti je komplikované. Ide o kombináciu implicitných metód, ktoré sú menej citlivé na pôsobenie zaokrúhľovacích chýb s explicitnými metódami. Základom je **korektor**, k čomu sa používa niektorá z implicitných metód vhodne modifikovaná tak, aby sa dala riešiť numericky. V j -tej iterácii sa z nej počíta odhad $y_{i+1,j}$ hodnoty y_{i+1} , pričom na pravej strane sa použije odhad $y_{i+1,j+1}$ získaný v predchádzajúcej iterácii. V prípade *Adamsovej-Moultonovej metódy* dostávame nasledovný predpis

$$y_{i+1,j} = y_i + h \sum_{j=0}^{s-1} w_j f_{i-j} + h f(t_{i+1}, y_{i+1,j-1}). \quad (11.38)$$

V podstate sa jedná o riešenie rovnice (11.34) metódou prostej iterácie. Vstupný odhad $y_{i+1,0}$ musíme nájsť inou explicitnou metódou.

Pre popis algoritmu zostáva stanoviť riadiaci mechanizmus iteračného použitia korektoru. Je zvykom jednotlivé kroky výpočtu označovať skratkami podľa odpovedajúcich anglických pomenovaní: **P** pre **prediktor**, **C** pre **korektor** (corector). Okrem týchto je dôležitou časťou výpočtu aj vyhodnotenie pravej strany (**E - evaluation**), t.j.

$$f_{i+1,j} = f(t_{i+1}, y_{i+1,j}) \quad j = 0, 1, \dots$$

Ako je zvykom pri prostej iterácii, cyklus sa opakuje dovtedy, kým sa nedosiahne dostatočne malý rozdiel výsledkov $y_{i+1,j} - y_{i+1,j-1}$. Táto požiadavka však môže spôsobiť výrazný pokles rýchlosti riešenia, lebo dopredu nevieme, koľko iterácií budeme potrebovať. No treba si uvedomiť, že aj rovnica (11.38) je aproximáciou riešenia diferenciálnej rovnice. Z tohto dôvodu sa vyberá konštantný počet opakovaní - k , odpovedajúci mechanizmus sa potom formálne zapisuje $P(EC)^kE$. Vo väčšine prípadov sa volí $k = 1$ a potom vypočítaný korektor sa použije len raz a riadiaci mechanizmus sa zapisuje PECE.

Uvažujeme najjednoduchšiu variantu **Adamsovej metódy** pre $s = 1$. Prediktorom je *Eulerova metóda* (1. rád)

$$y_{i+1,0} = y_i + h f_i$$

a korektorom je *Adamsova-Moultonova metóda* 2. rádu

$$y_{i+1,j+1} = y_i + h (f_i + f(t_{i+1}, y_{i+1,j}))$$

1. Adamsova metóda
Prediktor

$$y_{i+1,0} = y_i + \frac{1}{24} h (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}) \quad (11.39)$$

Korektor

$$y_{i+1,j+1} = y_i + \frac{1}{24} h (9f(t_{i+1}, y_{i+1,j}) + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (11.40)$$

2. Milnova metóda:

Prediktor

$$y_{i+1,0} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) \quad (11.41)$$

Korektor

$$y_{i+1,j+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3} h (f(t_{i+1}, y_{i+1,j}) + 4f_i + f_{i-1}). \quad (11.42)$$

3. Hammingova metóda:

Prediktor

$$y_{i+1,0} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) \quad (11.43)$$

Korektor

$$y_{i+1,j+1} = \frac{9}{8} y_i - \frac{1}{8} y_{i-2} + \frac{3}{8} h (f(t_{i+1}, y_{i+1,j}) + 2f_i - f_{i-1}). \quad (11.44)$$

Viacukrokové metódy sú väčšinou rýchlejšie ako metódy jednokrokové. Majú však tiež pár nevýhod. Jednou z nevýhod je ich zložitejšie štartovanie. Skôr ako začneme viacukrokovú metódu používať, je treba poznať riešenie v pár bodoch. Počiatočná podmienka udáva riešenie len v jednom bode. Riešenia v ďalších bodoch je teda potrebné vypočítať vhodnou jednokrokovou metódou.

Úloha 11.9:

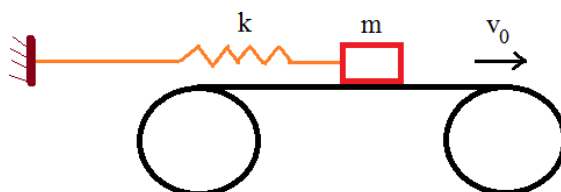
Mechanická sústava: Majme jednoduchú mechanickú sústavu znázornenú na Obr. 11.5. V tomto usporiadaní pozorujeme vynútené kmity telesa uloženého na pohyblivom páse, ktorý vzniká trením, čo vyvoláva oscilácie systému. Pohybová diferenciálna rovnica popisujúca pohyb telesa má tvar:

$$m\ddot{x} + T(\dot{x} - v_0) + kx = 0,$$

kde funkcia $T = f(v)$ popisuje závislosť sily trenia od rýchlosti v a x je výchylka z rovnovážnej polohy, ktorá je určená podmienkou: $x_0 = -\frac{1}{k}T(-v_0)$. Pribeh funkcie T sa dá istým spôsobom aproximovať funkciou v tvare:

$$T(\dot{x} - v_0) = -a(\dot{x} - v_0) + \frac{1}{3}b(\dot{x} - v_0)^3 + c \operatorname{sign}(\dot{x} - v_0).$$

Diferenciálnu rovnicu riešte najprv metódou Runge-Kutta 2. rádu a potom Runge-Kutta 4. rádu. Určte priebehy kmítov: výchylku a rýchlosť v danej sústave pre rýchlosti a) $v_0 = 10 \text{ m/s}$ a b) $v_0 = 250 \text{ m/s}$.



Obr. 11.5 Schematické zobrazenie mechanického modelu.

Úloha 11.10:

Tlmený oscilátor: Ďalším skúmaným pohybom v tejto časti sú tlmené kmity, s ktorými sa bežne stretávame v živote. Úloha teda znie: Modelujte tlmené kmity mechanického oscilátora vytvoreného pružinou s tuhosťou k . Na pružine je zavesené teleso o hmotnosti m , ktoré je ponorené vo vode. Teleso vychýlime z rovnovážnej polohy o vzdialenosť y_0 a v čase $t = 0$ s uvoľníme. Úlohu riešte pre hodnoty $k = 2.2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, $m = 55\text{g}$, $y_0 = 7 \text{ cm}$.

zdroj: [tlmene kmity2.avi](#)

Riešenie:

Aj v tomto prípade by sme mohli použiť Eulerovu metódou - metódu AVR. Keďže sa však jedná o tlmený kmitavý pohyb s pomerne rýchlou zmenou rýchlosti, použijeme už spomínanú metódu Runge-Kutta 4. rádu pre riešenie pohybovej diferenciálnej rovnici 2. rádu popisujúcu pohyb v smere osi y . V pohybovej rovnici použijeme silu pružnosti ($F = -k y$), Stokesovu silu a po jednoduchej úprave dostaneme nasledovné vyjadrenie pre y -ovú zložku zrýchlenia:

$$a_y = -\frac{k}{m} y - b v^2 \quad (11.45)$$

Tlmený oscilátor. RK42 metóda (11.15), (11.16)

//- - - - - premenné, konštanty - - - - -

dt = 0.02 ; { časový krok [s] }
 g = dt * dt / 2; { pomocná konštanta }
 k = 2.2; { konštanta tuhosti [N/m] }
 m = 0.051; { hmotnosť telesa [kg] }
 b = 0.05; { koeficient útlmu [1/s] }

y = 0.1; v = 0; t = 0 ; { počiatočné hodnoty }

Graf(g,0,10,-8,8,10,10); { rozmery grafu sú prispôsobené výsledku }

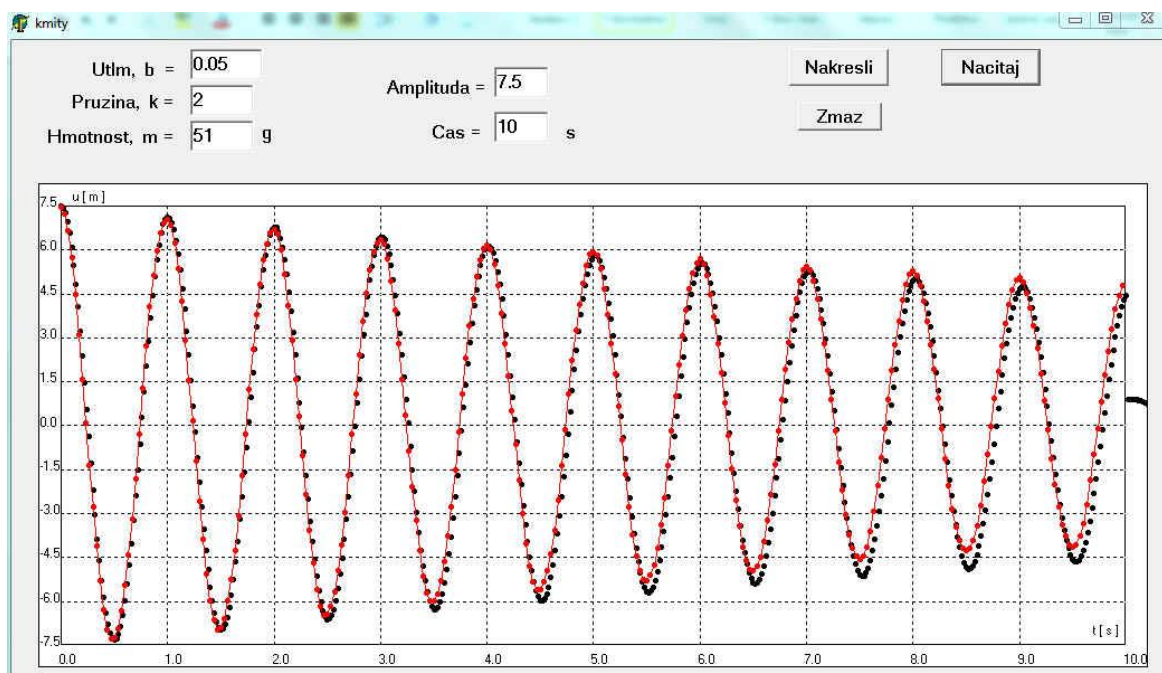
for i=1 to 200 do begin

k1 = g * (-(k/m) * y - b * v^2);
 k2 = g * (-(k/m) * (y + dt*v/2+k1/4) - b * (v+k1/dt)^2);
 k3 = g * (-(k/m) * (y + dt*v/2+k2/4) - b * (v+k2/dt)^2);
 k4 = g * (-(k/m) * (y + dt*v+k2) - b * (v+2*k3/dt)^2);

y = y + dt*v+(k1+k2+k3) / 3;
 v = v + (k1+2*k2+2*k3+k4) / (3*dt);
 t = t + dt;

PolozPero(g, t, y);

end;



Obr. 11.6 Porovnanie reálnych výsledkov získaných z Trackeru s numerickou simuláciou. Čierne bodky – numerická simulácia, červené bodky – dáta z reálneho merania získané pomocou Trackeru.

Z výsledkov prezentovaných na Obr. 11.6 je krásne vidieť, že numerická simulácia sa výborne zhoduje s reálnymi nameranými dátami. Pomocou týchto vizuálnych porovnaní sa dá jasne vidieť, ako sa menia simulované dáta zmenou vybraných parametrov. Pomocou takejto simulácie sa dá zistiť aj hodnota útlmu, prípadne iných parametrov ak ich porovnáme s reálnymi dátami.

Úloha 11.11:

Riešte voľný pád guľičky v kvapaline, na ktorú pôsobí Stokesova odporová sila. Nakreslite priebeh jej dráhy a rýchlosti v závislosti na čase. Úlohu riešte pre hodnoty $\eta = 1.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $r = 4.2 \text{ mm}$, hustota kvapaliny je 1260 kg/m^3 a hustota telesa je 2400 kg/m^3 .

Riešenie:

Na guľičku pohybujúcu sa v kvapaline okrem odporovej Stokesovej sily

$$F_S = 6 \pi \eta r v,$$

pôsobí vždy aj vztlaková sila (6.7)

$$F_{vz} = V \rho_K g.$$

Pôsobenie výsledných síl na padajúcu guľičku sa dá zapísať nasledovne:

$$F = F_g - F_S - F_{vz},$$

kde $F = m a$, $F_g = m g$ a ak zoberieme do úvahy, že $m = V \rho_T$ a $V = (4/3) \pi r^3$, tak dostaneme po úprave diferenciálnu rovnicu pre zmenu rýchlosti v čase

$$\frac{dv}{dt} = \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_T}\right) g - \frac{9\eta}{2r^2\rho_T} v. \quad (11.46)$$

Zo znalosti rýchlosti v každom čase, ktorú počítame metódou Runge-Kutta 4. rádu už nie je problém určiť prejdenú dráhu ako

$$s_i = s_{i-1} + v_i \Delta t .$$

Dôležitý údaj pre vykresľovanie do grafu je maximálna rýchlosť. Rýchlosť guľičky exponenciálne narastá k maximálnej hodnote, ktorá už potom odpovedá výslednej konštantnej rýchlosti. V tomto prípade je už výsledná sila nulová alebo $dv/dt = 0$ a pre maximálnu rýchlosť platí:

$$v_m = \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_T}\right) g \frac{2r^2 \rho_T}{9\eta} .$$

Úloha 11.12:

Obeh družice okolo Zeme. Vo vzťaznej sústave so začiatkom v strede Zeme modelujte pohyb družice, ktorá má perigeum vo vzdialenosti 6 700 km od zemského stredu a jej rýchlosť má v perigeu veľkosť 9 000 m/s. Hmotnosť Zeme $M = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, gravitačná konštanta $\chi = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Vzťaznú sústavu považujte za inerciálnu (Šedivý, 2005).

Riešenie:

Vzťaznú sústavu orientujeme tak, že perigeum sa nachádza na kladnej poloosi y. Pri pohybe družice pôsobí na ňu gravitačná sila a keď ju rozpíšeme na zložky dostaneme nasledovné rovnice:

$$F = ma = -\chi \frac{mM_Z}{r^3} \vec{r} , \quad a_x = -\chi \frac{mM_Z}{r^3} x , \quad a_y = -\chi \frac{mM_Z}{r^3} y .$$

Použijeme metódu Runge-Kutta 2. rádu s časovým krokom 60 s. V programe sa dajú nastaviť počiatočné podmienky pre rýchlosť a polohu. Sú tiež podmienené príkazmi na ukončenie programu. Výpočet polohy družice je riešený cez **Timer**, čo spôsobuje postupné vykresľovanie polohy družice. Program doplňte ešte o výpočet doby obehu družice, výpočtu konečnej polohy a polohy apogea.

```
G1:=Image1.Canvas;
Graf(G1,-2,2,-3,1,6,6);
G1.Pen.Color:=clred;
for i:=0 to 360 do {kreslenie Zeme}
  PolozPero(G1,0.63*cos(3.14*i/180),0.63*sin(3.14*i/180));
G1.Pen.Color:=clblack;
m := 6E24; {hmotnosť zeme}
km := m * 6.67E-11; {gravitačná konštanta}
h := 60;

{*****}
t := 0; x:= 0; y := 6.7E6; vx := 9000; vy := 0; c := 0;

vx := SpinEdit1.Value * 1000; {počiatočná rýchlosť}
y := SpinEdit2.Value * 1e5; {počiatočná vzdialenosť}
t := 0; x:= 0; vy := 0; c := 0;
```

```

procedure TForm1.Timer1Timer(Sender: TObject);
begin
  xr := x; yr := y; vxr := vx; vyr := vy;           {predefinovanie parametrov}
  f := -km/( (x*x + y*y)*sqrt(x*x + y*y));         {Newtonov Gravitačný zákon}
  ax := f*x; ay := f*y;                             {AVR metóda, určenie zložiek zrýchlenia}
  kx := ax; ky := ay;                               {Metoda RK2}
  x := xr + vxr*h*2/3 + ax*h*h*2/9; vx := vxr + ax*h*2/3;
  y := yr + vyr*h*2/3 + ay*h*h*2/9; vy := vyr + ay*h*2/3;
  f := -km/( (x*x + y*y)*sqrt(x*x + y*y));
  ax := f*x; ay := f*y;
  x := xr + vxr*h + (kx + ax)*h*h/4; vx := vxr + (kx + 3*ax)*h/4;
  y := yr + vyr*h + (ky + ay)*h*h/4; vy := vyr + (ky + 3*ay)*h/4;
  t := t+h;

  if sqrt(x*x + y*y) < 6.38E6 then Timer1.Enabled := False;
  if sign(x) <> sign(xr) then c := c + 1;
  if (x > 0) AND (c = 3) then Timer1.Enabled := False;

  Polozpero(G1,x * 1e-7,y * 1e-7);   {kreslenie polohy družice}
end;

```

Z grafu pohybu družice sa dá vidieť, že družica sa pohybuje po eliptickej trajektórii. Doplnujúcim výpočtom zistíte polohu apogea, ktorá je približne 14 000 km od zemského stredu a vypočítaná doba obehu je 10 589 s. Tento výsledok uspokojí i náročnejších riešiteľov, pričom chyba v určení doby obehu je menšia ako 1 s. Pri presnejšom riešení treba aplikovať na družicu aj odstredivú silu.

Úloha 11.13:

Kmitý na pružine. Modelujte dvojrozmerný pohyb telesa zaveseného na pružine. Teleso považujte za hmotný bod s hmotnosťou m a jeho moment zotrvačnosti i rotáciu zanedbajte. Polomer R telesa uvažujte len pri výpočte odporu vzduchu. Pružinu považujte za dokonale pružnú s lineárnou závislosťou dĺžky na ťahovej sile. Dĺžka zatťaženej pružiny je l a jej tuhosť je k .

Riešenie

Začiatok vzťažnej sústavy zvolíme v mieste upevnenia pružiny. Počas celého pohybu pôsobia na teleso tri sily: gravitačná, sila pružiny a odpor vzduchu. Pružina pôsobí na teleso v každom okamihu silou priamo úmernej veľkosti natiahnutiu/stlačenia pružiny. Výsledná pohybová rovnica pre zrýchlenie má tvar:

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{SC\rho v}{2m} \vec{v} - \frac{k}{m} \frac{l-r}{r} \vec{r}. \quad (11.47)$$

Program

```

m:=0.052; R:=0.02;           { premenné, konštanty }
l:=0.5; k:=5;
g:=9.81; C:=0.48; rho:=1.29;
K:=k/m; L:=C*R^2*rho/2/m;

```

```

H:=0.001;

X:=-.5; y:=-.4;           { začiatočné hodnoty }
vx:=0; vy:=0;

for i := 1 to 500 do begin
  r := sqrt(x^2+y^2); v := sqrt(vx^2+vy^2);
  ax := -K*(r-l)/r*x-L*v*vx; ay := -g-K*(r-l)/r*y-L*v*vy;
  vx := vx+ax*h;   vy := vy+ay*h;   { x a y zložka rýchlosti}
  x := x+vx*h;     y := y+vy*h;     { x a y zložka polohy }
end;

```

Pohyb telesa vyzerá chaoticky, no pri vykreslení vidíme charakteristický pohyb v smere osi x a y . Pri vykresľovaní použite dva grafy:

1. X - Y graf
2. $X = f(t)$, $Y = g(t)$

Pokiaľ ale počítame s odporom vzduchu, vždy sa guľička nakoniec zastaví v rovnovážnej polohe pod bodom upevnenia. Pri zostavovaní pohybovej rovnice sme sa však dopustili značného zjednodušenia. Preto model môže dostatočne presne popisovať len pár prvých kyvov reálneho kyvadla.

Úloha 11.14:

Určte priebeh napätia U_2 na výstupe zaťaženého zdroja s napätím U_1 , ktorý je tvorený diódou, nabíjajúcim kondenzátorom C_1 , filtrom s odporom R_1 a kondenzátorom C_2 (Obr. 11.7). Na výstupe je pripojený odpor R_2 . Numerickú simuláciu riešte pre sínusový priebeh napätia zdroja U_1 s amplitúdou $U_0 = 250$ V a s frekvenciou 50 Hz.

Riešenie spravte pre dve situácie:

- a) Na kondenzátore C_1 je napätie U_{C1} menšie ako na anóde diódy. Dióda je priepustná, dokonale vodivá a kondenzátor C_1 sa okamžite nabíja na napätie $U_{C1} = U_0 \sin \omega t$. Súčasne preteká prúd cez odpor R_1 do kondenzátoru C_2 a do zaťažovacieho odporu R_2 .
- b) Na kondenzátore C_1 je napätie väčšie ako na anóde diódy. Dióda je uzatvorená. Kondenzátor C_1 sa vybíja cez odpor R_1 , prúd tečie do kondenzátoru C_2 a cez odpor R_2 .

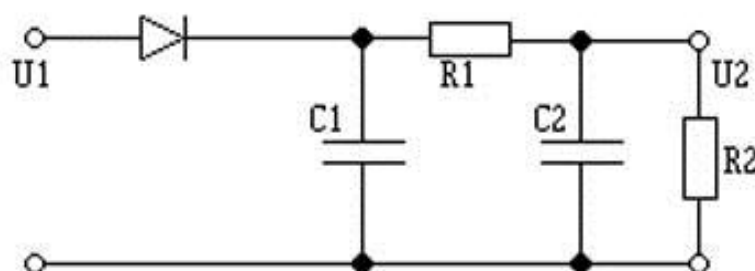
Riešenie.

Na tento výpočet postačí Eulerova metóda. Períodu $T = 0.02$ s rozdelíme na 100 intervalov dT_1 a každý z intervalov dT_1 rozdelíme na 20 intervalov dT_2

Ak je splnená podmienka a), platí

$$I_{R1}(t) = \frac{U_{C1}(t) - U_{C2}(t)}{R_1}, \quad dU_{C2} = \frac{I_{R1}(t) - \frac{U_{C2}(t)}{R_2}}{C_2} dT_2, \quad U_{C2}(t + dT_2) = U_{C2}(t) + dU_{C2}.$$

Predošlé tri rovnice počítame 20 krát. Potom zmeníme vstupné napätie $U_{C1}(t + dT_1)$ na hodnotu $U_0 \sin \omega(t + dT_1)$ a spravíme ďalších dvadsať výpočtov.



Obr. 11.7 . Jednocestný usmerňovač.

Ak platí podmienka b) cez odpor R_1 tečie prúd určený rovnicou pre $I_{R1}(t)$. Kondenzátor C_1 sa ale len vybíja a platí

$$dU_{C1} = \frac{-I_{R1}(t)}{C_1} dT_1 \quad U_{C1}(t + dT_1) = U_{C1}(t) + dU_{C1} .$$

Pokles napätia na kondenzátore C_1 počítame po krokoch dT_1 . Po každom kroku vypočítame priebeh poklesu napätia na C_2 . Pre tento dej zase platia rovnice týkajúce sa U_{C2} . Tieto rovnice sú počítané pre narastajúci čas po krokoch dT_2 20 krát.

Tieto situácie môžu nastať len počas kladnej polovlny. Pre zápornú polovlnu je dióda teoreticky nepriepustná trvale, má nekonečne veľký odpor. V programe je táto situácia simulovaná tak, že vstupné napätie U_V je pokladané za nulové a nemá vplyv na ďalší obvod. Do grafu zakresľujte závislosť vstupného napätia na čase (kladná polovlna) a závislosť výstupného napätia na čase. Výpočet končí pre $t = 0.12$ s, t.j. po šiestich periódach.

Úloha 11.15:

Teleso s hmotnosťou 10 g sa pohybuje po priamke účinkom sily. Sila narastá lineárne s časom a súčasne je nepriamo úmerná rýchlosti pohybu. V čase $t = 10$ s bola rýchlosť 50 cm/s a sila 40 N. Zakreslite priebeh dráhy a rýchlosti počas 60 s.

Úloha 11.16:

Kondenzátor kapacity C nabitý nábojom Q_0 vybíjame cez odpor R . Pri stanovení diferenciálnej rovnice popisujúcej daný dej využite, že napätie na kondenzátore sa dá napísať ako $U_C = Q / C = R I$ a derivácia náboja podľa času je prúd. Zakreslite časový priebeh prúdu.

Úloha 11.17:

Na cievku s vlastnou indukčnosťou L a odporom R pripojíme zdroj konštantného napätia $U = 10$ V. Diferenciálna rovnica popisujúca priebeh prúdu je $L \frac{dI}{dt} + RI = U$. Zakreslite časový priebeh prúdu pre rôzne hodnoty R a L ?

Použitá a odporúčaná literatúra

Blaho, A.: Programovanie v Delphi a Lazaruse, SPN, 2012, ISBN 978-80-10-02308-0.

Canneyt, M. V.: Free Pascal: Reference guide. 2011.

Čičala, D.: Programovanie v Delphi AM - SKALKA, 1999.

Haertel, H., Kireš, M., Ješková, Z., Degro, J.: Aristotle still wins over Newton. *EUROCON 2003: computer as a tool : proceedings* vol. 1., s. 7-11, 2003, Ľubľana. ISBN 078037763X.

Hockicko, P.: Useful computer software for physical analysis of processes. Proceedings of the 2009 Information and Communication Technology in Education (ICTE) Annual Conference, 15th – 17th September 2009, Rožnov pod Radhoštěm, 103-107, ISBN 978-80-7368-459-4.

Hockicko, P.: Fyzikálna analýza reálnych dejov využitím videozáznamov. Zborník referátov zo XVII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2010, Nitra 2011, 94 – 99, ISBN 978-80-8094-988-4.

Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií využitím akustických experimentov, Proceedings of the 5th International Symposium Material-Acoustic-Place 2010, Zvolen 2010, 69-72, ISBN 978-80-228-2121-6.

Hockicko, P.: Forming of Physical Knowledge in Engineering Education with the Aim to Make Physics More Attractive. Proceedings of international conference Physics Teaching in Engineering Education PTEE 2011, Mannheim, Germany, 2011, ISBN 978-3-931569-18-1.

Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií študentov použitím fyzikálnej analýzy pomocou programu Tracker. Poznatky modernej fyziky a ich aplikácia do vyučovania fyziky, Verbum Ružomberok 2011, 112-117, ISBN 978-80-8084-798-2.

Hockicko, P.: Rozvoj manuálnych zručností a intelektuálnych spôsobilostí študentov použitím videoanalýzy pohybov. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky IV Národný festival fyziky 2011, Kongresové centrum SAV Smolenice, 2011, vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2011, 85-91, ISBN 978-80-970625-3-8.

Hockicko, P.: Development of key competencies using video analysis of motions by Tracker, Proceedings GIREP-EPEC Conference 2011 Physics Alive, August 1 – 5, Jyväskylä, Finland, University of Jyväskylä 2012, 55 – 61. ISBN 978-951-39-4801-6.

Hockicko, P.: Alternatívne laboratórne a výpočtové cvičenia. Nové trendy akustického spektra – vedecký recenzovaný zborník. Zvolen, Technická univerzita vo Zvolene, 2012, 87 – 91, ISBN 978-80-228-2371-5.

Hockicko, P.: Attractiveness of Learning Physics by Means of Video Analysis and Modeling Tools. Proceedings of the 40th SEFI Annual Conference Engineering Education 2020: Meet the Future, 23 - 26 September 2012, Thessaloniki, Greece, ISBN 978-2-87352-005-2.

Hockicko, P.: Využitie videoanalýzy reálnych dejov vo výučbe fyziky. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky V Národný festival fyziky 2012, Kongresové centrum SAV Smolenice, 15. - 18. 4. 2012, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2012, 102-108. ISBN 978-80-970625-7-6.

Hockicko, P.: Analýza brzdných dráh automobilov. Zborník referátov z XVIII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2012 Fyzikálne vzdelávanie v systéme reformovaného školstva, Vydala Univerzita Konštantína Filozofa a JSMF v Nitre 2013, 135 – 143, ISBN 978-80-558-0232-9.

Hockicko, P.: Fyzika v príkladoch a videopríkladoch [elektronický zdroj] - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2013. - DVD-ROM, [4,76 AH; 5,02 VH]. - ISBN 978-80-554-0811-8. Dostupné na: <http://hockicko.uniza.sk/Priklady/videoprklady.htm>

Hockicko, P.: Poznaj brzdnú dráhu svojho auta. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky VI, Národný festival fyziky 2013, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava, 2013, 119 – 125, ISBN 978-80-971450-0-2.

Hockicko, P., Čulík, M., Poljak, S., Bašťovanský, R.: Formovanie fyzikálnych predstáv prostredníctvom videí a analýzy nameraných dát na ukážkovom príklade skúmania ťahových deformácií telies. Nové trendy akustického spektra 2014, vedecký recenzovaný zborník, Technická univerzita Zvolen, 2014, 101-107, ISBN 978-80-228-2647-1.

Hockicko, P., Hockicková, M.: Videoanalýza dejov a zvukov so zameraním na rozvoj kľúčových kompetencií študentov. Proceedings of the 6th International Symposium Material-Acoustic-Place 2011, Zvolen (2011) 103-106, ISBN 978-80-228-2121-6.

Hockicko, P., Krišťák, L., Němec, M.: Development of students' conceptual thinking by means of video analysis and interactive simulations at technical universities. *European Journal of Engineering Education* (v tlači), 2014 (online), ISSN 0304-3797 (Print), 1469-5898 (Online). [DOI:10.1080/03043797.2014.941337](https://doi.org/10.1080/03043797.2014.941337)

Hockicko, P., Kúdelčík, J.: Štúdium kmitavého pohybu. Zborník referátov z XVIII. medzinárodnej konferencie DIDFYZ 2012 Fyzikálne vzdelávanie v systéme reformovaného školstva, Vydala Univerzita Konštantína Filozofa a JSMF v Nitre 2013, 361 - 367, ISBN 978-80-558-0232-9.

Hockicko, P., Kúdelčík, J., Jamnický, I.: Základy fyziky [elektronický zdroj] : elektronický materiál k videoanalýze dejov - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2011. - 273 s., 1 elektronický optický disk (CD-ROM) : obr., tab. - ISBN 978-80-554-0431-8.

Hockicko, P., Ondruš, J.: Analysis of Vehicle Stopping Distances. Proceedings of the conference New trends in Physics NTF 2012, October 11 -12, 2012, Brno, Czech Republic, 214 – 217. ISBN 978-80-214-4594-9.

Hockicko, P., Rochovská, I.: Hľadanie, analýza a možnosti odstraňovania chybných predstáv vo fyzikálnom vzdelávaní na technických univerzitách. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky VI, Národný festival fyziky 2013, Vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava, 2013, 126 - 132, ISBN 978-80-971450-0-2.

Hockicko, P., Tarjányiová, G.: Testing and analysis of students' conception from physics, *Journal of Technology and Information Education* 1/2014, Volume 6, Issue 1, 104 – 121, ISSN 1803-537X, 1803-6805 (on-line).

Hockicko, P., Trpišová, B.: Are Students' Conceptions about Automobile Braking Distances Correct? Conference Proceedings: Keynote Lectures and Abstracts, SEFI, Brussels, Belgium, p. 144 and Proceedings of the 41st SEFI Annual Conference 2013, Engineering Education Fast Forward 1973>2013>>, Co-organised by SEFI and the Faculty of Engineering Science of KU Leuven, 16-20 September 2013, Leuven, Belgium, SEFI, Brussels, Belgium, (in USB key).

Hockicko, P., Trpišová, B. Ondruš, J.: Correcting Students' Misconceptions about Automobile Braking Distances and Video Analysis Using Interactive Program Tracker. *Journal of Science Education and Technology*, December 2014, Volume 23, Issue 6, pp. 763-776, ISSN 1059-0145. [DOI:10.1007/s10956-014-9510-z](https://doi.org/10.1007/s10956-014-9510-z)

Hockicková, M., Filová, Z., Hockicko, P.: Rozvoj kľúčových kompetencií so zameraním na poznávanie prírody. Zborník príspevkov z konferencie Tvorivý učiteľ fyziky IV Národný festival fyziky 2011, Kongresové centrum SAV Smolenice, 2011, vydala Slovenská fyzikálna spoločnosť, Bratislava 2011, 92-98, ISBN 978-80-970625-3-8.

Ješková, Z., Featonby, D., Timková, V.: Balloons revisited, *Physics Education*, vol. 47, no. 4, 2012, pp. 392-398. ISSN 0031-9120.

Kabátová, M.: Kurz programovania pre študentov učiteľstva informatiky, <http://edi.fmph.uniba.sk/~kabatova/kurz/>

Kabatová, M., Kalaš, I., Mikolajová, K., Pekárová, J.: Digitálny svet: 1,2 Vzdelávanie nekvalifikovaných učiteľov informatiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ. Bratislava: Štátny pedagogický ústav, 2009. ISBN 978-80-89225-61-3.

Kireš, M.: Vytiekanie kvapaliny otvormi v stene nádoby : Mnohokrát opakovaná lož sa stáva pravdou? *OBZORY matematiky fyziky a informatiky*, č. 45, 1996, s. 36-40.

Kireš, M.: Mariotte bottle with side openings, *The Physics Teachers* vol. 44, iss. 6, 2006, 388-389.

Kireš, M., Ješková, Z.: Conceptual understanding of the Maxwell wheel motion. *Proceedings GIREP Conference 2006*, Amsterdam, pp. 649-653. ISBN 9789057761775.

Kireš, M.: Archimedes' principle in action, *Physics Education*. vol. 42, iss. 5, 2007, 484-487. ISSN 8020-8090.

Kireš, M.: Astroblaster - a fascinating game of multi-ball collisions. *Physics Education*, vol. 44, iss. 2, 2009, 159-164. ISSN 0031-9120.

Krišťák, L., Gajtanska, M.: Interaktívne metódy vo fyzikálnom vzdelávaní. (Vedecká monografia), Data Service Zvolen 2013, 179 s. ISBN 978-80-970603-8-1.

Krišťák, L., Němec, M.: Inovácia fyzikálneho vzdelávania na technickej univerzite vo Zvolene. (Vedecká monografia), 2011, Vydavateľstvo Technickej univerzity vo Zvolene, 160 s., ISBN 978-80-228-2218-3.

Klimová, I., Michalík, F., Chlebničan, P.: Základy numerickej matematiky a programovania, VŠDS v Žiline, 1985.

Kúdelčík, J., Hockicko, P.: Complex Approach for Laboratory Practices. Proceedings of 17th Conference of Czech and Slovak Physicists, Slovak Physical Society, Equilibria Košice 2012, 111 – 112, ISBN 978-80-970625-4-5.

Kúdelčík, J., Hockicko, P.: Základy fyziky. - 1. vyd. - Žilina : Žilinská univerzita, 2011. - 272 s., [AH 17,50; VH 18,34] : obr., tab. - ISBN 978-80-554-0341-0.

Navara, M., Němeček, A.: Numerické metody, Vydavatelství ČVUT 2003, ISBN 80-01-02689-2.

Pang, T.: An Introduction to Computational Physics, Cambridge 2006, ISBN 978-0-521-53276-1.

Pirč, V.: Numerické metody, TU Košice, 1993, ISBN80-7099-107-0.

Šedivý, P.: Modelování pohybů numerickými metodami, Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku.

Vaculík J.: CD Praktikum v Pascale - návody na cvičenia I, Žilinská univerzita Žilina, FPEDaS, 2004.

Vančo, L., Hockicko, P.: Videonávody z fyzikálnych praktík [elektronický zdroj] : Fyzikálne kyvadlo. Stojaté vlnenie. Modul pružnosti. Tepelná kapacita. Skupenské teplo. Dynamická viskozita - Žilina : Žilinská univerzita, Elektrotechnická fakulta, 2013. - DVD-ROM, [51 súborov, 2,23 GB]. ISBN 978-80-554-0729-6.

<http://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary-linear/5e/students/ch08-10/chap-10-4.pdf>

<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker>

Register

A

Adamsova-Bashforthova metóda.....	182
Adamsova-Moultonova metóda.....	183
Archimedov zákon	91

B

Bernoulliho rovnica.....	98
Button.....	180
Button1.....	133, 134, 138, 160

C

Cauchyho úloha	167, 169
Cramerovo pravidlo.....	149
Croutov algoritmus.....	150

D

Delphi	131
determinant.....	149, 150
dráha pohybu	14
dynamická (kinetická) šmyková trecia sila	56

E

Edit	134, 135
energia	44
Eulerova metóda.....	168, 169, 170, 172, 175, 182, 184, 190

F

fáza kmitu.....	105
fázová konštanta.....	105
Form1	133, 136, 137, 141
frekvencia	35, 103

G

Gauss metóda	151, 153, 158, 159
Gauss-Seidelova metóda	156, 162
Grafy.....	139, 141

H

harmonický oscilátor	103
hmotnosť.....	40
hmotný bod	13

horná trojuholníková matica.....	148
hybnosť	41
hydrodynamický paradox.....	90
hydrostatický tlak.....	89

I

I Newtonov pohybový zákon	40
II Newtonov pohybový zákon	40, 178
III Newtonov pohybový zákon	42
Image	136, 137, 141
impulz sily.....	41
inerciálna vzťažná sústava	39
intenzita gravitačného poľa	67
invariantné veličiny	39
IteraciaUp	148, 152
iteračná matica	153, 154
iteračná metóda.....	153
izolované teleso.....	39
izolovaný hmotný bod	39

J

Jacobiho metóda	155, 159
-----------------------	----------

K

kapilarita	95
kapilárna depresia.....	95
kapilárna elevácia	95
kapilárny tlak	94
kinematika	13
kinetická energia	45
Kirchhoffov zákon.....	156
kmit	103
koeficient dynamického šmykového trenia	57
koeficient korelácie	164
koeficient statického šmykového trenia	57
koeficient útlmu	114
kyv	103

L

Lazarus.....	131
lineárny harmonický oscilátor	105
logaritmický dekrement útlmu	115
LU metóda.....	149

M

matica sústavy.....	145
Memo	134
moment hybnosti	79
moment sily.....	79

N

<i>neinerciálna vzťažná sústava</i>	39
<i>newton</i>	40
<i>normálne tiažové zrýchlenie</i>	68
<i>normálové zrýchlenie</i>	36

O

<i>objemový prietok</i>	96
<i>okamžitá rýchlosť</i>	17
<i>okamžitá výchylka</i>	105
<i>okamžité zrýchlenie</i>	20
<i>OpenDialog</i>	135
<i>otáčavý pohyb</i>	29

P

<i>Pascalov zákon</i>	89
<i>perióda</i>	35, 103
<i>polohový vektor</i>	14
<i>posuvný pohyb</i>	29
<i>potenciálna energia telesa</i>	46
<i>povrchová energia</i>	92
<i>povrchová sila</i>	92
<i>povrchová vrstva kvapaliny</i>	92
<i>povrchové napätie</i>	92
<i>priemerná rýchlosť</i>	17
<i>princíp invariantnosti</i>	39
<i>program Tracker</i>	5
<i>pružinový oscilátor</i>	103

R

<i>rázy</i>	121
<i>rezonancia</i>	119
<i>rovnica spojitosti (kontinuity)</i>	96
<i>rovnovážna poloha</i>	103
<i>rozšírená matica</i>	146, 157, 161
<i>Runge-Kutta</i>	176, 178, 185, 186, 188

S

<i>sila</i>	39
<i>SpinEdit</i>	135
<i>statická šmyková trecia sila</i>	56
<i>Stokesov vzorec</i>	100
<i>sústava lineárnych rovníc</i>	145

T

<i>tangenciálne zrýchlenie</i>	36
<i>ťažisko telesa</i>	79
<i>TCanvas</i>	136, 137
<i>tlmené kmitanie</i>	113
<i>Torricelliho vzťah</i>	98
<i>trajektória</i>	14
<i>tuhé teleso</i>	79
<i>tuhosť pružiny</i>	104

U

<i>uhlová frekvencia</i>	106
<i>uhlová rýchlosť</i>	30
<i>uhlové zrýchlenie</i>	30
<i>útlm</i>	115

V

<i>veľkosť rýchlosti</i>	27
<i>výkon</i>	43
<i>vztlaková sila</i>	181

Z

<i>zákon akcie-reakcie</i>	42
<i>zákon sily</i>	40
<i>zákon zotrvačnosti</i>	40
<i>zotrvačnosť</i>	39, 40

doc. PaedDr. Peter Hockicko, PhD. – doc. RNDr. Jozef Kúdelčík, PhD.

VIDEOANALÝZY, MODELOVANIE A SIMULÁCIE REÁLNYCH DEJOV

Vydala Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina
v edičnom rade VYSOKOŠKOLSKÉ UČEBNICE

Vedecký redaktor doc. Ing. Pavol Rafajdus, PhD.

Zodp. red. PhDr. Katarína Šimánková

1. vydanie

198 strán, 115 obrázkov, 1 tabuľka, AH 17,36, VH 17,86

Rok vydania 2014

Online verzia ISBN 978-80-554-0961-0

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel jazykovou úpravou.