Chapter 1

Prednáška 1

1.1 Čo je to fyzika

Fyzika patrí medzi vedy o neživej prírode spolu s chémiou, geológiou, astronómiou a fyzickou geografiou.

Def. 1: *Fyzika je veda o najzákladnejších zákonoch neživého sveta.*

Táto definícia implikuje, že ostatné vedy využívajú fyziku ako základ, na ktorom budujú svoje poznatky.

Def. 2: *Fyzika je veda o hmote a jej pohybe v priestore a čase.* (Wikipédia) Na opis pohybu hmoty (telies) v priestore a čase slúži *kinematika*, príčiny pohybu vysvetľuje *dynamika*.

1.2 Aplikácie fyziky

Fyzika okrem toho, že nám umožňuje pochopiť svet na najhlbšej úrovni, zároveň významne prispieva k novým technológiám a rôznym aplikáciám v každodennom živote. Napr. bez dôkladnej znalosti klasickej (Newtonovej) mechaniky, ktorej sa budeme venovať tento semester, by stavební a strojní inžinieri nedokázali navrhnúť budovy, mosty, motory, turbíny a ďalšie časti strojov. Klasická mechanika, ktorú sformuloval Isaac Newton, priniesla dokonca novú matematickú disciplínu, diferenciálny a integrálny počet, bez ktorého sa nezaobídu nielen prírodné ale ani ekonomické a ďalšie vedy.

Teória elektromagnetizmu sformulovaná v podobe Maxwellových rovníc na základe experimentálneho štúdia elektrických a magnetických javov nám umožnila skonštruovať rôzne elektrické prístroje a zariadenia ako elektromotory, generátory elektrického prúdu, žiarovky, transformátory, batérie, elektroniku, magnetické pásky, bankové karty, pamäťové disky a mnoho iných.

Teória relativity, špeciálna aj všeobecná je nevyhnutná pre správne fungovanie GPS. Bez korekcií vypočítaných podľa teórie relativity by vás GPS mohlo poslať do nesprávnej ulice.

Kvantová mechanika viedla k pochopeniu procesov v mikrosvete nevyhnutných pre správne fungovanie magnetickej rezonancie, tranzistorov, polovodičo vých čipov, počítačov, smartfónov, elektrónových mikroskopov, laserov či najnovšie kvantovej komunikácie a kvantových výpočtov.

Napokon, časticová fyzika využíva urýchľovače častíc na produkciu nových častíc pri vysokých energiách. Menšie urýchľovače pri nižších energiách našli široké uplatnenie v priemysle (napr. implantovanie prímesí do elektronických čipov a sterilizácia obalov potravín) a v medicíne (diagnostika pomocou rádioizotopov a ožarovanie nádorov pomocou RTG žiarenia, elektrónov, protónov alebo jadier uhlíka $^{12}_{6}$C). Vedľajším produktom výskumu častíc je aj napr. World Wide Web (www) vyvinutý v najväčšom časticovom centre na svete (CERN) v Ženeve.

1.3 Vzťah teórie a experimentu

Fyzikálne zákony sú formulované zvyčajne matematicky v teórii na základe merania alebo pozorovania, ktoré robíme v experimente. Experiment teda inšpiruje teóriu. Bez experimentu sa zákony nedajú odvodiť len čistým uvažovaním a logickou dedukciou. Fyzika je teda veda založená na experimente. Dobrá teória nielen výstižne vyjadruje zákon a teda popisuje veľké množstvo javov, ale zároveň inšpiruje experiment - tým, že dokáže predpovedať javy, ktoré ešte experiment nepozoroval. Fyzika je teda vzájomnou symbiózou teórie a experimentu a preto sa aj my budeme venovať v tomto semestri teórii (na prednáškach a výpočtových cvičeniach), aj experimentu (na laboratórnych cvičeniach).

1.4 Fyzikálne veličiny a fyzikálne jednotky

Zákony vyjadrujeme zvyčajne v matematickej forme pomocou fyzikálnych veličín. Veličiny opisujú vlastnosti fyzikálneho systému (pod systémom rozumieme typicky jedno alebo veľa telies vo vzájomnej interakcii). Veľkosť veličiny vyjadrujeme pomocou fyzikálnych jednotiek. Objasnime si to na konkrétnom príklade zákona. Newtonov zákon sily je vyjadrený ako

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{1.1}$$

Vystupujú tu tri veličiny: sila $\vec{F}$ pôsobiaca na teleso, hmotnosť telesa m a zrýchlenie telesa $\vec{a}$. Zákon nám dáva tieto veličiny do súvisu. Napr. ak zväčším silu $\vec{F}$ dvakrát, zrýchlenie telesa $\vec{a}$ sa rovnako zväčší dvakrát. Jednotkou sily je Newton označený ako [N], jednotkou hmotnosti kilogram [kg] a jednotkou zrýchlenia [ms^{-2}].

Vo fyzike vystupujú stovky veličín a každá má svoju jednotku. Jednotky je potrebné jednoznačne definovať, aby sme dokázali porovnávať svoje merania a ich výsledky medzi sebou. Medzi tým veľkým množstvom jednotiek bolo vybratých sedem základných jednotiek (pozri Tab. 1.4), všetky ostatné sú definované pomocou týchto základných. V našom kurze klasickej mechaniky sa

veličina	jednotka
dĺžka	meter [m]
čas	sekunda [s]
hmotnosť	kilogram [kg]
elektrický prúd	ampér [A]
teplota	kelvin [K]
látkové množstvo	[mol]
svietovosť	kandela [Cd]

Table 1.1: Základné jednotky medzinárodnej sústavy SI.

stretneme s prvými tromi základnými jednotkami a mnohými odvodenými. Aj jedna a tá istá veličina môže mať viac jednotiek, napr. čas môžeme vyjadriť nielen v sekundách (SI jednotka), ale aj v minútach, hodinách atď. Podobne dĺžku vyjadrujeme okrem metrov (SI jednotka) aj v centimetroch, kilometroch, míľach a podobne. Pri riešení príkladov to môže spôsobiť ťažkosti, ak si nedáme pozor. Ilustrujme to na tomto príklade.

Pr.
Akú dráhu prejde bežec stálou rýchlosťou $v = 3\,ms^{-1}$ za čas $t = 2$ min?
Riešenie:

$$\begin{aligned} x &= v.t \\ x &= 3.2 \;=\; 6 \quad \text{... zle} && (1.2) \\ x &= 3.2 \;=\; 6\,m \;\; \text{... zle} && (1.3) \\ x &= 3\,ms^{-1}\,.\,2\,\mathrm{min} \;=\; 3\,ms^{-1}\,.\,2\,.\,60\,s \\ &= 3\,.\,2\,.\,60\,m \;=\; 360\,m \;\; \text{... OK} && (1.4) \end{aligned}$$

Riešenie v rovnici 1.2 je zlé, pretože je zlý výsledok a chýba jednotka. Riešenie v rovnici 1.3 je zlé, pretože je zlý výsledok. Riešenie v rovnici 1.4 je správne , pretože boli správne premené jednotky a jednotka [m] je uvedená vo finálnom výsledku.

1.5 Meranie a jeho neurčitosť

Cieľom merania je poznať skutočnú hodnotu fyzikálnej veličiny. Avšak pri meraní akejkoľvek fyzikálnej veličiny sa dopúšťame nepresnosti, takže výsledok merania sa líši od skutočnej hodnoty. Rozdiel medzi skutočnou hodnotou a nameranou je chyba (neurčitosť, odchýlka) merania. Rozoznávame chyby (neurčitosti):
1. Náhodné 2. Systematické 3. Osobné.

1. **Náhodné chyby** sú spôsobené prirodzenými, nepredpovedateľnými fluktuáciami buď v meracej aparatúre alebo v meranom objekte. Ovplyvňujú rozptyl merania, čo znamená, že viacnásobným opakovaním merania nejakej veličiny získame

sériu hodnôt, ktoré sú náhodne rozptýlené okolo strednej hodnoty. Chyba (neurčitosť) je tým väčšia, čím väčší je rozptyl hodnôt. Príklad: pri meraní priemeru drôtu mikrometrom môžu namerané hodnoty fluktuovať napr. preto, že drôt nie je rovnako hrubý v rôznych miestach, alebo preto, že experimentátor pritiahol čeľuste mikrometra zakaždým rôznou silou. Náhodné chyby sa nedajú úplne odstrániť, ale môžeme ich určiť z viacnásobne opakovaných meraní. V laboratórnych cvičeniach sa budeme zaoberať najmä týmto druhom chýb.

2. **Systematické chyby** vychýlia každé zo série opakovaných meraní rovnakým spôsobom na jednu stranu od skutočnej hodnoty. Príklad: na meranie času používame stopky, ktoré meškajú - je jasné, že každé meranie času bude posunuté do nižších hodnôt. Toto bol jednoduchý príklad, ale v mnohých situáciách je stanovenie/odstránenie systematickej chyby nesmierne náročné. V našich laboratórnych cvičeniach systematické chyby zvyčajne nestanovujeme.

3. **Osobné chyby** sú chyby spôsobené oslabenou pozornosťou experimentátora, nesprávnym odčítaním z prístrojov a pod. Odstraňujú sa dôslednosťou pri práci a treba sa ich úplne vyvarovať.

1.5.1 Stanovenie náhodnej chyby

Náhodnú chybu stanovujeme opakovaným meraním nejakej veličiny X. Ak sú hodnoty merania skutočne náhodné a je ich veľa $(x_1, x_2, ...x_n)$, ich rozdelenie bude opísané Gaussovým rozdelením, Fig. 1.1. Horizontálna os ukazuje meranú veličinu X a na vertikálnej osi je hustota pravdepodobnosti, s ktorou veličina X nadobudne konkrétnu hodnotu x_i. Najpravdepodobnejšie je namerať hodnoty v okolí hodnoty μ, ktorá predstavuje skutočnú hodnotu veličiny, ale merania môžu viesť s klesajúcou pravdepodobnosťou aj k hodnotám x_i, ktoré sú ďaleko od μ.

Rozptyl hodnôt x_i je charakterizovaný parametrom σ Gaussovho rozdelenia, ktorého význam je nasledovný: z celkového veľkého počtu meraní n padne 68,2 % meraní do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

Pri konečnom počte meraní n odhadujeme skutočnú hodnotu μ pomocou aritmetického priemeru nameraných hodnôt

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

a parameter σ Gaussovho rozdelenia odhadujeme pomocou strednej kvadratickej odchýlky (neurčitosti, chyby) jedného merania definovanej vzťahom (použijeme pre ňu rovnaký symbol σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \tag{1.7}$$

$$\tag{1.8}$$

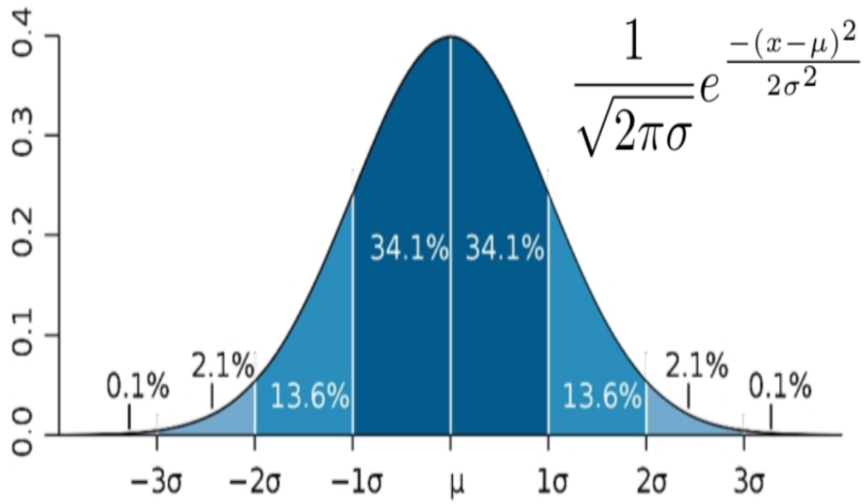

Figure 1.1: Gaussovo rozdelenie.

Čím väčší bude počet meraní n, tým presnejšie sa bude zhodovať aritmetický priemer a stredná kvadratická chyba s hodnotami μ a σ Gaussovho rozdelenia na Fig.1.1. a v limitnom prípade nekonečne veľkého počtu meraní sa s nimi stotožnia.

Význam strednej kvadratickej odchýlky σ je, že ak by sme urobili ešte jedno, $(n+1)$. meranie, tak s pravdepodobnosťou 68,2 % padne do intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$.

Nepresnosť (odchýlka) aritmetického priemeru od skutočnej hodnoty meranej fyzikálnej veličiny je menšia než nepresnosť jedného náhodne vybraného merania σ. Túto nepresnosť charakterizujeme strednou kvadratickou odchýlkou aritmetického priemeru a definovaná je nasledovne

$$\bar{\sigma} \quad = \quad \frac{\sigma}{n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1.9}$$

Význam $\bar{\sigma}$ je, že ak by sme urobili ešte jeden experiment s ďalšími n meraniami, stredná hodnota nového experimentu padne s pravdepodobnosťou 68,2 % do intervalu $(\mu - \bar{\sigma}, \mu + \bar{\sigma})$.

Výsledok celého merania zapíšeme v tvare: výsledná hodnota meranej veličiny = aritmetický priemer z nameraných hodnôt ± stredná kvadratická odchýlka aritmetického priemeru, t.j.

$$x \quad = \quad \bar{x} \pm \bar{\sigma}. \tag{1.10}$$

Napr. pri meraní reakčného času t, výsledok merania zapíšeme takto

$$t = (154.2 \pm 5.5)\,\mathrm{ms} \tag{1.11}$$

alebo takto

$$t = (154 \pm 6)\,\mathrm{ms}. \tag{1.12}$$

Všimnite si, že v rovnici 1.11 uvádzame $\bar{\sigma} = 5.5$ ms, t.j. na dve platné číslice. Stredná hodnota $\bar{t} = 154.2$ ms musí mať rovnaký počet desatinných miest ako $\bar{\sigma}$. Konvenciu "chyba na dve platné číslice" používame v referátoch z laboratórnych cvičení všade okrem finálnych výsledkov.

V rovnici 1.12 je ten istý výsledok, ale chyba merania, $\bar{\sigma}$, je zaokrúhlená na jednu platnú číslicu smerom nahor v tomto prípade, $5.5 \to 6$ ms. Konvenciu "chyba na jednu platnú číslicu" použijeme v referátoch z laboratórnych cvičení iba vo finálnych výsledkoch. Dôvodom tejto konvencie je, že pri opakovaných meraniach s $n < 100$, je vzťah v Rov. 1.9 presný len do prvej platnej číslice. Pred finálnymi výsledkami však uvádzame chybu priebžných výsledkov merania na dve platné číslice, aby sme zbytočne nezavádzali do výpo čtov zaokrúhľovacie chyby.

Ako sa vyhodnocujú chyby nepriamych meraní (napr. objemu valčeka, keď priamo meriate jeho výšku a priemer) sa dozviete na laboratórnych cvičeniach.

Chapter 2

Kinematika pohybu hmotného bodu

2.1 Analytický a grafický opis pohybu

Kinematika len opisuje pohyb na rozdiel od dynamiky, ktorá aj vysvetľuje pohyb ako výsledok pôsobenia síl. Kvôli jednoduchosti začneme s kinematikou pohybu v jednom rozmere (na priamke). Študovať budeme zatiaľ len pohyb jedného telesa, ktoré si zjednodu šene budeme reprezentovať ako hmotný bod (HB).

Hmotný bod reprezentuje teleso (ktoré má hmotnosť m a konečné rozmery) tak, že HB má rovnakú hmotnosť m ako teleso, ale na rozdiel od telesa má zanedbateľné rozmery - je to bod. V skutočnosti môžeme za HB považovať aj veľké teleso, ak sú jeho rozmery zanedbateľné v porovnaní so vzdialenosťou, ktorá vystupuje pri štúdiu jeho pohybu. Napr. Zem pri pohybe okolo Slnka môžeme považovať za HB, pretože jej priemer je oveľa menší ako vzdialenosť Zem - Slnko. Keby sme sa však zaujímali o rotačnú energiu Zeme, považovať ju za HB by nám veľmi nepomohlo. Dobrý fyzik musí vedieť kedy môže urobiť takéto zjednodušenie.

Pohyb HB je úplne známy, ak poznáme jeho polohu $x(t)$ v každom čase t. Konkrétna funkcia $x(t)$ predstavuje analytický opis pohybu. Pohyb však vieme opísať aj graficky, pomocou grafu funkcie $x(t)$. Grafy môžeme profesionálne plotovať na počítači, ale pre správne a rýchle posúdenie pohybu nám postačí nasledovný postup. Vyčíslime funkciu $x(t)$ v niekoľkých časových okamihoch t (typicky 5-6 bodov), výsledné polohy vynesieme do grafu a pokúsime sa cez zobrazené body odhadom preložiť krivku. Ilustrujme si to na príkladoch.

Pr.1 Poloha HB je daná funkciou $x(t) = c$, kde $c = 2$m. Nakreslite graf $x(t)$!

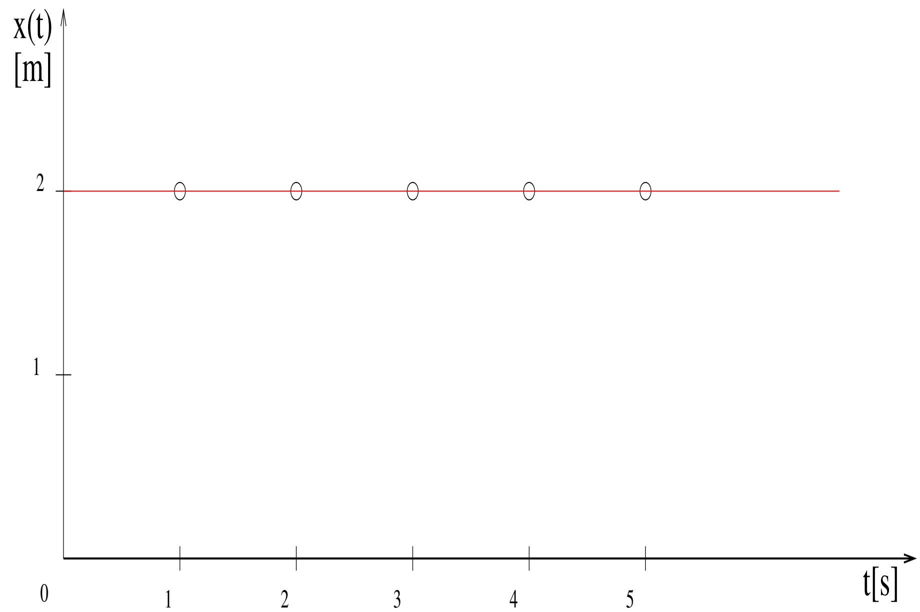

Figure 2.1: Graf funkcie $x(t) = 2\text{m}$.

Najskôr vyčíslime $x(t)$ v $t\ =\ 0, 1, 2, 3, 4, 5\,\text{s}$:

$$\begin{aligned} x(t\ =\ 0s) &= c\ =\ 2\,\text{m} \\ x(t\ =\ 1s) &= c\ =\ 2\,\text{m} \\ &\ldots \\ x(t\ =\ 5s) &= c\ =\ 2\,\text{m} \end{aligned}$$

Vynesieme tieto hodnoty $x(t)$ do grafu (Fig. 2.1), Pri tomto 'pohybe' sa HB v skutočnosti nepohybuje, ale celú dobu stojí dva metre od počiatku.

Pr.2 Poloha HB je daná funkciou $x(t) = vt\ +\ x_0$, kde $v = 0.5\ \text{ms}^{-1}$ a $x_0 = -1$ m. Nakreslite graf $x(t)$! Najskôr vyčíslime $x(t)$ v $t\ =\ 0, 1, 2, 3, 4, 5\,\text{s}$:

$$\begin{aligned} x(t\ =\ 0s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.0\text{s} - 1\text{m}\ =\ -1\,\text{m} \\ x(t\ =\ 1s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.1\text{s} - 1\text{m}\ =\ -0.5\,\text{m} \\ x(t\ =\ 2s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.2\text{s} - 1\text{m}\ =\ 0\,\text{m} \\ x(t\ =\ 3s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.3\text{s} - 1\text{m}\ =\ 0.5\,\text{m} \\ x(t\ =\ 4s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.4\text{s} - 1\text{m}\ =\ 1\,\text{m} \\ x(t\ =\ 5s) &= 0.5\text{ms}^{-1}.5\text{s} - 1\text{m}\ =\ 1.5\,\text{m} \end{aligned}$$

Vynesieme tieto hodnoty $x(t)$ do grafu (Fig. 2.2) a preložíme nimi priamku, Analýza grafu nám prezradí, že v tomto prípade sa HB každú sekundu posunie

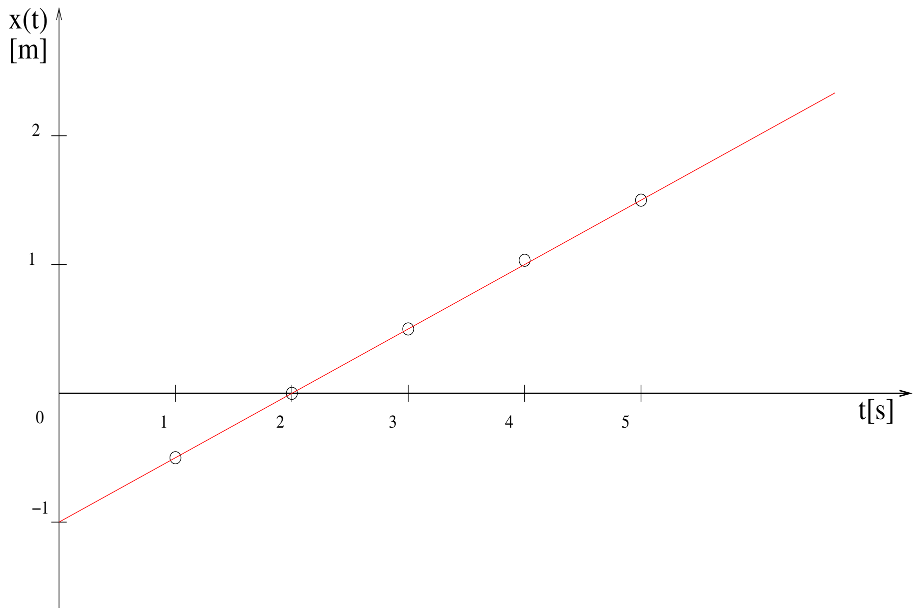

Figure 2.2: Graf funkcie $x(t) = vt + x_0$, $v = 0.5$ ms^{-1} a $x_0 = -1$ m.

o pol metra v smere kladnej osi x. Ide teda o rovnomerný pohyb s konštantnou rýchlosťou.

Pr.3 Poloha HB je daná funkciou $x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 + v_0 t + x_0$, kde $a = 2$ ms^{-2}, $v_0 = 2$ ms^{-1} a $x_0 = 1$ m. Nakreslite graf $x(t)$! Najskôr vyčíslime $x(t)$ v $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ s:

$$
\begin{aligned}
x(t = -3s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(-3\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(-3\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} \\
x(t = -2s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(-2\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(-2\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m} \\
x(t = -1s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(-1\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(-1\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m} \\
x(t = 0s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(0\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(0\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m} \\
x(t = 1s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(1\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(1\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} \\
x(t = 2s) &= \frac{1}{2}\, 2\mathrm{ms}^{-2}.(2\mathrm{s})^2 + 2\mathrm{ms}^{-1}.(2\mathrm{s}) + 1\mathrm{m} = 9\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Vynesieme tieto hodnoty $x(t)$ do grafu (Fig. 2.3) a preložíme nimi krivku, Z grafu vidíme, že v intervale $(-1, 0)$s prejde HB vzdialenosť jeden meter, v intervale $(0, 1)$s prejde tri metre a v intervale $(1, 2)$s prejde 5 metrov. Pohybuje

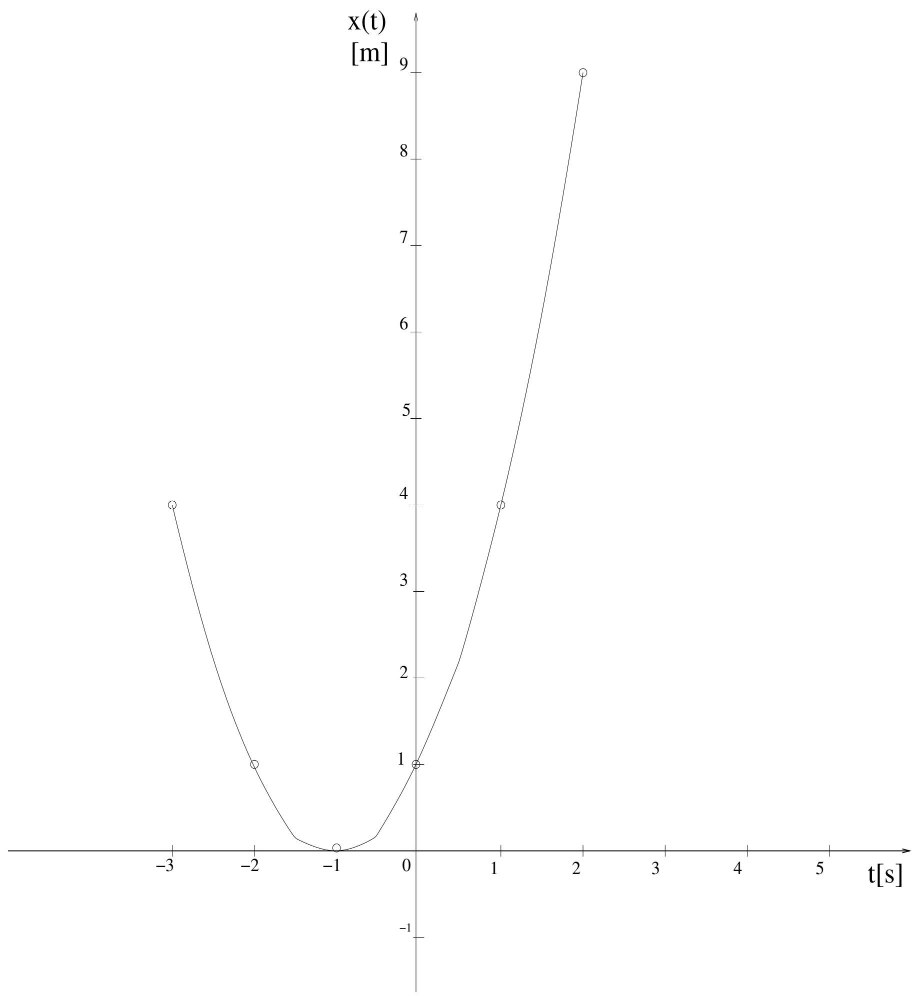

Figure 2.3: Graf funkcie $x(t) = \frac{1}{2}\, a\, t^2 \;+\; v_0 t \;+\; x_0$, $a = 2$ ms^{-2}, $v = 2$ ms^{-1} a $x_0 = 1$ m.

sa teda čoraz rýchlejšie. Neskôr uvidíme, že ide o rovnomerne zrýchlený pohyb s konštantným zrýchlením a, počiatočnou rýchlosťou v_0 a počiatočnou polohou x_0.

2.2 Priemerná rýchlosť

Pozrime si pohyb HB znázornený na Obr. Fig. 2.4. HB sa pohyboval po priamke pozdĺž osi x z bodu P do bodu Q. V bode P so súradnicou x_1 začal v čase t_1 a v bode Q so súradnicou x_2 skončil svoj pohyb v čase t_2. Dĺžka pohybu medzi P a Q je daná časovým intervalom

$$\Delta t = t_2 - t_1 \tag{2.1}$$

a dráha, ktorú HB prešiel, je daná posunutím

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.2}$$

Priemerná rýchlosť HB, s ktorou sa pohyboval medzi bodmi P a Q je definovaná ako podiel posunutia a časového intervalu

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.3}$$

Jednotka priemernej rýchlosti je [ms^{-1}]. Z grafu vidíme, že priemerná rýchlosť je smernica úsečky PQ ($\tan\phi$),

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tan\phi. \tag{2.4}$$

Priemerná rýchlosť môže byť kladná, záporná alebo nulová. Priemerná rýchlosť ďalej nezávisí od trajektórie medzi bodmi P a Q, závisí len od t_1, t_2, x_1, x_2. Všetky trajektórie, ktoré začínajú v P v čase t_1 a končia v Q v čase t_2, bez ohľadu na ich tvar, majú rovnakú priemernú rýchlosť.

2.3 Okamžitá rýchlosť

Priemerná rýchlosť je pre dané body P a Q (Obr. 2.4) len jedna. Ale v rámci intervalu Δt sa okamžitá rýchlosť mení od jedného okamihu k druhému. Po štarte v bode P ($x = x_1$) sa HB spočiatku pohybuje rýchlo, pretože za krátky čas prekoná polovicu vzdialenosti k bodu Q (Obr. 2.4). Potom však spomalí a v mieste lokálneho maxima funkcie $x(t)$ zastaví a začne sa pohybovať naspäť k bodu P ($x(t)$ klesá). Po nejakom čase sa opäť zastaví(pozri lokálne minimum funkcie $x(t)$), otočí a podobne veľkou rýchlosťou ako na začiatku sa napokon dostane do bodu Q. Okamžitá rýchlosť sa teda počas pohybu menila. Ak by náš HB reprezentoval auto cestujúce zo Žiliny (P) do Bratislavy (Q), potom hodnotu veľkosti okamžitej rýchlosti by sme videli na tachometri. Mentálny obraz

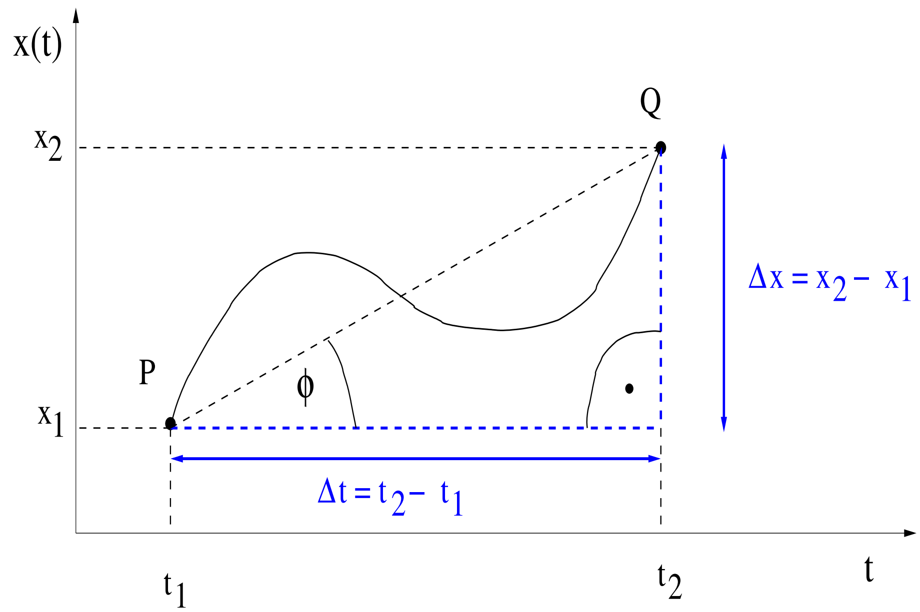

Figure 2.4: Definícia časového intervalu Δt a posunutia Δx.

okamžitej rýchlosti je teda jasný. Ako však uchopiť okamžitú rýchlosť matematicky? Toto je pomerne netriviálne a privedie nás to k pojmom limity a derivácie. Matematicky korektné základy týchto pojmov budete mať na hodinách matematiky. Tu vám ukážeme intuitívne prijateľnú skratku vychádzajúcu z definície priemernej rýchlosti (Obr. 2.5).

Hľadáme okamži tú rýchlosť v bode A, ktorý je niekde medzi bodmi P a Q. Vychádzame, podobne ako Newton z toho, že ak poznáme priemernú rýchlosť na malom intervale Δt, ktorý začína v $t = t_1$, tak táto priemerná rýchlosť sa nemôže veľmi líšiť od okamžitej rýchlosti v čase $t = t_1$, pretože za krátky čas HB (auto) nestihne veľmi zmeniť svoju rýchlosť, ktorú mal v bode A. Z tohoto vyplýva, že ak zoberieme interval Δt, ktorý sa blíži k nule, priemerná rýchlosť na tomto intervale sa bude blížiť k okamžitej. Tejto operácii hovoríme limita pre $\Delta t \to 0$ a označíme ju $\lim_{\Delta t \to 0}$.

Na Obr. 2.5 sme zvolili najskôr interval $\Delta t = t_2 - t_1$ medzi bodmi A a Q, potom interval $\Delta t = t_2^B - t_1$ medzi bodmi A a B a interval $\Delta t = t_2^C - t_1$ medzi bodmi A a C. Na každom z týchto intervalov spočítame priemernú rýchlosťaž pre

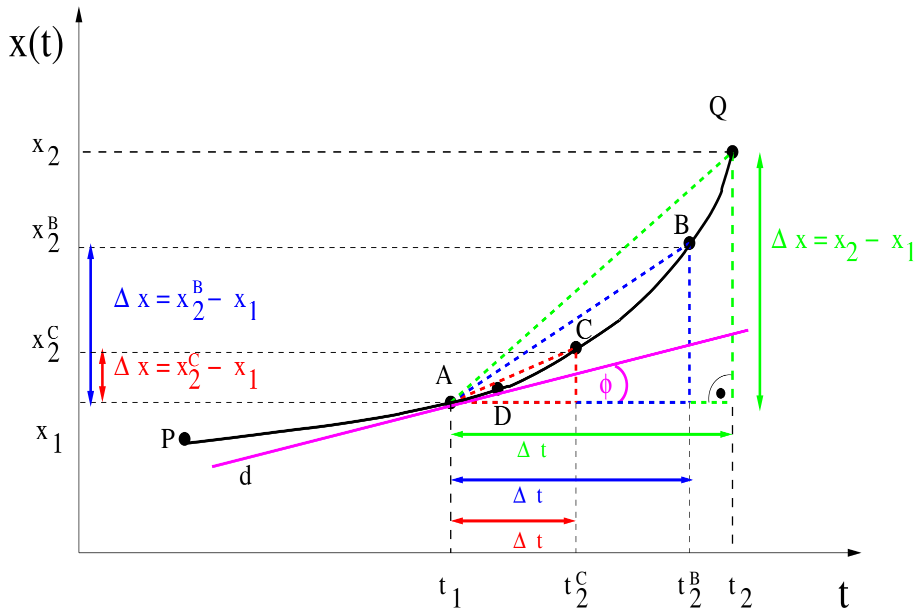

Figure 2.5: Okamžitá rýchlosť v bode A ($t = t_1, x = x_1$) ako limita z priemernej rýchlosti pre $\Delta t \to 0$.

$\Delta \to 0$ sa priemerná rýchlosť stane okamžitou, ktorú označíme $v = v(t = t_1)$,

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{AQ} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{smernica AQ} \\
\bar{v}_{AB} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2^B - x_1}{t_2^B - t_1} \quad \text{smernica AB} \\
\bar{v}_{AC} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2^C - x_1}{t_2^C - t_1} \quad \text{smernica AC} \\
&\ldots \\
&\ldots \\
v(t = t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Takúto limitu nazveme derivácia a označíme ju pre ľubovoľné t nasledovne

$$v = v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Tento zápis čítame *okamžitá rýchlosť v čase t je derivácia polohy $x(t)$ podľa času t.* Graficky je okamžitá rýchlosť reprezentovaná smernicou dotyčnice d ($= \tan \phi$) ku krivke $x(t)$ v bode A.

2.4 Ako počítame derivácie

Ukážeme si jednoduchý príklad ako nájdeme deriváciu funkcie $x(t) = vt$ v čase $t = t_1$, kde v je konštanta nezávislá na čase. Postupujeme podľa definície

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\,x(t) \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{vt_2 - vt_1}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_1 \;+\; \Delta t) - vt_1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{vt_1 + v\Delta t - vt_1}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\Delta t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} v \\ &= v, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde sme využili, že $\Delta t = t_2 - t_1$ a $t_2 = t_1 + \Delta t$. Konštanta v je teda okamžitá rýchlosť tohto pohybu. Deriváciu sme našli v konkrétnom čase $t = t_1$, ale keďže t_1 môže byť akýkoľvek čas, prichádzame k záveru, že

$$\frac{d}{dt}\,x(t) \;=\; \frac{d}{dt}\,vt \;=\; v \tag{2.8}$$

v ľubovoľnom čase t.

Podobným postupom by sme ukázali (urobia tak na matematike), že (k je konštanta)

$$\frac{d}{dt}\,k = 0 \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt}\,t = 1 \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dt}\,kt = k \tag{2.11}$$

$$\frac{d}{dt}\,t^2 = 2t \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}kt^2 = kt \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}\,kt^n = k\,n\,t^{n-1} \tag{2.14}$$

2.5 Zrýchlenie

Na Obr. 2.6, hoci vyzerá podobne ako Obr. 2.5, máme namiesto závislosti polohy $x(t)$ na čase závislosť okamžitej rýchlosti $v(t)$ na čase t. Táto rýchlosť sa môže meniť rôznym spôsobom, napr. aj tak ako je na tomto obrázku. Všimnime

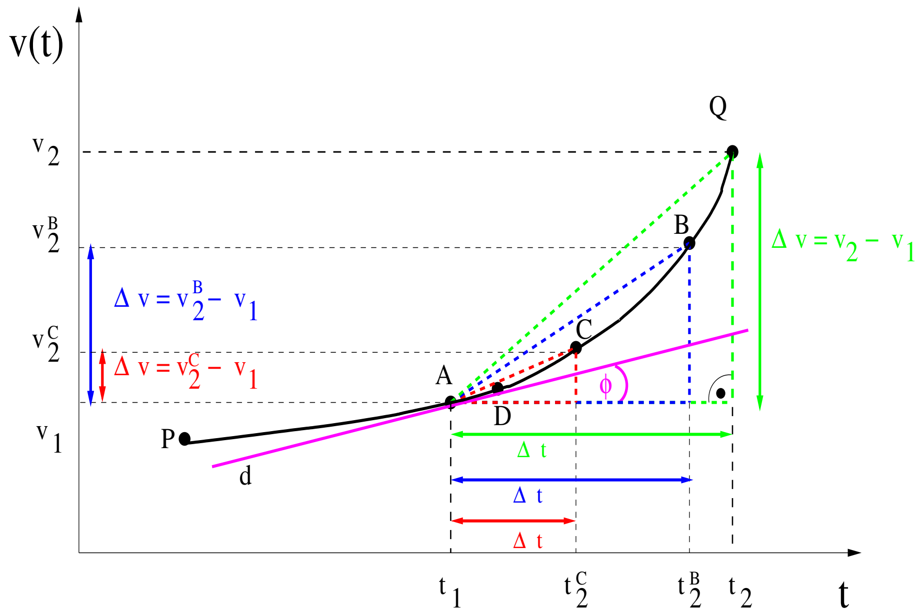

Figure 2.6: Okamžité zrýchlenie v bode A ($t = t_1, v = v_1$) ako limita z priemerného zrýchlenia pre $\Delta t \to 0$.

si teraz priebeh rýchlosti medzi bodmi A a Q. Priemerné zrýchlenie je definované ako

$$\bar{a} \;=\; \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \bar{a}_{AQ} \qquad [\mathrm{ms}^{-2}]. \tag{2.15}$$

Okamžité zrýchlenie v bode A ($t = t_1$) dostaneme (podobne ako v prípade okamžitej rýchlosti) ako limitu z priemerných zrýchlení na čoraz kratších intervaloch Δt,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{AQ} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \text{smernica AQ} \\
\bar{a}_{AB} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2^B - v_1}{t_2^B - t_1} \quad \text{smernica AB} \\
\bar{a}_{AC} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2^C - v_1}{t_2^C - t_1} \quad \text{smernica AC} \\
&\ldots \\
&\ldots \\
a(t = t_1) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Okamžité zrýchlenie $a = a(t)$ je teda derivácia okamžitej rýchlosti $v(t)$ podľa času t,

$$a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\, v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.17}$$

Graficky je okamžité zrýchlenie reprezentované smernicou dotyčnice d ($= \tan\phi$) ku krivke $v(t)$ v bode A.

2.6 Pohyb s konštantným zrýchlením

Je to špeciálny, ale veľmi častý prípad pohybu, pri ktorom sú poloha $x(t)$, okamžitá rýchlosť $v(t)$ a zrýchlenie $a(t)$ dané vzťahmi

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{2.18}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{2.19}$$

$$a(t) = a = \text{konst}, \tag{2.20}$$

kde x_0 je počiatočná poloha, v_0 je počiatočná rýchlosť a $a = \text{konst}$ je konštantné zrýchlenie. Tieto vzťahy si odvodíme neskôr, zatiaľ nám postačí, keď sa ich naučíme používať v príkladoch.

V prípade, že $a = 0$ sa tieto vzťahy zjednodušia na

$$x(t) = x_0 + v_0 t \tag{2.21}$$

$$v(t) = v_0 \tag{2.22}$$

a takýto pohyb nazývame rovnomerný pohyb s konštantnou rýchlosťou $v = v_0$.

Bibliography

[1] Eisberg, R.M., Fundamentals of Modern Physics, New York, London, John Wiley & Sons, Inc.

[2] Beiser, A., Concepts of Modern Physics, New York, McGraw-Hill.