

## Príklady, ktorým je potrebné rozumieť pre druhú časť skúšky (riešené boli na cvičeniach alebo na prednáške)

Po postupe do tejto časti skúšky dostanete 2 alebo 3 príklady na 30 minút v hodnote 50 bodov. Budú to obmenené verzie príkladov nižšie. Správne chápanie príkladov z tohto zoznamu vám umožní vyriešiť aj príklady na skúške. Nestačí napísať výsledný vzťah, odvodenie je veľmi dôležité! Vektory tu namiesto šípky označujeme **boldom**.

V tejto časti skúšky môžete používať poznámky a učebnice, ale je ťažkým prehreškom využívať pomoc druhej osoby. Na ústnej časti skúšky si preverím, nakoľko rozumiete veciam.

### Pr. 1.1

Nájdite súčet dvoch vektorov, rozdiel dvoch vektorov, veľkosť vektora, opačný vektor, násobenie vektora skalárom, jednotkový vektor v smere nejakého vektora, skalárny súčin dvoch vektorov, vektorový súčin dvoch vektorov

### Pr. 1.2

V experimente boli namerané nasledovné hodnoty:

3,47; 3,42; 3,51; 3,44; 3,49 cm.

- Vypočítajte aritmetický priemer, strednú kvadratickú odchýlku jedného merania a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru !
- Zaokrúhlite aritmetický priemer na dve platné číslice v chybe!
- Nájdite interval, do ktorého padne hodnota nasledujúceho merania s pravdepodobnosťou 68%!
- Nájdite interval, v ktorom sa skutočná hodnota meranej veličiny nachádza s pravdepodobnosťou 68%!

### Pr. 1.3

Farmárove sliepky zniesli v jednotlivých dňoch po sebe nasledovné počty vajec:

346, 330, 348, 335, 340, 337, 351.

- Aká je priemerná denná znáška vajec?
- Aká je pravdepodobnosť, že sliepky znesú menej ako 326 vajec? Pomôcka: v intervale (stredná hodnota  $- 2 \sigma_x$ , stredná hodnota  $+ 2 \sigma_x$ ) je pravdepodobnosť 96%.

### Pr. 2.1

Pohyb hmotného bodu je opísaný funkciou

$x(t) = -4t + 2t^2$ , kde  $x$  je v metroch a  $t$  je v sekundách

- Načrtnite graf tejto funkcie, diskutujte pohyb hmotného bodu!
- Určite posunutie hmotného bodu v intervaloch  $t_1 = 0s$ ,  $t_2 = 1s$  a  $t_1 = 1s$ ,  $t_2 = 3s$ !
- Vypočítajte priemernú rýchlosť na tých istých intervaloch!
- Nájdite okamžitú rýchlosť v čase  $t = 1s$  a v čase  $t = 2s$ !

Pr. 2.2

Akou rýchlosťou vyhodil bohatier Ivan budzogán zvislo nahor, keď sa budzogán vrátil na zem po 1 hodine? **Príklad sme priamo neriešili, ale potrebné rovnice boli na prednáške.**

Pr. 3.1

Rýchlosť hmotného bodu je daná ako

$$v(t) = (b - c t^2) \text{ ms}^{-1}, \text{ kde } t \text{ je čas v sekundách, } b = 40 \text{ ms}^{-1}, c = 5 \text{ ms}^{-3}$$

a) Nakreslite graf funkcie  $v(t)$ !

b) Nájdite priemerné zrýchlenie na intervale od  $t_1 = 0 \text{ s}$  do  $t_2 = 2 \text{ s}$ !

c) Nájdite zrýchlenie v čase  $t = 2 \text{ s}$ !

Pr. 3.2

Skalolezec padne z výšky  $h$  do mora. Ako dlho trvá jeho pád, ak zanedbáme odpor vzduchu? **Podobný príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 3.3

Auto zrýchli rovnomerne z pokoja na  $100 \text{ km/hod}$  za  $5 \text{ s}$ .

a) Nájdite zrýchlenie auta!

b) Akú vzdialenosť prejde auto za  $5 \text{ s}$ ?

c) Aká bude jeho rýchlosť po  $8 \text{ s}$  ak bude ďalej zrýchľovať s rovnakým zrýchlením?

Pr. 3.4

Delostrelci vystrelia na rovine granát rýchlosťou, ktorej veľkosť je  $v_0$ , pod uhlom  $\alpha$ . Do akej maximálnej výšky vystúpi granát a v akej vzdialenosti od dela dopadne? Zanedbajte odpor vzduchu. **Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 4.1

HB sa pohybuje v rovine  $xy$  s konštantným zrýchlením  $\mathbf{a} = (a_x, 0)$ , kde  $a_x = 4 \text{ ms}^{-2}$ .

Začína v počiatku súradnicovej sústavy v  $t = 0 \text{ s}$  s  $\mathbf{v}_0 = (20, -15) \text{ ms}^{-1}$ .

a) Nájdite  $\mathbf{v}$  v čase  $t = 5 \text{ s}$ , veľkosť  $|\mathbf{v}|$  v čase  $t = 5 \text{ s}$  a jednotkový vektor v smere  $\mathbf{v}$  v čase  $t = 5 \text{ s}$ .

b) Nájdite polohový vektor  $\mathbf{r}$  v čase  $t = 5 \text{ s}$

**Podobný problém sme riešili na prednáške v jednom rozmere.**

Pr. 5.1

Lietadlo zhodí debnu s potravinami vo výške  $100 \text{ m}$  nad zemou pri rýchlosti (horizontálnej)  $40 \text{ ms}^{-1}$ . Kde dopadne balík? Predpoklad: rovinný povrch, zanedbaný odpor vzduchu. Aká je rýchlosť  $\mathbf{v}$  v momente pred dopadom? Pod akým uhlom dopadne debna?

Pr. 5.2

Teleso sa pohybuje po kružnici proti smeru hodinových ručičiek s uhlovým zrýchlením  $\varepsilon = k t$ , kde  $k = 3 \text{ s}^{-3}$  je konštanta. Polomer kružnice  $R = 2 \text{ m}$ . Počiatočná uhlová rýchlosť  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  a počiatočná poloha  $\varphi_0 = \pi/2$ .

- Nájdite uhlovú rýchlosť  $\omega$  v čase  $t = 10 \text{ s}$ .
- Nájdite polohu telesa  $\varphi$  v čase  $t = 10 \text{ s}$ .
- Nájdite vektor rýchlosti  $\mathbf{v}$  v každom čase a jeho veľkosť v čase  $t = 10 \text{ s}$ .
- Nájdite vektor zrýchlenia  $\mathbf{a}$  a jeho zložky  $\mathbf{a}_t$  a  $\mathbf{a}_n$  v  $t = 10 \text{ s}$ .

Pr. 6.1

Z miesta A pláva loďka proti prúdu rieky do miesta B a potom späť do miesta A. Rýchlosť loďky vzhl'adom k vode je stále rovnaká, a to  $4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , rýchlosť prúdu vody v rieke je  $1,6 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Určte pomer doby, za ktorú prejde loďka dráhu z miesta A do miesta B a späť, a doby, ktorú by loďka potrebovala na prejdenie tejto dráhy na jazere so stojatou vodou.

Pr. 6.2

Cestujúci Karol a Ján sedia spolu vo vlaku, ktorý sa pohybuje rýchlosťou  $V = 130 \text{ km/h}$ . Obaja sa súčasne vyberú na WC, Karol v smere jazdy vlaku a Ján proti smeru jazdy. Obaja kráčajú voči podlahe vagónu štandardnou chodeckou rýchlosťou  $u = 5 \text{ km/h}$ .

- Akými rýchlosťami sa Karol a Ján pohybujú voči okolitej krajine?
- Akou rýchlosťou sa Karol a Ján od seba vzd'ajújú?
- V protismere prichádza nákladný vlak rýchlosťou  $U = 65 \text{ km/h}$ . Aká je rýchlosť nákladného vlaku voči Karolovi, voči Jánovi a voči rušnovodičovi, ktorý sedí v kabíne lokomotívy?

Pr. 6.3

S akým zrýchlením sa bude pohybovať teleso, ktoré ťaháme po vodorovnej podložke bez trenia ťahaním povrazu silou  $\mathbf{T}$  vodorovným smerom? Teleso má hmotnosť  $m$ .

**Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 6.4

S akým zrýchlením sa bude pohybovať teleso s hmotnosťou  $m$  dole naklonenou rovinou s uhlom  $\alpha$ ? Trenie zanedbajte! Ako sa zmení výsledok, keď uvažíme, že trenie je prítomné s koeficientom trenia  $\mu_k$ ?

**Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 6.5

Ťaháme sústavu 4 vozíkov vodorovnou silou  $\mathbf{F}$ . Prvý vozík má hmotnosť  $m_4$ , druhý  $m_3$ , tretí  $m_2$  a posledný  $m_1$ .

- Aké je zrýchlenie každého vozíka?
- Aká je veľkosť ťahových síl  $T_1$  (medzi tretím a štvrtým vozíkom),  $T_2$  (medzi druhým

a tretím) a  $T_3$  (medzi prvým a druhým) medzi vozíkmi?

**Podobný príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 7.1

Na vodorovnej streche máme teleso s hmotnosťou  $M$ , ktoré je ťahané lanom cez kladku, ktorá je na okraji strechy, pričom na lane je zavesené teleso s hmotnosťou  $m > M$ . Teleso  $m$  sa pohybuje zvislo dolu, pričom ťahá teleso  $M$ , ktoré sa pohybuje po streche vodorovne. Pri riešení zanedbajte trenie.

a) Aké je zrýchlenie telies?

b) Aká je veľkosť ťahovej sily lana?

**Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 7.2

Puk sa šmýka po zamrznutom rybníku s počiatočnou rýchlosťou  $v_0 = 20 \text{ ms}^{-1}$ . Stále je v kontakte s ľadom a zastaví sa po prejdení vzdialenosti 120m. Nájdite koeficient kinetického trenia  $\mu_k$  medzi pukom a ľadom!

Pr. 8.1

Auto zrýchli rovnomerne z 0 na 80 míl/hod za 8s. Vonkajšia sila, ktorá urýchli auto je trecia sila medzi pneumatikami a cestou. Ak kolesá neprešmykujú, nájdite minimálny koeficient trenia medzi pneumatikami a cestou!

Pr. 8.2

Teleso s  $m = 3 \text{ kg}$  sa šmykne z pokoja z vrcholu naklonenej roviny (ktorá zvierá s horizontálou uhol 30 stupňov), pričom prejde 2 m za 1,5 s. Aké je zrýchlenie telesa? Aký je koeficient trenia  $\mu_k$ ? Aká je rýchlosť po 1,5 s? Aká je trecia sila?

Pr. 8.3

Teleso je pripevnené ku vodorovne umiestnenej strune zakotvenej vľavo v stene s konštantou tuhosti  $k = 80 \text{ Nm}^{-1}$ . Struna natiahneme z rovnovážnej polohy ( $x=0$ ) do polohy  $x_1 = 3 \text{ cm}$ . Vypočítajte prácu, ktorú vykoná sila  $F$ , ktorou pôsobí pružina na teleso pri presune telesa z  $x_1$  do  $x_2 = 0 \text{ cm}$ . Trenie zanedbáme.

**Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 9.1

Sila, ktorá pôsobí na teleso pozdĺž osi  $x$  (a aj teleso sa pohybuje pod jej účinkom pozdĺž osi  $x$ ), sa mení so vzdialenosťou  $x$  tak, že prvé 4 metre je konštantná  $F = 5 \text{ N}$  a potom lineárne klesá ako  $F = ax + b$ , kde  $a = -2.5 \text{ Nm}^{-1}$  a  $b = 15 \text{ N}$ . Vypočítajte prácu sily  $F$ , ktorá presunie teleso z  $x_1 = 0 \text{ m}$  do  $x_2 = 6 \text{ m}$ ! a) Nakreslite priebeh sily  $F$  ako funkcie  $x$  a vypočítajte prácu ako plochu pod krivkou, b) Nájdite prácu integrovaním analytického výrazu pre silu.

### Pr. 9.2

Dieťa sa spúšťa na saniach dole zľadovateným kopcom v tvare naklonenej roviny s výškou  $h = 20\text{m}$  a uhlom  $\alpha = 30$  stupňov. Jeho počiatočná rýchlosť je  $v_1 = 0\text{ ms}^{-1}$ . Aká bude jeho rýchlosť v spodnej časti kopca? Zanedbajte trenie!

### Pr. 10.1

Teleso s hmotnosťou  $m = 0.80\text{ kg}$  sa šmýka bez trenia po vodorovnom povrchu a narazí do struny s konštantou tuhosti  $k = 50\text{ Nm}^{-1}$ . Struna je na druhom konci ukotvená v stene. Rýchlosť telesa  $v_1 = 1.2\text{ ms}^{-1}$ . Nájdite maximálne stlačenie struny  $\Delta x$ !

### Pr. 10.2

Loptu pustíme z výšky  $h$  rýchlosťou  $v_1$ . Bude padať voľným pádom. Aká bude jej rýchlosť  $v_2$  vo výške  $y < h$  ak a)  $v_1 = 0$  a b)  $v_1 > 0$ ? Využite zákon zachovania celkovej mechanickej energie.

### Pr. 10.3

Máme systém štyroch hmotných bodov A,B,C,D s hmotnosťami  $1\text{kg}$ ,  $2\text{kg}$ ,  $4\text{ kg}$  a  $3\text{kg}$ . Ich poloha je daná súradnicami  $(2,3)$ ,  $(4,1)$ ,  $(0,-1)$  a  $(3,-2)$  v metroch v poradí, v akom sú uvedené hmotnosti. Nakreslite polohu hmotných bodov do grafu a skúste si tipnúť, kde bude ťažisko. Potom nájdite výpočtom ťažisko systému a zakreslite ho do grafu!

### Pr. 10.4

Vypočítajte moment zotrvačnosti tenkej homogénnej tyče s hmotnosťou  $M$  a dĺžkou  $L$  vzhľadom na os, ktorá je kolmá na tyč a prechádza jej ťažiskom! **Príklad bol riešený na prednáške.**

### Pr. 11.1.

Majme 3 hmotné body prepojené ľahkými pevnými tyčami ležiacimi na osi  $y$  (obr. na cvičení). Ich hmotnosti sú  $m_1 = 4\text{ kg}$ ,  $m_2 = 2\text{ kg}$ ,  $m_3 = 3\text{ kg}$  a ich príslušné súradnice sú  $(0,3)$ ,  $(0,-2)$  a  $(0,-4)$  v metroch (poradie zodpovedá poradiu hmotností). Systém rotuje okolo osi  $x$  uhlovou rýchlosťou  $\omega = 2\text{ s}^{-1}$ .

a) Nájdite moment zotrvačnosti systému vzhľadom na os  $x$ !

b) Nájdite celkovú kinetickú energiu systému!

### Pr. 11.2

Auto s hmotnosťou  $1500\text{ kg}$  ide po kruhovom objazde s polomerom  $50\text{ m}$  v smere hodinových ručičiek rýchlosťou  $40\text{ ms}^{-1}$ . Aký je moment hybnosti auta vzhľadom na stred kružnice? Aká je jeho uhlová rýchlosť?

### Pr. 11.3

Balistické kyvadlo na meranie rýchlosti nábojov funguje takto: náboj s hmotnosťou  $m_1$  a rýchlosťou  $v_{1i}$  sa zaryje do zaveseného dreveného hranola s hmotnosťou  $m_2$ , zostane v

ňom a celý systém sa otočí okolo bodu závesu O a vystúpi do výšky h. Nájdite rýchlosť náboja  $v_{ii}$ !

Pr. 11.4

Tenká homogénna tyč s hmotnosťou  $m$  a dĺžkou  $l$  je vo vodorovnej polohe, pričom sa môže otáčať okolo pevnej osi ukotvanej v stene na ľavom konci tyče (obr. na prednáške). Os je kolmá na tyč. Pravý koniec tyče pridržame a potom náhle pustíme. S akým uhlovým zrýchlením sa tyč začne otáčať? Aké bude počiatočné tangenciálne zrýchlenie pravého konca tyče? **Príklad bol riešený na prednáške.**

Pr. 12.1

Máme tenké koleso (disk) v rovine  $xy$  so stredom v počiatku. Po obvode kolesa pôsobí v bode so súradnicami  $(0 ; 1)$  m sila  $F_1 = 5\text{N}$  v smere osi  $x$  a v bode  $(-0,5 ; 0)$  m sila  $F_2 = 6\text{N}$  v smere osi  $-y$ . Aký je výsledný moment sily pôsobiaci na koleso?

Pr. 12.2.

Máme hojdačku, ktorou je doska s hmotnosťou  $m = 40\text{ kg}$ . Na hojdačke sú dve deti s hmotnosťami  $m_1 = 50\text{ kg}$  a  $m_2 = 35\text{ kg}$ , pozri obrázok na cvičení. Os rotácie je v strede dosky v ťažisku T. Vzďialenosť dieťaťa s  $m_1$  od ťažiska je  $a = 1,5\text{ m}$ .

a) Aká je sila  $F_N$ , ktorou pôsobí podpora na dosku?

b) Kde má sedieť ľahšie dieťa, aby bola hojdačka v rovnováhe?

Pr. 12.3

Nájdite únikovú rýchlosť telesa s hmotnosťou  $m$  z gravitačného poľa Zeme pomocou zákona zachovania mechanickej energie! **Príklad bol riešený na prednáške 12.**

### Ďalšie odporúčané príklady:

Pr. 14.1.

Elektrón vo vákuovej trubici klasického TV (CRT) je urýchlený z počiatočnej rýchlosti  $3 \cdot 10^4\text{ ms}^{-1}$  na rýchlosť  $5 \cdot 10^6\text{ ms}^{-1}$  na vzdialenosti  $2\text{ cm}$  (v urýchľovacej oblasti).

a) Ako dlho bol elektrón v urýchľovacej oblasti?

b) Aké bolo zrýchlenie elektrónu?

Pr. 14.2

Sila, ktorá pôsobí na teleso pozdĺž osi  $x$  (a aj teleso sa pohybuje pod jej účinkom pozdĺž osi  $x$ ), sa mení so vzdialenosťou  $x$  tak, že prvé  $4\text{ metre}$  sa mení podľa vzťahu  $F(x) = \sqrt{[R^2 - k(x-a)^2]}$  kde  $R = 2\text{N}$ ,  $a = 2\text{m}$ ,  $k = 1\text{N}^2\text{m}^{-2}$ ; druhé  $2\text{m}$  sa mení podľa vzťahu  $F(x) = b = 2\text{N}$  a posledné  $2\text{m}$  podľa vzťahu  $F(x) = cx + d$  kde  $c = 1\text{ Nm}^{-1}$ ,  $d = 8\text{N}$ . Vypočítajte

prácu sily  $F$ , ktorá presunie teleso z  $x_1 = 0\text{m}$  do  $x_2 = 8\text{m}$ ! Pomôcka: nakreslite graf sily  $F$  ako funkcie  $x$  a vypočítajte prácu ako plochu pod krivkou!

Pr. 14.3

Chlapci Ján a Pavol sa sánkovali na kopci. Sánky aj s nimi mali hmotnosť 90 kg. Aby išli čo najrýchlejšie, hore sa rozbehli, naskočili na sánky a išli dolu. Počiatočná rýchlosť sánok už s oboma chlapcami je  $10\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Kopec je vysoký 20 m. Predpokladajte, že chlapci nebrzdia a že trenie sánok a odpor vzduchu sa dá zanedbať. Akú rýchlosť majú sánky s Jánom a Pavlom na úpätí kopca?

Pr. 14.4

Náboj o hmotnosti 4 g vletí do balistického kyvadla vodorovne rýchlosťou  $600\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Kyvadlo má hmotnosť 1 kg. Náboj ním preletí a vyletí von rýchlosťou  $100\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vypočítajte výšku, do ktorej vystúpi kyvadlo.

Pr. 14.5

Lietadlo s rýchlosťou  $v_0$  počas letu exploduje a rozpadne sa na 2 časti s rovnakou hmotnosťou. Jedna časť pokračuje v lete v smere, ktorý zvierá s pôvodným smerom uhol  $\alpha$  a druhá časť v smere, ktorý zvierá s pôvodným smerom uhol  $-\alpha$ . Energia vyvinutá pri explózii je rovnaká ako kinetická energia, ktorú malo lietadlo tesne pred explóziou. Určite veľkosť rýchlostí oboch častí lietadla a uhol  $\alpha$  po explózii.

Pr. 14.6.

Teleso s hmotnosťou  $m = 3\text{kg}$  sa začne šmýkať z pokoja dole naklonenou rovinou s uhlom  $\alpha = 30$  stupňov. Za čas  $t = 1,5\text{ s}$  sa šmykne o vzdialenosť  $x(t) = 2$  metre.

- Aké je zrýchlenie, s ktorým sa šmýka?
- Aká bude jeho rýchlosť v čase  $t$ ?
- Aký je koeficient kinetického trenia  $\mu_k$ ?
- Aká je trecia sila?