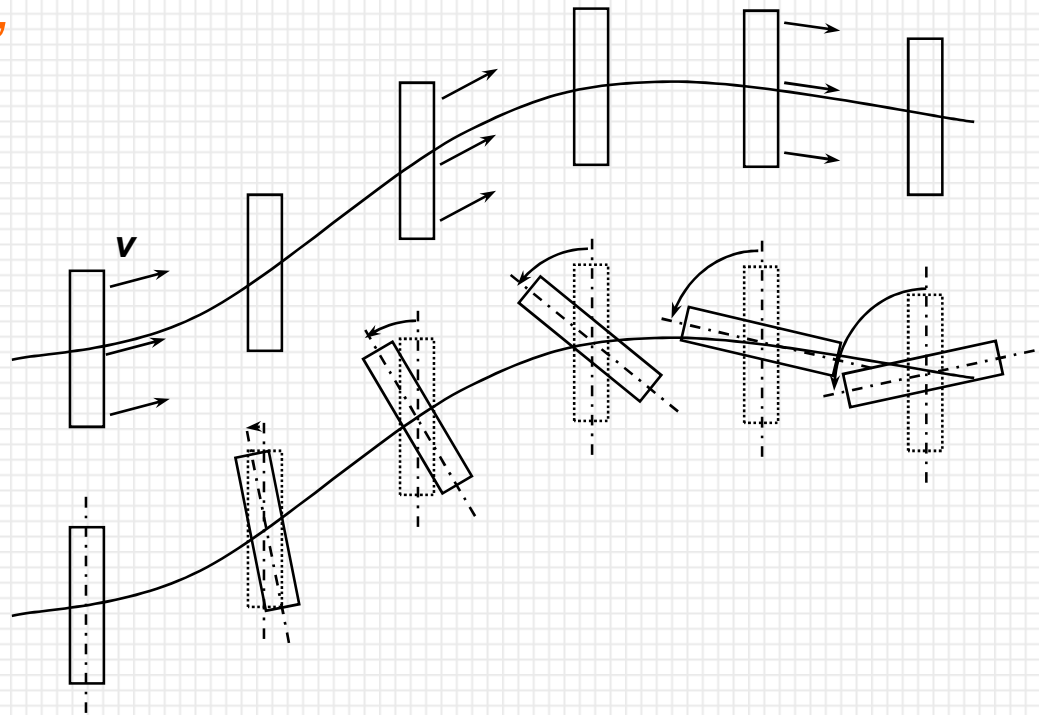
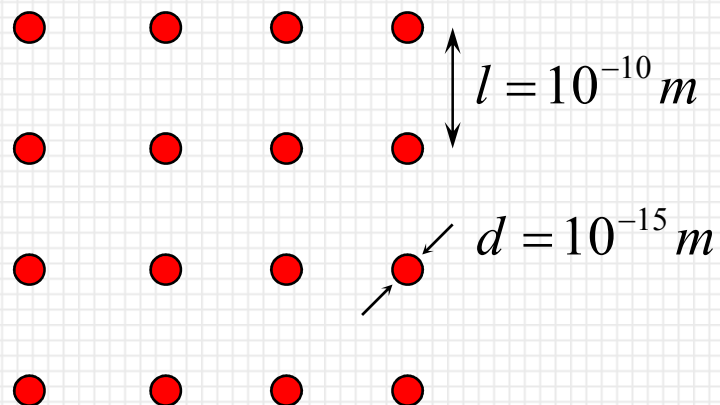


Sústava hmotných bodov, tuhé teleso

Sústava hmotných bodov,
Tuhé teleso,
Ťažisko,
Polohový vektor ťažiska,
Vety o pohybe ťažiska,
Moment zotrvačnosti,
Fyzikálne kyvadlo,
Steinerova veta.





$$\frac{l}{d} = 10^5$$

vyhovuje představa hm. b.

*Všetky zákony pro soustavu hm.
b. budou platit i pro tuhé těleso.*

*Dokonalé tuhé těleso nemá
svůj tvar – je nedeformovatelné*

hustota tuhé těleso (objemová)

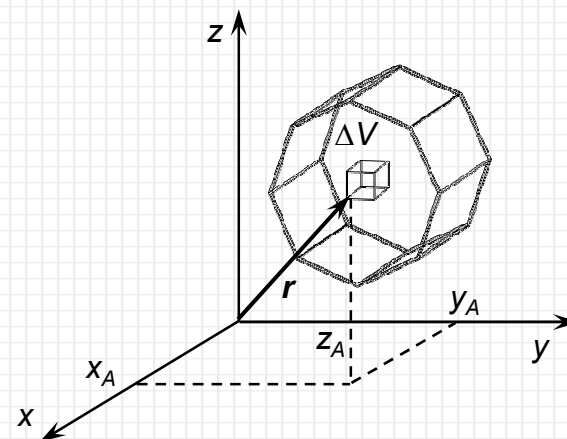
$$\rho(x, y, z) = \rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

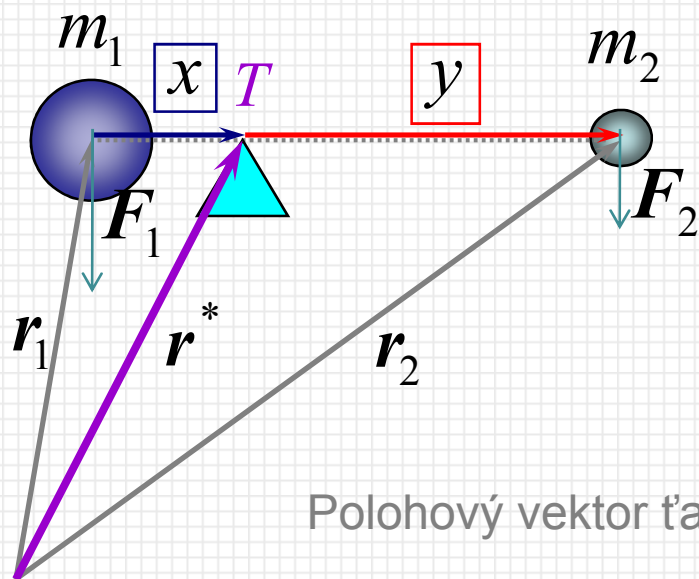
plošná hustota tuhé těleso

$$\sigma = dm/dS$$

dílková hustota tuhé těleso

$$\lambda = dm/dl$$





Ťažisko ?

$$M_1 = M_2$$

$$m_1 g x = m_2 g y$$

Ťažisko dvoch hm. b. je taký bod na ich spojnici, ktorý ju delí v obrátenom pomere ich hmotností.

$$\frac{x}{y} = \frac{m_2}{m_1}$$

Polohový vektor ťažiska ?

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

zovšeobecnením pre n – hmotných bodov

$$\mathbf{r}^* = \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_1 + \mathbf{x}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}^* + \mathbf{y}$$

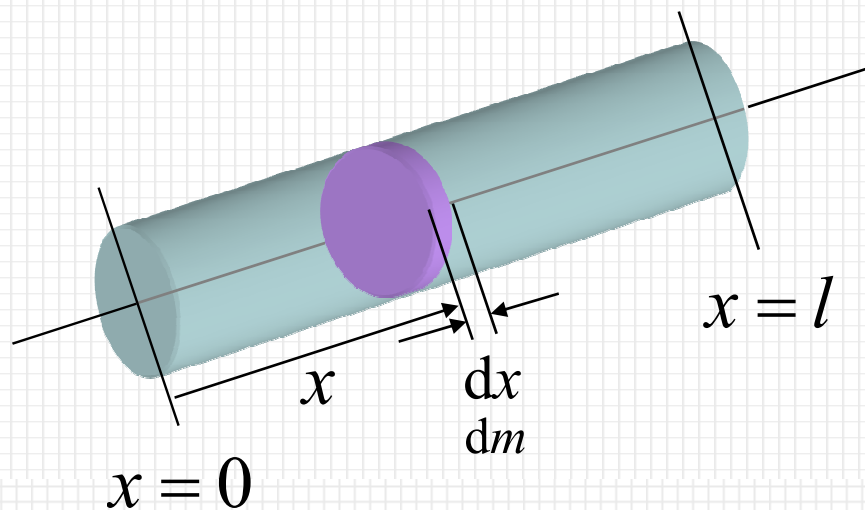
$$\mathbf{x} = \frac{m_2}{m_1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1} \mathbf{y}$$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}^*)$$

$$\mathbf{r}^* m_1 = \mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2 - \mathbf{r}^* m_2$$



Ťažisko ?

$$x^* = \frac{1}{M} \int x dm$$

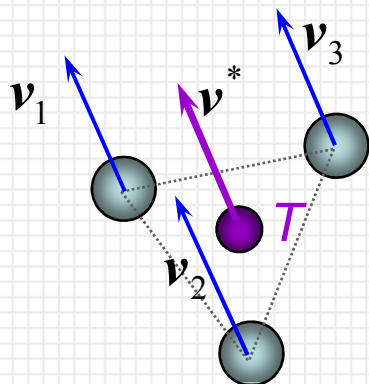
$$y^* = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$z^* = \frac{1}{M} \int z dm$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}^* &= \frac{\sum_i \mathbf{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \xrightarrow{\Sigma \rightarrow \int} \mathbf{r}^* = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm} \xrightarrow{\int dm = M} \mathbf{r}^* = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}^* = \frac{d\mathbf{r}^*}{dt} \quad \mathbf{r}^* = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^* = \frac{1}{M} \sum_i \frac{m_i d\mathbf{r}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^* = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{a}^* = \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} \quad \mathbf{v}^* = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^* = \frac{1}{M} \sum_i \frac{m_i d\mathbf{v}_i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^* = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{a}_i$$



všeobecne

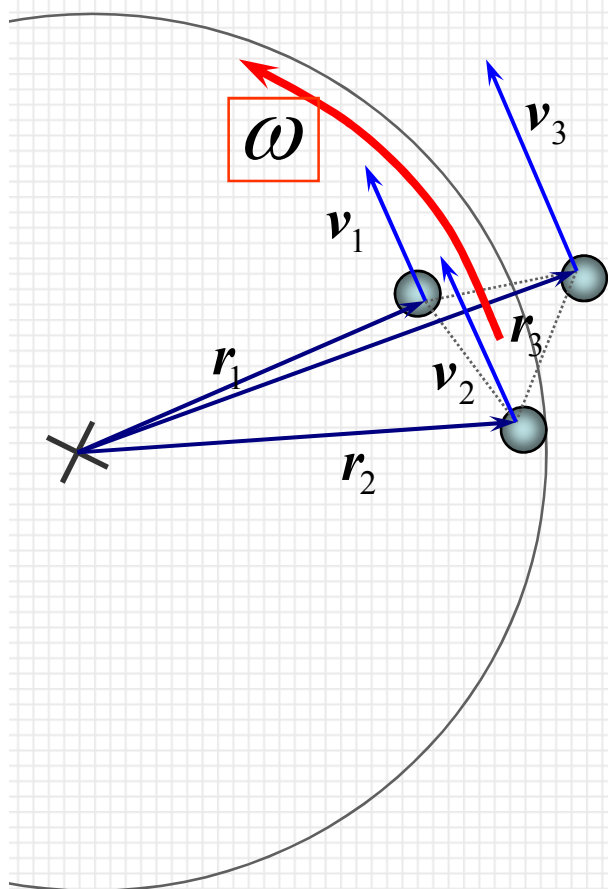
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Pre i-ty bod:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad \xrightarrow{v_i = v^*} \quad = \frac{1}{2}(v^*)^2 \sum_i m_i \quad \xrightarrow{\quad} \quad = \frac{1}{2}m(v^*)^2$$

$$E_{kT} = \frac{1}{2}m(v^*)^2$$



všeobecne

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Pre i-ty bod:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \xrightarrow{v_i = \omega_i r_i} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_i r_i)^2 \xrightarrow{\omega = \omega_i} = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}$$

$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

Všeobecný popis pohybu telesa (translačný + rotačný)

 J ... moment zotrvačnosti

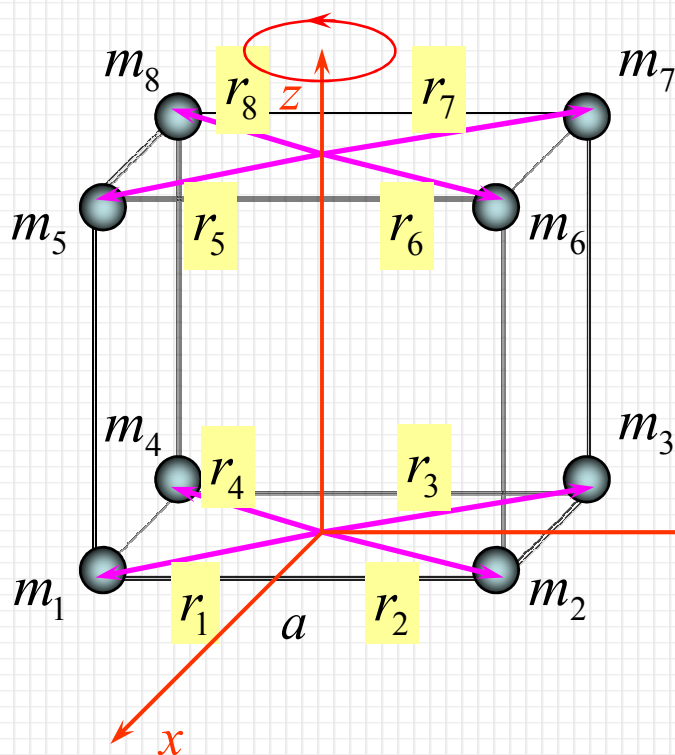
$$E_k = \frac{1}{2} \left(\omega^2 J + m (v^*)^2 \right)$$

$$E_{kR} = \frac{1}{2} \omega^2 J$$

$$J_s = \sum_i m_i r_i^2 \quad ?$$

$$J = \sum_{i=1}^8 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_8 r_8^2$$

$$r_1, r_2, \dots, r_8 = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$



$$J = m_1 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + m_2 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots + m_8 \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2$$

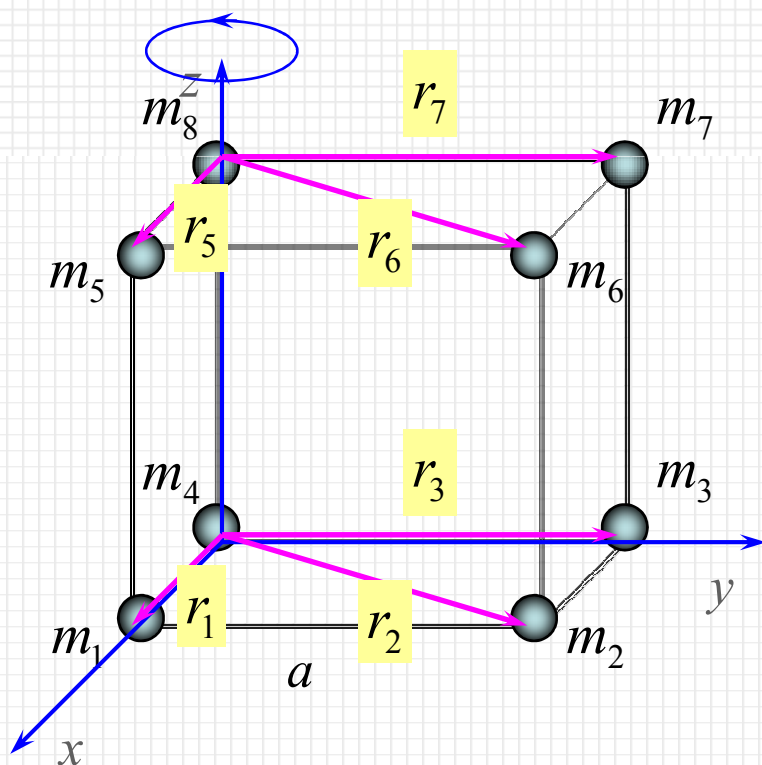
$$J_s = 4ma^2$$

$$J_r = \sum_i m_i r_i^2$$

?

$$J = \sum_{i=1}^8 m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_8 r_8^2$$

$$r_1, r_3, r_5, r_7 = a \quad r_4, r_8 = 0 \quad r_2, r_6 = a\sqrt{2}$$



$$J = m \left[4a^2 + 2(a\sqrt{2})^2 \right]$$

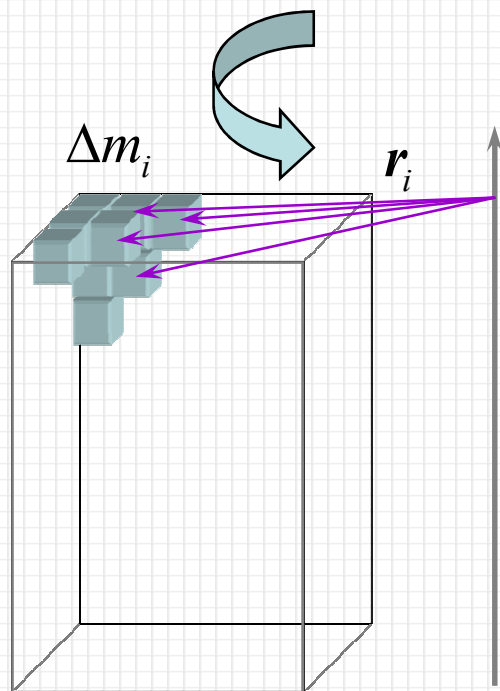
$$J_r = 8ma^2$$

$$J_s = 4ma^2$$



$$J_r = 8ma^2$$

porovnanie: ak sú hmotné body viac vzdialené od osi rotácie, moment zotrvačnosti sústavy je väčší



$$J = \sum_i m_i r_i^2$$

... pre sústavu hm. b.

$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

... tuhé teleso, kde $m = \sum_i \Delta m_i$

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

$$J = \sum_i \rho_i \Delta V_i r_i^2$$

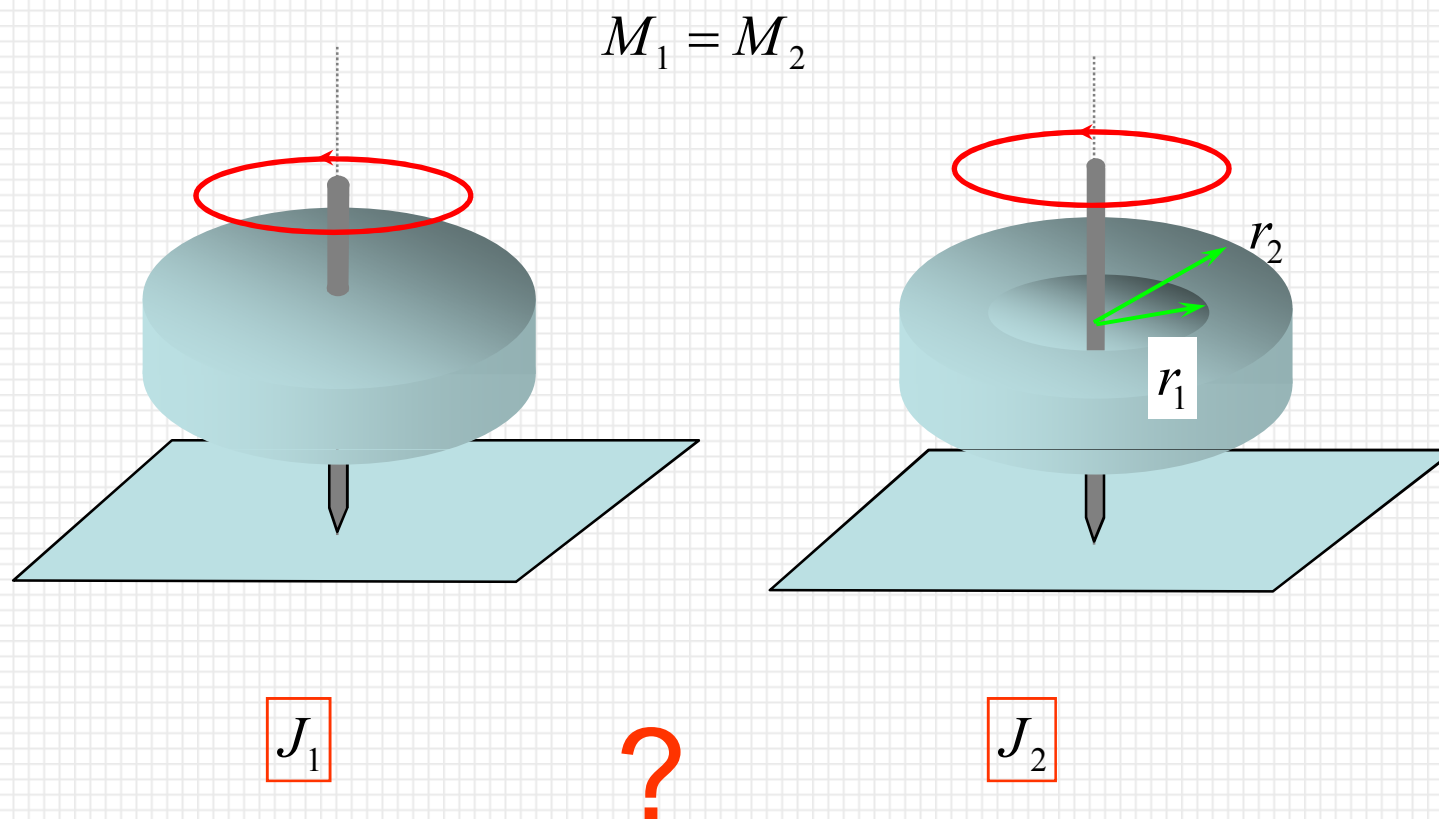
$$\rho = \rho_i$$

... homogénne tuhé teleso

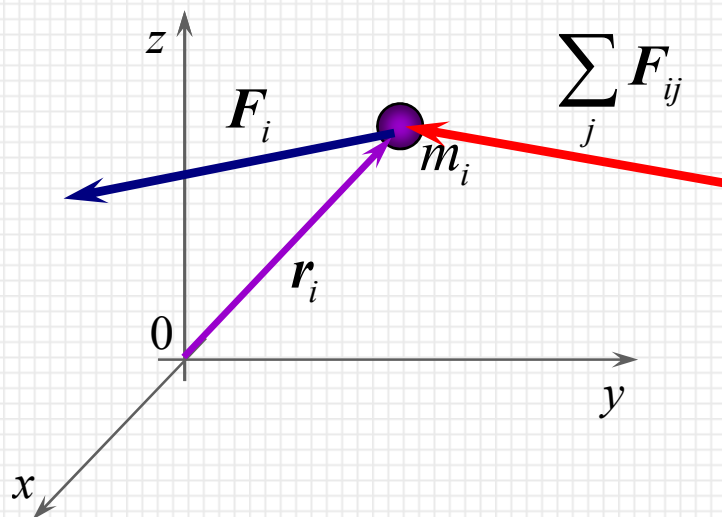
$$J = \rho \sum_i \Delta V_i r_i^2$$

$$\Delta V_i \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \quad \rightarrow \quad \int \quad \Rightarrow$$

$$J = \rho \int_V r^2 dV$$



$$J = \frac{1}{2} M (r_2^2 + r_1^2)$$



Vonkajšie sily pôsobiace na sústavu zvonku.

Výslednica vonkajších pôsobiacich síl na i -ty bod je F_i .

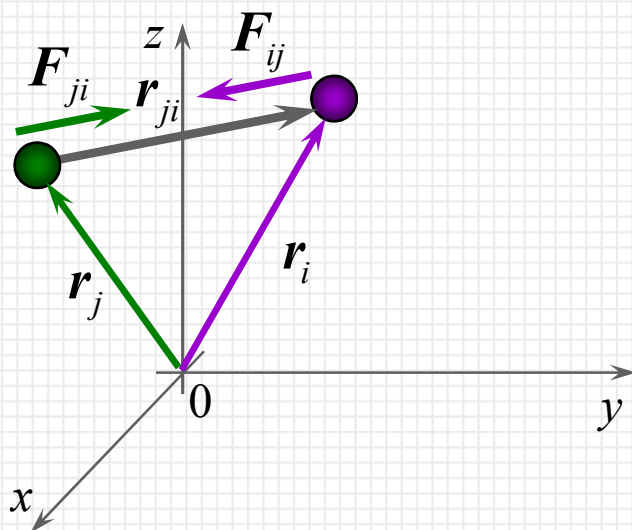
Vnútorne sily, ktorými pôsobia na seba body sústavy.
 i -ty bod pôsobí na j -ty bod silou F_{ij} .

$$F_{ij} = -F_{ji}$$

Podmienka rovnováhy
vnútorných síl

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n F_{ij} \right) = 0$$

Výslednica všetkých vnútorných síl
sústavy je rovná nule.



F_{ij}, F_{ji} ... Vnútorne sily

Moment sily na i -ty hm. b.

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$$

Moment sily na j -ty hm. b.

$$\mathbf{M}_{ji} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$$

Výsledný moment je:

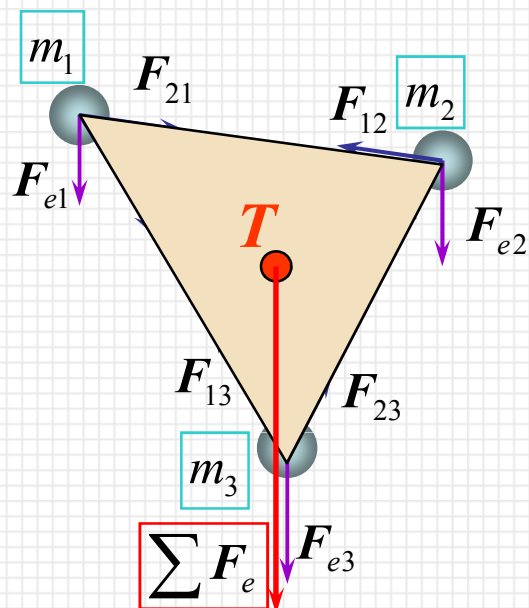
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{ji} + \mathbf{M}_{ij} \xrightarrow{\quad} = \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} \xrightarrow{\quad} = \underbrace{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}_{\mathbf{r}_{ji}} \times \mathbf{F}_{ij}$$

$$\mathbf{r}_{ji} \parallel \mathbf{F}_{ij} \xrightarrow{\quad} \mathbf{M} = 0$$

Zovšeobecnením:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{M}_{ij} \right) = 0$$

Výsledný moment vnútorných síl sústavy hmotných bodov vzhľadom k ľubovoľnému bodu v priestore je nulový.



$$\begin{aligned} F_{e1} + F_{21} + F_{31} &= m_1 a_1 & F_{13} &= -F_{31} \\ F_{e2} + F_{12} + F_{32} &= m_2 a_2 & F_{12} &= -F_{21} \\ F_{e3} + F_{13} + F_{23} &= m_3 a_3 & F_{23} &= -F_{32} \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned} F_{e1} + F_{21} + F_{31} &= m_1 a_1 \\ F_{e2} - F_{21} + F_{32} &= m_2 a_2 \\ F_{e3} - F_{31} - F_{32} &= m_3 a_3 \end{aligned}$$

$$F_{e1} + F_{e2} + F_{e3} = m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$$

zovšeobecnenie

$$\sum F_e = \sum_i m_i a_i \quad \xrightarrow{a^* = \frac{1}{M} \sum_i m_i a_i} \quad \boxed{\sum F_e = M a^*}$$

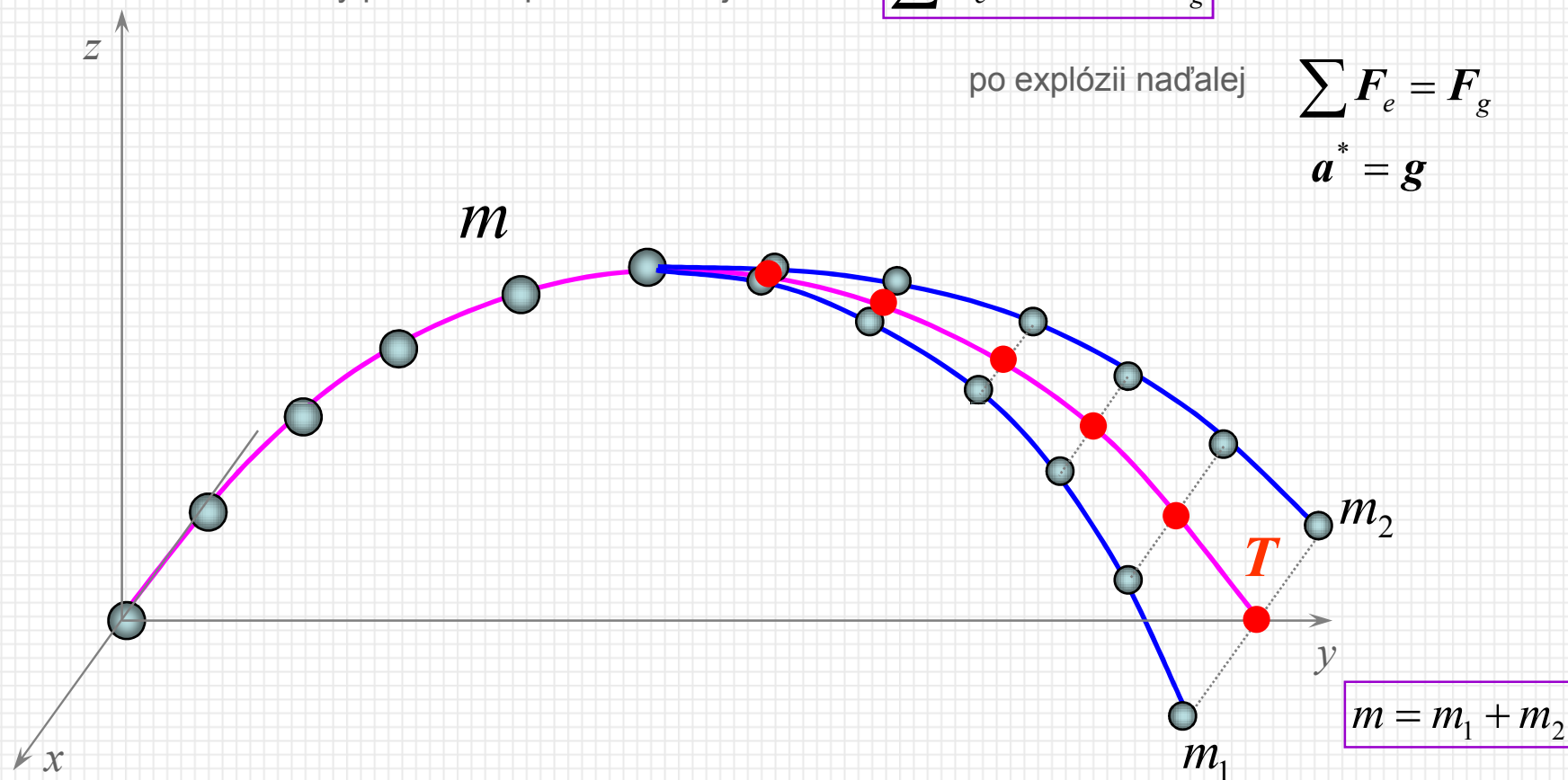
Na ťažisko sústavy počas letu pôsobí vonkajšia sila:

$$\sum F_e = m a^* = F_g$$

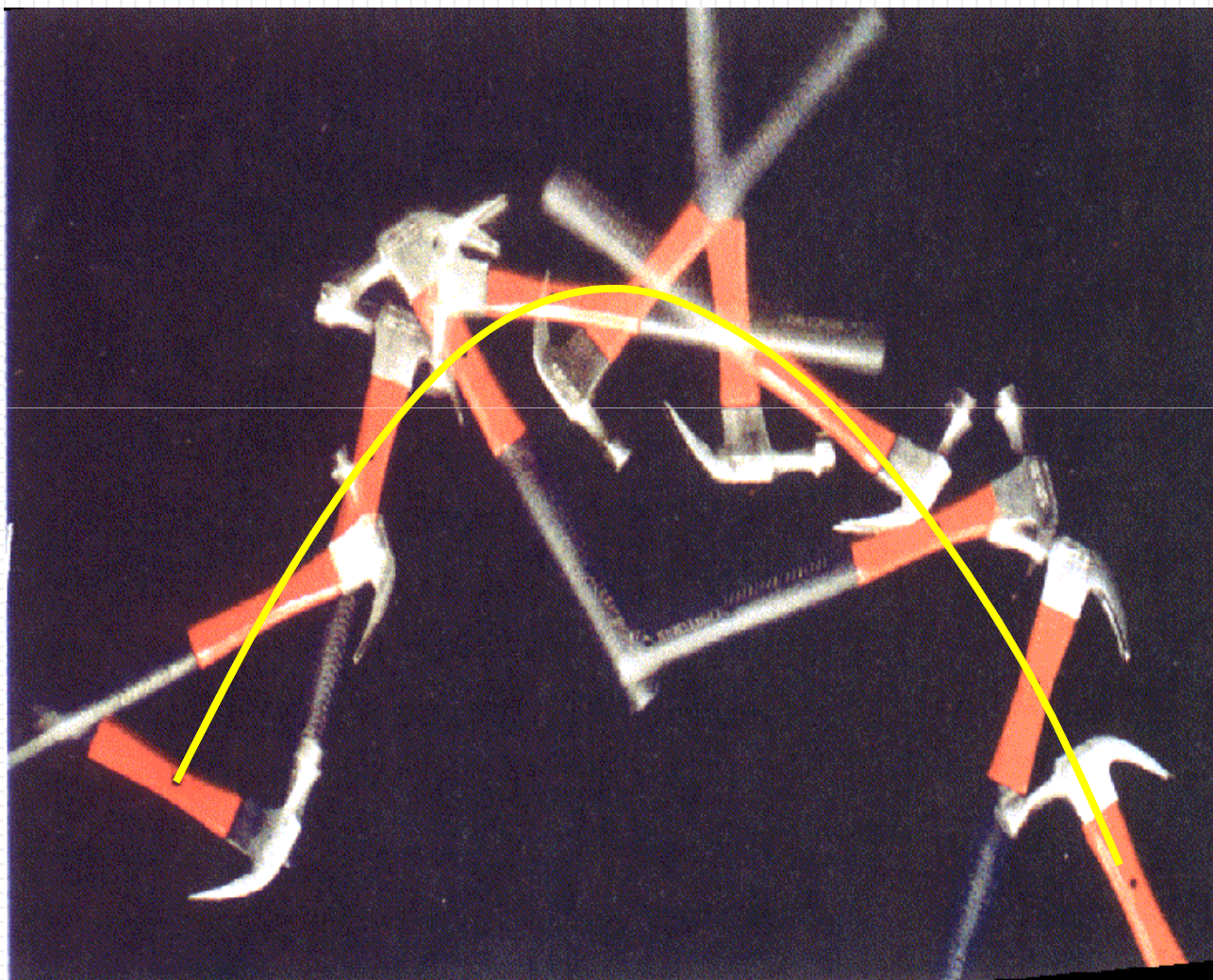
po explózii naďalej

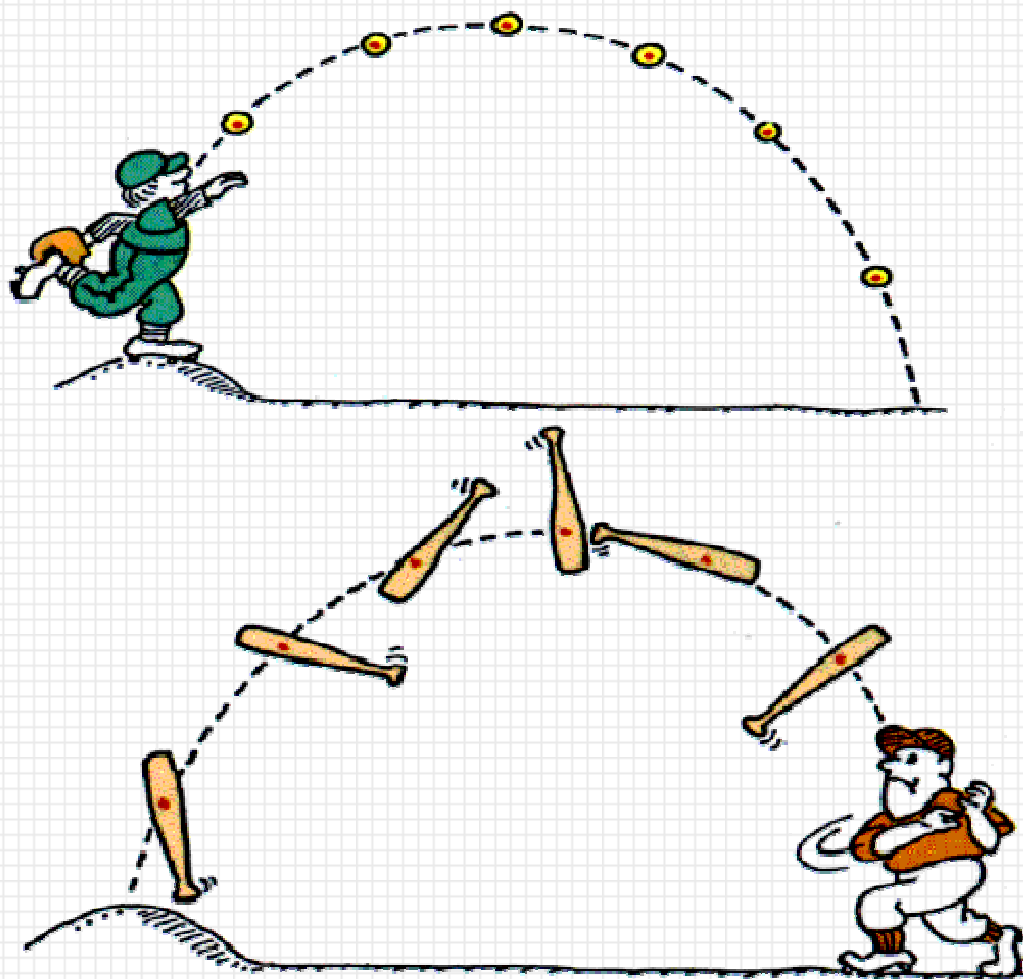
$$\sum F_e = F_g$$

$$a^* = g$$



Stlačené gumené guľôčky vrhnuté pod uhlom α s rýchlosťou v_0 (šikmý vrh), ktoré v čase dosiahnutia maxima explodujú. Ťažisko sústavy sa aj po explózii pohybuje po parabole. Explózia vnútri sústavy sa prejavila len pôsobením vnútorných síl a nemá vplyv na pohyb ťažiska sústavy. Explózia pre jednoduchosť bola uvažovaná len v smere osi x .





Platí 2. N.z.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Pre moment sily tiež platí:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v})$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

Moment vonkajších síl *Moment vnútorných síl*

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}$$

$$\frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij}$$

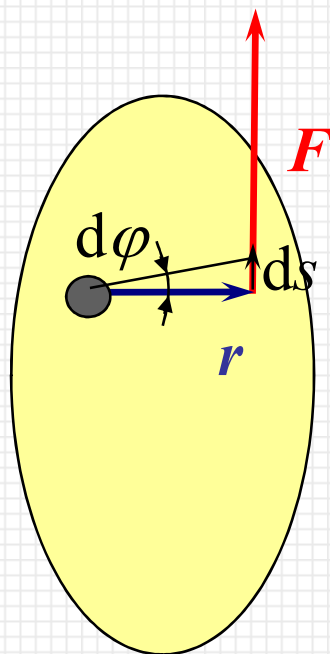
$$\sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{G}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji})$$

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{G}_i \quad \mathbf{M}$$

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \mathbf{M}$$

2. Impulzová veta

Vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy hmotných bodov.



$$E_{kR} = \frac{1}{2} \omega^2 J$$

$$dE_{kR} = J\omega d\omega$$

$$dA = Fds \quad ds = r d\varphi \quad M = rF \quad \Rightarrow \quad = rF d\varphi \quad \Rightarrow \quad = M d\varphi$$

$$dE_{kR} = dA \quad \Rightarrow \quad J\omega d\omega = M d\varphi \quad \xrightarrow{/dt} \quad J\omega \frac{d\omega}{dt} = M \frac{d\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad J\omega \varepsilon = M\omega$$

$$M = J\varepsilon$$

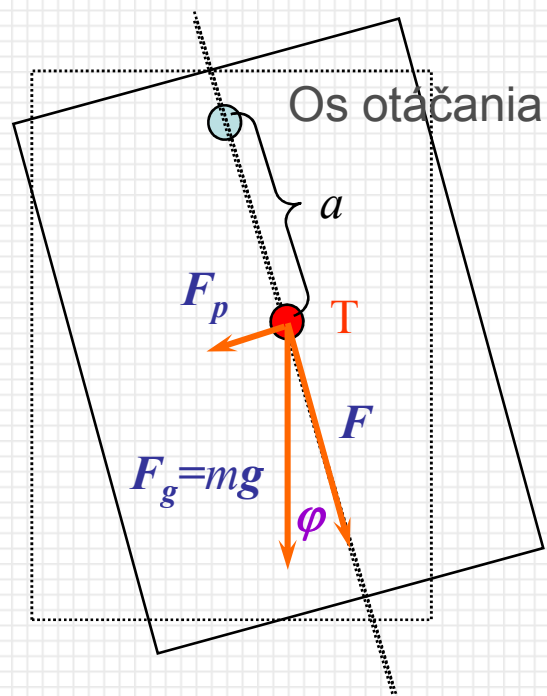
analógia

$$F = ma$$

$$M = J\varepsilon$$

vektorove

Pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi:
 Súčin momentu zotrvačnosti telesa k osi rotácii a uhlového zrýchlenia
 je rovný momentu všetkých vonkajších síl vzhľadom k pevnej osi rotácie.



φ_0 ... amplitúda uhlovej výchylky

Riešenie diferenciálnej rovnice

$$M = J\varepsilon$$

$$F_p = F_g \sin(\varphi)$$

$$M = -F_p a$$

$$= J \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$= mg \sin(\varphi)$$

$$= -mga \sin(\varphi)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin(\varphi)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mga}{J} \sin(\varphi) = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0$$

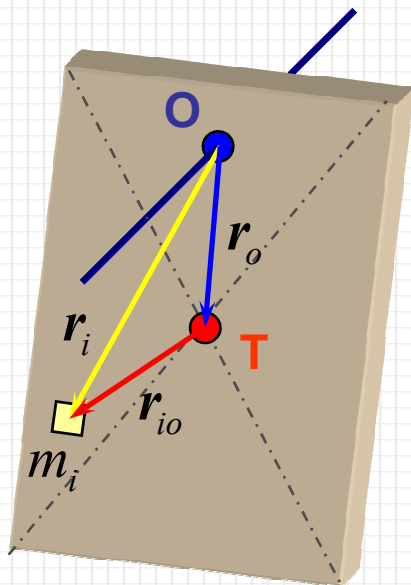
Substitúcia

$$\omega^2 = \frac{mga}{J}$$

$$\sin(\varphi) \approx \varphi$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$



$$J = \sum_i m_i r_i^2 \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}_{io}$$

$$r_i^2 = \mathbf{r}_i^2 = (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}_{io})^2 = r_o^2 + 2\mathbf{r}_o \mathbf{r}_{io} + r_{io}^2$$

$$J = \underbrace{\sum_i m_i r_o^2}_{J_1} + \underbrace{\sum_i m_i r_{io}^2}_{J_2} + 2\mathbf{r}_o \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_{io}}_{J_3}$$

$$J = J^* + r_o^2 m$$

$$J_1 = \sum_i m_i r_o^2 = r_o^2 \sum_i m_i = r_o^2 m$$

$$J_2 = \sum_i m_i r_{io}^2 = J^* \quad \text{moment zotrvačnosti vzhľadom na ťažisko}$$

$$J_3 = \sum_i m_i \mathbf{r}_{io} = 0 \quad \text{vzhľadom na ťažisko bude celkový súčet nulový}$$