

URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI TORZNÝM KYVADLOM

Ing. Ctibor Musil, CSc.

Teoretický úvod:

Telesá sa vždy snažia zachovávať svoj pohybový stav. Túto schopnosť telies charakterizujeme *zotrvačnou hmotnosťou* pri pohybe translačnom a *momentom zotrvačnosti* pri pohybe rotačnom. Moment zotrvačnosti má tiež svoj pôvod v zotrvačnej hmotnosti, ale navyše sa tu uplatní ešte jej rozloženie okolo osi rotácie. Ukážeme si to na kinetickej energii rotujúceho telesa, obr. 1. Podľa obrázku je energia elementu dm telesa

$$dW_k = \frac{1}{2} dm v^2$$

za obvodovú rýchlosť dosadíme $v = \omega r$ a dostávame

$$dW_k = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm,$$

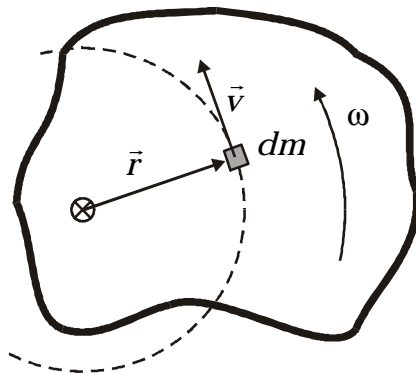
kde ω je uhlová rýchlosť rotujúceho telesa. Po integrácii dostaneme pre kinetickú energiu rotujúceho telesa vzťah

$$W_k = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 I.$$

Veličina

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

je moment zotrvačnosti telesa *vzhľadom na os rotácie*, pričom r je vzdialenosť hmotného elementu dm od tejto osi.



Obr. 1

Vzťah (1) môžeme považovať pre moment zotrvačnosti za definičný. Po jeho podrobnejšom rozbere zistíme, že podľa neho môžeme vypočítať moment zotrvačnosti iba pre niektoré telesá jednoduchého tvaru. Zo vzťahu (1) tiež plynie, že moment zotrvačnosti je veličina aditívna, čo znamená, že ak spojíme teleso, ktoré má moment zotrvačnosti I_1 s telesom o momente zotrvačnosti I_2 tak, aby sa príslušné osi rotácie, na ktoré sa tieto veličiny vzťahujú, stotožnili, bude výsledný moment zotrvačnosti

$$I = I_1 + I_2,$$

t.j. všeobecne

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2)$$

Túto skutočnosť využijeme pri meraní momentu zotrvačnosti.

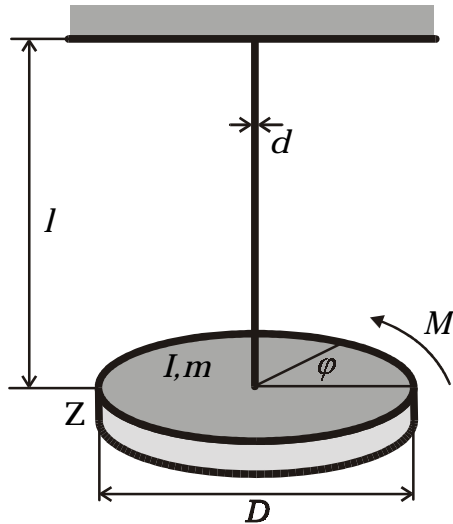
Metóda merania:

Ako z predchádzajúceho vyplýva určujeme moment zotrvačnosti zložitejších telies, alebo ich sústav meraním. Použijeme buď metódu fyzikálneho kyvadla (pozri túto úlohu), alebo metódu torzného kyvadla. Využijeme k tomu poznatky o torznom kyvadle (pozri úlohu „Vyšetrovanie pružnej deformácie“ - časť „II.B“). Odtiaľ vieme, že silovým momentom M sa drôt závesu torzného kyvadla, obr. 2, skrúti o uhol φ podľa vzťahu

$$M = \frac{G\pi d^4}{32l} \varphi, \quad (3)$$

kde G [Pa] je modul pružnosti v šmyku materiálu drôtu,
 d [m] je priemer drôtu a
 l [m] je dĺžka drôtu.

Ak teleso Z , zavesené na skrútenom drôte, pustíme, torzné sily skrúteného drôtu ho budú vracat' do rovnovážnej polohy a teleso sa rozkmitá rotačnými (torznými) kmitmi okolo osi symetrie idúcej osou periodicky skrúcaného drôtu.



Obr. 2

Pohybová rovnica tohoto systému má tvar

$$I\ddot{\varphi} + M = 0 .$$

Po dosadení za M a po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu druhého rádu bez pravej strany

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\pi G d^4}{32 I l} \varphi = 0 . \quad (4)$$

Riešenie tejto rovnice má tvar

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) , \quad (5)$$

kde ω_0 [s⁻¹] je uhlová frekvencia kmitov netlmeného torzného kyvadla a α je fázová konštanta.

Pre určenie momentu zotrvačnosti potrebujeme z tohto vzťahu ω_0 , ktoré sa od ω pre tlmené kmity líši zanedbateľne málo. Z rovnice (4) plynie

$$\omega^2 = \frac{\pi G d^4}{32 I l} ,$$

odkiaľ pre hľadaný moment zotrvačnosti, po dosadení za uhlovú frekvenciu $\omega = 2\pi / T$, dostaneme

$$I = \frac{\pi G d^4}{32 l \omega^2} = \frac{G d^4}{128 \pi l} T^2 , \quad (6)$$

kde T [s] je doba periódy torzných kmitov kyvadla.

Postup pri meraní:

Nevýhodou vzťahu (6) je, že musíme poznať modul pružnosti G skrúcaného drôtu. Ten nie je možné dostatočne dobre z tabuliek určiť, lebo obyčajne nevieme, z akého materiálu je drôt vyrobený.

Túto ťažkosť obídeme dvomi meraniami. Prvé meranie urobíme s telesom Z , valcového tvaru, ktorého moment zotrvačnosti voči osi symetrie je

$$I_0 = \frac{1}{8} m D^2 , \quad (7)$$

kde D je priemer válc. Pri tomto meraní určíme dobu periódy T_0 .

Pri druhom meraní naložíme na prvé teleso to teleso, ktorého moment zotrvačnosti hľadáme. Pri tom dbáme, aby výsledná os symetrie bola totožná s osou symetrie skrúcaného drôtu. Kyvadlo opäť rozkmitáme a určíme periódu T sústavy. Zo vzťahu (2) vieme, že pre výsledný moment zotrvačnosti I platí

$$I = I_0 + I_m , \quad (8)$$

kde I_m [kg.m²] je hľadaný moment zotrvačnosti.

Z prvého merania po dosadení do vzťahu (6) a úprave dostaneme

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_0^2} . \quad (9)$$

Nasledným riešením vzťahov (8) a (9) dostávame vzťah

$$I_m = I_0 \left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right) = I_0 \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^2 - 1 \right], \quad (10)$$

pomocou ktorého z nameraných dôb periód T_0 a T určíme hľadaný moment zotrvačnosti I_m .

Merania doby periódy urobíme postupnou metódou, pričom obidve merania zapíšeme do tabuľky rovnakého typu podľa vzoru „Tabuľka I”.

Tabuľka I.

n	nT [s]	(n + i)	(n + i)T [s]	iT [s]	(iT - iT) ² [s ²]
10		i + 10			
20		i + 20			
.		.			
.		.			
i		i + n			

Parametre základného valca: $m_0 = \dots$ kg, $D_0 = \dots$ m.

Parametre meraného telesa: $m_1 = \dots$ kg, geometrické rozmery ... + náčrt.

Chyby parametrov (sú zrejmé rovnaké a iba ich odhadneme): $\Delta m = \dots$ kg, $\Delta D = \dots$ m.

Úlohy:

1. S využitím vzťahu (10) určite meraním moment zotrvačnosti dutého valca a iných predložených telies.
2. Namerané momenty zotrvačnosti daných telies porovnajte s vypočítanými. Podľa potreby využite Steinerovu vetu.
3. Určite chyby merania.

Spracovanie výsledkov:

1. Vyhodnotením tabuliek z meraní dôb periódy určite $T_0 = \bar{T}_0 \pm \bar{\delta}_{T_0}$ a $T = \bar{T} \pm \bar{\delta}_T$.
2. Vypočítajte moment zotrvačnosti základného valca [vzťah (7)] a jeho chybu

$$\bar{\delta}_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_0}{\partial m} \bar{\delta}_m \right)^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial D} \bar{\delta}_D \right)^2} = I_0 \sqrt{\left(\frac{\bar{\delta}_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{2\bar{\delta}_D}{D} \right)^2}.$$

3. Získané výsledky dosadíte do vzťahu (10) a vypočítajte moment zotrvačnosti zadaného telesa.
4. Chybu určeného momentu zotrvačnosti vypočítajte podľa vzťahu (pretože meranie T a T_0 sa robí za rovnakých podmienok, môžeme položiť $\delta_{T_0} = \delta_T$):

$$\bar{\delta}_{I_m} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_m}{\partial I_0} \bar{\delta}_{I_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial I_m}{\partial T} \bar{\delta}_T \right)^2 + \left(\frac{\partial I_m}{\partial T_0} \bar{\delta}_{T_0} \right)^2} = I_0 \sqrt{\left(\frac{I_m}{I_0^2} \bar{\delta}_{I_0} \right)^2 + \left(1 + \frac{T}{T_0} \right) \frac{4T^2}{T_0^4} \bar{\delta}_T^2}.$$

5. Z parametrov meraného telesa určite výpočtom podľa príslušných vzťahov jeho moment zotrvačnosti i s chybou.
6. Výsledky získané meraním a výpočtom navzájom porovnajte. Vysvetlite prípadné rozdiely a uveďte chyby parametrov, ktoré najviac prispievajú k výslednej chybe.
7. Pozri tiež úlohu: doc. Ing. Július Štelina, CSc. „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“.

Kontrolné otázky:

1. Akú vlastnosť telesa charakterizuje moment zotrvačnosti?
2. Akým vzťahom je moment zotrvačnosti definovaný?
3. Aká je jednotka momentu zotrvačnosti v sústave SI?

4. Kedy môže teleso vykonávať otáčavý pohyb? Napíšte pohybovú rovnicu pre otáčanie telesa okolo pevnej osi!
5. Ako je definovaná uhlová rýchlosť a akú má jednotku?
6. Ako je definované uhlové zrýchlenie a akú má jednotku?
7. Ako vypočítame kinetickú energiu rotujúceho telesa?
8. Čo je to torzné kyvadlo a čo sú to torzné kmity?
9. Dve telesá, ktorých momenty zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania sú I_1 a I_2 , spojíme do jedného celku tak, že osi otáčania splynú. Aký je výsledný moment zotrvačnosti takto vzniklého telesa?

Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahošlav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. „*Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky*“, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.