

## MERANIA NA OPTICKÝCH SÚSTAVÁCH

Ing. Ctibor Musil, CSc.

### Teoretický úvod:

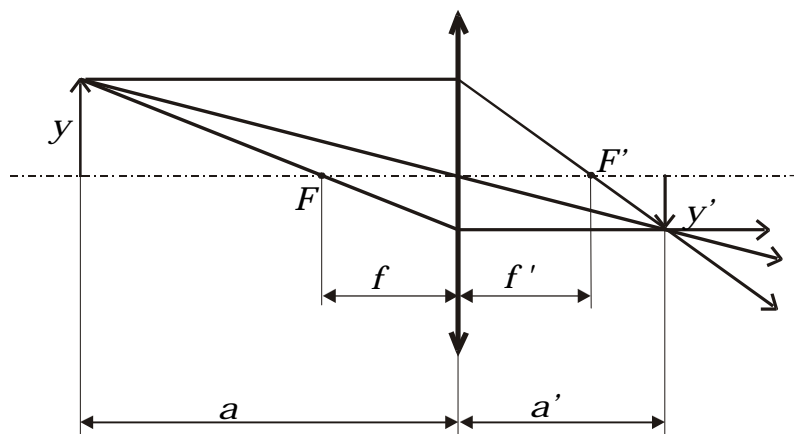
V tejto úlohe si overíme základné vlastnosti najbežnejšie používaných optických centrovaných sústav – šošovky, mikroskopu a transfokátora. Predpokladá sa ovládanie základných pojmov a zákonov z geometrickej optiky.

### A. ŠOŠOVKA A JEJ OHNISKOVÁ VZDIALENOSŤ

Šošovka je homogénne a izotropné priehľadné prostredie ohraničené dvomi guľovými plochami. Ak sa lúče rovnobežné s optickou osou po prechode šošovkou zbierajú, nazýva sa šošovka spojnou (spojkou) a ak sa rozbiehajú, nazýva sa rozptylnou (rozptylkou). Pre ohniskové vzdialenosti tenkej šošovky platí:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = \left( \frac{n_s}{n_0} - 1 \right) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

kde  $f, f'$  - sú predmetová a obrazová ohnisková vzdialenosť,  
 $n_s$  - index lomu materiálu šošovky,  
 $n_0$  - index lomu okolia šošovky a  
 $r_1, r_2$  - polomery krivosti guľových plôch šošovky.



Obr. 1

#### Metóda merania:

a) Najjednoduchšie a najrýchlejšie môžeme merať ohniskovú vzdialenosť tenkej šošovky priamo s použitím vrcholového tvaru zobrazovacej rovnice šošovky (obr. 1).

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f'}, \quad (1)$$

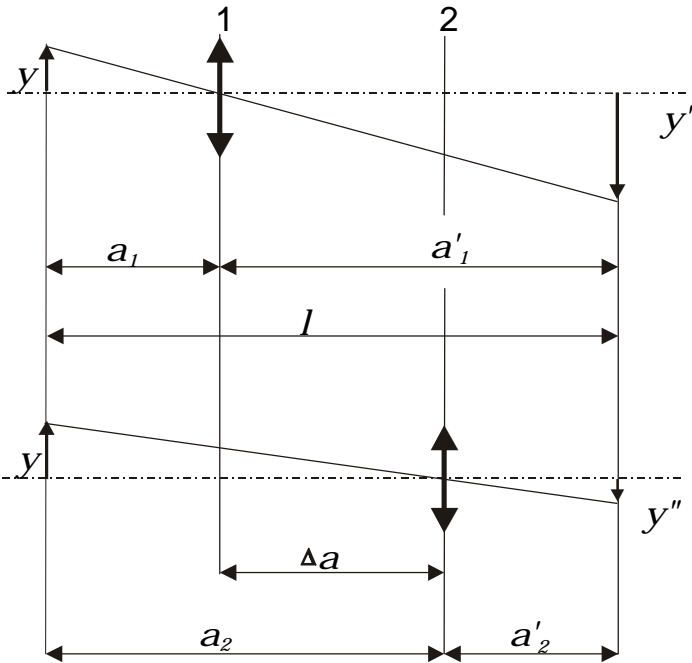
Odkiaľ

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'}. \quad (2)$$

b) Predpokladajme, že je pevne daná predmetová a obrazová rovina, ktorých vzdialenosť je  $l$ . Potom existujú len dve polohy (1 a 2) šošovky (obr. 2), pri ktorých vzniká ostrý obraz. Ak označíme  $l = a + a'$  z čoho  $a' = l - a$  a dosadíme do vrcholového tvaru rovnice šošovky, dostaneme z nej pre  $a$ :

$$a_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad (3)$$

čo odpovedá dvom situáciám na obr. 2, z ktorého súčasne plynie, že  $\Delta a = a_2 - a_1$ . Ak sem dosadíme riešenie (3) dostávame



Obr. 2

$$\Delta a = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2} - \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2} = \sqrt{l^2 - 4lf},$$

odkiaľ dostávame vzťah

$$f = \frac{l^2 - (\Delta a)^2}{4l}, \quad (4)$$

v ktorom nie je potrebné poznať polohy hlavných rovín šošovky.

c) Iná metóda určovania ohniskovej vzdialenosti vychádza z definície priečného zväčšenia

$$Z_{P_1} = \left| \frac{y'}{y} \right| \quad \text{a} \quad Z_{P_2} = \left| \frac{y''}{y} \right| \quad (5)$$

$Z_{P_1}$  je pre polohu prvej šošovky a  $Z_{P_2}$  je pre polohu druhej šošovky.

Podľa obr. 1 platí

$$Z_p = \left| \frac{y'}{y} \right| = \frac{a' - f}{f} = \frac{f}{a - f} = \frac{a'}{a}. \quad (6)$$

Odkiaľ

$$f = \frac{a \cdot Z_p}{1 + Z_p} = \frac{a'}{1 + Z_p} = \frac{\Delta a Z_p}{|Z_p^2 - 1|}. \quad (7)$$

## B. UHLOVÉ ZVÄČŠENIE LUPY A JEHO MERANIE.

Veľkosť pozorovaného predmetu posudzujeme podľa zorného uhla, pod ktorým predmet vidíme, pričom myseľ berie automaticky do úvahy i vzdialenosť predmetu. Ak je niektorý z týchto údajov chybné posúdený (najmä vzdialenosť) je chybné posúdená i veľkosť predmetu (obr. 3). Podľa obr. 3 vidíme, že dva rôzne predmety  $P_1$  vo vzdialenosti  $l_1$  a  $P_2$  vo vzdialenosti  $l_2$  posúdime z hľadiska zorného uhla ako rovnako veľké. Drobné predmety preto približujeme k oku tak, aby sme zväčšili zorný uhol, pod ktorým ich vidíme.

Uhlové zväčšenie prístrojov definujeme nasledovne:

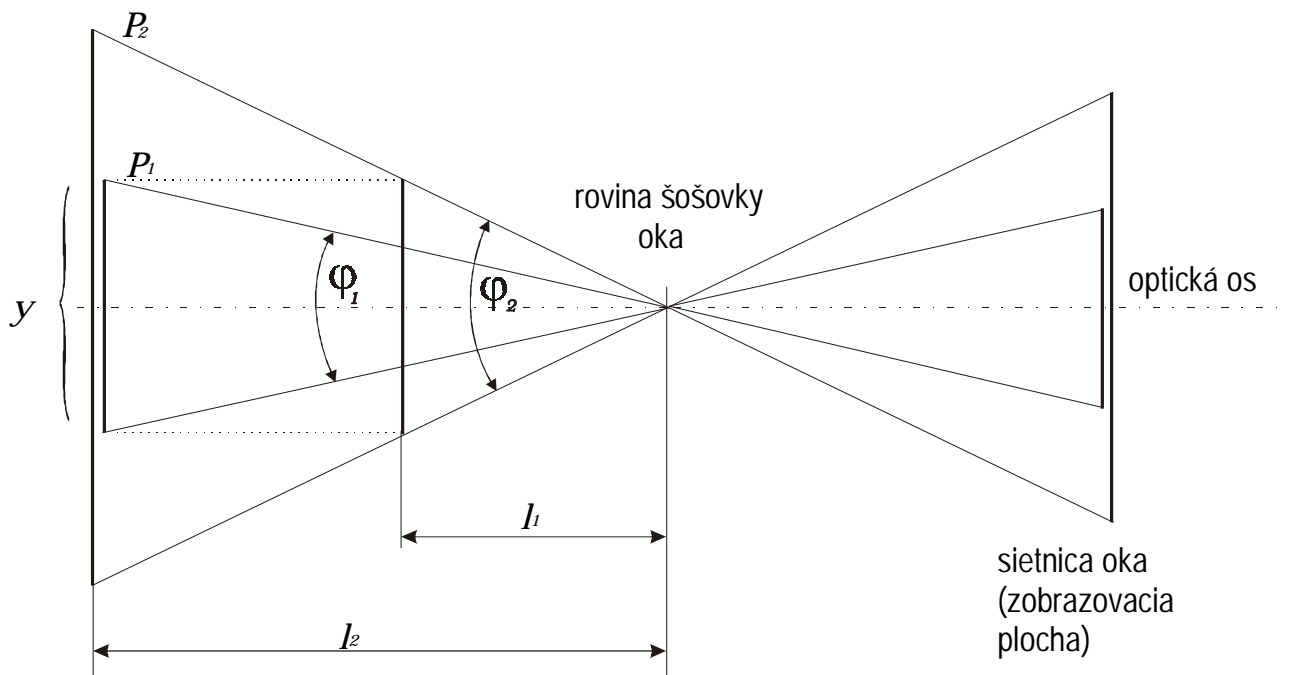
$$Z_u = \frac{\text{tgu}}{\text{tgu}_{25}} \doteq \frac{u}{u_{25}}, \quad (8)$$

čo platí pre  $u \rightarrow 0$ .

Tu  $u_{25}$  je uhol, pod ktorým vidíme predmet normálnym voľným okom v konvenčnej vzdialenosti  $l = 25$  cm a  $u$  je uhol, pod ktorým vidíme tento predmet v optickom prístroji.

Tak napr. ak na obr. 3 je  $l_2$  predmetu  $P_1$  rovné konvenčnej vzdialenosti, dosiahneme priblížením do vzdialenosti  $l_1$  uhlové zväčšenie:

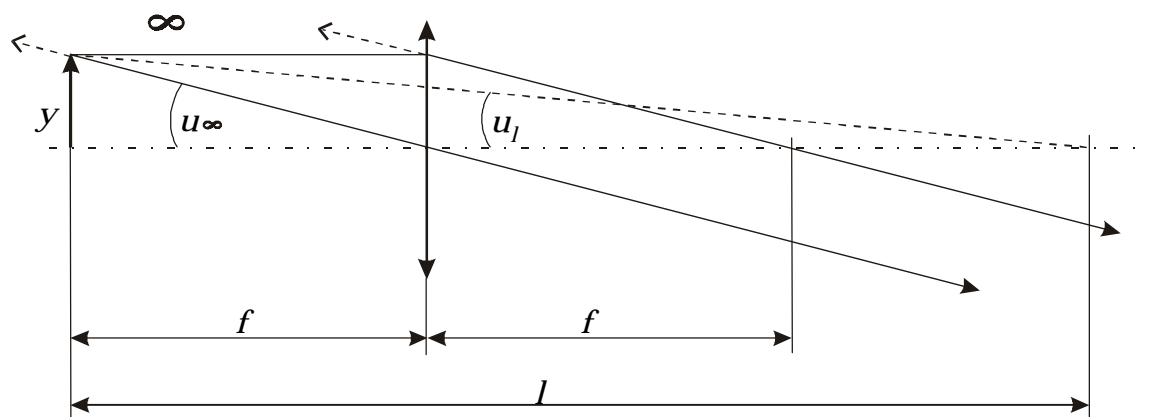
$$Z_u = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\frac{y/2}{l_1}}{\frac{y/2}{l_2}} = \frac{l_2}{l_1} .$$



Obr. 3

Obmedzením pri tomto postupe je akomodačná schopnosť oka, t.j. jeho schopnosť zmeniť optickú mohutnosť tak, aby obraz na sietnici bol ostrý, ktorú kompenzujeme použitím vhodnej optickej sústavy. Takou sústavou môže byť lupa pre malé zväčšenia, alebo mikroskop pre veľké zväčšenia.

Najjednoduchším optickým prístrojom je lupa a to buď jednoduchá alebo zložená. Jej



Obr. 4

zváženie nie je konštantné, ale závisí od akomodácie oka. Dva krajné prípady sú:

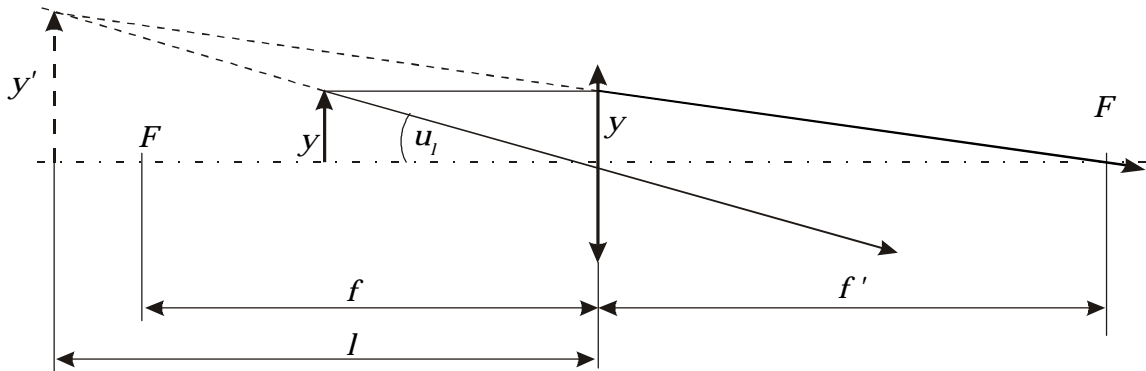
- a) zváženie pri neakomodovanom oku, t. j. oko je zaostrené na nekonečno. Tento prípad nastane vtedy, keď pozorovaný predmet leží v ohniskovej rovine lupy. Jeho obraz sa vytvorí v nekonečnu, je virtuálny a oko ho pozoruje bez akomodácie (obr. 4). Zváženie je dané vzťahom

$$Z_{\infty} = \frac{\operatorname{tg} u_{\infty}}{\operatorname{tg} u_l} = \frac{\frac{y}{l}}{\frac{y'}{f}} = \frac{f}{l} \quad (9)$$

Z toho vidíme, že ak má byť  $Z_{\infty} > 1$  musí  $f < l = 25\text{cm}$ .

- b) zváženie  $Z_l$  pri normálnej akomodácii oka na konvenčnú vzdialenosť  $l$ . To znamená, že predmet musíme umiestniť do takej vzdialenosti od lupy, aby jeho virtuálny obraz vznikol v konvenčnej vzdialenosti od lupy (Obr. 5). Tento obraz pozorujeme okom tesne priloženým k lupe, t.j. vzdialenosť oko-lupa  $\rightarrow 0$ . Pre zváženie potom platí

$$Z_l = \frac{\operatorname{tg} u_l}{\operatorname{tg} u_{25}} = \frac{\frac{y'}{l}}{\frac{y}{f}} = \frac{y'}{y} = \frac{l + f'}{f'}, \quad \text{lebo} \quad \frac{y'}{l + f'} = \frac{y}{f'}$$



Obr. 5

z čoho

$$Z_l = \frac{l}{f} + 1 = Z_{\infty} + 1 \quad (10)$$

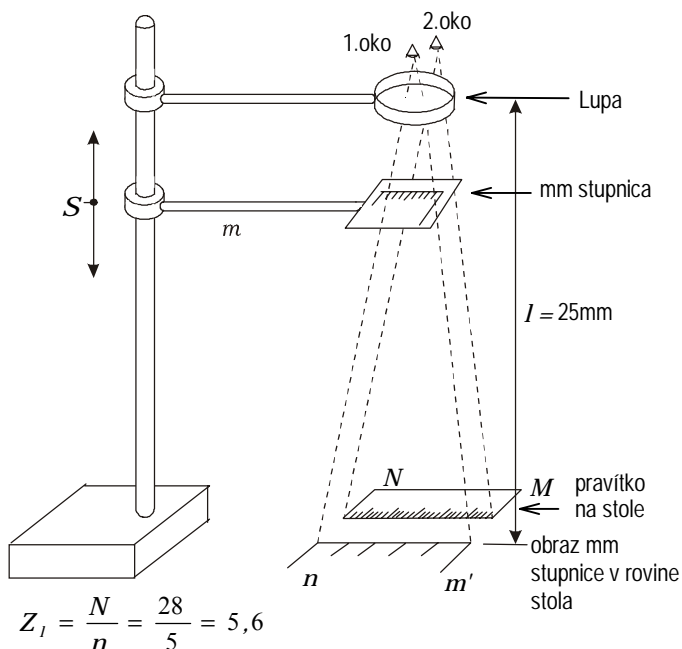
pretože pre lupu platí  $f = f'$ .

#### Metóda merania:

Zváženie lupy môžeme určiť výpočtom zo vzťahu (10) ak nameriame jej ohniskovú vzdialenosť, alebo priamo určíme pomer uhlov  $u_l/u_{25}$ . Pritom postupujeme nasledovne:

Lupu upevníme na stojan vo výške  $l = 25\text{ cm}$  nad povrchom stola, na ktorý položíme ploché milimetrové meradlo M. Na posuvný držiak S pod lupou položíme milimetrové meradlo M tak, aby bolo s meradlom na stole rovnobežné. Potom jedným okom tesne priloženým k lupe pozorujeme stupnicu pod lupou a druhým okom stupnicu na stole (obr. 6).

Posúvaním držiaka S dosiahneme zaostrenie oboch stupníc, ktoré sa budú prekrývať a zistíme počet  $N$  milimetrov meradla  $M$ , ktoré pripadajú na  $n$  milimetrov obrazu meradla  $m$  (obr. 6). Ak je zorný uhol, pod ktorým vidíme 1 mm voľným okom zo vzdialenosti 25 cm  $u_1$  a po zväčšení lupou  $u'_1$ , potom pre ľubovoľný uhol  $u$  platí



Obr. 6

$$u = Nu_1 = nu'_1,$$

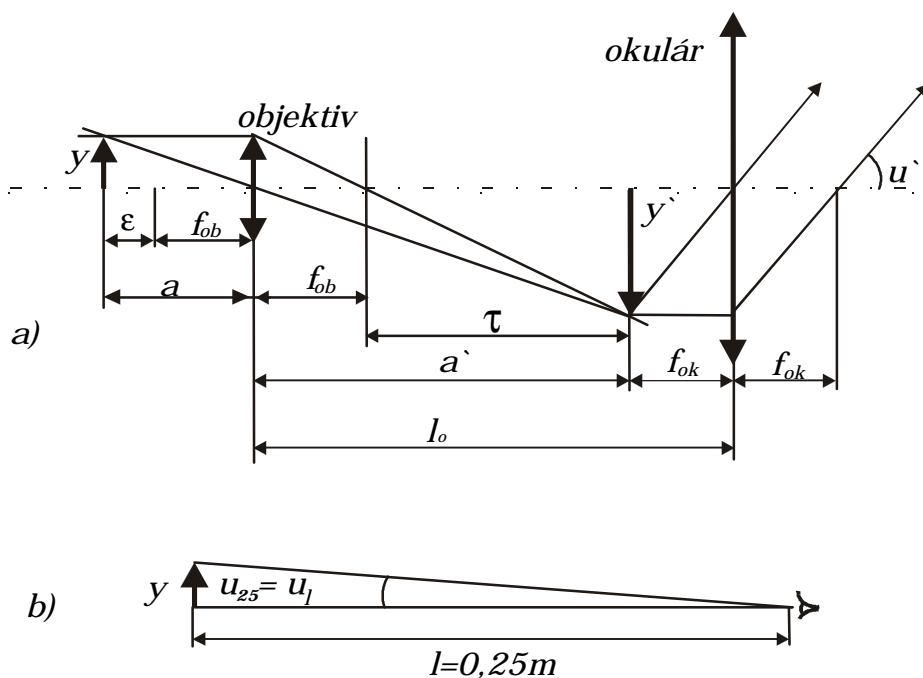
Odkiaľ

$$Z_1 = \frac{u'_1}{u_1} = \frac{N}{n}. \quad (11)$$

### C. MIKROSKOP A JEHO ZVÄČŠENIE

Na dosiahnutie väčších uhlových zväčšení, t. j. pri pozorovaní drobných objektov, používame mikroskop. Mikroskop je centovaná optická sústava zložená z dvoch spojných sústav (šošoviek), objektívu a okuláru.

Usporiadanie objektívu a okuláru i chod lúčov je vidieť na obr. 7. Predmet umiestnime vo vzdialenosti  $a = f_{ob} + \varepsilon$  pred objektívom a okulárom pozorujeme ako lupou zväčšený, skutočný a prevrátený obraz predmetu vytvorený objektívom.



Obr. 7

Ohnisková vzdialenosť objektívu  $f_{ob}$  je menšia ako ohnisková vzdialenosť okuláru  $f_{ok}$ . Z obr. 7a, b môžeme pre uhlové zväčšenie mikroskopu písať

$$Z_m = \frac{tgu'}{tgu_l} = \frac{\frac{y'}{f_{ok}}}{\frac{y}{l}} = \frac{y'l}{yf_{ok}}, \quad \text{ale} \quad \frac{y'}{y} = \frac{\tau}{f_{ob}}$$

kde  $\tau$  je optický interval. Dostávame konečný vzťah

$$Z_m = \frac{\tau l}{f_{ob} f_{ok}} . \quad (12)$$

Vzťah (12) nám slúži na výpočet zväčšenia mikroskopu ak poznáme  $f_{ob}$ ,  $f_{ok}$  a  $\tau$ .

Experimentálne môžeme určiť zväčšenie priamo ako pomer uhlov  $\frac{u'}{u_{25}}$ .

### Metóda merania:

Usporiadanie aparatury k takému meraniu je naznačené na obr. 8. K okuláru mikroskopu je na ramienku upevnená lupa tak, aby vzdialenosť optických osí lupy a okuláru bola rovná vzdialenosti očí. Pod lupou umiestnime v ohniskovej vzdialenosti milimetrové meradlo a pod mikroskop umiestnime mikroskopickú stupnicu a zaostríme. Oči priložíme tesne k lúpe a k mikroskopu a súčasne pozorujeme obidve rovnobežne upevnené stupnice, ktoré sa prekrývajú. Zistíme, že sa  $n_m$  dielikov v mikroskope prekrýva s  $n_L$  dielikmi v lúpe. Pre ľubovoľný zorný uhol  $u$ , v ktorom sa stupnice prekrývajú (obr. 8), potom platí

$$u = n_m u'_m = n_L u'_L ,$$

kde  $u'_m$  a  $u'_L$  sú uhly, pod ktorými vidíme 1 dielik cez mikroskop resp. cez lupu.

Odtiaľ

$$\frac{u'_m}{u'_L} = \frac{n_L}{n_m} . \quad (13)$$

Zväčšenie však vzťahujeme k uhlu  $u_{25}$  pre predmet v konvenčnej vzdialenosti a nie k uhlu  $u'_L$  pod lupou. Pravú a ľavú stranu vzťahu (13) preto vynásobíme výrazom  $u'_L / u_{25}$  a dostaneme

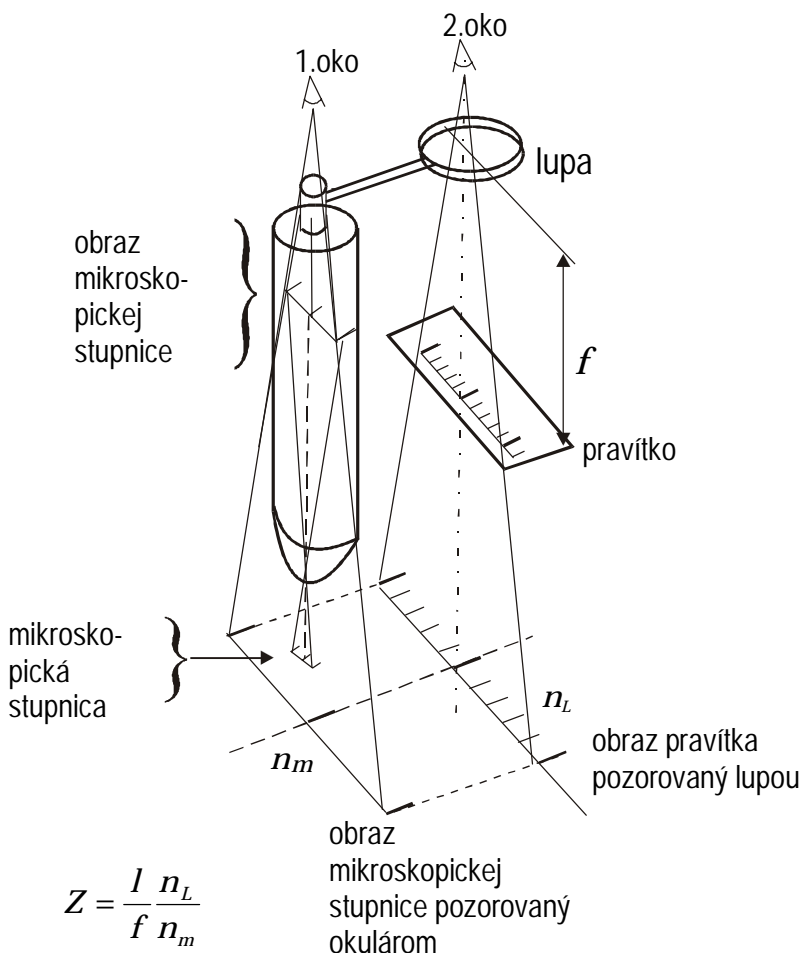
$$Z_m = \frac{u'_m}{u_{25}} = \frac{u'_L}{u_{25}} \frac{n_L}{n_m} ,$$

kde  $\frac{u'_L}{u_{25}} = \frac{l}{f}$ , pozri vzťah (9). Pre

zväčšenie mikroskopu tak dostávame

$$Z_m = \frac{l}{f} \frac{n_L}{n_m} . \quad (14)$$

Vo vzťahu (14)  $n_L$  a  $n_m$  je počet pozorovaných dielikov vyjadrený v rovnakých jednotkách. Uvažujme napr. že na obr. 8 má lupa  $f = 15$  cm a pod mikroskopom je



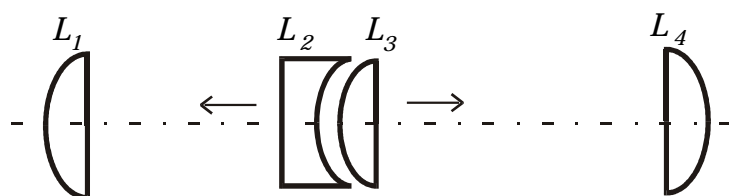
Obr. 8

mikroskopická stupnica s delením po 0,1 mm. Zväčšenie mikroskopu je teda

$$Z_m = \frac{l n_L}{f n_m} = \frac{0,25\text{m} \cdot 10,1\text{mm}}{0,15\text{m} \cdot 2,0,1\text{mm}} = \frac{0,25\text{m} \cdot 1,1\text{cm}}{0,15\text{m} \cdot 2,0,01\text{cm}} \doteq 83 .$$

## D. TRANSFOKÁTOR

Šošovka má pevnú ohniskovú vzdialenosť a je možné pomocou nej vytvoriť dva ostré obrazy predmetu, jeden zväčšený a jeden zmenšený. V moderných optických kvalitných prístrojoch sa používajú optické sústavy s plynule meniteľnou optickou mohutnosťou, nazývané transfokátor. Transfokátor je centrovaná optická sústava štyroch šošoviek usporiadaných tak, že ich vhodným premiestňovaním je možné plynule meniť veľkosť obrazu predmetu pri pevnej polohe predmetovej a obrazovej roviny. Usporiadanie šošoviek v transfokátore je naznačené na obr. 9, Šošovky  $L_1$  a  $L_4$



Obr. 9

sú pevné, šošovky  $L_2$  a  $L_3$  sú pohyblivé, pričom  $D_2 + D_3 \rightarrow 0$  ( $D_2$  a  $D_3$  sú optické mohutnosti šošoviek  $L_2$  a  $L_3$ ).

Pohyblivé šošovky  $L_2$  a  $L_3$  sa musia premiestňovať tak, aby bola splnená vyššie spomínaná podmienka pre predmetovú a obrazovú rovinu. Zabezpečenie tohto pohybu môže byť dosť zložité,

o čom sa môžeme presvedčiť na jednoduchom modeli transfokátora.

### Postup pri meraní a spracovanie výsledkov:

1. Pre meranie ohniskových vzdialeností šošoviek použite optickú lavicu, na ktorú umiestnite svietiaci predmet, šošovku a zobrazovaciu plochu (najlepšie s milimetrovým rastrom) a sústavu opticky vycentrujte!
2. Nájdite takú vzdialenosť predmet-zobrazovacia plocha, pri ktorej existujú dve polohy šošovky, v ktorých sa vytvorí ostrý obraz predmetu, raz zväčšený, raz zmenšený!
3. Do tabuľky (napr. podľa vzoru Tab.I) zapíšte potrebné údaje. Vypočítajte a doplňte do tabuľky  $\Delta a$ ,  $Z_1$  a  $Z_2$ .

Tabuľka I.

Šošov- ka č.	$l$ [m]	$a_1$ [m]	$a'_1$ [m]	$a_2$ [m]	$a'_2$ [m]	$\Delta a$ [m]	$y_1$ [mm]	$y'_1$ [mm]	$y'_2$ [mm]	$Z_1$	$Z_2$

4. Vypočítajte ohniskové vzdialenosti:

- zo vzťahu (2)  $f^i$  a  $f^{ii}$ ,
- zo vzťahu (4)  $f^{iii}$ ,
- zo vzťahov (7)  $f^{iv}$  a  $f^{v}$ !

Výsledky navzájom porovnajte (pre každú šošovku osobitne) a zväzte a v závere uveďte prečo došlo k prípadným rozdielom.

5. Pre meranie zväčšenia lupy použite stojan, do ktorého si upevníte vybranú lupu. Ďalej postupujte podľa bodu B-metóda merania. Urobte niekoľko meraní, pri ktorých sa vzájomne striedajte, aby ste obmedzili subjektívnu chybu. Z nameraných hodnôt určte zväčšenie lupy (vzťah (11))!

6. Zo šošoviek, ktorých ohniskové vzdialenosti ste zmerali, si vyberte vhodnú dvojicu, z ktorej na optickej lavici zostrojíte model mikroskopu. Postupujte podľa obr. 7!
7. Pre zostavený model mikroskopu určte  $\tau = I_0 - (f_{ob} + f_{ok})$  a podľa vzťahu (12) vypočítajte jeho zväčšenie.
8. Z meraných šošoviek si vybranú šošovku upevnite na komerčný mikroskop a vykonajte merania pre určenie jeho zväčšenia podľa bodu C. Pri meraní sa opäť striedajte. Do poznámok si tiež zapíšte zväčšenia mikroskopu udávané výrobcom!
9. Zo svojich meraní vypočítajte podľa vzťahu (14) zväčšenie komerčného mikroskopu a vypočítajte o koľko percent sa vami určené zväčšenie líši od zväčšenia udávaného výrobcom!

### Úlohy:

1. Pre dané šošovky zmerajte ohniskové vzdialenosti a zväčšenia  $Z$ !
2. Vyberte z daných šošoviek dve s vhodnými ohniskovými vzdialenosťami, zostavte z nich model mikroskopu. Overte si jeho funkciu a určte jeho zväčšenie!
3. Oboznámte sa s komerčným mikroskopom a zmerajte jeho zväčšenie!
4. Z daných šošoviek vyberte štyri vhodné a zostavte jednoduchý model transfokátora, na ktorom si overíte možnosť plynulej zmeny optickej mohutnosti sústavy. Zmerajte závislosť zväčšenia sústavy od polohy šošoviek  $L_2$  a  $L_3$  a vyneste do grafu!

### Kontrolné otázky:

1. Definujte ohniská optickej sústavy!
2. Od čoho závisia ohniskové vzdialenosti šošovky? Čomu sa rovná optická mohutnosť tenkej šošovky?
3. Napíšte zobrazovanie rovnice guľového zrkadla, guľovej lámavej plochy a tenkej šošovky!
4. Popíšte aspoň dve metódy určovania ohniskovej vzdialenosti tenkej šošovky!
5. Čo je to konvenčná vzdialenosť a aká je jej hodnota?
6. Definujte uhlové zväčšenie optického prístroja!
7. Aké sú krajné hodnoty uhlového zväčšenia pri pozorovaní lupou?
8. Popíšte experimentálnu metódu určovania uhlového zväčšenia lupy! O akú krajnú hodnotu sa jedná a ako ju vypočítame?
9. Z čoho sa skladá mikroskop? Aké je usporiadanie optických prvkov a aký je chod lúčov v mikroskope?
10. Od čoho závisí a ako vypočítame uhlové zväčšenie mikroskopu? Odvodte vzťah!
11. Popíšte experimentálnu metódu určovania uhlového zväčšenia mikroskopu! Aký vzťah použijeme pre určenie zväčšenia?
12. Popíšte zloženie a funkciu transfokátora!

### Úloha je prevzatá, doplnená a opravená, zo skrípt:

Doc. RNDr. Drahošlav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc. „Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky“, vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003.