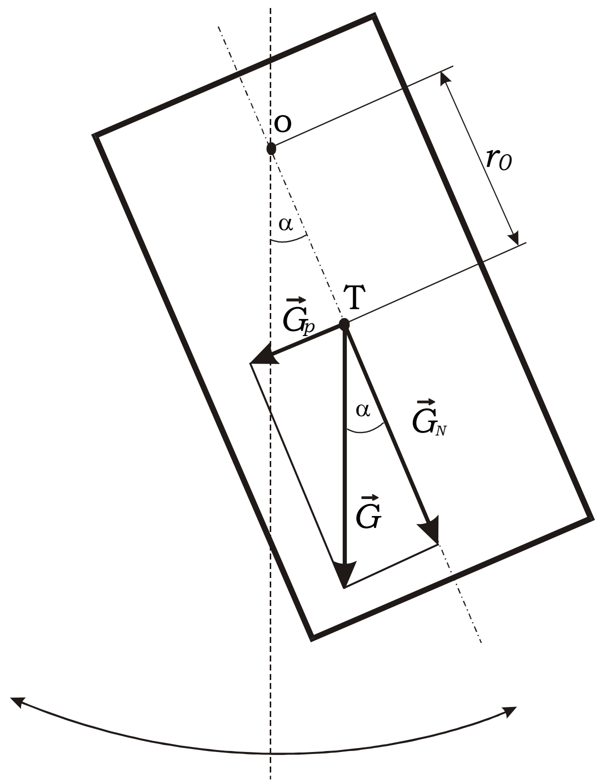
# URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA

***Teoretický úvod:***

Fyzikálnym kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku, tyč), ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom. Schematicky je takéto kyvadlo znázornené na obr. 1. Príčinou jeho pohybu je tiažová sila $\vec{G}$ pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol $\alpha$ do rovnovážnej polohy vracia zložka sily $\vec{G}_P$ (obr.1).




Obr. 1

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \tag{1}$$

kde $\vec{M}$ je vektor momentu sily, $I$ moment zotrvačnosti a $\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2}$ vektor uhlového zrýchlenia.

***Poznámka k významu momentu zotrvačnosti a jeho definícia:*** *Ako vyplýva z pohybovej rovnice (1) rotujúceho telesa (kyvadla), moment zotrvačnosti plní úlohu miery zotrvačných vlastností rotujúceho telesa. Jeho hodnotu potrebujeme vedieť pri opise pohybu rotujúcich telies, napr. pri určení kinetickej energie rotujúceho telesa* $E_{KR} = \frac{1}{2} I\omega^2$ *a podobne. Moment zotrvačnosti I pre teleso so spojite rozloženou hmotnosťou je definovaný vzťahom* $I = \int_M r^2 dm$, *kde M je hmotnosť telesa a* $r$ *je vzdialenosť hmotného elementu* $dm$ *od osi otáčania. Pre sústavu hmotných bodov je moment* *zotrvačnosti definovaný vzťahom* $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ *, kde* $m_i$ *je hmotnosť i-teho hmotného bodu a* $r_i$ *je jeho vzdialenosť od osi otáčania*.

Kyvadlo znázornené na obr. 1 vykonáva kmity v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákresňu. Tieto kmity sú opísané riešením pohybovej rovnice (1) pre malé výchylky, rádovo do 5° (viac detailov k riešeniu rovnice (1) nájdete v prílohe 1),

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \ , \tag{2}$$

kde $\alpha$ je okamžitá uhlová vychýlka v danom čase $t$, $\alpha_0$ je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, $\varphi$ počiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta, veličina ($\omega t+\alpha$) je fáza kmitania. Veličina $\omega$ je uhlová rýchlosť kyvadla, pre ktorú platí

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_0}{I}} \ , \tag{3}$$

kde $m$ je hmotnosť telesa, $g$ je tiažové zrýchlenie a $r_0$ je vzdialenosť ťažiska od osi (obr. 1), okolo ktorej sa kyvadlo kýva. Pre periódu kmitania $T$ ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_0}} \ . \tag{4}$$

Z neho pre moment zotrvačnosti vyplýva

$$I = \frac{T^2 mgr_0}{4\pi^2} \ . \tag{5}$$

Ak pomocou niektorej z fyzikálnych metód určíme periódu $T$ a veličiny $m$, $d$ ($g$ = 9,81ms$^{-2}$), budeme podľa vzťahu (5) vedieť určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na uvažovanú os, okolo ktorej kyvadlo vykonáva periodický pohyb.

Ako je známe z dynamiky tuhého telesa, ak poznáme moment zotrvačnosti rotujúceho telesa vzhľadom na určitú os, môžeme určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na inú os, ktorá je s ňou rovnobežná, pomocou Steinerovej vety, ktorá hovorí: *Moment zotrvačnosti* $I$ *telesa vzhľadom na os, neprechádzajúcou ťažiskom, sa rovná momentu zotrvačnosti* $I_0$ *vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o* $mr_0^2$*, kde* $m$ *je hmotnosť telesa a* $r_0$ *je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí t. j.:*

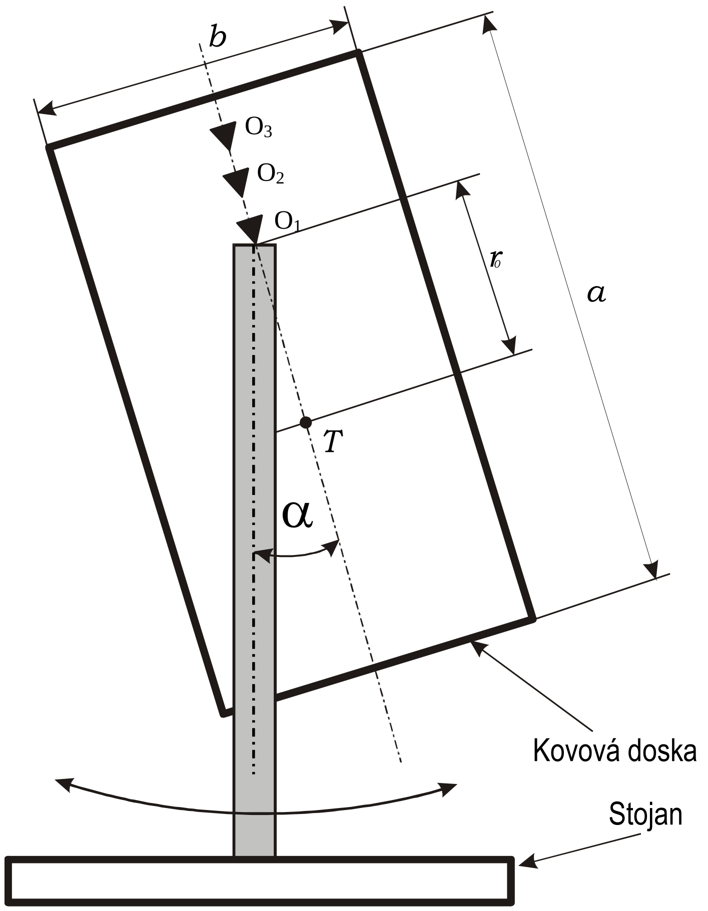
$$I = I_0 + mr_0^2 . \tag{6}$$

Teoretický vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky obdĺžnikového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá je

$$I_0 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \tag{7}$$

kde $m$ je hmotnosť dosky a $a$, $b$ jej rozmery.

***Náčrt a popis meracieho zariadenia:***
Fyzikálne kyvadlo tvorí homogenna kovová doska, ktorá môže vykonávať kmity okolo jednej zo zvolených osí vytvorených britom, ktorý môžeme zaskrutkovať do zvoleného otvoru. Os je vytvorená dotykovým miestom britu na opornej ploške stojana. Toto usporiadanie umožňuje vychýlenie dosky o uhol $\alpha_0$ z jej rovnovážnej polohy (obr. 2), ktorá sa po uvoľnení bude kývať ako fyzikálne kyvadlo. Vložením britu do iného otvoru v doske máme možnosť voliť vzdialenosť osi otáčania dosky od jej ťažiska.




Obr. 2

***Metóda merania a postup pri meraní:***
Vážením stanovíme hmotnosť kovovej dosky $m$ a odhadneme jej chybu. Dosku vážime aj so skrutkami a s britom. Určíme rozmery $a$, $b$ dosky a odhadneme ich chyby. Vzdialenosť ťažiska od osi otáčania (britu) určíme posuvným meradlom, odhadneme chybu. Po rozkývaní kyvadla (dosky), určíme postupnou metódou periódu jeho kmitov. Namerané hodnoty periód zapíšeme do nasledujúcej tabuľky:

| *Tab. 1 Namerané časy pre os č.1* | | | | *a = ... b = ...* | *m = ... $r_{01}$ = ...* |
|---|---|---|---|---|---|
| i | $t_{i*10}$ [s] | i+5 | $t_{(i+5)*10}$ [s] | $T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ [s] | $\Delta_i = \bar{T} - T_i$ [s] |
| 1 | $t_{10}$ | 6 | $t_{60}$ | $(t_{60} - t_{10})/50 = T_1$ | |
| 2 | $t_{20}$ | 7 | $t_{70}$ | $(t_{70} - t_{20})/50 = T_2$ | |
| 3 | $t_{30}$ | 8 | $t_{80}$ | . | |
| 4 | $t_{40}$ | 9 | $t_{90}$ | . | |
| 5 | $t_{50}$ | 10 | $t_{100}$ | . | |
| | | | | $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^{5} T_i}{5}$ | $\sigma_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} (\Delta_i)^2}{5(5-1)}}$ |

$t_{10}$ v prvom riadku je hodnota prvých 10 periód, ktorú sme získali stopkami s medzičasom, atď. Podobný zápis urobíme pre zvolené osi č. 2 a č. 3.

***Úlohy:***

1. Postupnou metódou určte periódu daného fyzikálneho kyvadla a jej chybu pre tri osi neprechádzajúce ťažiskom.
2. Stanovte momenty zotrvačnosti $I_1$, $I_2$, $I_3$ a ich chyby vzhľadom na tieto osi.
3. Pomocou Steinerovej vety vypočítajte momenty zotrvačnosti $I_{01}$, $I_{02}$, $I_{03}$ vzhľadom na ťažiskovú os.
4. Porovnajte výsledky merania momentu zotrvačnosti s teoretickým výpočtom.

***Spracovanie výsledkov:***

1. Naprogramujte tabuľku 1 do Excelu a vypočítajte priemernú hodnotu periódy pre každú os!
2. Hodnoty periódy využite pre stanovenie momentu zotrvačnosti $I$ podľa vzťahu (5).
3. Podľa rovnice (6) určite ťažiskový moment zotrvačnosti, t. j.

$$I_0 = I - mr_0^2 = \frac{T^2 mgr_0}{4\pi^2} - mr_0^2 \tag{8}$$

Výsledky získané podľa vzťahu (8) vyhodnotíme pre každú os

$$I_{01} = I_1 - mr_{01}^2 \qquad I_{02} = I_2 - mr_{02}^2 \qquad I_{03} = I_3 - mr_{03}^3 \tag{9}$$

4. Stanovte chyby veličín $I_{01}$, $I_{02}$, $I_{03}$ podľa vzťahu (opäť odporúčame použiť Excel)

$$\sigma_{I_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_0}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial I_0}{\partial r_0}\right)^2 \sigma_{r_0}^2} \tag{10}$$

kde

$$\frac{\partial I_0}{\partial T} = \frac{mgr_0 T}{2\pi^2} \ , \quad \frac{\partial I_0}{\partial m} = \frac{T^2 gr_0}{4\pi^2} - r_0^2 \ , \qquad \frac{\partial I_0}{\partial r_0} = \frac{T^2 mg}{4\pi^2} - 2mr_0 \ ,$$

$\sigma_m$ a $\sigma_{r_0}$ odhadneme podľa presnosti použitého meradla a chybu merania periódy $\sigma_T = \sigma_{\bar{T}}$ nájdeme zo vzťahu v Tab. 1. Meranie ktorej veličiny (*T, m, $r_0$*) prispieva najviac do výslednej chyby (podľa toho, ktorý z 3 sčítancov v rovnici (10) je najväčší)?

5. Zistite, či namerané hodnoty $I_{01}$, $I_{02}$, $I_{03}$ navzájom súhlasia - porovnajte každú z 3 dvojíc podľa kritéria pre porovnávanie (pozri súbor *Užitočné vzťahy*). Ak súhlasia 3 dvojice, nájdite váhovaný priemer zo všetkých troch hodnôt, ak súhlasí len jedna dvojica, nájdite váhovaný priemer len z tejto dvojice podľa vzťahu

$$\overline{I_0} = \frac{\sum_i I_{0i}/\sigma^2_{I_{oi}}}{\sum_i 1/\sigma^2_{I_{0i}}} \tag{11}$$

a chybu váhovaného priemeru podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{I}_0} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i 1/\sigma^2_{I_{0i}}}} \tag{12}$$

6. Zo známej hodnoty hmotnosti dosky $m$ a jej rozmerov $a$, $b$ vypočítajte podľa vzťahu (7) tzv. teoretický ťažiskový moment zotrvačnosti $I_T$.
7. Zistite porovnaním (viď súbor *Užitočné vzťahy*), či nameraná hodnota $\overline{I_0}$ súhlasí s teoretickou hodnotou $I_T$. Ak nie, uvažujte nad príčinou!

***Kontrolné otázky:***

1. Čo je to fyzikálne kyvadlo? Napíšte jeho pohybovú rovnicu.
2. Definujte moment zotrvačnosti vzhľadom na zadanú os.!!
3. Vyslovte Steinerovu vetu.
4. Prečo fyzikálne kyvadlo rozkývame len pre uhly $\alpha_0 < 5\,°$ ?