MERANIE A JEHO NEURČITOSŤ: a) REAKČNÝ ČAS

Cieľ: 1. Určiť reakčný čas na základe vizuálneho stimulu
2. Oboznámiť sa s náhodnými chybami:
pochopiť význam strednej kvadratickej odchýlky jedného merania a aritmetického priemeru.

Upozornenie: podmienkou k absolvovaniu tejto úlohy je prečítanie dokumentu "Meranie a jeho neurčitosť: chyby merania".

Teória:

Váš reakčný čas je časový interval medzi fyzickým stimulom a uskutočnením požadovanej reakcie.

V tomto experimente budeme merať čas potrebný na zachytenie pravítka, ktoré bolo náhle uvoľnené z ruky druhej osoby, takže začalo padať voľným pádom. Jeden študent bude držať pravítko a jeho partner bude pripravený zachytiť ho čo najrýchlejšie po tom, čo bolo uvoľnené. Pravítko musí byť uvoľnené bez varovania. Časový interval od začiatku pádu do okamihu záchytu pravítka, bude považovaný za reakčný čas chytajúcej osoby.

Reakčný čas pre väčšinu osôb je menší ako 200 ms. Toto je príliš krátky interval na to, aby bol spoľahlivo meraný stopkami, naviac by sa celkový obraz merania skomplikoval primiešaním reakčného času osoby, ktorá by čas merala.

Experimentátori často čelia problému, keď majú zmerať veličiny, ktorých hodnoty sú tak malé, že sa pohybujú na hranici (alebo pod) presnosti akéhokoľvek dostupného meracieho zariadenia. Jedným riešením je zvoliť si niečo, čo dokážete merať a použiť túto veličinu pri výpočte toho, čo sa snažíte dostať. V tomto experimente budú použité zákony kinematiky na získanie reakčného času.

Po uvoľnení sa pravítko vplyvom gravitácie pohybuje k zemi voľným pádom. Ide o rovnomerne zrýchlený pohyb s gravitačným zrýchlením $g = 9{,}806 ms^{-2}$. Keďže začiatočná rýchlosť pravítka je nulová, vzdialenosť, o ktorú klesne za čas t je daná vzťahom

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Z tohoto jednoduchého vzťahu medzi časom a dráhou môžeme spočítať dobu pádu pravítka, čiže reakčný čas chytajúcej osoby:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \qquad (2)$$

Ak je pravítko držané vo zvislej polohe a testovaný študent sedí pripravený zachytiť ho medzi palcom a ukazovákom, pričom palec je nastavený nad referenčnú polohu s', potom dráha voľného pádu pravítka je

$$s = s'' - s', \qquad (3)$$

kde s'' označuje polohu palca po zachytení pravítka. Čas voľného pádu potom spočítame dosadením s do rovnice (2).

Ostáva nám ešte zamyslieť sa, či táto metóda má potenciál dosiahnuť úroveň presnosti potrebnú na meranie takto krátkych časových intervalov. Máloktoré pozorované časy budú kratšie ako 100 ms. Z rovnice (1) môžeme určiť, že tomu zodpovedá dráha okolo 5 cm. Ak dokážeme s

stanoviť s neurčitosťou okolo 0,5 cm (10%), dá sa očakávať nepresnosť určenia t na úrovni 5%. To je preto, lebo pri propagácii chyby druhá odmocnina redukuje chybu na polovicu.

Postup:

Každý zo študentov by mal uskutočniť niekoľko skušobných pokusov za účelom určenia čo najlepšej techniky postupu pri púšťaní a chytaní pravítka. V ostrých meraniach by každý študent mal uskutočniť 50 meraní. Odporúčame, aby sa študenti striedali po povedzme desiatich pokusoch. Toto by malo pomôcť redukovať únavu chytajúceho a takisto znížiť šance na podvedomé osvojenie si náznakov, ktoré by chytajúcej osobe umožnili predvídať okamih vypustenia pravítka.

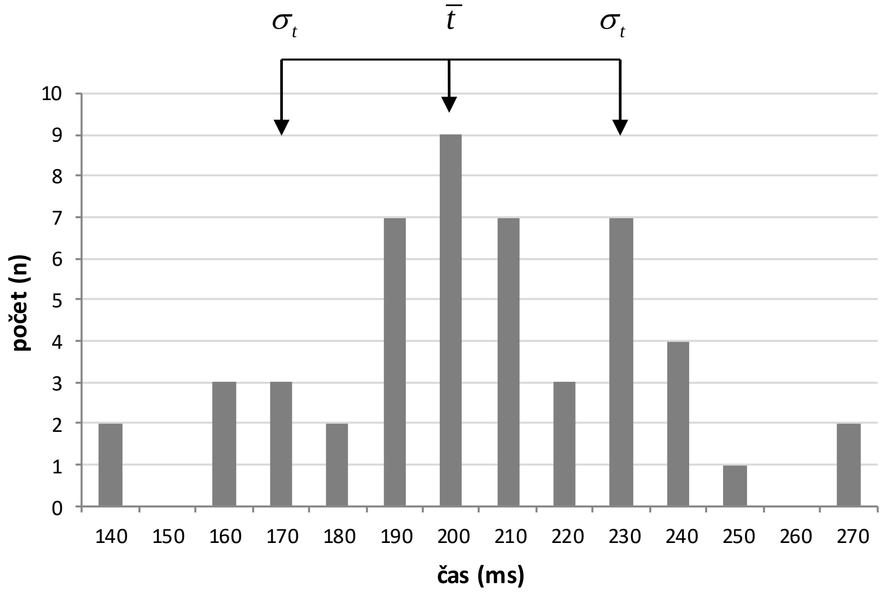
Polohy by mali byť zaznamenané s presnosťou na 1 mm. Toto môže byť prehnane optimistické, ale je oveľa lepšie zaznamenať merania na viac platných miest a potom zaznamenané hodnoty prípadne zaokrúhliť, než to urobiť na málo platných miest a potom musieť celé meranie opakovať.

Uvádzame príklad tabuľky s dátami, ktoré budú použité nižšie v ukážkových výpočtoch.

Začiatočná pozícia	Konečná pozícia	Dráha voľného pádu	Čas	Konečná pozícia	Dráha voľného pádu	Čas
s´ (cm)	s´´ (cm)	s (cm)	t (ms)	s´´ (cm)	s (cm)	t (ms)
10,0	28,0	18,0	192	28,6	18,6	195
10,0	34,0	24,0	221	40,2	30,2	248
10,0	35,1	25,1	226	28,0	18,0	192
10,0	29,6	19,6	200	47,5	37,5	277
10,0	23,0	13,0	163	27,1	17,1	187
10,0	27,2	17,2	187	24,5	14,5	172
10,0	20,1	10,1	143	35,2	25,2	227
10,0	36,3	26,3	232	48,5	38,5	280
10,0	23,9	13,9	168	32,5	22,5	214
10,0	32,2	22,2	213	35,4	25,4	228
10,0	26,5	16,5	183	29,9	19,9	201
10,0	24,8	14,8	174	19,4	9,4	138
10,0	38,7	28,7	242	29,3	19,3	198
10,0	29,0	19,0	197	22,8	12,8	162
10,0	31,2	21,2	208	26,3	16,3	182
10,0	31,3	29,2	244	29,3	19,3	198
10,0	36,4	21,2	208	27,7	17,7	190
10,0	39,2	25,0	226	30,4	20,4	204
10,0	31,2	28,1	239	30,9	20,9	206
10,0	35,0	26,5	232	33,0	23,0	217
10,0	38,1	19,1	197	27,9	17,9	191
10,0	36,5	28,3	240	30,2	20,2	203
10,0	29,1	22,1	212	23,1	13,1	163
10,0	38,3	28,3	240	27,2	17,2	187
10,0	32,1	22,1	212	30,1	20,1	202

Tab. 1. Vzdialenosti a vypočítané časy voľného pádu pravítka v experimente na meranie reakčného času človeka.
Začiatočná poloha (s') pravítka bola 50,0 cm. Histogram časov je ukázaný na Obr. 1.

Ak sa získané dáta budú pohybovať medzi 100 ms a 200 ms, na získanie užitočného histogramu použite delenie na 5 ms "chlievíky" (biny). Napríklad 158 –162 ms padnú do chlievika 160 ms163 –167 ms padnú do chlievika 165 ms168 –172 ms padnú do chlievika 170 ms atď. (čo myslíte, prečo boli chlieviky zvolené týmto spôsobom? Mohli sme ich zvoliť napríklad aj takto: 155 –159, 160 –164, atď.). Ak bude rozptyl dát väčší, medzi cca 100 ms a 250 (300) ms, bude možno užitočnejšie zvoliť delenie na 10 ms chlieviky. Príklad takéhoto histogramu je na obr. 1.



Obr. 1. Histogram reakčných časov.
Priemer je $\bar{t}$=205 ms a stredná kvadratická odchýlka jedného merania je σ_t = 30 ms.

Preskúmajte pozorne váš histogram a vylúčte z neho z neho všetky dáta, ktoré sú očividne nesprávne. Môže to byť spôsobené tým, že v niektorých prípadoch chytajúci z náznakov uhádol moment vypustenia pravítka. V niektorých prípadoch mohlo niečo rozptýliť pozornosť chytajúceho študenta. Tieto prípady by sa mali prejaviť v podobe neprimerane krátkych alebo dlhých časov.

Spočítajte na základe vášho histogramu priemerný čas

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_t n_t \cdot t \tag{4}$$

kde n_t je početnosť, s ktorou sa čas v príslušnom chlieviku opakuje a $n = \sum_t n_t$. Normálne by sme použili na výpočet priemeru jednotlivé namerané časy, čiže vzťah

$$\bar{t} = (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)/n \tag{5}$$

a histogram by slúžil len na prezentáciu tvaru rozloženia jednotlivých meraní. V tomto konkrétnom prípade sú však merania pomerne hrubé a použitie "histogramových dát" ovplyvní konečný výsledok len zanedbateľne (môžete otestovať; kedy môžeme hovoriť o zanedbateľnom ovplyvnení výsledku?), ale zjednoduší analýzu.

Zakreslite vypočítaný priemer do vášho histogramu a skontrolujte, či leží blízko centra distribúcie dát. Je ľahké dopustiť sa pri výpočte omylu a táto jednoduchá kontrola vám môže ušetriť veľa neskorších problémov.

Spočítajte strednú kvadratickú odchýlku vašej distribúcie (odchýlku jedného merania) pomocou rovnice

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_t n_t(\bar{t} - t)^2}{n - 1}} \tag{6}$$

Zakreslite interval $(\bar{t} - \sigma_t, \bar{t} + \sigma_t)$ do vášho histogramu a skontrolujte, či približne 2/3 dát padlo do tohoto intervalu. Osobitnú pozornosť venujte pritom hraniciam tohto intervalu, pretože hranica zvyčajne rozdelí hraničný chlievik (ktorý má konečnú šírku) na 2 časti: jedna je mimo intervalu a druhá vo vnútri. Aby ste správne spočítali počet meraní v hraničných chlievikoch, skontrolujte v tomto prípade priamo hodnoty v Tab. 1.

Nakoniec spočítajte strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru pomocou vzťahu

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

Väčšina z nás si nevie predstaviť časový interval na úrovni dvoch alebo troch desatín sekundy. Sme zvyknutí vnímať časy na úrovni sekúnd, minút, hodín, atď. Aby sme lepšie pochopili, čo takýto krátky čas predstavuje, môžeme si ho previesť do jazyka vzdialenosti voľného pádu nášho pravítka. Zoberte teda váš priemerný čas získaný výpočtom (4) a pomocou rovnice (1) spočítajte zodpovedajúcu dráhu voľného pádu vášho pravítka.

Alebo môžeme spočítať nasledovné fakty:

a) Akú vzdialenosť preletí tenisová loptička z podania Rogera Federera, než vy dokážete na jeho podanie zareagovať?

b) Predstavte si, že ste hokejový brankár. Proti vám letí puk rýchlosťou 145 km/h vystrelený zo vzdialenosti 10 m. V akej vzdialenosti od vás sa bude puk nachádzať, keď naň dokážete zareagovať?

c) Akú vzdialenosť za váš reakčný čas prejde auto pri rýchlosti 100 km/h? Akú vzdialenosť za váš reakčný čas prejde lietadlo pri rýchlosti 900 km/h?

Komentáre:

1. Vo vašej analýze počítate dve štatistické veličiny: σ_t a $\sigma_{\bar{t}}$. Prvá z nich je stredná kvadratická odchýlka jedného merania času t. Jej interpretácia je nasledovná: ak vykonáte ďalšie individuálne meranie času t, potom s pravdepodobnosťou 68% padne táto nameraná hodnota do intervalu $(\bar{t} - \sigma_t, \bar{t} + \sigma_t)$. Druhá z nich je stredná kvadratická odchýlka aritmetického priemeru. Ak by ste znova zopakovali celý experiment (všetky merania), na základe ktorého ste spočítali priemerný čas, potom je 68%-ná pravdepodobnosť, že priemerný čas získaný z nového experimentu padne do intervalu $(\bar{t} - \sigma_{\bar{t}}, \bar{t} + \sigma_{\bar{t}})$. Ešte z iného uhla pohľadu môžeme povedať, že hľadaná skutočná hodnota reakčného času leží so 68%-nou pravdepodobnosťou v posledne zmienenom intervale.

2. Väčšina vašich experimentov bude zahŕňať zaznamenávanie dát do tabuliek, kreslenie grafov a robenie výpočtov. Je dôležité, aby tieto záznamy boli vedené spôsobom, ktorý umožňuje komukoľvek (včítane vás samotných) tieto záznamy prečítať a pochopiť. Tabuľky, grafy a iné záznamy bez príslušných popisov a hlavičiek, ktoré by vysvetľovali obsah príslušného záznamu sú neakceptovateľné.

3. Pretože toto je váš prvý experiment, uvedieme na tomto mieste aj ukážku výpočtov. Čísla použité vo výpočtoch zodpovedajú dátam v tabuľke Tab. 1. Na ich základe bol vyhotovený histogram na Obr. 1.

Vzorové výpočty:

Mali by byť ukázané aj vzorové výpočty s a $\bar{t}$ v rovnakom duchu, ako výpočty nasledovných veličín:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_t n_t \cdot t = \frac{2\cdot 140 + 3\cdot 160 + 3\cdot 170 + \ldots}{50} ms = \frac{10270}{50} ms = 205{,}4\, ms$$

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_t n_t \left(\bar{t} - t\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2\cdot\left(205-140\right)^2 + 3\cdot\left(205-160\right)^2 + \ldots}{50-1}} ms = \sqrt{\frac{44650}{49}} ms = 30{,}2\, ms$$

$$\sigma_{\bar{t}} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{50}} = 4{,}2\, ms$$

$$\bar{t} = \left(205{,}4 \pm 4{,}2\right) ms$$

Kontrola významu : interval obsahuje 34 z 50 nameraných časov, čo je 68%.

Finálny výsledok merania reakčného času:

$$\bar{t} = \left(205 \pm 4\right) ms$$

Všimnite si, že časy v Tab. 1 boli zaokrúhlené na celé milisekundy, nakoľko sú zaraďované do chlievikov o veľkosti 5 ms a žiadne ďalšie výpočty sa s ich konkrétnymi hodnotami vykonávať nebudú.

Použitá literatúra:
Autorom tohoto textu je J.S.Wadden, Laboratory Manual, Dept. of Physics, Carleton University, 1994.
Z anglického originálu preložil a autorsky upravil M. Gintner.
Doplnenie a úprava dokumentu G. Tarjányiová.

MERANIE A JEHO NEURČITOSŤ:
b) OBJEM VALČEKA

Cieľ: 1. Určiť objem valčeka nepriamym meraním
2. Oboznámiť sa s určením chyby nepriameho merania

Upozornenie: podmienkou k absolvovaniu tejto úlohy je prečítanie dokumentu Meranie a jeho neurčitosť: chyby merania

Teória:

Často sme v situácii, keď nejakú veličinu nemeriame priamo, ale pomocou veličín, od ktorých táto veličina závisí. Napr. objem V valca môžeme nájsť meraním jeho polomeru r a výšky h a ich dosadením do vzťahu

$$V = \pi r^2 h \,.$$

V tomto zmysle sme nepriamo merali aj úlohu reakčný čas, ale teraz si ukážeme spôsob, akým sa *zvyčajne* stanoví chyba nepriameho merania. Tento spôsob je osobitne užitočný, ak naša nepriama veličina závisí od dvoch alebo viacerých priamo meraných veličín. Ak sme v prípade valčeka priamo zmerali jeho polomer a výšku s chybami σ_r a σ_h, chybu objemu nájdeme pomocou vzťahu

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 (\sigma_r)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 (\sigma_h)^2} \quad = \quad \sqrt{(2\pi r h)^2(\sigma_r)^2 + (\pi r^2)^2(\sigma_h)^2} \qquad (8)$$

Tento vzťah nám umožní zistiť, ktorá z priamo meraných veličín (polomer alebo výška) sa podieľa na výslednej neurčitosti (chybe) objemu viac – *rozhodne o tom to, ktorý z dvoch členov pod odmocninou vo vzťahu (8) je väčší*. Z toho vieme, ktorú z priamo meraných veličín (polomer alebo výšku) máme predovšetkým merať presnejšie, ak potrebujeme znížiť chybu objemu.

Postup:

Jeden rozmer valčeka meriame mikrometrom, druhý rozmer posuvným meradlom. Pred meraním valčeka *najskôr zaznamenáme „nulové" hodnoty meradiel (hodnota pri úplne zavretom meradle)*. Ak by sme to neurobili, tak v prípade keď je nulová hodnota rôzna od nuly, dopustili by sme sa pri meraní rozmeru valčeka systematickej chyby – každé meranie by bolo posunuté jedným smerom o nulovú hodnotu od správnej hodnoty.

Každý rozmer valčeka zmeriame 10 x, nájdeme aritmetický priemer a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru (pozri vzťahy v súbore „*Meranie a jeho neurčitosť: chyby merania*") a použijeme ich pri výpočte objemu valčeka a jeho chyby. V prípade nedostatku času zmeriame každý rozmer valčeka len raz a chybu odhadneme ako najmenší dielik meradla alebo rozumný zlomok najmenšieho dielika. Objem valčeka a jeho chybu vypočítame zo vzťahov vyššie.