

VYŠETROVANIE STOJATÉHO VLNENIA NA STRUNE

Teoretický úvod:

Kmitaním rozumieme časovo premenné zmeny jednej alebo niekoľkých fyzikálnych veličín okolo istej strednej hodnoty. Kmitavý pohyb vykonáva každý hmotný bod vystavený pôsobeniu síl smerujúcich do jeho rovnovážnej polohy. Ak sa kmitavý pohyb opakuje po rovnako veľkom časovom intervale T (perióde), nazývame ho periodickým kmitavým pohybom. Prevrátená hodnota periódy je frekvencia f , $[f] = s^{-1} = \text{Hz} = \text{hertz}$.

Proces, prostredníctvom ktorého sa z jedného miesta prostredia šíri kmitavý pohyb do celého prostredia nazývame vlnenie, presnejšie postupné vlnenie alebo postupná vlna. Vlnenie okrem periódy T a frekvencie f je ďalej charakterizované vlnovou dĺžkou λ . Je to vzdialenosť, ktorú vlnenie prejde za dobu jednej periódy, teda $\lambda = vT$, kde v je rýchlosť, ktorou sa vlnenie v danom prostredí šíri. Túto rýchlosť pomocou vlnovej dĺžky λ a frekvencie f môžeme vyjadriť nasledovným vzťahom

$$v = f\lambda. \quad (1)$$

Ak kmitá ohraničená sústava hmotných bodov, teleso konečných rozmerov alebo určitý objem tekutiny vymedzený nádobou, môže v takejto kmitajúcej sústave dôjsť k javu, ktorý nazývame rezonancia. Pri rezonancii všetky body sústavy kmitajú s jednou frekvenciou – rezonančnou frekvenciou – a v rôznych miestach sústavy majú rôznu amplitúdu, ktorá, ak neprihliadame k tlmeniu, je stála. K rezonancii dochádza napríklad aj v prípade šírenia vlnenia v strune. Podľa druhu kmitajúcej sústavy závisí rezonančná frekvencia od rôznych vplyvov, napr. od ich tvaru a pod. V prípade strún rezonančná frekvencia závisí od ich dĺžky, lineárnej hustoty a veľkosti napínacej sily.

V prostredí sa môžu súčasne šíriť viaceré kmity. V tej oblasti prostredia, v ktorej sa vlnenia prekrývajú nastáva *skladanie (interferencia) vln*, ktoré sa prejavuje v tom, že výsledný kmitavý pohyb hmotných elementov prostredia má v niektorých miestach väčšiu, v iných miestach menšiu amplitúdu, ktorá bude závisieť najmä od rozdielu fáz skladaných kmitov.

Osobitným prípadom vlnenia, ktoré vzniká interferenciou dvoch vlnení, je tzv. *stojaté vlnenie*. Vzniká zložením dvoch proti sebe postupujúcich vlnení s rovnakými amplitúdami a frekvenciami.

Vyšetríme jednorozmerný prípad (vlnenie šíriace sa v bodovom rade) a majme dve takéto proti sebe postupujúce vlnenia šíriace sa rýchlosťou v . Položme počiatok súradnice x ($x = 0$) do miesta, v ktorom sa obe proti sebe postupujúce vlnenia v okamžiku $t = 0$ stretávajú tak, že medzi kmitmi oboch vln nie je fázový rozdiel. Výchylka vlnenia šíriaceho sa vpravo (v kladnom smere osi X) je daná vzťahom

$$y_1(x,t) = y_m \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad (2)$$

a vlnenia šíriaceho sa vľavo (v zápornom smere osy x) vzťahom

$$y_2(x,t) = y_m \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (3)$$

Výchylka výsledného vlnenia je súčtom oboch výchyliek, $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$. Po dosadení a po úprave dostávame

$$y(x,t) = y_v \sin \omega t \quad (4)$$

kde amplitúda výsledného vlnenia y_v je daná vzťahom

$$y_v = 2y \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (5)$$

a vidíme, že je funkciou súradnice x .

Miestam, v ktorých y_v nadobúda maximálnu hodnotu $y_v = 2y$, hovoríme *kmitne*. Kmitne sa vytvárajú v miestach, v ktorých súradnica x nadobúda hodnotu rovnú párnemu násobku štvrtiny vlnovej dĺžky λ , teda

$$x = 2k \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (6)$$

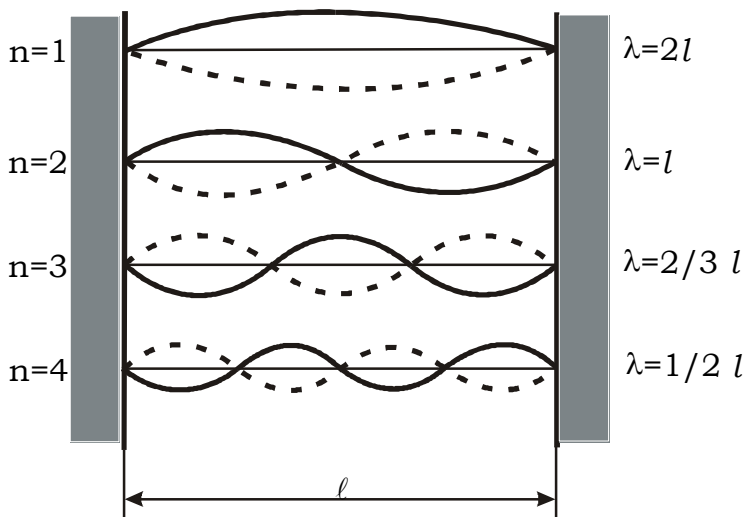
Miestam, v ktorých $y_v = 0$, hovoríme *uzly*. Tieto miesta sú trvale v kľude. Uzly sa vytvárajú v miestach, v ktorých súradnica x nadobúda hodnotu rovnú nepárnemu násobku štvrt' vlnovej dĺžky λ , teda

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (7)$$

Zo vzťahu (4) a (5) vidíme, že výsledné vlnenie, ktoré vzniklo superpozíciou proti sebe postupujúcich rovnakých (koherentných) vlnení, nepostupuje v smere a ani proti smeru osy x . To je stojaté vlnenie.

Pri stojatom vlnení kmitajú všetky body prostredia vzdialené od seba o vlnovú dĺžku s rovnakou fázou, ale s amplitúdou y_v periodicky závislou od polohy bodu v priestore, vzťah (5).

Stojaté vlnenie sa vytvára v bodovom rade, ktorý je na oboch stranách obmedzený (napr.



Obr. 1

struna, tyč a pod.) odrazom postupného vlnenia na jeho koncoch. Nazývame ho tiež *chvenie*.

Ak bodový rad (napr. struna) o dĺžke l má oba konce pevné, môžu v ňom vznikáť len stojaté vlny s uzlami na oboch koncoch, obr. 1. Pretože dva susedné uzly sú vzdialené o $\lambda/2$, musí byť vždy na celej dĺžke struny celočíselný počet polvln, teda

$$n \frac{\lambda_n}{2} = l; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Bodový rad (struna) sa teda môže chvieť s frekvenciami

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l} v, \quad n = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Základné chvenie, $n = 1$, vznikne, ak sa v strune vytvorí jedna polvlna, t. j.

$\lambda_1 = 2l$. Jeho frekvencia, nazvaná základná frekvencia, je $f_1 = v/\lambda_1 = v/(2l)$. Vyššie frekvencie chvenia, ktoré sú celočíselným násobkom základnej frekvencie, $f_n = n f_1, n > 1$, sa nazývajú vyššími harmonickými.

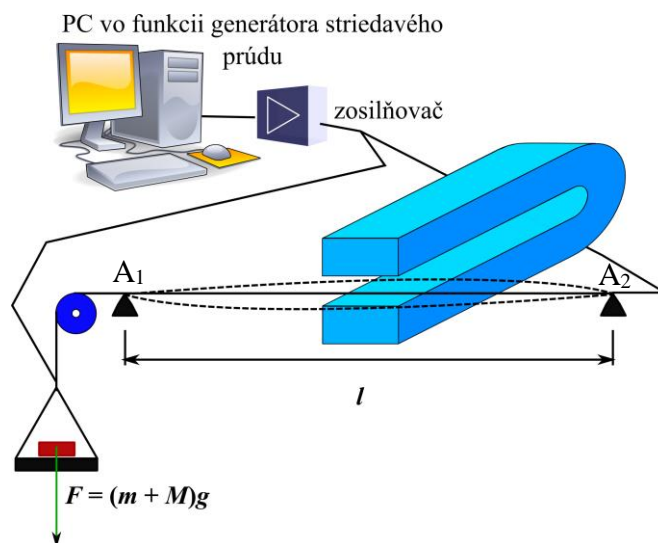
Poznámka: Okrem základného chvenia vznikajú vždy i vyššie harmonické pričom o ich počte a ich amplitúde (intenzite) rozhoduje spôsob rozochvenia príslušného útvaru. Napr.: strunu môžeme rozochvieť sláčikom (husle), brnknutím (gitara), úderom (klavír) a pod.

Metóda vyšetovania:

Cieľom úlohy je vyšetriť vplyv vonkajších okolností a podmienky vzniku stojatej vlny v jednorozmernom ohraničenom prostredí. V ďalšom budeme vyšetovať stojaté vlnenie (chvenie) vytvorené v strune. Struna je útvar, ktorého priečne rozmery voči dĺžke môžeme zanedbať.

V strune, ktorej jednotka dĺžky má hmotnosť s [kg/m] (lineárna hustota) a ktorá je napínaná silou F , sa šíri vlnenie rýchlosťou

$$v = \left(\frac{F}{s} \right)^{1/2}. \quad (10)$$



Obr. 2

Máme strunu z elektricky vodivého materiálu upnutú tak, ako je to znázornené na obr. 2. Dĺžka struny l je určená vzdialenosťou bodov upevnenia (britov), t. j. bodmi A_1 a A_2 . Napínacia sila F je rovná tiaži závažia hmotnosti m uloženého na miske a tiaži misky o hmotnosti M , $F = (m + M)g$.

PC vo funkcii generátora striedavého prúdu vytvára v strune striedavý (harmonický) elektrický prúd $I = I_0 \cos \omega t$.

Časť struny o dĺžke dl sa nachádza v magnetickom poli medzi pólmi permanentného magnetu. Predpokladajme, že magnetické pole o indukcii B je na celom úseku dl homogénne. Na úsek dl pôsobí Lorentzova sila

$$d\vec{F}_L = Id\vec{l} \times \vec{B} \quad (11)$$

a je zdrojom priečného postupného vlnenia, ktoré sa v strune z tohoto miesta šíri napravo aj naľavo.

Z významu vektorového súčinu vzťahu (11) je zrejmé, že sila $d\vec{F}$ je kolmá na $d\vec{l}$ aj na \vec{B} a jej veľkosť je

$$dF_L = I_0 dl B \cos \omega t. \quad (12)$$

Zo vzťahu (12) je ďalej zrejmé, že sila dF je harmonická a vlnenie, ktoré v strune vytvára, je tiež harmonické. Po odraze vlnenia na koncoch struny (v miestach A_1 a A_2) sa vytvoria dve vlny rovnakej frekvencie a amplitúdy šíriace sa proti sebe a zložením vytvoria stojaté vlnenie. Ak sú dosiahnuté také podmienky, že uzly stojatého vlnenia sa stotožnia s miestami upevnenia struny (s bodmi A_1 a A_2), dôjde k rezonancii a struna sa rozkmitá (chveje) na svojej rezonančnej frekvencii. Jej amplitúda bude výrazná a viditeľná voľným okom. Do rezonancie sa struna dostane vždy, keď na jej dĺžke sa vytvorí celočíselný násobok pol vlnovej dĺžky vlnenia, teda keď je splnená podmienka daná vzťahom (8). Pod dosadením vzťahu (10) do vzťahu (9) pre rezonančnú frekvenciu f_n dostaneme vzťah

$$f_n = \frac{n}{2l} \left(\frac{F}{s} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Úlohy:

1. Pre rôzne hodnoty napínacej sily F (meníme hmotnosť m závažia) zistíte základnú rezonančnú frekvenciu ($n = 1$) a vyššie harmonické frekvencie ($n > 1$). Výsledky zapíšete do Tabuľky I., v ktorej f je rezonančná frekvencia, ktorú odčítame z RC-generátora.
2. Zo známej hustoty ρ materiálu struny (tabuľková hodnota), určte hmotnosť dĺžkovej jednotky struny, t.j. lineárnu hustotu s .
3. Určte teoretické hodnoty rezonančných frekvencií a rýchlosti šírenia sa vlnenia.
4. Porovnajte súbory veličín získaných z experimentálneho merania so súbormi veličín určených z teórie. Porovnanie môžete urobiť zapísaním súborov hodnôt v tabuľkovej forme alebo zhotovením grafov závislostí.

Tabuľka I

	M+m [kg]	F [N]	n=1, $\lambda_1 =$		n=2, $\lambda_2 =$		n=3, $\lambda_3 =$		v_p [ms ⁻¹]	v_t [ms ⁻¹]	n=1, $\lambda_1 =$	n=2, $\lambda_2 =$	n=3, $\lambda_3 =$	
			f_1 [Hz]	v_1 [ms ⁻¹]	f_2 [Hz]	v_2 [ms ⁻¹]	f_3 [Hz]	v_3 [ms ⁻¹]						f_{1t} [Hz]
0.														
1.														
2.														
3.														
4.														
5.														
6.														
7.														
8.														
9.														
10.														

Postup merania:

Struna spojená s miskou známej hmotnosti je napnutá medzi brity A_1 a A_2 a vodivo spojená s PC, ktorý plní funkciu generátora striedavého prúdu.

1. Zmeriame dĺžku l (vdialenosť medzi britmi A_1 a A_2).
2. Zmeriame 10 krát priemer d prierezu struny a určíme aritmetický priemer.
3. Misku zaťažíme závažím hmotnosti m a preladovaním RC-generátora nájdeme rezonančné frekvencie pre toto zaťaženie. Takto pre dané zaťaženie struny nájdeme základnú frekvenciu ($n = 1$) a frekvencie vyšších harmonických ($n = 2, 3, \dots$). Postupne zvyšujeme zaťaženie (zvyšujeme hmotnosť závažia na miske) a preladovaním RC-generátora zisťujeme odpovedajúce rezonančné frekvencie. Výsledky zapisujeme do Tabuľky I. Pri meraní je vhodné magnet umiestniť do polohy predpokladanej kmitne. Pri výpočtoch je potrebné k hmotnosti závažia umiestneného na miske pripočítať aj hmotnosť samotnej misky, ktorá je uvedená na meracom zariadení.

Vyhodnotenie merania:

1. Výpočtom z priemeru d struny a známej hustoty ρ materiálu struny (tabuľková hodnota) určíme hmotnosť dĺžkovej jednotky struny s , t.j. lineárnu hustotu použitej struny.
2. Vypočítame rýchlosti šírenia vlnenia v strune podľa vzťahu (1), výsledky zapíšeme do tabuľky I.
3. Vypočítame aritmetické priemery rýchlostí šírenia sa vlnenia v odpovedajúcich príslušnému zaťaženiu.
4. Určíme si výpočtom teoretické hodnoty rýchlostí pomocou vzťahu (10) pre všetkých 10 hodnôt napínacej sily F , výsledky zapíšeme do tabuľky I.

5. Porovnáme súbory veličín získaných z experimentálneho merania, t.j. aritmetické priemery rýchlostí šírenia sa vlnenia v , so súbormi veličín očakávaných z teórie, t.j. s teoretickými hodnotami rýchlostí v_t . Porovnanie môžeme urobiť zapísaním súborov rýchlostí v tabuľkovej forme alebo zhotovením grafov závislosti $v = f(F)$.
6. Určíme si výpočtom teoretické hodnoty rezonančných frekvencií podľa vzťahu (13) pre všetkých 10 hodnôt napínacej sily F , výsledky zapíšeme do tabuľky I.
7. Experimentálne zistené hodnoty rezonančných frekvencií (odčítané z RC-generátora, Tab. I.) porovnáme s teoretickými hodnotami rezonančných frekvencií. Porovnanie môžeme urobiť zapísaním súborov rýchlostí v tabuľkovej forme alebo zhotovením grafov závislosti $f = f(F)$.

Urobte diskusiu dosiahnutých výsledkov a možných zdrojov chýb.

Kontrolné otázky:

1. Čo rozumieme pod kmitaním hmotného bodu a pod vlnením prostredia?
2. Ktorými fyzikálnymi veličinami charakterizujeme vlnenie?
3. Kedy hovoríme o postupnom vlnení a kedy o stojatom vlnení a aký je medzi nimi rozdiel?
4. Čo sú to kmitne a čo sú uzly a v ktorých miestach sa vytvárajú?
5. Napíšte vzťahy pre základnú frekvenciu a frekvencie vyšších harmonických chvení na strune!
6. Aká je súvislosť medzi rýchlosťou vlnenia v strune a napínacou silou?
7. Vysvetlite metódu a postup vyšetrovania stojatého vlnenia na strune!

Doplnená a upravená úloha zo skrípt: Doc. RNDr. Drahoslav Vajda, CSc., Doc. Ing. Július Štelina, CSc., RNDr. Jaroslav Kovár, Ing. Ctibor Musil, CSc., RNDr. Ivan Bellan, Doc. Ing. Igor Jamnický, CSc., "Návody k laboratórnym cvičeniam z fyziky", vydala Žilinská univerzita vo vydavateľstve EDIS, 2. nezmenené vydanie, rok 2003