3 Kinematika hmotného bodu

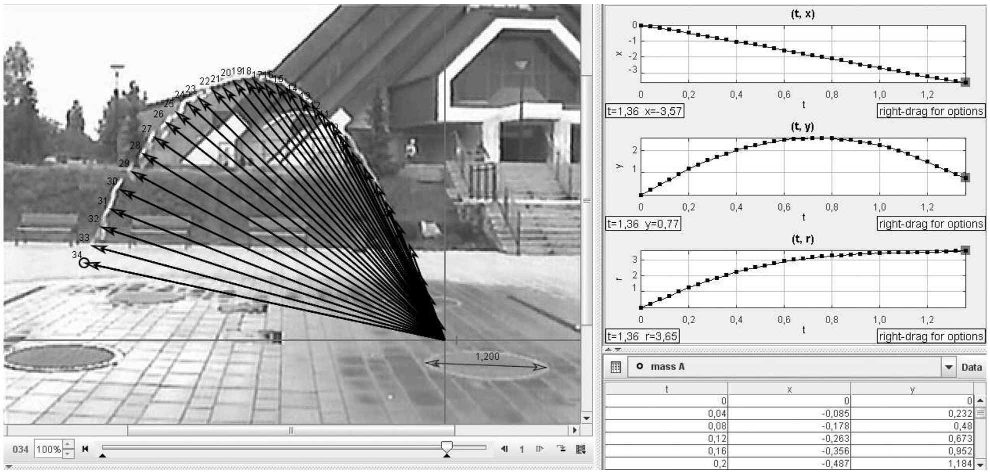
Pohyb vo všeobecnosti zahŕňa všetky zmeny a procesy, ktoré prebiehajú vo vesmíre. Je neoddeliteľnou vlastnosťou hmoty. Časť fyziky, ktorá sa zaoberá popisom pohybu telies, triedením a porovnávaním pohybov sa nazýva **kinematika**.

3.1 Hmotný bod, vzťažná sústava, trajektória, dráha pohybu

Najjednoduchšou formou pohybu je **mechanický pohyb**. Rozumieme pod ním proces, pri ktorom sa mení poloha hmotného objektu (auto, autobus, lietadlo). Aby sme si uľahčili popis pohybu telesa, nahradíme toto teleso hmotným bodom. Pod **hmotným bodom** rozumieme myslené teleso, ktorého rozmery a tvar môžeme pre popis pohybu zanedbať, avšak hmotnosť sa zachováva. Ako hmotný bod si môžeme predstaviť aj dieťa na sánkach, ktoré sa spúšťa po svahu. Predpokladáme pritom, že všetky časti sústavy dieťa-sánky sa pohybujú rovnako rýchlo a v rovnakom smere. Predstava hmotného bodu však nie je vhodná pre otáčajúce sa telesá okolo vlastnej osi (napríklad otáčajúci sa kolotoč), pretože jeho rôzne časti sa v danom okamihu pohybujú rôzne rýchlo a v rôznych smeroch. Taktiež aj pri skúmaní deformácie telesa nie je vhodné pracovať s myšlienkovým pojmom hmotného bodu.

Keďže mechanický pohyb definujeme ako premiestňovanie telesa, musíme premiestňovanie vzhľadom na niečo vzťahovať. Teleso alebo telesá, vzhľadom na ktoré pohyb opisujeme, tvoria **vzťažnú sústavu**. Pohyb a pokoj sú preto relatívne pojmy, čo sa javí vzhľadom na jednu vzťažnú sústavu v pokoji, môže byť súčasne vzhľadom na inú sústavu v pohybe a opačne (napr. skúmanie pohybu áut na diaľnici pri obiehaní). V praxi spájame s telesami tvoriacimi vzťažnú sústavu najčastejšie nejakú **súradnicovú sústavu**, napr. **pravouhlú**

pravotočivú sústavu súradníc x, y, z. (Pre zjednodušenie budeme na začiatku uvažovať o pohybe v rovine, teda sústave x, y.) Polohu objektu určujeme najčastejšie k **počiatku** súradnicovej sústavy.



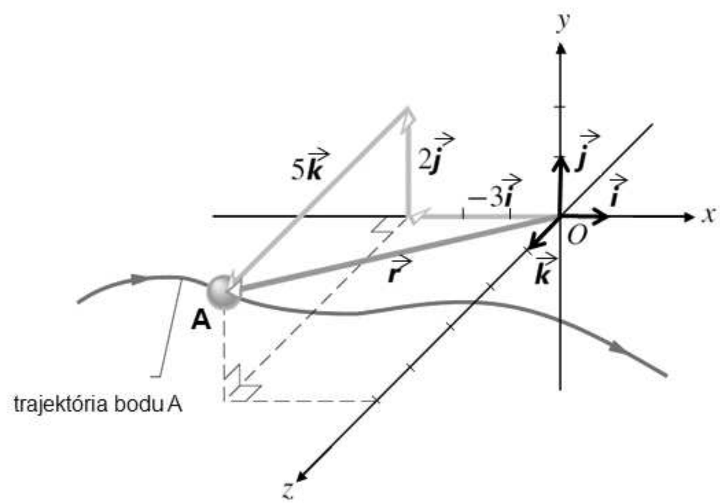
Obrázok 3.1: Analýza pohybu vodného lúča fontány v Žiline.

Vo fyzike sa často stretávame s úlohou, pri ktorej potrebujeme určiť polohu telesa alebo opísať jeho pohyb. Na obrázku 3.1 je v istom okamihu znázornený pohyb vodného lúča fontány na Vlčincoch v Žiline. Skúmajme teraz pohyb začiatku vodného lúča. Čiara, po ktorej sa začiatok vodného lúča pohyboval sa nazýva **trajektória**. Pri opise pohybu začiatku vodného lúča sa obmedzíme na pohyb jedného bodu, ktorý môžeme považovať za hmotný bod. Aby sme mohli skúmať pohyb bodu, potrebujeme určiť jeho **polohu v čase t** vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy x, y, t.j, súradnice x_0, y_0, t_0, x_1, y_1, t_1, x_2, y_2, t_2, $\ldots$, v ktorých sa daný bod v jednotlivých časových úsekoch pri pohybe nachádzal. Hodnoty týchto bodov zapíšeme do tabuľky. Čas sme začali merať, keď začiatok vodného lúča prechádzal bodom so súradnicami x_0, y_0. Vtedy mal čas hodnotu $t_0 = 0\,s$. V súradnicovej sústave x, y trajektória predstavuje graf vzájomnej závislosti $y = y(x)$ súradníc bodov trajektórie.

Polohu nejakého bodu A vo všeobecnosti vzhľadom na pravouhlú súradnicovú sústavu x, y, z máme určenú vtedy, keď poznáme všetky jeho tri súradnice x, y, z v priestore (x, y v rovine), kde x je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami y a z, y je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a z a z je kolmá vzdialenosť bodu A od roviny preloženej osami x a y. Polohu hmotného bodu môžeme charakterizovať pomocou polohového vektora. Pod **polohovým vektorom** $\vec{r}$ hmotného bodu A vzhľadom na začiatok súradnicovej sústavy O budeme rozumieť orientovanú úsečku, ktorej začiatok je v bode O a koniec v bode A. Pre polohový vektor v kartézskej sústave súradníc x, y, z platí

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\ , \tag{3.1}$$

kde $x\,\vec{i}$, $y\,\vec{j}$ a $z\,\vec{k}$ sú jeho priemety do súradnicových osí a x, y, z sú pravouhlé súradnice bodu A (v rovine x, y). Vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú jednotkové vektory totožné s kladnými smermi súradnicového systému xyz.



Obrázok 3.2: Popis polohy hmotného bodu v priestore.

O mechanickom pohybe hovoríme vtedy, keď nejaký hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu, čiže mení sa jeho polohový vektor, pričom koncový bod sa pohybuje s hmotným bodom a počiatočný bod trvalo splýva s počiatkom sústavy súradníc (obr. 3.2). Pohyb hmotného bodu môžeme charakterizovať vtedy, keď v každom časovom okamihu sú známe jeho súradnice, čiže ak poznáme ich funkcie závislosti od času, čo môžeme zapísať

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)\ , \tag{3.2}$$

alebo vo vektorovom tvare

$$\vec{r} = \vec{f}(t)\ , \tag{3.3}$$

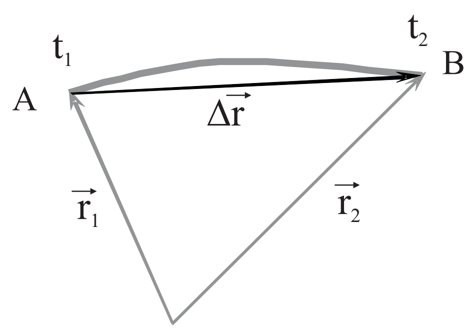
vtedy hovoríme, že polohový vektor $\vec{r}$ je **vektorovou funkciou času**. Ak je poloha hmotného bodu, ktorý sa v čase t_1 nachádzal v mieste A určená vektorom $\vec{r}_1$ a v nasledujúcom okamihu $t_1 + \Delta t$ v mieste B vektorom $\vec{r}_2$, je posunutie $\Delta\vec{r}$ hmotného bodu v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ dané rozdielom

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \,, \quad \text{r}esp. \quad \vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 \,, \tag{3.4}$$

čo možno podľa vzťahu (3.1) zapísať

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r} &= (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) - (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k} \,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Súradnice $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ určujú polohový vektor $\vec{r}_1$, súradnice $(x_2,\, y_2,\, z_2)$ určujú polohový vektor $\vec{r}_2$, pričom platí: $\Delta x = (x_2 - x_1)$, $\Delta y = (y_2 - y_1)$, $\Delta z = (z_2 - z_1)$ a $\Delta t = (t_2 - t_1)$.



Obrázok 3.3: Polohový vektor pohybujúceho sa hmotného bodu z miesta A v čase t_1 a v čase t_2 v mieste B.

Sled polôh, ktoré hmotný bod počas svojho pohybu vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu zaujíma, predstavuje trajektóriu pohybu. Jej dĺžka sa nazýva **dráha pohybu**.

V dvojrozmerných prípadoch pohybu (obr. 3.1) je zložka $z = 0$. Tu si vystačíme s dvojrozmerným súradnicovým systémom určeným osami x a y, a tým aj rozklad vektora $\vec{r}$ je len rozkladom do týchto dvoch smerov

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \,. \tag{3.6}$$

Na popis jednorozmerného pohybu nám postačuje len jedna zložka polohového vektora $\vec{r}$. Ak je pohyb hmotného bodu orientovaný v smere osi x, tak platí

$$\vec{r} = x\,\vec{i} \,. \tag{3.7}$$

V prípade priamočiarych pohybov vystačíme pri určovaní polohy s dráhou s.

$$s = |\vec{r}| = x\ , \tag{3.8}$$

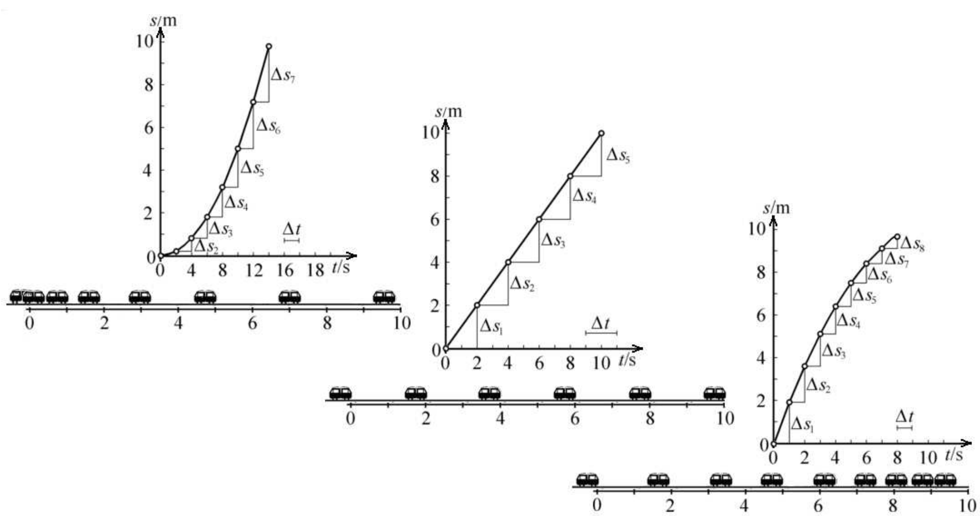
ktorá predstavuje veľkosť posunutia v danom smere, pričom súradnicovú sústavu si môžeme vždy zvoliť tak, aby sa pohyb uskutočňoval v kladnom smere osi x, čo nám zjednoduší opis pohybu.

3.2 Priamočiary pohyb

Obrázok 3.4: Analýza pohybu vlaku.

Aby sme si uľahčili opis pohybu, venujme sa teraz priamočiaremu pohybu vlaku (obr. 3.4 - opis pohybu sa prenesie z roviny x, y iba na priamku, t. j. os x). Bod, v ktorom sa začiatok vlaku nachádzal na začiatku v čase $t = 0\,s$ sme zvolili za začiatok dráhy. *Skúmať pohyb* znamená predovšetkým stanoviť závislosť $x = x(t)$, dráhy od času, prípadne ďalšie charakteristiky, ktoré sú závislé od času. Zaznamenávajme teda polohy vlaku v istých časových intervaloch (napr. $\Delta t = 0,033\,s$) zapisujme ich do tabuľky a znázorníme body so súradnicami t, x a bodmi so súradnicami $(t,\,x)$ preložme súvislú, spojitú čiaru, bez zlomov a skokov. Keďže naše merania nemusia byť celkom presné, snažíme sa, aby preložená krivka prechádzala okolo nameraných bodov čo najbližšie. Tak vytvoríme grafickú závislosť $x = x(t)$. (Dĺžku úseku Δt si môžeme zvoliť ľubovoľne, program Tracker, pomocou ktorého bola urobená prezentovaná analýza nám umožňuje analyzovať pohyb v časových intervaloch $\Delta t = 0,033\,s$ (v závislosti od zosnímaného videa a počtu záberov za $1\,s$)). Tabuľka s hodnotami dvojíc $(x,\,t)$ predstavuje jeden zo spôsobov vyjadrenia fyzikálnej závislosti dráhy od času, $x = x(t)$. Druhý zo spôsobov, akým možno vyjadriť závislosť fyzikálnej veličiny, je grafická závislosť.

Dráha pohybu zvoleného začiatočného bodu vlaku sa v závislosti od času mení, čo vyjadruje aj zmena vektora $\vec{r}(x) = \vec{f}(t)$. Aby sme sa o spôsobe, akým sa poloha vlaku v závislosti od času mení dozvedeli viac, budeme merať zmeny dráhy $\Delta x = \Delta s$ v navzájom rovnakých časových intervaloch Δt. Zmeny dráhy sú vždy kladné, čiže dráha pohybu je veličina, ktorá vždy len narastá. Zmenu dráhy Δs zvykneme nazývať **prírastok dráhy** alebo **dráhový úsek**, ktorý vlak prešiel v časovom intervale Δt. Celková dráha s, ktorú vlak prešiel od začiatku pohybu, je rovná súčtu prírastkov - zmien dráhy Δs v jednotlivých časových intervaloch Δt, ktoré už uplynuli.



Obrázok 3.5: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe v troch rôznych situáciách - vlak sa rozbieha, pohybuje sa rovnomerne a brzdí.

Ako si môžeme všimnúť z analýzy grafu $s = s(t)$, akokoľvek ľubovoľne si zvolíme veľkosť Δt, pri rovnakých zmenách Δt dráha narastie o rovnakú hodnotu Δs (stredný obrázok 3.5). Tento pohyb môžeme charakterizovať ako **pohyb rovnomerný priamočiary**. Hovoríme, že teleso sa pohybuje **rovnomerne**, ak v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových interva-

loch Δt prejde rovnaké dráhy Δs.
Ak teleso v ľubovoľných, ale navzájom rovnakých časových intervaloch Δt prejde rôzne úseky dráhy Δs, hovoríme, že sa pohybuje **nerovnomerným pohybom**. Takým pohybom sa pohybuje napríklad vlak pri rozbiehaní alebo pri brzdení.

Analyzujme teraz pohyb vlaku. Na prvom obrázku 3.5 sa zmeny dráhy Δs, prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt, postupne zväčšujú. Nerovnomerný pohyb pri rozbiehaní vlaku sa nazýva **zrýchlený pohyb**. Na treťom obrázku 3.5 sa zmeny dráhy Δs, prislúchajúce navzájom rovnakým časovým intervalom Δt, postupne zmenšujú. Nerovnomerný pohyb vlaku pri brzdení sa nazýva **spomalený pohyb**.

3.2.1 Rýchlosť a dráha priamočiareho pohybu

Pojem rýchlosť používame v bežnom živote často bez toho, aby sme si uvedomovali, že to je **fyzikálna veličina**. Z praxe vieme, že keď napr. auto prejde určitú vzdialenosť, napr. zo Žiliny do Bratislavy $200\,km$ za dve hodiny, vypočítame jeho rýchlosť tak, keď určíme dráhu, ktorú auto prešlo za jednu hodinu. Inokedy zase odmeriame čas $\Delta t = 10\,s$, za ktorý šprintér, zabehne dráhu $\Delta s = 100\,m$. Každý, kto cestoval autom vie, že na $200\,km$ dlhej ceste sa auto nepohybuje stále rovnako. Na ceste sú úseky, na ktorých sa auto pohybuje rýchlejšie a na iných úsekoch je jeho rýchlosť obmedzená dopravnou značkou. Podobne je to aj so šprintérom. Najprv bol pri štarte v pokoji a až po rozbehu sa mu podarilo dosiahnuť maximálnu rýchlosť.

Rýchlosť, ktorú sme vypočítali pre dvojhodinový pohyb auta alebo pre desaťsekundový beh športovca, nazývame **priemerná veľkosť rýchlosti** a definujeme ju ako podiel celkovej dráhy s a časového intervalu, v ktorom sa daný pohyb uskutočnil:

$$v_p = \frac{s}{t}\ . \tag{3.9}$$

Jednotku rýchlosti v sústave SI určíme podľa známeho predpisu

$$[v_p] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{m}{s} = m \cdot s^{-1}\ .$$

Podľa potreby používame aj iné jednotky rýchlosti, napr. cm/s. Pri opise dopravných situácií zvykneme vyjadrovať rýchlosť v jednotkách kilometer za hodinu (km/h). Pri prepočtoch týchto jednotiek môžeme písať

$$1\frac{km}{h} = \frac{1000\,m}{3600\,s} = 0,277\,\frac{m}{s} \approx 0,28\ m \cdot s^{-1}\ .$$

Pre riešenie každodenných úloh je praktické si pamätať prepočet

$$36\frac{km}{h} = 36\frac{1000\,m}{3600\,s} = 10\,\frac{m}{s} = 10\ m \cdot s^{-1}\ \text{alebo}\ 1\ m \cdot s^{-1} = 3,6\ km \cdot h^{-1}\ .$$

Pod tzv. **priemernou** alebo **strednou rýchlosťou** $\overline{v_p}$ rozumieme podiel posunutia Δs v určitom časovom intervale Δt a dĺžky tohto intervalu.

$$\overline{v_p} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ . \tag{3.10}$$

Priemerná rýchlosť je podľa definície (3.10) závislá od dĺžky časového intervalu, v ktorom ju určujeme a od zmeny dráhy v tomto intervale. Ako sa môžeme presvedčiť z obrázku 3.5, *veľkosť priemernej rýchlosti rovnomerného pohybu sa v závislosti od času nemení.* **Priemerná rýchlosť nerovnomerného pohybu sa v závislosti od času mení.**

Ak sa ale opýtame, ako rýchle sa daný objekt pohybuje, máme na mysli rýchlosť telesa v danom okamihu, to znamená tzv. **okamžitú rýchlosť**. Tú dostaneme z priemernej rýchlosti tak, že budeme časový interval Δt, meraný od okamihu t do okamihu $t + \Delta t$, zmenšovať až k nule. S poklesom hodnoty Δt sa priemerná rýchlosť meraná v intervale $(t,\ t+\Delta t)$ blíži k istej limitnej hodnote, čiže **derivácii vektora posunutia, ktorá definuje rýchlosť v okamihu** t

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.11}$$

Veličiny $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}t$ nazývame **infinitezimálnymi** (nekonečne malými (ale reálnymi)) alebo **elementárnymi**. Ich fyzikálny význam spočíva v tom, že označujú veľmi malé hodnoty alebo zmeny príslušných fyzikálnych veličín. Okamžitá rýchlosť je vektorovou veličinou. **Veľkosť okamžitej rýchlosti** (alebo **veľkosť rýchlosti**) má vždy nezápornú hodnotu a postráda informáciu o smere. To, čo určuje rýchlomer v automobile, predstavuje práve veľkosť rýchlosti.

Ak využijeme poznatky o diferenciálnych operáciách a integrálnom počte, môžeme zo všeobecnej definície rýchlosti (3.11) odvodiť vzťah pre dráhu priamočiareho pohybu hmotného bodu.

V prípade rovnomerného pohybu je rýchlosť $v = v_0$ a keďže veľkosť priemernej rýchlosti sa nemení, možno vzťah (3.10) upraviť do tvaru

$$\Delta s = v_0\,\Delta t\ ,$$

pričom pre celkovú dráhu prejdenú v čase t môžeme písať známy vzťah (za predpokladu, že v čase $t = 0\,s$ bola prejdená dráha nulová)

$$s = v_0\, t\ . \tag{3.12}$$

Pozrime sa teraz na graf závislosti rýchlosti od času a pokúsme sa hľadať isté súvislosti so vzťahom (3.12). Keďže ide o rovnomerný pohyb, grafom závislosti $v = v(t)$ je úsečka v danom časovom intervale. Ak veľkosť rýchlosti v_0 vynásobíme s časom, v ktorom daný pohyb skúmame, dostaneme podľa vzťahu (3.12) prejdenú dráhu a podľa grafu obsah plochy pod grafom závislosti $v = v(t)$. Možno teda konštatovať, že **dráhu, ktorú teleso pri rovnomernom pohybe prejde, určíme ako obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti od času**. Tento významný poznatok je možné zovšeobecniť aj pre nerovnomerné pohyby. Vo všeobecnosti si možno časovú os rozdeliť na menšie časové úseky Δt, v ktorých môžeme priemernú rýchlosť v_i považovať za konštantnú. Hodnotu celkovej prejdenej dráhy s istým priblížením a chybou určíme ako súčet obsahov všetkých obdĺžnikov so stranami Δt a v_i, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i v_i\, \Delta t\ . \tag{3.13}$$

Zmenšovaním intervalov na minimum ($\Delta t \to 0$) sa budeme blížiť k skutočnej hodnote prejdenej dráhy v danom čase, čo môžeme zapísať

$$s = \sum_i \lim_{\Delta t \to 0} v_i \Delta t\ , \tag{3.14}$$

čo je ekvivalentné zápisu pomocou integrálu

$$s = \int \mathrm{d}s = \int v\, \mathrm{d}t\ . \tag{3.15}$$

V prípade rovnomerného pohybu, kedy je rýchlosť stále konštantná, môžeme podľa pravidiel pre integrovanie ju vyňať pred integrál, čím dostaneme

$$s = \int ds = \int v_0\, \mathrm{d}t = v_0 \int \mathrm{d}t = v_0\, t + c\ , \tag{3.16}$$

kde c je integračná konštanta, ktorú vypočítame, ak poznáme prejdenú dráhu v čase $t = 0\,s$. Ak prejdená dráha v čase $t = 0\,s$ bola $s = s_0$, môžeme písať

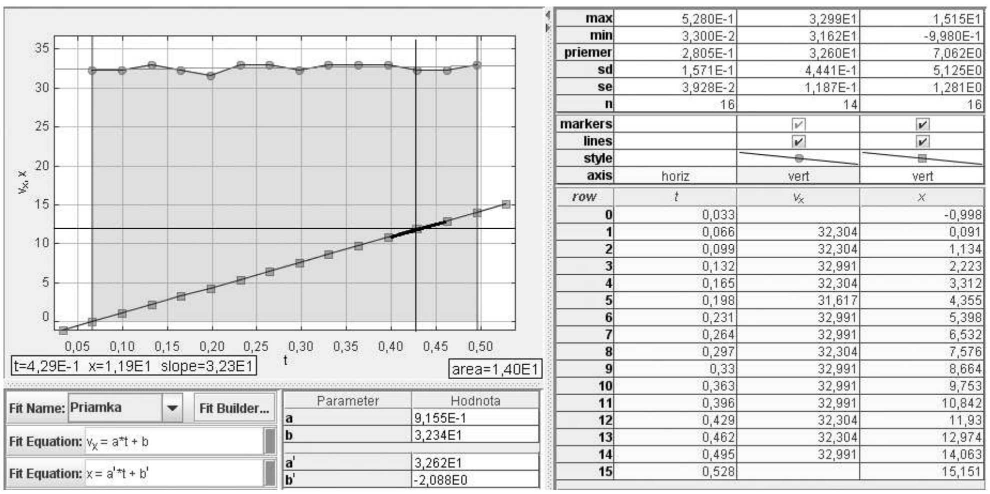
$$s(t = 0\,s) = s_0 = v_0\, 0 + c\ \Rightarrow\ c = s_0\ . \tag{3.17}$$

V konečnom dôsledku po úpravách dostávame vzťah

$$s = v_0 \, t + s_0 \; , \tag{3.18}$$

ktorý je známym vyjadrením dráhy rovnomerného priamočiareho pohybu hmotného bodu. V prípade, že v čase $t = 0 \, s$ bola dráha $s_0 = 0 \, m$, potom vzťah (3.18) prejde na zjednodušený tvar

$$s = v_0 \, t \; . \tag{3.19}$$



Obrázok 3.6: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe z obrázku 3.4.

Ako môžeme vidieť z obrázku 3.6, rýchlosť pohybu vlaku (vyjadrenú na grafe guľôčkami) môžeme považovať za približne konštantnú ($v = 32,3 \; m/s$ z grafickej závislosti, zo štatistiky $v = 32,6 \; m/s$) a pohyb vlaku za rovnomerný priamočiary. Ak teraz porovnáme obsah plochy pod grafom závislosti rýchlosti v časovom intervale od $t_1 = 0,066 \, s$ do $t_{14} = 0,495 \, s$ (čo je hodnota v rámiku area = 14) s prejdenou dráhou v danom časovom intervale ($\Delta s = \Delta x = x_{14} - x_1 = 14,063 \, m - 0,091 \, m = 13,972 \, m \approx 14 \, m$) zistíme, že hodnoty sú navzájom rovnaké. To znamená, že prejdená dráha v danom časovom intervale je rovná obsahu plochy pod krivkou časovej závislosti rýchlosti v tom istom časovom intervale. **Ak teda určíme obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času v ktoromkoľvek časovom intervale, určíme tak dráhu, ktorú teleso v danom časovom intervale prešlo.**

Z analýzy dráhy pohybu vlaku na obrázku 3.6 môžeme usúdiť, že dráha pohybu vlaku sa rovnomerne zvyšovala s časom, čo možno charakterizovať rovnicou v analytickom vyjadrení $x(t) = 32,6\,t - 2,088$. To znamená, že pohyb vlaku je rovnomerný priamočiary s rýchlosťou $v = 32,6\ m/s$ a v čase $t = 0\,s$ bola prejdená dráha $s_0 = -2,088\ m$ (čo súvisí pri danej analýze s posunom vzťažnej sústavy kvôli lepšej analýze rýchlosti). V čase $t_{12} = 0,429\,s$ bola na grafe závislosti dráhy od času urobená dotyčnica ku grafu, ktorej smernica má hodnotu 32,3 (slope = 32,3). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{12} = 0,429\,s) = 32,304\ m/s$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom odpovedajúce. To znamená, že **ak na grafe závislosti dráhy od času určíme v ktoromkoľvek časovom intervale hodnotu smernice dotyčnice, určíme zároveň aj rýchlosť pohybu telesa v danom časovom okamihu**. Matematicky je okamžitá rýchlosť rovná smernici dotyčnice ku grafu funkcie $s = s(t)$.

3.2.2 Zrýchlenie priamočiareho pohybu

Rýchlosť pohybu môže byť stála alebo sa môže meniť. Pohyb, pri ktorom sa rýchlosť mení sa nazýva **zrýchleným**. Keďže rýchlosť je vektor, o zrýchlený pohyb pôjde nielen vtedy, keď sa bude meniť veľkosť rýchlosti, ale aj vtedy, keď sa bude meniť smer rýchlosti. Ako miera pre zmenu rýchlosti za jednotku času sa zavádza **zrýchlenie**.

Priemerné (stredné) zrýchlenie $\overline{a}$ v časovom intervale Δt je definované

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\ . \tag{3.20}$$

Podobne ako pri rýchlosti, tak aj pri zrýchlení dostaneme **okamžité zrýchlenie** tak, že časový interval Δt sa bude približovať k nule

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\ . \tag{3.21}$$

Hovoríme, že **zrýchlenie a sa rovná derivácii rýchlosti podľa času**, čiže v danom okamihu je rovné smernici dotyčnice ku krivke $v(t)$ v bode určenom daným okamihom. Vzhľadom na to, že pri priamočiarom pohybe je rýchlosť rovná derivácii posunutia, dráhy podľa času, môžeme zrýchlenie a určiť tak, že dané posunutie budeme derivovať dvakrát za sebou, čo môžeme vyjadriť takto

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.22}$$

a hovoríme, že **zrýchlenie je rovné druhej derivácii dráhy** $s(t)$ **podľa času**.
Jednotkou zrýchlenia v sústave SI je m/s^2. Zrýchlenie má veľkosť aj smer, je teda vektorovou veličinou.

3.2.3 Rovnomerne zrýchlený pohyb

Často sa stretávame s pohybmi, pri ktorých sa rýchlosť mení rovnomerne, čiže zrýchlenie je konštantné. Takýto pohyb nazývane **rovnomerne zrýchlený**. Príkladom takéhoto pohybu môže byť rozbeh auta, vlaku, ale aj pád telesa (za určitých podmienok pri zanedbaní odporu vzduchu). Obdobným spôsobom, ako v prípade rovnomerného pohybu, môžeme aj v prípade nerovnomerného pohybu určiť v a s zo zrýchlenia a rýchlosti.

Aby sme sa dozvedeli, čo platí pre rýchlosť a dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu, pokúsime sa upraviť niektoré z predchádzajúcich vzťahov (3.21) a (3.22). Úpravou vzťahu (3.21) dostávame

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou oboch strán rovnice dostaneme

$$\int dv = \int a\,\mathrm{d}t\ .$$

Keďže uvažujeme o konštantnom zrýchlení, môžeme ho vyňať pred integrál

$$\int dv = a\int \mathrm{d}t\ ,$$

a matematickou úpravou predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$v = a\,t + c\ , \tag{3.23}$$

kde c je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre rýchlosť častice v čase $t = 0\,s$, kedy je rýchlosť $v_x = v_{0x}$. Dosadením tejto hodnoty do predchádzajúceho vzťahu, ktorý platí pre ľubovoľný okamih dostaneme hodnotu integračnej konštanty c

$$v_0 = v(t = 0) = a\,0 + c = c\ .$$

Získanú hodnotu konštanty c dosadíme do vzťahu (3.23) a dostávame

$$v = v_0 + a\,t\ . \tag{3.24}$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu je zrýchlenie $a > 0$ a pre spomalený pohyb je $a < 0$ a predchádzajúci vzťah prejde na tvar $v = v_0 - a\,t$.
Podobným spôsobom so znalosťou pravidiel pre integračný počet môžeme odvodiť aj vzťah pre dráhu zo vzťahu (3.11). Úpravou tohto vzťahu dostávame

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou tejto rovnice dostaneme

$$\int \mathrm{d}s = \int v\,\mathrm{d}t\ .$$

Z predchádzajúceho výsledku poznáme vzťah pre rýchlosť (3.24), ktorá závisí od času. Jej dosadením za v dostávame

$$\int \mathrm{d}s = \int (v_0 + a\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Využijeme jednu z vlastností integrálov - aditívnosť, t. j. integrál súčtu je rovný súčtu integrálov. Keďže počiatočná rýchlosť v_0 je konštantná, môžeme ju vyňať pred integrál a následne upraviť

$$\int \mathrm{d}s = v_0 \int \mathrm{d}t + a \int t\,\mathrm{d}t\ .$$

Integráciou oboch strán rovníc dostávame

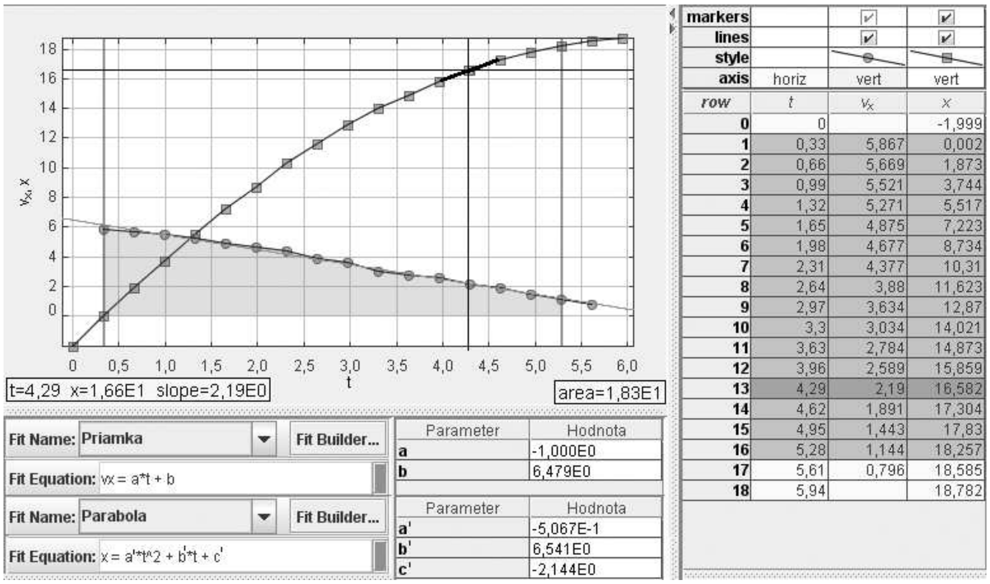
$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 + v_0\,t + c'\ ,$$

kde c' je integračná konštanta, ktorú určíme z počiatočných podmienok pre polohu častice (v čase $t = 0\,s$ je $s = s_0$). Dosadením do predchádzajúceho vzťahu zistíme, že hodnota konštanty $c' = s_0$, čiže predchádzajúca rovnica nadobudne tvar

$$s = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 + s_0\ . \tag{3.25}$$

Pokúsme sa teraz z grafov analyzovať pohyb vlaku pri brzdení (obr. 3.7). Ako si môžeme všimnúť z grafu závislosti rýchlosti od času (guľôčky), pohyb vlaku môžeme považovať za rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -1\ m/s^2$. Analyticky môžeme závislosť rýchlosti vlaku od času vyjadriť rovnicou $v(t) = -1\,t + 6,479$, čo napovedá, že v čase, keď sme začali pohyb analyzovať ($t = 0\,s$) mal vlak rýchlosť $v_0 = 6,479\ m/s$. Obsah plochy pod závislosťou rýchlosti od času nás informuje o tom, že za čas $\Delta t = t_{16} - t_1 = 5,28\,s - 0,33\,s$

prešiel vlak dráhu $s = 18,3\,m$ (area $= 18,3$), čo zodpovedá prejdenej dráhe v čase $\Delta t = 5,28\,s - 0,33\,s = 4,95\,s$ ($\Delta s = \Delta x = x_{16} - x_1 = 18,257\,m - 0,002\,m = 18,255\,m \approx 18,3\,m$).



markers		✔	✔
lines		✔	✔
style			
axis	horiz	vert	vert
row	t	v_x	x
0	0		-1,999
1	0,33	5,867	0,002
2	0,66	5,669	1,873
3	0,99	5,521	3,744
4	1,32	5,271	5,517
5	1,65	4,875	7,223
6	1,98	4,677	8,734
7	2,31	4,377	10,31
8	2,64	3,88	11,623
9	2,97	3,634	12,87
10	3,3	3,034	14,021
11	3,63	2,784	14,873
12	3,96	2,589	15,859
13	4,29	2,19	16,582
14	4,62	1,891	17,304
15	4,95	1,443	17,83
16	5,28	1,144	18,257
17	5,61	0,796	18,585
18	5,94		18,782

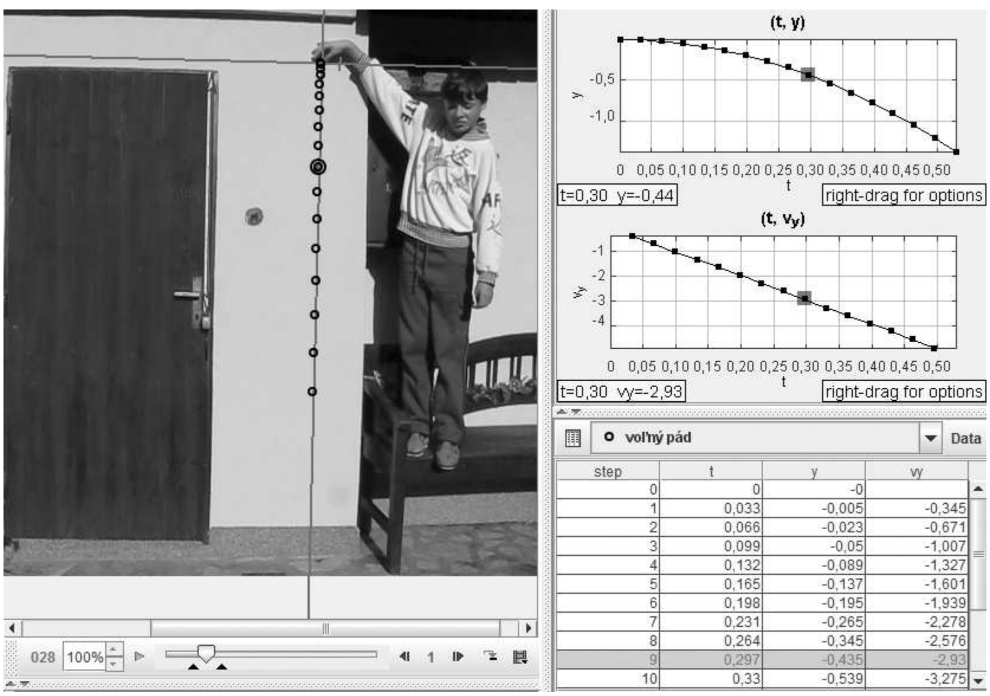
Obrázok 3.7: Analýza pohybu vlaku po priamej dráhe pri brzdení.

Na obrázku 3.7 je taktiež vykonaná analýza závislosti prejdenej dráhy pri brzdení vlaku od času. Z preloženia nameraných hodnôt najvhodnejšou matematickou funkciou (v tomto prípade parabolou), sme získali parametre $a' = 0,5067$, $b' = 6,54$, $c' = -2,144$. (Tomuto postupu zvykneme hovoriť "fitovanie", alebo "fit" funkciou). Ako z matematickej analýzy daného pohybu vyplýva, závislosť dráhy od času pri brzdení vlaku (štvorčeky) môžeme popísať rovnicou $s = -0,5067\,t^2 + 6,54\,t - 2,144 = -\frac{1}{2}\,1,0134\,t^2 + 6,54\,t - 2,144$. Daný pohyb môžeme teda považovať za rovnomerne spomalený so zrýchlením $a = -1,0134\ m/s^2$ a počiatočnou rýchlosťou $v_0 = 6,54\ m/s$ a počiatočnou polohou $s_0 = -2,144\ m$ (čo zodpovedá analýze predchádzajúceho grafu). V čase $t = 0\,s$ bola poloha vlaku $x_0(t_0 = 0\,s) = -1,999\,m$ (hodnota z tabuľky nameraných hodnôt). Ku grafu závislosti dráhy od času v bode, ktorý zodpovedá hodnote $t_{13} = 4,29\,s$ bola vynesená dotyčnica, ktorej smernica má hodnotu $2,19$ (slope $= 2,19$). Ak túto hodnotu porovnáme s hodnotou rýchlosti v danom čase ($v(t_{13} = 4,29\,s) = 2,19\ m/s$), zistíme, že dané hodnoty sú si navzájom zodpovedajúce. Takýmto spôsobom je možno v ktoromkoľvek čase určiť **okamžitú rýchlosť pohybu vlaku ako smernicu dotyčnice ku**

grafu závislosti dráhy od času.

Deriváciou dráhy podľa času dostaneme funkčnú závislosť rýchlosti a naopak, integráciou rýchlosti dostaneme závislosť dráhy ako funkciu času. Vo všeobecnosti, ak je jedna fyzikálna veličina vyjadrená ako derivácia druhej, tak zase druhú je možné získať integrovaním funkčnej závislosti prvej veličiny. Takýto postup sa nevzťahuje len na riešenie pohybov v kinematike, ale sa uplatňuje prakticky pri vzájomných vzťahoch všetkých fyzikálnych veličín.

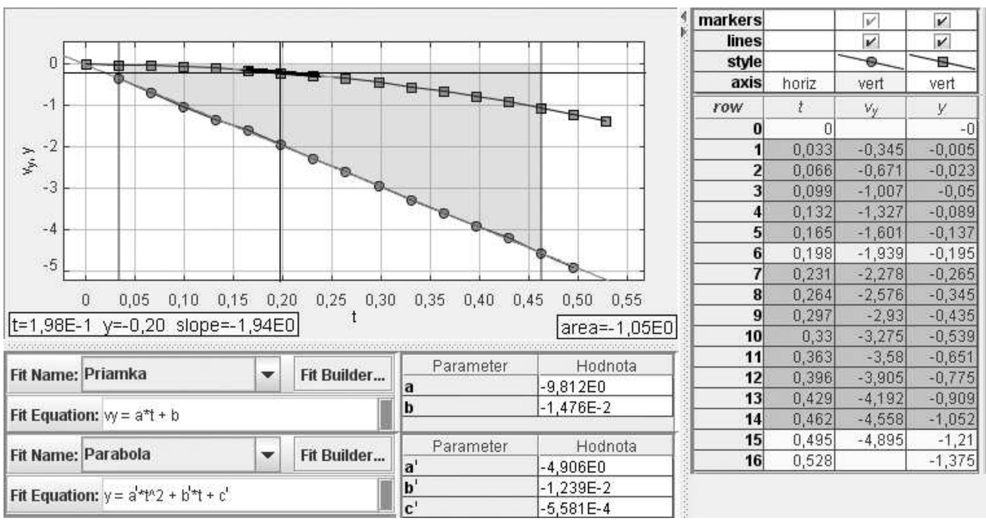
Treba však pripomenúť, že odvodené rovnice (3.24), (3.25) platia iba pre rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb. Symbol s_0 predstavuje dráhu hmotného bodu prejdenú v čase $t = 0\,s$ a rýchlosť v_0 je rýchlosť v čase $t = 0\,s$. V prípade, že zrýchlenie $a = 0\ m/s^2$ potom vzťah (3.25) prejde na tvar (3.18), resp. ak v čase $t = 0\,s$ bola dráha $s_0 = 0\,m$ tak na tvar (3.19), čo sú vzťahy pre rovnomerný priamočiary pohyb hmotného bodu pohybujúceho sa konštantnou rýchlosťou v_0. Tiež, ak zrýchlenie bolo nenulové a počiatočná rýchlosť a dráha bola nulová ($v_0 = 0\ m/s$, $s_0 = 0\,m$), tak dostávame vzťah pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu $s = \frac{1}{2}a\,t^2$.



Obrázok 3.8: Analýza pohybu padajúceho telesa.

Obdobným spôsobom, ako bol analyzovaný pohyb vlaku, môžeme urobiť aj analýzu pohybu padajúceho telesa (obr. 3.8). Keďže padajúca guľôčka sa pohybuje v zápornom smere osi y, hodnoty polohy a rýchlosti v danom smere nadobúdajú záporné hodnoty.

Z analýzy rýchlosti pohybu voľne padajúceho telesa (obr. 3.9) vyplýva, že pohyb voľne pustenej guľôčky môžeme považovať za rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením $a = -9,812\ m/s^2$. Závislosť rýchlosti od času môžeme charakterizovať rovnicou $v(t) = -9,812\,t - 0,01476$, z obsahu plochy pod grafom závislosti rýchlosti od času vyplýva, že prejdená dráha v danom časovom intervale $\Delta t = t_{14} - t_1 = 0,462\,s - 0,033\,s = 0,429\,s$ je $1,05$ metra (resp. $\Delta s = \Delta y = y_{14} - y_1 =\mid -1,052 - (-0,005) \mid= 1,047\,m$ z nameraných dát v tabuľke).



Obrázok 3.9: Analýza rýchlosti pohybu padajúceho telesa.

Závislosť dráhy od času voľne padajúceho telesa (obr. 3.9) môžeme popísať rovnicou $s(t) = y(t) = -4,906\,t^2 - 0,01239\,t - 0,0005581$, čo môžeme prepísať do tvaru $s(t) = y(t) = -\frac{1}{2}\,9,812\,t^2 - 0,01239\,t - 0,0005581$. Pohyb voľne pustenej guľôčky (v krátkom časovom intervale, kedy ešte môžeme zanedbať odpor vzduchu) môžeme opäť podľa predchádzajúcej analýzy považovať za rovnomerne zrýchlený so záporným zrýchlením $a = -9,812\ m/s^2$. Zistením smernice dotyčnice ku grafu závislosti dráhy od času v čase $t_6 = 0,198\,s$, bola určená hodnota okamžitej rýchlosti $v(0,198\,s) = -1,94\ m/s$, čo zodpovedá hodnote určenej z tabuľky $v_{y6} = -1,939\ m/s$.

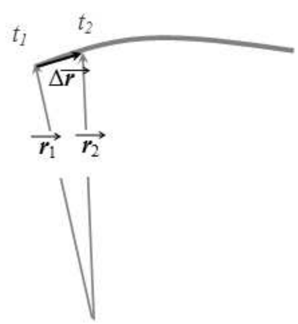
Voľný pád je špeciálnym prípadom pohybu, kde $\vec{a} = \vec{g}$. Pri voľnom páde telesa v blízkosti zemského povrchu sa rýchlosť zvyšuje so stálym zrýchlením $\vec{g}$.

$$1\,g = 9,80665\ m/s^2 \approx 9,81\ m/s^2\ .$$

Táto hodnota bola prijatá ako **normálne tiažové zrýchlenie** na druhej generálnej konferencii pre váhy a miery v roku 1901. Zodpovedá severnej zemepisnej šírke 45° na úrovni mora.

Rovnice popisujúce rovnomerne zrýchlený pohyb platia pre zvislý vrh v blízkosti zemského povrchu (ak je odpor vzduchu zanedbateľný), t. j. do výšok zanedbateľne malých oproti zemskému polomeru, teda $h \ll 6 \times 10^3\ km$. (Viac sa o tomto pohybe dozvieme v kapitole Gravitačné pole.)

3.3 Trojrozmerný pohyb



Obrázok 3.10: Zmenšenie časového intervalu.

Po predchádzajúcej analýze pohybu v jednom smere (na priamke) možno naše úvahy rozšíriť na pohyb, ktorý sa uskutočňuje vo všetkých troch smeroch. Najdôležitejšie pojmy týkajúce sa popisu pohybu budú analogické s tými, ktoré sme odvodili v predchádzajúcich častiach, avšak rozšírené za pomoci vektorovej algebry do všetkých troch smerov priestoru.
Podiel

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_p\ , \tag{3.26}$$

definuje **priemernú rýchlosť** hmotného bodu na úseku z miesta A do miesta B. Z obrázku 3.3 je zrejmé, že nepriamočiara trajektória pohybu hmotného bodu sa vektorom $\Delta\vec{r}$ nedá presne popísať. Pre presnejšie popísanie je nutné časové intervaly skracovať (obr. 3.10). Potom aj vektor $\Delta\vec{r}$ presnejšie popisuje

úsek trajektórie a približuje sa dotyčnici ku krivke trajektórie v mieste jeho počiatku.
Matematicky môžeme zmenšovanie časového intervalu vyjadriť pomocou limity a následnej derivácie polohového vektora podľa času

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \,. \tag{3.27}$$

Rýchlosť $\vec{v}$ je v tomto vyjadrení okamžitou rýchlosťou hmotného bodu v čase t a smer rýchlosti má smer dotyčnice ku trajektórii pohybu. Vzťah (3.27) je analógiou vzťahu (3.11), ale zároveň je jeho zovšeobecnením pre pohyby v trojrozmernom priestore. Zavedené veličiny $\mathrm{d}\vec{r}$ a $\mathrm{d}t$ sú elementárnym vyjadrením polohového vektora a času.

Pre trojrozmerný súradnicový systém s vektorom $\vec{r}$ určeným pomocou troch zložiek (3.1) prejde vzťah pre rýchlosť (3.11) do tvaru

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \,. \tag{3.28}$$

Ak zavedieme veľkosti zložiek vektora rýchlosti pre jednotlivé smery

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\; v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\; v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \,, \tag{3.29}$$

následne dostávame pre celkovú rýchlosť

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k} \,. \tag{3.30}$$

Veľkosť rýchlosti je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \,. \tag{3.31}$$

V prípade pohybu hmotného bodu rýchlosťou v_0 len v jednom smere, napr. v smere osi x sú zložky rýchlosti v ostatných smeroch $v_y = v_z = 0\ m/s$. Potom vo vzťahu (3.28) pre zložku rýchlosti nahrádzame $v_x = v_0$ a zložku vektora x môžeme nahradiť dráhou s. Dostávame tak skalárny vzťah pre rýchlosť priamočiareho pohybu vyjadrený ako deriváciu dráhy podľa času, čo je vzťah (3.11).

Pre priemernú rýchlosť priamočiareho pohybu potom dostaneme vzťah analogický so vzťahom (3.10) s tým, že polohový vektor je nahradený dráhou

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v}_p \,. \tag{3.32}$$

Predpokladajme v ďalšom, že rýchlosť pohybu nezostáva konštantná ako v prípade rovnomerného pohybu, ale sa mení s časom. Takýto pohyb sme označili ako nerovnomerný. Nech sa hmotný bod v čase t_1 pohybuje rýchlosťou v_1 a v čase t_2 rýchlosťou v_2. Pomer zmeny rýchlosti v časovom intervale vyjadruje zrýchlenie už definované vzťahom (3.21). Avšak vzťah (3.21) je opäť definíciou zrýchlenia len pre prípad priamočiareho pohybu. Pre zovšeobecnenie definície zrýchlenia v priestore je potrebné upraviť vzťah pre trojrozmerný súradnicový systém. Ak uvážime trojrozmerný súradnicový systém s vektorom $\vec{r}$ určeným pomocou troch zložiek (3.1), potom zrýchlenie môžeme vyjadriť s využitím vzťahu (3.21) analogicky, ako sme to urobili pre rýchlosť v predchádzajúcej časti

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}\,. \tag{3.33}$$

Ak uvážime vzťahy pre veľkosti zložiek rýchlosti (3.29), tak zrýchlenie je možné vyjadriť ako druhú deriváciu polohového vektora podľa času

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{k}\,. \tag{3.34}$$

Veľkosti zložiek vektora zrýchlenia zavedieme takto

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{3.35}$$

a pre celkové zrýchlenie potom dostávame

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\,. \tag{3.36}$$

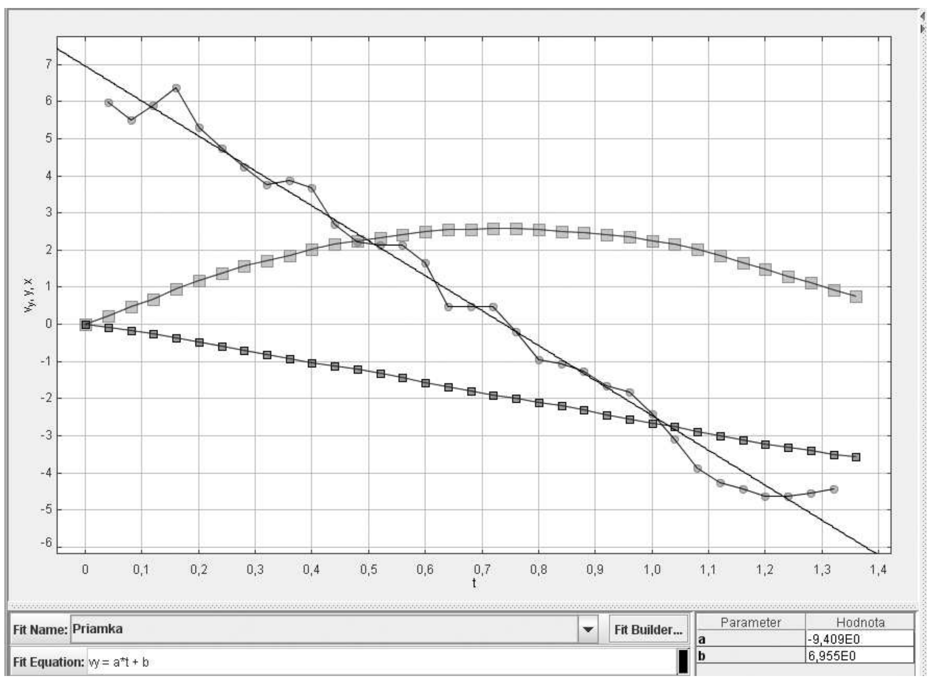
Veľkosť zrýchlenia je určená absolútnou hodnotou

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{3.37}$$

V prípade priamočiareho pohybu orientovaného v smere osi x ostatné zložky zrýchlenia sú nulové a vzťah pre zrýchlenie prejde na skalárny tvar analogický vzťahu (3.21)

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}. \tag{3.38}$$

Vráťme sa ešte na koniec tejto časti k analýze pohybu vodného lúča fontány, ktorý urobíme v rovine x, y (v smere osi z sa daný pohyb nerealizuje). Skúsme teraz spoločne analyzovať pohyb začiatku vodného lúča v týchto dvoch rôznych smeroch - x, y. Ako si môžeme všimnúť zo závislosti $x(t)$ a $y(t)$ (obr. 3.1), pohyb v smere osi x je rovnomerný a v smere osi y je nerovnomerný - na začiatku spomalený a v druhej časti deja zrýchlený. (Prečo je tomu tak, dozvieme sa v ďalších kapitolách pri skúmaní príčin pohybu - v dynamike a pri pohyboch telies v gravitačnom poli Zeme (pôsobiaca sila, ktorá ovplyvňuje pohyb, pôsobí iba v jednom smere). Keďže poloha začiatku vodného lúča v smere osi x rovnomerne klesá (menšie štvorčeky), závislosť polohy x od času môžeme približne charakterizovať rovnicou $x(t) = -2,7\,t + 0,052$, (pre rýchlosť platí $v_x = 2,7\,m/s$, znamienko - hovorí o pohybe v zápornom smere osi x). Poloha vodného lúča v smere osi y najprv narastá, potom sa zmenšuje (väčšie štvorčeky), preto pohyb v tomto smere považujeme za nerovnomerný. Matematickou analýzou ho možno popísať vzťahom $y(t) = -\frac{1}{2}\,9,67\,t^2 + 7,13\,t - 0,0054$,



Obrázok 3.11: Analýza pohybu vodného lúča fontány.

z čoho vyplýva, že zrýchlenie tohto pohybu je konštantné a smeruje dole v zápornom smere osi y, t. j. $a_y = -9,67\ m/s^2 \approx -g$. Rýchlosť pohybu v danom smere možno charakterizovať rovnicou $v_y(t) = 6,96 - 9,41\,t$, pričom z daného vyjadrenia a grafickej závislosti $v_y(t)$ (guľôčky) vyplýva, že pri stúpaní vodného lúča je rýchlosť kladná a zmenšuje sa z rýchlosti približne $v_y(0) \approx 7\ m/s$ až na nulu ($v_y(0,74\,s) = 0\ m/s$) a potom veľkosť (zápornej) rýchlosti narastá.

3.4 Krivočiary pohyb, pohyb po kružnici

V prechádzajúcej časti boli odvodené vzťahy pre prípad rovnomerného a rovnomerne zrýchleného pohybu. Trajektória takéhoto pohybu bola časť priamky. Tieto vzťahy boli potom zovšeobecnené na pohyb v priestore s použitím vektorového zápisu. Ak zavedieme jednotkový vektor $\vec{\tau}$ orientovaný v smere dotyčnice ku krivke, môžeme potom rýchlosť vyjadriť ako skalárny násobok veľkosti rýchlosti v a jednotkového vektora $\vec{\tau}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = v\,\vec{\tau}\,. \tag{3.39}$$

Analýzou vzťahu (3.39) podľa skalárnej veličiny v dostávame nasledujúce druhy pohybov podľa veľkosti rýchlosti:

- $v =$ konštanta, $\Rightarrow$ rovnomerný pohyb,
- $v \neq$ konštanta, $\Rightarrow$ nerovnomerný pohyb,

a rozborom z pohľadu vektora $\vec{\tau}$ vystihujúceho smer pohybu dostávame ďalšie rozdelenie:

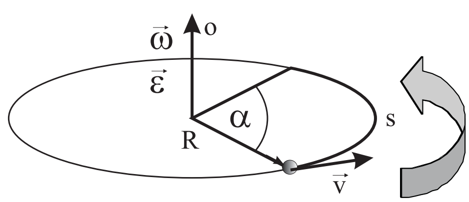
- $\vec{\tau} =$ konštanta, $\Rightarrow$ priamočiary pohyb,
- $\vec{\tau} \neq$ konštanta, $\Rightarrow$ krivočiary pohyb

Kombináciou týchto možností získame štyri základné druhy pohybu, rovnomerný priamočiary, rovnomerný krivočiary, nerovnomerný priamočiary, nerovnomerný krivočiary. Na popis priamočiarych pohybov vystačíme s jednorozmerným súradnicovým systémom, kým v prípade krivočiarych pohybov je potrebný popis s dvoma súradnicami pre pohyby v rovine, resp. troma súradnicami pre pohyby v priestore. Predmetom tejto kapitoly bude rozbor z pohľadu smeru pohybu.

Veľká variabilita krivočiarych pohybov neumožňuje univerzálnym spôsobom popísať všetky krivočiare pohyby, a preto sa v tejto kapitole naša pozornosť zúži len na špeciálny prípad krivočiareho pohybu, konkrétne prípad pohybu po kružnici, ktorý taktiež nazývame **otáčavý** alebo **rotačný pohyb**. Analogicky s priamočiarym pohybom (patrí medzi **posuvné (translačné) pohyby**), ktorý je charakterizovaný polohovým vektorom $\vec{r}$, rýchlosťou $\vec{v}$ a zrýchlením $\vec{a}$ môžeme aj pohyb po kružnici charakterizovať orientovaným uhlom $\vec{\alpha}$, vektorom uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ a vektorom uhlového zrýchlenia $\vec{\varepsilon}$. Kým v prípade priamočiareho pohybu sme mohli s dráhou, rýchlosťou a zrýchlením pracovať ako so skalárnymi veličinami, tak v prípade pohybu po kružnici sú spomínané veličiny vektormi.

Uvažujme teraz o pohybe hmotného bodu, ktorý sa otáča okolo pevnej osi (obr. 3.12). Každý bod kružnice opisuje pri otáčavom pohybe za daný čas rovnaký uhol. (Naproti tomu pri posuvnom pohybe všetky body telesa sa pohybujú po trajektóriách rovnakého tvaru, napr. po priamkach pri priamočiarom pohybe a v danom časovom intervale prejdú rovnakú vzdialenosť.) Uhol α predstavuje uhol, ktorý opíše sprievodičom rotujúceho hmotného bodu so stredom kruhovej trajektórie za čas t. Ak poznáme dĺžku oblúka s opísaného sprievodičom hmotného bodu, ktorú hmotný bod za čas t urazil a polomer kružnice, po ktorej sa pohybuje je R, pre veľkosť uhla α platí

$$\alpha = \frac{s}{R} \; . \tag{3.40}$$



Obrázok 3.12: Pohyb po kružnici s charakterizáciou základných veličín.

Hodnoty takto definovaného uhla sa udávajú v oblúkovej miere, t. j. v radiánoch (rad). Niekedy sa však môžeme stretnúť aj so zadaním uhla v stupňoch alebo otáčkach, pričom platí prevod

$$1\,\text{otáčka} = 360^\circ = \frac{2\,\pi\,R}{R} = 2\,\pi\,\text{rad} \; , \tag{3.41}$$

odtiaľ potom dostávame

$$1\,\text{rad} = 57,3^\circ = 0,159\,\text{otočky} \; . \tag{3.42}$$

Ak teraz chceme skúmať otáčavý pohyb, znamená to skúmať časovú závislosť uhla otočenia hmotného bodu, čiže $\alpha = \alpha(t)$. Ak sa uhol otočenia hmotného bodu v čase t mení z hodnoty $\alpha_1(t_1)$ na hodnotu $\alpha_2(t_2)$, potom pod **otočením** hmotného bodu v čase $t = t_2 - t_1$ rozumieme v danom časovom intervale veličinu $\Delta\alpha$, ktorá je definovaná vzťahom

$$\Delta\alpha(t) = \alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1) \ . \tag{3.43}$$

Otočenie $\Delta\alpha$ rotujúceho hmotného bodu nadobúda kladné hodnoty, ak sa daný bod otáča v smere rastúceho uhla, t. j. proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Pri otáčaní v smere klesajúcich hodnôt uhla otočenia nadobúda záporné hodnoty. (Otočenie v zmysle vektorovej algebry nie je vektorovou veličinou, pretože skladanie otočení nie je komutatívne (pri zmene poradia dvoch otočení knihy o uhol 90° v rôznych smeroch nedostaneme knihu do tej istej polohy). Pri infinitezimálnych (nekonečne malých) otočeniach $\mathrm{d}\alpha$ však môže byť pokladané za vektorovú veličinu.)

Nech v čase t_1 je uhol otočenia hmotného bodu α_1 a v čase t_2 je uhol otočenia α_2. **Priemerná uhlová rýchlosť** hmotného bodu v časovom intervale $\Delta t = t_2 - t_1$ je definovaná vzťahom

$$\overline{\omega} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \ , \tag{3.44}$$

kde $\Delta\alpha$ predstavuje otočenie hmotného bodu v časovom intervale Δt.

Okamžitá uhlová rýchlosť ω je limitou priemernej uhlovej rýchlosti vyjadrenej vzťahom (3.44) pri zmenšovaní veličiny Δt k nulovej hodnote, t. j.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.45}$$

Jednotkou uhlovej rýchlosti je rad/s (alebo $1\,s^{-1}$, prípadne otáčky/s). V prípade, že uhlová rýchlosť rotujúceho bodu nie je konštantná, daný bod má nenulové uhlové zrýchlenie. Ak uhlová rýchlosť v čase t_1 je ω_1 a v čase t_2 je ω_2, potom **priemerné uhlové zrýchlenie** hmotného bodu v časovom intervale Δt je definované vzťahom

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \ , \tag{3.46}$$

kde $\Delta\omega$ predstavuje zmenu uhlovej rýchlosti hmotného bodu v danom časovom intervale Δt. **Okamžité uhlové zrýchlenie** ε je limitou priemerného uhlového zrýchlenia pri zmenšovaní Δt k nulovej hodnote, t. j.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.47}$$

Jednotkou uhlového zrýchlenia je rad/s^2 (alebo $1\,s^{-2}$, prípadne otáčky/s^2).

Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie sú vektorové veličiny, to znamená, že vzťahy (3.45) a (3.47) môžeme zapísať aj vo vektorovom tvare, pričom orientácia vektorov $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ je totožná a je určená podľa pravidla pravej ruky (obr. 3.12). Vektory majú smer kolmý na rovinu danú pohybom s orientáciou nahor, resp. nadol v závislosti od smeru pohybu hmotného bodu.

Okrem týchto veličín môže byť pohyb po kružnici popísaný aj pomocou obvodovej rýchlosti $\vec{v}$. Smer vektora obvodovej rýchlosti je dotyčnica ku kružnici v danom mieste, čiže sa nachádza v rovine kružnice.

Podobným spôsobom ako v prípade priamočiareho pohybu môžeme odvodiť vzťah pre uhol a uhlovú rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. V takom prípade je zrýchlenie ε konštantné, smery vektorov uhlového zrýchlenia a uhlovej rýchlosti sú zhodné a vzťah (3.47) sa dá prepísať takto

$$\mathrm{d}\omega = \varepsilon\,\mathrm{d}t\ . \tag{3.48}$$

Uhlová rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu je potom po zintegrovaní vzťahu (3.48) daná zápisom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t\ . \tag{3.49}$$

V prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je zrýchlenie $\varepsilon > 0$ a pre spomalený pohyb je $\varepsilon < 0$. Pre vyjadrenie opísaného uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici využijeme základný vzťah pre vyjadrenie uhla (3.45) a použijeme odvodený vzťah (3.49). Následne dostaneme

$$\int \mathrm{d}\alpha = \int (\omega_0 + \varepsilon\, t)\,\mathrm{d}t\ ,$$

a ďalším zintegrovaním dostávame pre uhol rovnomerne zrýchleného pohybu vzťah

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\varepsilon\, t^2\ . \tag{3.50}$$

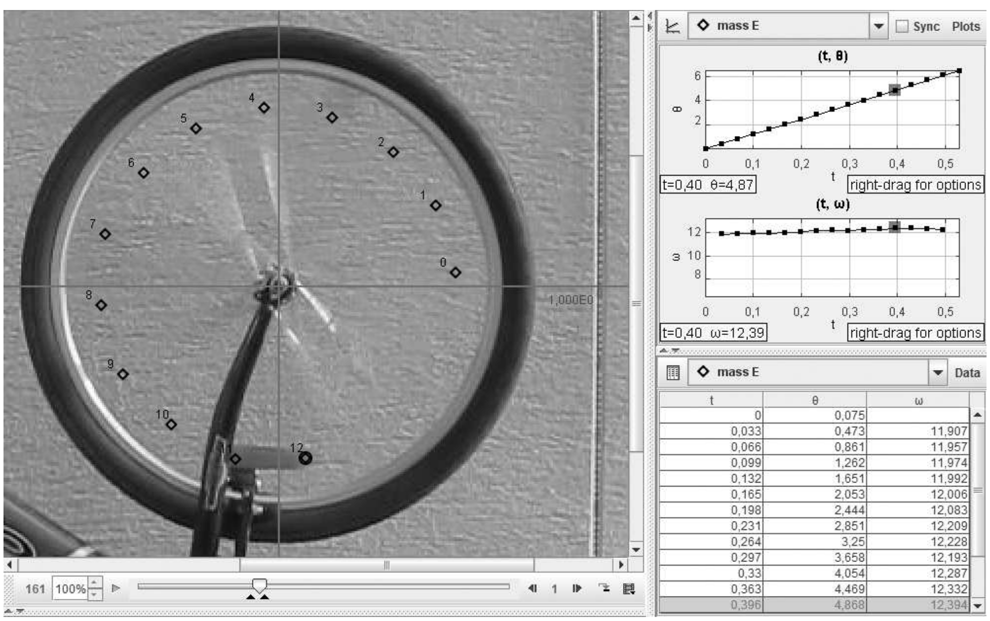
Tento vzťah je všeobecným vyjadrením uhla rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici. Symboly α_0 a ω_0 predstavujú uhol natočenia a uhlovú rýchlosť v čase $t = 0\,s$. Vo všetkých predchádzajúcich vzťahoch je vidieť analógiu veličín a vzťahov s priamočiarym pohybom, na čo poukazuje aj tabuľka 3.1.

Pokúsme sa teraz spoločne tak ako v predchádzajúcej časti analyzovať pohyb hmotného bodu po kružnici. Na obrázku 3.13 je zaznamenaný pohyb odrazového sklíčka na kolese bicykla. Matematickou analýzou grafov daných

Tabuľka 3.1: Analógia veličín a vzťahov pre pohyb po kružnici a priamočiary pohyb

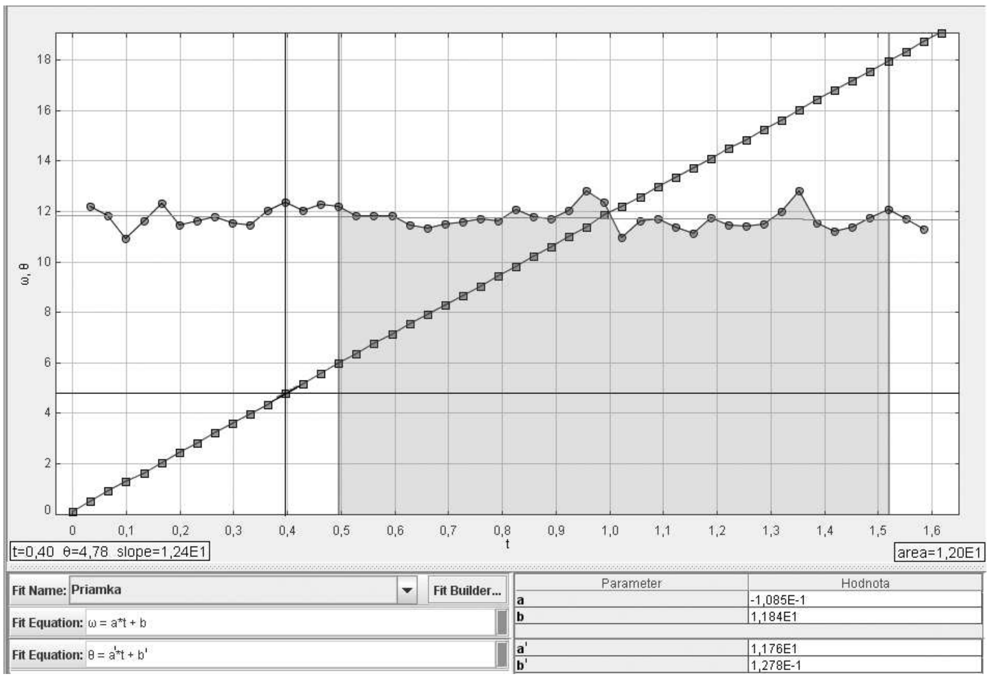
Pohyb po kružnici	Priamočiary pohyb
$\vec{\alpha}$	$\vec{r}\,(s)$
$\vec{\omega}$	$\vec{v}$
$\vec{\varepsilon}$	$\vec{a}$
$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$
$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t$	$v = v_0 + a\, t$
$\alpha = \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, t^2$	$s = v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$
$\alpha = \alpha_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\,\varepsilon\, t^2$	$s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$

pohybov (obr. 3.14) môžeme usúdiť s istou presnosťou, že ide o rovnomerný otáčavý pohyb. Z analýzy vyplynulo, že veľkosť priemernej uhlovej rýchlosti je $\omega = 11,8\ rad/s$. Uhol otočenia v čase t môžeme popísať rovnicou $\alpha = \theta = 11,8\,t + 0,127$. Obdobnou analýzou ako v predchádzajúcom prípade analýzy priamočiarych pohybov môžeme určiť uhol otočenia v istom časovom okamihu ako obsah plochy pod grafom závislosti uhlovej rýchlosti v danom časovom okamihu (obr. 3.14 - obsah vyznačenej plochy je $12\,rad$, čo zodpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta\alpha = \Delta\theta = (18-6)\,rad = 12\,rad$.)



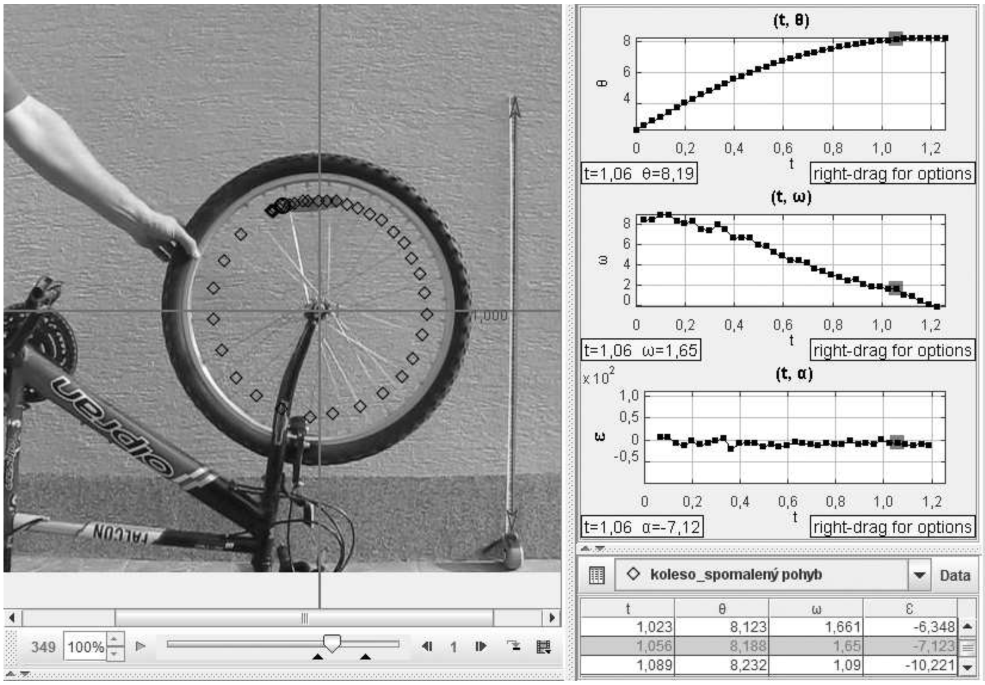
Obrázok 3.13: Analýza pohybu odrazového sklíčka na kolese bicykla.

Analýzou grafu závislosti uhla otočenia od času možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (obr. 3.14 - v čase $t = 0,40\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $12,4\ rad/s$, čo zodpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z meraní: $\omega(0,40\,s) = 12,385\ rad/s$).

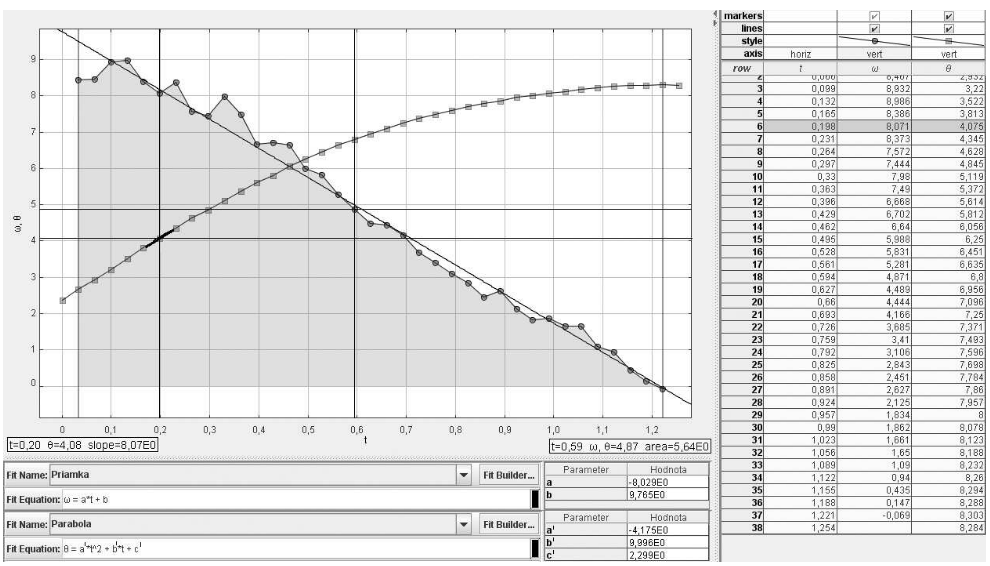


Obrázok 3.14: Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času a ich fit priamkou.

Na obrázku 3.15 je znázornená analýza pohybu odrazového sklíčka na kolese bicykla pri jeho brzdení. Detailnejšou analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 3.16), že ide o rovnomerne spomalený otáčavý pohyb, ktorý možno popísať rovnicami $\omega(t) = -8,029\,t + 9,765$ a $\alpha(t) = \theta(t) = -\frac{1}{2}\,8,35\,t^2 + 9,996\,t + 2,299$, pričom veľkosť uhlového spomalenia je približne rovná $\varepsilon \approx 8\ rad/s^2$ a uhlová rýchlosť na začiatku brzdenia kolesa mala hodnotu približne $\omega \approx 10\ rad/s$. Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť uhlovú rýchlosť ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode (obr. 3.16 - v čase $t = 0,20\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $8,07\ rad/s$, čo zodpovedá uhlovej rýchlosti v danom čase určenej z tabuľky ($\omega(0,20s) = 8,071\ rad/s$)).



Obrázok 3.15: Analýza pohybu odrazového sklíčka pri brzdení kolesa.



Obrázok 3.16: Grafy závislosti uhlovej rýchlosti (guľôčky) a uhla otočenia (štvorčeky) od času.

Uhol otočenia v danom časovom intervale bol určený ako obsah plochy pod krivkou závislosti uhlovej rýchlosti na čase (obr. 3.16) - obsah vyznačenej plochy je $5,64\,rad$, čo zodpovedá uhlu otočenia vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{37} - t_1 = 1,221\,s - 0,033\,s = 1,188\,s$: $\Delta\alpha = \Delta\theta = \theta_{37} - \theta_1 = 8,303\,rad - 2,661\,rad = 5,642\,rad$).

3.4.1 Vzťah obvodovej a uhlovej rýchlosti

Na odvodenie vzťahu, ktorý vyjadruje vzájomný súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou, použijeme základnú definíciou uhlovej rýchlosti (3.45) a súvis medzi opísaným uhlom α a prejdenou dráhou, ktorú v tomto prípade predstavuje oblúk s (3.40).
Dosadením rovnosti (3.40) za α do vzťahu (3.45) dostávame

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{s}{R}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\,, \tag{3.51}$$

kde $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ je už známa definícia okamžitej rýchlosti posuvného pohybu. Po dosadení dostávame vzťah medzi uhlovou a obvodovou rýchlosťou v skalárnom tvare

$$\omega = \frac{v}{R}\,. \tag{3.52}$$

(Ešte elegantnejšie je možné dopracovať sa k tomuto vzťahu priamo deriváciou vzťahu (3.40) podľa času, čo už ponechávame na samotnom čitateľovi.)
Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že aj keď sa všetky časti telesa otáčajúceho sa okolo vlastnej osi otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou, častice telesa, ktoré obiehajú vo väčšej vzdialenosti R od osi otáčania, pohybujú sa aj väčšou obvodovou rýchlosťou v. Predchádzajúci vzťah však nevystihuje smer rýchlostí, hovorí iba o veľkosti obvodovej rýchlosti. Smer vektorov vyplýva priamo z obrázku 3.12. Vo vektorom tvare je výsledný vzťah charakterizujúci súvis medzi obvodovou a uhlovou rýchlosťou daný zápisom

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}\,. \tag{3.53}$$

Z daného vzťahu vyplýva, že zmenou smeru pohybu hmotného bodu po kružnici v opačnom smere ako je načrtnuté na obrázku 3.12 sa zmení aj smer vektora uhlovej rýchlosti smerom nadol.

3.4.2 Perióda a frekvencia rovnomerného pohybu po kružnici

V prípade rovnomerného otáčavého pohybu telesa po kružnici stálou uhlovou rýchlosťou je podľa vzťahu (3.52) časovo nepremenná i obvodová rýchlosť každej častice telesa. Vtedy vykoná každý hmotný bod telesa jeden obeh po kružnici za rovnaký časový interval. **Čas, za ktorý vykoná hmotný objekt jeden obeh po kružnici rovnomerným pohybom sa nazýva perióda (T).** Doba obehu je pre všetky častice otáčajúceho sa telesa rovnaká. Jednotkou periódy je $1\,s$. Perióda je vyjadrená vzťahom

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v}\,, \tag{3.54}$$

z ktorého je zrejmé, že je podielom dĺžky kruhovej trajektórie hmotného bodu ($2\,\pi\,R$) a jej obvodovej rýchlosti v. Po dosadení vzťahu (3.52) do tejto rovnice dostaneme

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}\,. \tag{3.55}$$

Okrem periódy sa pre rovnomerné pohyby po kružnici zavádza aj ďalšia fyzikálna veličina **frekvencia** (f). **Frekvencia je definovaná ako počet obehov hmotného bodu rovnomerným pohybom po kružnici za jednotku času**. Matematicky je vyjadrená ako prevrátená hodnota periódy

$$f = \frac{1}{T}\,. \tag{3.56}$$

Jednotkou frekvencie je $1\,s^{-1} = 1\,Hz$ (hertz). Pomocou týchto zavedených veličín je možné vyjadriť uhlovú rýchlosť. Keďže perióda a frekvencia popisujú zväčša rovnomerné pohyby, tak aj vzťah pre uhlovú rýchlosť (3.45) sa môže zjednodušiť

$$\omega = \frac{\alpha}{t}\,. \tag{3.57}$$

Jeden obeh po kružnici zodpovedá uhlu $\alpha = 2\,\pi$ a čas $t = T$. Po dosadení vzťah (3.57) prejde na tvar

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}\,, \tag{3.58}$$

alebo po dosadení vzťahu (3.56) na tvar

$$\omega = 2\,\pi\,f\,. \tag{3.59}$$

3.4.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

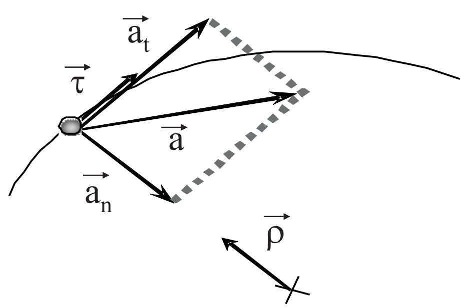
Podľa základnej definície zrýchlenia v priestore (3.33) je zrýchlenie vektorová veličina vyjadrená ako časová zmena vektora rýchlosti. Ak dôjde k časovej zmene rýchlosti je potom zrýchlenie nenulové. Táto zmena rýchlosti môže byť reprezentovaná buď zmenou jej veľkosti alebo jej smeru. V predchádzajúcej kapitole sme analyzovali priamočiary pohyb, pričom sme neuvažovali o zmene smeru rýchlosti. V prípade pohybu po kružnici sa však táto zmena smeru rýchlosti nedá zanedbať. Zmenu smeru rýchlosti bude popisovať **normálové (radiálne) zrýchlenie** $\vec{a}_n$ a zmenu jej veľkosti **tangenciálne zrýchlenie** $\vec{a}_t$.

Ich orientáciu na kružnici znázorňuje obrázok 3.17. Kým vektor tangenciálneho zrýchlenia $\vec{a}_t$ je dotyčnicou ku kruhovej trajektórii pohybu v danom mieste, tak vektor normálového zrýchlenia $\vec{a}_n$ má smer do stredu kružnice. Celkové zrýchlenie potom môžeme vyjadriť ako vektorový súčet obidvoch zrýchlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \ , \tag{3.60}$$

alebo v prípade určenia len veľkosti celkového zrýchlenia

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \ , \tag{3.61}$$



Obrázok 3.17: Náčrt tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia.

Odvoďme teraz vzťahy pre tangenciálne a normálové zrýchlenie, pričom využijeme všeobecnú definíciu zrýchlenia v priestore (3.33) a použijeme prepis vektora rýchlosti ako súčin veľkosti rýchlosti vyjadrenej skalárom v a smeru charakterizovanom jednotkovým vektorom (3.39)

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\,\vec{\tau})}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.62}$$

Podľa pravidiel pre derivovanie súčinu je možné upraviť predchádzajúci vzťah (3.62) na nasledujúci tvar

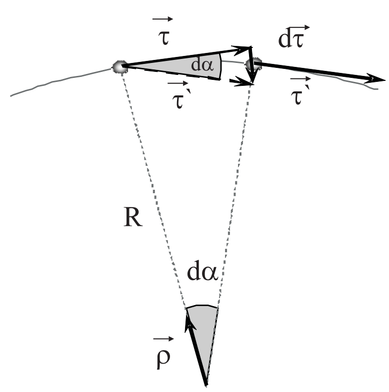
$$\vec{a} = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3.63}$$

Prvá časť vzťahu (3.63) charakterizuje zmenu veľkosti rýchlosti, a teda predstavuje tangenciálnu zložku zrýchlenia, pričom za rýchlosť môžeme dosadiť vzťah (3.52), ε predstavuje uhlové zrýchlenie. Druhá časť vyjadruje zmenu smeru rýchlosti a predstavuje normálovú zložku zrýchlenia

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\,\vec{\tau} = R\,\frac{d\omega}{dt}\,\vec{\tau} = R\,\varepsilon\,\vec{\tau}\,, \tag{3.64}$$

$$\vec{a}_n = v\,\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{3.65}$$

Určenie tangenciálneho zrýchlenia podľa vzťahu (3.64) je potom analogické určeniu zrýchlenia priamočiareho pohybu. Zložitejšie je určenie normálovej zložky zrýchlenia podľa vzťahu (3.65), kde je potrebné podrobnejšie rozanalyzovať zmenu smeru. Na tento účel využijeme náčrt na obrázku 3.18.



Obrázok 3.18: Analýza pohybu bodu po kružnici - k odvodeniu normálového zrýchlenia.

Pre vyjadrenie zmeny smeru rýchlosti budeme charakterizovať smer rýchlosti v krátkom časovom intervale vektorom $\vec{\tau}$ na začiatku časového intervalu a smer rýchlosti vektorom $\vec{\tau}'$ na konci časového intervalu. Zmena smeru je potom vyjadrená rozdielom týchto vektorov

$$\mathrm{d}\vec{\tau} = \vec{\tau}' - \vec{\tau}\,. \tag{3.66}$$

Ramená spájajúce stred kružnice s polohami hmotného bodu zvierajú uhol $\mathrm{d}\vec{\alpha}$. Ten istý uhol je možné nájsť v trojuholníku, ktorý tvoria vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\tau}'$. Pre malé uhly platí

$$|\mathrm{d}\vec{\tau}| = |\mathrm{d}\vec{\alpha}| \,. \tag{3.67}$$

Po dosadení za uhol α zo vzťahu (3.67) dostávame

$$|\mathrm{d}\vec{\tau}| = \frac{\mathrm{d}s}{R} \,. \tag{3.68}$$

Z obrázku 3.18 je zrejmé, že smer vektora $\mathrm{d}\vec{\tau}$ je opačný k smeru jednotkového vektora $\vec{\rho}$. Vektor $\mathrm{d}\vec{\tau}$ potom môžeme vyjadriť nasledujúco

$$\mathrm{d}\vec{\tau} = -\frac{\mathrm{d}s}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.69}$$

Do vzťahu pre normálové zrýchlenie (3.65) dosadíme vzťah (3.69) a po úprave dostaneme

$$\vec{a}_n = -\frac{v}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\rho} = -\frac{v^2}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.70}$$

Pre celkové zrýchlenie s dosadením vzťahov pre tangenciálne zrýchlenie (3.64) a normálové zrýchlenie (3.70) dostávame

$$\vec{a} = \frac{dv}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} - \frac{v^2}{R}\vec{\rho} \,. \tag{3.71}$$

Vzťah (3.71) je vyjadrením celkového zrýchlenia hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici s polomerom R. V prípade rovnomerného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie nulové a normálové zrýchlenie konštantné. A zase v prípade rovnomerne zrýchleného pohybu po kružnici je tangenciálne zrýchlenie konštantné a normálové zrýchlenie narastá s druhou mocninou obvodovej rýchlosti.