4 Dynamika hmotného bodu

V predchádzajúcej kapitole - kinematike hmotného bodu sme sa zaoberali pohybom a pokojom telies, čiže formou pohybu. Neriešili sme príčiny vzniku pohybu hmotného bodu. A práve štúdiom týchto otázok sa zaoberá časť mechaniky - dynamika (z gréckeho **dynamis -** sila). V tejto časti sa oboznámime s klasickou - newtonovskou mechanikou, ktorej zákony platia pre telesá pohybujúce sa rýchlosťami oveľa menšími, ako je rýchlosť svetla vo vákuu (čiže rýchlosťami menej ako $3 \times 10^8\, m/s$). Pri rýchlostiach blízkych rýchlosti svetla musíme newtonovskú mechaniku nahradiť Einsteinovou teóriou relativity platnou pre všetky rýchlosti telies. Taktiež v oblasti mikrosveta (pohyb elektrónov v atóme) je potrebné zameniť newtonovskú mechaniku kvantovou mechanikou. Dnes je newtonovská mechanika chápaná ako špeciálny prípad týchto všeobecných teórií avšak veľmi významný, pretože je použiteľná pre štúdium pohybu telies v obrovskom rozsahu ich veľkostí, od objektov veľmi malých, od hranice atómovej štruktúry až po astronomické objekty.

Vzájomné pôsobenie telies (interakcia) sa môže uskutočňovať napr. pri vzájomnom styku telies alebo prostredníctvom fyzikálnych polí (gravitačného, elektrického, magnetického). Toto vzájomné pôsobenie telies alebo telies a polí charakterizuje vektorová fyzikálna veličina **sila** – $\vec{F}$. Výsledkom vzájomného silového pôsobenia telies môže byť deformácia týchto telies alebo zmena ich pohybového stavu. Teleso, ktoré je v dostatočnej vzdialenosti od všetkých ostatných telies a nepôsobí na neho žiadne pole (nie je v žiadnom vzájomnom pôsobení s iným fyzikálnym objektom) nazývame **izolované teleso** (prípadne, ak zanedbávame rozmery telesa hovoríme o **izolovanom hmotnom bode**). Ako izolované sa správajú všetky telesá, pri ktorých je silové pôsobenie ostatných telies vykompenzované.

Vzťažné sústavy, v ktorých izolované hmotné body zotrvávajú v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe sa nazývajú **inerciálne vzťažné**

sústavy. Zmenu pohybového stavu telies môže v nich spôsobiť len ich vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Vzťažné sústavy, v ktorých zmena pohybového stavu telies môže nastať bez ich vzájomného pôsobenia s ostatnými objektmi sa nazývajú **neinerciálne vzťažné sústavy**. V mnohých prípadoch môžeme s dostatočnou presnosťou za inerciálnu považovať vzťažnú sústavu spojenú s povrchom Zeme. Odchýlky od vlastností inerciálnej vzťažnej sústavy spôsobené rotáciou Zeme, pôsobením Slnka, Mesiaca a pod. môžeme pozorovať iba pri niektorých dlhotrvajúcich dejoch. Ešte viac sa bude k inerciálnej vzťažnej sústave približovať vzťažná sústava, ktorá má začiatok v strede Zeme a osi orientované k vhodným hviezdam (geocentrická sústava), prípadne vzťažná sústava spojená so stredom Slnka (heliocentrická sústava). Vždy možno nájsť reálnu vzťažnú sústavu, ktorá bude s dostatočnou presnosťou spĺňať vlastnosti inerciálnej vzťažnej sústavy a umožní čo najjednoduchší opis a vysvetlenie fyzikálnych dejov.

Všetky inerciálne vzťažné sústavy sú si navzájom rovnocenné. Buď sa navzájom pohybujú rovnomerným priamočiarym pohybom alebo sú v pokoji, pričom nie je možné žiadnym pokusom v inerciálnej vzťažnej sústave určiť, či je daná sústava v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. V prípade niektorých fyzikálnych veličín namerajú pozorovatelia v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách tie isté hodnoty. Takýmito **invariantnými veličinami** v newtonovskej mechanike sú **sila**, **hmotnosť**, **zrýchlenie** a **čas**. Iné fyzikálne veličiny, ako napr. **rýchlosť**, majú pre pozorovateľa v rôznych inerciálnych vzťažných sústavách rôzne hodnoty (pre jedného pozorovateľa nachádzajúceho sa v inerciálnej vzťažnej sústave pohybujúcej sa rýchlosťou $\vec{v}$ je určitý objekt v pokoji, pre iného pozorovateľa v inej sústave sa ten istý objekt pohybuje napr. rýchlosťou $\vec{v}$). Vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách však platí **princíp invariantnosti**: **Fyzikálne zákony vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách majú rovnaký tvar.**

Z tohto princípu vyplýva, že voľba vzťažnej sústavy nemôže ovplyvniť platnosť fyzikálnych zákonov. Princíp invariantnosti hovorí, že dvaja rôzni pozorovatelia, ktorí budú študovať tú istú udalosť v dvoch rôznych inerciálnych sústavách musia dôjsť k záveru, že príroda funguje pre oboch rovnako. Aj keď hodnoty napr. práce a kinetickej energie namerané rôznymi pozorovateľmi sa budú líšiť, vzťah medzi prácou a kinetickou energiou bude v oboch vzťažných sústavách rovnaký.

4.1 Newtonove pohybové zákony, impulz sily, moment sily

Predtým, než Newton[1] sformuloval svoju mechaniku, prevládal názor (Aristoteles), že pre udržanie telesa v pohybe stálou rýchlosťou je potrebné nejaké pôsobenie (napr. ťahom alebo tlakom), t. j. "sila", lebo inak sa teleso zastaví. Úvaha sa zdá byť celkom rozumná, pretože ak napr. uvedieme hokejový puk do kĺzavého pohybu po drevenej podlahe, bude naozaj spomaľovať, až sa nakoniec zastaví. Ak chceme docieliť, aby sa puk po podlahe kĺzal stálou rýchlosťou, musíme ho neustále tlačiť alebo ťahať. Ak by sme však vymenili drevenú podlahu za ľadovú plochu, puk by sa kĺzavým pohybom dostal do väčšej vzdialenosti a potom by sa zastavil. Ak by sme však urobili ľadovú plochu dokonale hladkou, puk by sa po nej pohyboval bez toho, aby spomaľoval. Dospeli sme teda k záveru, že na udržanie stálej rýchlosti pohybu telesa nepotrebujeme silu. Pre zjednodušenie nebudeme uvažovať o otáčavom pohybe a budeme pracovať výlučne s modelom hmotného bodu. Môžeme teda formulovať **I. Newtonov pohybový zákon (zákon zotrvačnosti)**, ktorý hovorí: **Každý hmotný bod v inerciálnej vzťažnej sústave zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútený vonkajšími silami tento svoj stav zmeniť.**

Treba poznamenať, že prvý Newtonov pohybový zákon platí nielen v prípadoch, kedy na teleso nepôsobia žiadne sily (teleso je v dostatočnej vzdialenosti od silového pôsobenia ostatných telies), ale aj vtedy, keď sily pôsobia, ale ich výslednica je nulová. Zákon charakterizuje zotrvačnosť ako základnú vlastnosť každého izolovaného hmotného bodu zotrvávať v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe v inerciálnej vzťažnej sústave. Taktiež z neho vyplýva, že na zmenu pohybového stavu hmotného bodu v inerciálnej vzťažnej sústave je potrebné jeho vzájomné pôsobenie s inými objektmi. Mierou toho pôsobenia je sila. Zotrvačné a gravitačné vlastnosti objektov charakterizuje ďalšia fyzikálna veličina, ktorú nazývame **hmotnosť** m (jednotka v sústave SI je kilogram $[m] = kg$). Hmotnosť je charakteristikou samotného predmetu. Na tomto mieste je vhodné zdôrazniť rozdiel medzi tiažovou silou, hmotnosťou

[1]ISAAC NEWTON $(1642-1727)$ geniálny anglický fyzik, matematik a astronóm, svojím dielom pozdvihol vedu na novú, dovtedy netušenú úroveň, a tak vytvoril predpoklady pre vznik nových moderných vied. Podľa jeho zákonov sa riadi náš pohyb na makroskopickej úrovni - Tri Newtonove zákony a aj na vesmírnej - Newtonov gravitačný zákon. Aj mechaniku ako takú delíme na dve časti: klasickú-newtonovskú a kvantovú mechaniku.

a ich určovaním. Vážením určujeme veľkosť tiažovej sily, ktorou Zem pôsobí na teleso. Potom zo znalosti tiažového zrýchlenia $\vec{g}$ v mieste merania dokážeme určiť veľkosť hmotnosti telesa. Napr. ak by sme chceli "vážiť" menej, mali by sme vyliezť na vrchol vysokej hory, kde je hodnota tiažového zrýchlenia nižšia. Naša reálna hmotnosť sa samozrejme nezmení, ale veľkosť tiažovej sily zobrazená na váhe ako hmotnosť bude iná ako v nižšej nadmorskej výške (kapitola Gravitačné pole).

Zo skúsenosti vieme, že ak na dve telesá rôznej hmotnosti budeme pôsobiť rovnakou silou (napr. kopnutie do rôznych lôpt), bude aj ich pohybový účinok iný - čím menšia hmotnosť, tým väčšia zmena rýchlosti telesa za jednotku času, čiže zrýchlenia. Alebo čím väčšia má byť zmena rýchlosti telesa danej hmotnosti za určitý čas, tým väčšia sila naň musí pôsobiť. Prípadne, pre to isté zrýchlenie rôznych telies musí byť pôsobiaca sila tým väčšia, čím väčšia je ich hmotnosť. Zhrnutím týchto poznatkov Newton formuloval **II. Newtonov pohybový zákon**: **Sila pôsobiaca na hmotný bod je úmerná súčinu jeho hmotnosti a zrýchlenia, ktoré mu udeľuje**

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\,. \tag{4.1}$$

Sila $\vec{F}$ je vektorovou fyzikálnou veličinou, ktorej smer je zhodný so smerom zrýchlenia $\vec{a}$, ktoré udeľuje hmotnému objektu. Pod silou $\vec{F}$ môžeme rozumieť aj vektorový súčet všetkých vonkajších síl pôsobiacich na teleso. Jednotkou sily je **newton** (N). 1 Newton je sila, ktorá telesu hmotnosti $1\,kg$ udeľuje zrýchlenie $1\;m/s^2$. Odtiaľ $[F]\;=\;1\,N = 1\;kg\cdot m/s^2$.

Za povšimnutie stojí, že II. Newtonov pohybový zákon je v súlade s prvým. Ak na hmotný bod nepôsobia žiadne sily, podľa rovnice (4.1) sa bude hmotný bod pohybovať bez zrýchlenia, t. j. rovnomerným pohybom alebo bude v pokoji.

Zmena pohybového stavu hmotného bodu nezávisí len od pôsobiacej sily, ale aj od času, za ktorý sila pôsobila. **Mierou časového účinku sily** je fyzikálna veličina, ktorú nazývame **impulz sily**. Impulz sily $\vec{I}$ môžeme vo všeobecnosti vyjadriť

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.2}$$

Ak však bude pôsobiť konštantná sila, môžeme impulz sily vyrátať ako súčin sily $\vec{F}$ a času t, počas ktorého sila pôsobila

$$\vec{I} = \vec{F}\,t\,. \tag{4.3}$$

Impulz sily je vektorovou fyzikálnou veličinou a pre konštantnú silu má smer rovnaký ako sila. Ak bude sila $\vec{F}$ za čas t pôsobiť na hmotný bod s konštantnou hmotnosťou m, pre impulz sily platí

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int_0^t m\vec{a}\,\mathrm{d}t = m\int_0^t \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = m\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = m\,(\vec{v}-\vec{v}_0)\ , \tag{4.4}$$

kde $\vec{v}$ a $\vec{v}_0$ sú rýchlosti hmotného bodu v čase t a $t = 0\,s$. Súčin hmotnosti m a rýchlosti $\vec{v}$ hmotného bodu nazývame **hybnosť** a označujeme $\vec{p}$

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\ . \tag{4.5}$$

Hybnosť je vektorová fyzikálna veličina, ktorej smer je totožný so smerom rýchlosti. Jednotkou hybnosti je $[p] = kg\cdot m/s$. Definovaním hybnosti môžeme pre impulz sily písať

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0\ . \tag{4.6}$$

Impulz sily, ktorá pôsobí na hmotný bod, je rovný zmene jeho hybnosti.

Schopnosť sily $\vec{F}$ otáčať teleso okolo pevnej osi závisí nielen od veľkosti a smeru sily, ale aj od polohového vektora $\vec{r}$ pôsobiska sily vzhľadom na os otáčania a charakterizuje ho fyzikálna veličina nazývaná **moment sily** $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}\ . \tag{4.7}$$

Moment sily je vektorovou veličinou a jeho smer je kolmý k rovine vektorov $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Tak ako hybnosť $\vec{p}$ charakterizuje posuvný pohyb hmotného bodu, charakteristikou otáčavého pohybu okolo osi neprechádzajúcej hmotným bodom je **moment hybnosti** $\vec{L}$

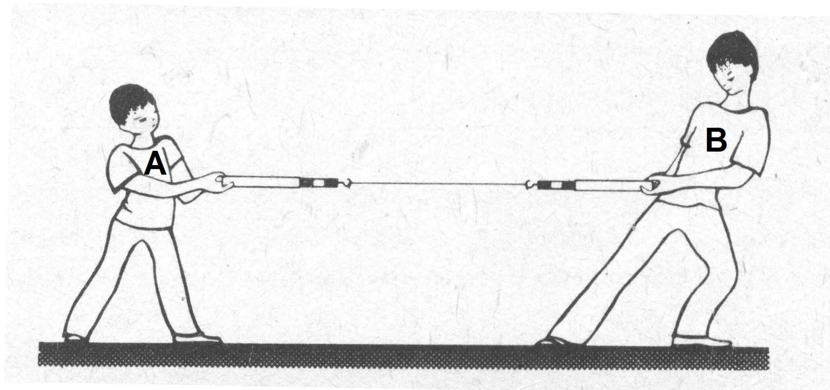
$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\ (\vec{r}\times\vec{v})\ , \tag{4.8}$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor hmotného bodu vzhľadom na os otáčania.
Zavedenie hybnosti umožňuje **II. Newtonov pohybový zákon** (4.1) zapísať aj v inej forme

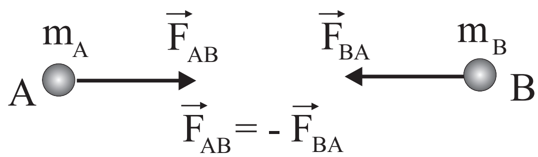
$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.9}$$

Z vyjadrenia vyplýva, že sila pôsobiaca na hmotný bod je rovná derivácii jeho hybnosti podľa času. Na základe predchádzajúcej formulácie môžeme druhý Newtonov pohybový zákon formulovať nasledujúco: **Pomer zmeny hybnosti**

hmotného bodu a času, za ktorý táto zmena nastala, je priamoúmerný výslednej pôsobiacej sile.
Z tejto formulácie vyplýva, že ak nastala zmena hybnosti v čase, musela na teleso pôsobiť sila, prípadne obrátene, ak na teleso bude pôsobiť sila, nastane zmena jeho hybnosti.



Obrázok 4.1: Aj keď sa snaží každý chlapec ťahať inou silou, údaj na obidvoch silomeroch je vždy rovnaký.



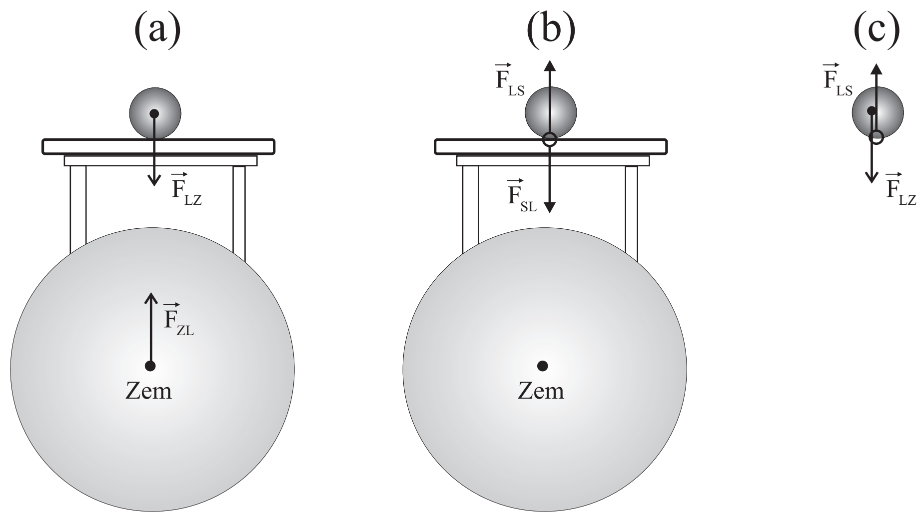
Obrázok 4.2: III. Newtonov pohybový zákon. Teleso A pôsobí na teleso B silou $\vec{F}_{BA}$ a teleso B pôsobí na teleso A silou $\vec{F}_{AB}$ rovnako veľkou ale opačného smeru.

Sily pôsobia vždy vo dvojiciach. Nech Adam na obrázku 4.1 pôsobí na Borisa silou $\vec{F}_{BA}$. Ako ukazuje obrázok a potvrdzuje experiment, aj Boris pôsobí na Adama silou $\vec{F}_{AB}$, ktorá je rovnako veľká, ale opačne orientovaná. Silové pôsobenie dvoch telies je vždy vzájomné. Tento poznatok je obsahom **III. Newtonovho pohybového zákona**, ktorý hovorí: **Dva hmotné body na seba navzájom pôsobia rovnako veľkými silami opačného smeru.**

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \,. \tag{4.10}$$

Všimnime si označenie indexov - $\vec{F}_{AB}$ označuje silu, ktorá vyjadruje pôsobenie telesa B na teleso A (obr. 4.2).

Rovnica (4.10) platí bez ohľadu na to, či sa telesá pohybujú alebo sú v pokoji. Tento zákon, nazývaný tiež **zákon akcie a reakcie** hovorí, že v inerciálnej vzťažnej sústave pri vzájomnom pôsobení telies vznik každej sily – **akcie** sprevádza vznik rovnako veľkej sily opačného smeru – **reakcie**. Akcia a reakcia súčasne vznikajú a súčasne zanikajú. Mohla by nás napadnúť otázka, ak sú sily rovnako veľké a opačného smeru, prečo sa tieto sily nezrušia? Akcia a reakcia pôsobia vždy na iné telesá, preto sa nesčítavajú do výslednej sily a vo svojich účinkoch sa navzájom nerušia. Dve rovnako veľké sily opačného smeru súčasne pôsobiace na ten istý hmotný bod nie sú akcia a reakcia a ich účinok sa navzájom ruší. K vysvetleniu nám poslúži nasledujúci obrázok 4.3.



Obrázok 4.3: K vysvetleniu a pochopeniu pojmov akcia a reakcia. Lopta L, stôl S, Zem Z a ich vzájomné pôsobenia. Sily na obrázku *c)* nie sú akcia a reakcia.

Lopta je položená na stole, ktorý je umiestnený na povrchu Zeme. Zem pôsobí na loptu zvisle nadol tiažovou silou $\vec{F}_{LZ}$. Lopta nezrýchľuje, pretože sila je kompenzovaná rovnako veľkou, ale opačne orientovanou, normálovou silou $\vec{F}_{LS}$, ktorou na loptu pôsobí stôl. Sily $\vec{F}_{LZ}$ a $\vec{F}_{LS}$ netvoria dvojicu akcia-reakcia, pretože pôsobia na to isté teleso – loptu. Reakciou k sile $\vec{F}_{LZ}$ je gravitačná sila $\vec{F}_{ZL}$, ktorou pôsobí lopta na Zem. Reakciou k sile $\vec{F}_{LS}$ je sila $\vec{F}_{SL}$, ktorou pôsobí lopta na stôl. Dvojice akcia–reakcia vystupujúce v tejto úlohe sú: $\vec{F}_{LZ} = -\vec{F}_{ZL}$ (lopta a Zem) a $\vec{F}_{LS} = -\vec{F}_{SL}$ (lopta a stôl).

4.2 Práca, výkon a energia

V tejto časti charakterizujeme veličiny, ktoré súvisia s pôsobením sily. Postupne sa budeme zaoberať mechanickou prácou, výkonom a energiou.

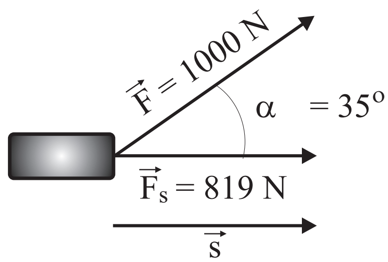
4.2.1 Práca

Ak chceme premiestniť nejaký predmet, musíme vynaložiť určitú námahu. Zvyčajne to robíme tak, že na predmet pôsobíme silou a vykonáme pri tom istú prácu. Vo všeobecnosti pod prácou rozumieme mieru účinku sily, ktorým hmotný bod mení svoju polohu. Ak na hmotný bod bude pôsobiť nejaká *konštantná sila* $\vec{F}$ tak, že jej účinkom sa posunie po úsečke (dráhe) $\vec{s}$, potom práca W je rovná skalárnemu súčinu vektorov sily $\vec{F}$ a dráhy $\vec{s}$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}\,. \tag{4.11}$$

Ak smer sily a dráhy nebudú rovnaké, ale vektory $\vec{F}$ a $\vec{s}$ budú zvierať uhol α, potom využitím znalostí z vektorového počtu o skalárnom súčine dvoch vektorov môžeme predchádzajúci vzťah vyjadriť ako súčin veľkosti priemetu sily do smeru dráhy F_s (zložka sily v smere dráhy) a dráhy s (obr. 4.4)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| |\vec{s}| \cos\alpha = F_s\, s\,. \tag{4.12}$$



Obrázok 4.4: Priemet pôsobiacej sily do smeru dráhy.

Ak smer sily a dráhy bude ten istý (uhol medzi vektormi $\vec{F}$ a $\vec{s}$ bude $0\,rad$), potom prácu môžeme vyjadriť

$$W = F\, s\,. \tag{4.13}$$

Jednotkou práce v SI sústave je **joule**[2] ($[W] = J = N.m = kg.m^2/s^2$).

[2]JAMES PRESCOTT JOULE (1818 – 1889) britský fyzik a pivovarník. Svoj výskum sústredil na zlepšenie efektivity elektrických motorov. Zaoberal termodynamikou a tiež magnetizmom, pričom je po ňom pomenovaný i Joule-Lenzov zákon.

Ak bude na časticu pôsobiť niekoľko síl $\vec{F}_i$, ktorých výslednica bude konštantná, môžeme ich celkovú prácu určiť tak, že vo vzťahu (4.11) nahradíme $\vec{F}$ výslednicou $\sum_i \vec{F}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \ , \tag{4.14}$$

kde $\vec{F}_i$ sú jednotlivé sily. Potom práca vykonaná výslednicou síl pri posunutí $\vec{s}$ častice bude daná vzťahom

$$W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{s} \,. \tag{4.15}$$

Ak budú jednotlivé sily $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... konštantné, môžeme predchádzajúci vzťah prepísať do tvaru

$$W = \vec{F}_1 \cdot \vec{s} + \vec{F}_2 \cdot \vec{s} + \vec{F}_3 \cdot \vec{s} + \ldots = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots \,. \tag{4.16}$$

Tento vzťah vyjadruje skutočnosť, že celková práca vykonaná na častici pri pôsobení viacerých síl je rovná súčtu prác vykonaných jednotlivými silami.

Ak bude na hmotný bod pôsobiť premenlivá sila, budeme postupovať tak, že si dráhu rozdelíme na také malé intervaly $\Delta\vec{s}$, aby sme v každom z nich mohli považovať silu $\vec{F}$ za konštantnú, resp. dráhu za priamočiaru. Elementárnu prácu v i-tom intervale vypočítame zo vzťahu

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \tag{4.17}$$

a celkovú prácu dostaneme súčtom jednotlivých elementárnych prác pozdĺž celej dráhy

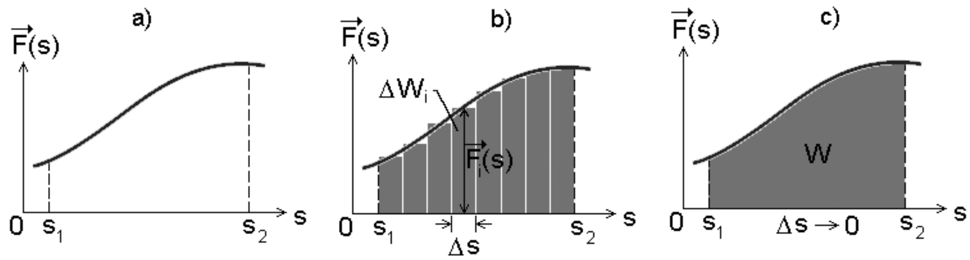
$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \,. \tag{4.18}$$

Ak jednotlivé intervaly budú nekonečne malé (infinitezimálne) ds, sumácia prejde na integrál, a tak dostávame **definíciu práce**

$$W = \int \mathrm{d}\,W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,, \tag{4.19}$$

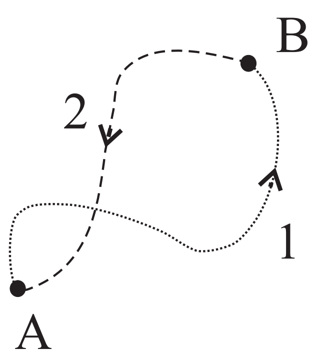
pričom integrovať treba pozdĺž celej dráhy (obr. 4.5). Vzťah (4.19) (v prípade konštantnej sily $\vec{F}$) môžeme pomocou polohového vektora $\vec{r}$ prepísať do tvaru

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \ . \tag{4.20}$$



Obrázok 4.5: (a) Graf závislosti sily pôsobiacej na časticu, ktorá sa pohybuje po priamej dráhe s, pričom sila $\vec{F}$ na ňu pôsobí rovnobežne s osou s v intervale s_1 až s_2. (b) Dráha v intervale s_1 až s_2 bola rozdelená na jednotlivé rovnaké elementy Δs, v ktorých predpokladáme pôsobenie konštantnej sily $\vec{F_i}(s)$. Sila v danom intervale vykoná prácu W_i. (c) Limitný prípad, kedy $\Delta s \to 0$ a práca vykonaná silou $\vec{F}(s)$ v intervale s_1 až s_2 je reprezentovaná obsahom vyfarbenej plochy pod krivkou.

Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, že práca konštantnej sily nezávisí od tvaru trajektórie, ale len od počiatočnej a koncovej polohy hmotného bodu. Podľa toho, či v nejakom silovom poli práca závisí od tvaru dráhy alebo je od tejto dráhy nezávislá, delíme sily na **konzervatívne** (pri ktorých práca nezávisí od trajektórie) a **nekonzervatívne**.



Obrázok 4.6: Častica, na ktorú pôsobila konzervatívna sila $\vec{F}$ sa pohybuje z bodu A do B (1) a opačne (2).

Toto rozdelenie môžeme charakterizovať aj inak. Ak sa pri prechode z bodu A do bodu B vykoná práca W a z bodu B do bodu A po inej trajektórii vykoná práca W' rovnako veľkú ale s opačným znamienkom, potom na hmotný bod pôsobila konzervatívna sila (obr. 4.6).

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že krivkový integrál konzervatívnej sily po uzavretej krivke je rovný nule

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0 \; . \tag{4.21}$$

4.2.2 Výkon

Tú istú prácu môžeme vykonať za rôzny čas. Mierou toho, ako "rýchle" koná sila prácu je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva **výkon** P. Ak vykoná sila F prácu ΔW za dobu Δt, je jej **priemerný výkon** v danom časovom intervale definovaný pomerom

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \; . \tag{4.22}$$

Okamžitý výkon P je limitným prípadom priemerného výkonu pre $\Delta t \to 0$

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \; . \tag{4.23}$$

Jednotkou výkonu v SI je **watt**[3] ($[P] = W = J/s = kg.m^2/s^3$). (Stretnúť sa môžeme aj s jednotkou nazývanou konská sila (konská sila $= 746\,W$)). Pri stálom výkone P môžeme prácu vyjadriť ako súčin výkonu a času

$$W = P\,t \tag{4.24}$$

a z tohto vzťahu nám pre prácu vyplýva bežne používaná jednotka pri spotrebe elektrickej energie – kilowatthodina (1 kilowatthodina $= \; 1 \; kW.h = 3,6 \times 10^6 \; J = 3,6 \; MJ$).

Ak vo vzťahu (4.22) vyjadríme prácu súčinom $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, môžeme pre výkon písať

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v} \; . \tag{4.25}$$

Výkon teda môžeme vyjadriť aj ako skalárny súčin sily a rýchlosti telesa. Takže ak napr. ťahač bude pôsobiť na plne naložený príves silou $\vec{F}$ a rýchlosť prívesu je v danom okamihu $\vec{v}$, súčin sily a rýchlosti nám povie, aký je "výkon ťahača" v danom okamihu.

[3] JAMES WATT (1736–1819) anglický fyzik, matematik a mechanik. Roku 1769 zostrojil prvý funkčný parný stroj.

4.2.3 Energia

Pod pojmom **energia** budeme rozumieť skalárnu fyzikálnu veličinu, ktorej hodnota je určená stavom fyzikálnej sústavy (objektu). Podľa charakteru pôsobiacich síl hovoríme o energii mechanickej, elektrickej, chemickej, jadrovej a pod. Často sa používa tvrdenie, že energia je schopnosť konať prácu. Mierou procesu premeny energie aj mierou prenosu energie z jedného telesa na druhé je práca (fyzikálna veličina, ktorá charakterizuje dej). Aj keď hodnoty veličín energie a práce vyjadrujeme v rovnakých jednotkách, nesmieme tieto veličiny stotožňovať (jedna vyjadruje stav sústavy, druhá dej).

Keď na hmotný bod s hmotnosťou m pôsobí sila $\vec{F}$, udeľuje mu zrýchlenie $\vec{a}$, pričom koná prácu

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v\, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \ . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Aby sa hmotný bod s hmotnosťou m, ktorý sa pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$ zastavil, musí na neho pôsobiť sila $\vec{F}'$ opačného smeru, ako je smer rýchlosti $\vec{v}$. Sila $\vec{F}'$ pri zastavovaní hmotného bodu koná prácu

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}'(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \ldots = m \int_{\vec{v}}^{0} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = -m \int_{v}^{0} v\, dv \\ &= -\left(0 - \frac{1}{2} m\, v^2\right) = \frac{1}{2} m\, v^2 \ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Hmotný bod má teda schopnosť vykonať prácu $\frac{1}{2} m\, v^2$. Hovoríme, že má pohybovú alebo **kinetickú energiu. Kinetická energia** hmotného bodu s hmotnosťou m pohybujúceho sa rýchlosťou $\vec{v}$ je rovná

$$E_k = \frac{1}{2} m\, v^2 \ . \tag{4.28}$$

Využitím vzťahu (4.26) môžeme vysloviť tvrdenie, že zmena kinetickej energie častice ΔE_k je rovná práci W vykonanej silou $\vec{F}$.

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = W \ , \tag{4.29}$$

pričom symbolom E_{k1} sme označili počiatočnú kinetickú energiu častice ($\frac{1}{2}m\,v_1^2$) a E_{k2} predstavuje výslednú kinetickú energiu častice ($\frac{1}{2}m\,v_2^2$). Tento vzťah však neplatí všeobecne, stačí si predstaviť rotujúce alebo deformujúce sa teleso, kde sa jednotlivé časti telesa pohybujú rôznymi rýchlosťami.

Kinetická energia E_k súvisí s pohybovým stavom častice alebo telesa. Zo skúseností vieme, že ak sa teleso pohybuje rýchlejšie, jeho kinetická energia je väčšia, ak je teleso v pokoji, jeho kinetická energia je nulová. To isté platí aj pre kinetickú energiu telesa nezanedbateľných rozmerov, ak sa všetky jeho časti pohybujú rovnakou rýchlosťou $\vec{v}$, t. j. vykonávajú posuvný (translačný) pohyb, pričom uvažujeme, že teleso nerotuje ani nie je deformované. Jednotkou kinetickej energie (a všeobecne energie) je **joule** ($[E] = J = kg.m^2/s^2$). V oblasti časticovej fyziky sa zvykne používať aj jednotka elektrónvolt ($1\,eV = 1,602 \times 10^{-19}\ \ J$).

Prenos energie medzi objektom a jeho okolím môže byť sprostredkovaný silovým pôsobením alebo tepelnou výmenou. Deje súvisiace so silovým pôsobením nazývame súhrnne konanie práce. Ak budeme na teleso pôsobiť nejakou silou, z II. Newtonovho zákona vyplýva, že jeho rýchlosť bude rásť, a tým rastie aj jeho kinetická energia. Naopak, ak bude teleso vplyvom výslednej sily spomaľovať, bude aj jeho kinetická energia klesať. Ak sa kinetická energia častice vplyvom silového pôsobenia jeho okolia všeobecne mení, hovoríme, že sily pôsobiace na časticu konajú prácu. Ak sila zväčšila (nezmenila, zmenšila) kinetickú energiu častice, hovoríme, že vykonala kladnú (nulovú, zápornú) prácu, prípadne hovoríme, že sila prácu koná (nekoná, sprostredkováva). Práca teda predstavuje tú časť energie, ktorú teleso získava prostredníctvom silového pôsobenia jeho okolia.

Uvažujme teraz loptu hmotnosti m, ktorú môžeme považovať za bodový objekt. Ak ju vyhodíme zvisle nahor počiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0$ vzhľadom k Zemi (pričom pre jednoduchosť zanedbáme otáčanie Zeme okolo Slnka a jej rotáciu okolo vlastnej osi (vtedy tiažová sila Zeme $\vec{F}_G$ je rovná gravitačnej sile $\vec{F}_g$) a uvažujeme len malé výšky nad povrchom Zeme), bude jej počiatočná kinetická energia $E_{k0} = \frac{1}{2}m\,v_0^2$. V priebehu výstupu, zmeny výšky h, sa jej pohyb pôsobením príťažlivej **tiažovej sily** Zeme $\vec{F}_G = \vec{F}_g = m\,\vec{g}$ (kde $\vec{g}$ je vektor tiažového zrýchlenia smerujúci do stredu Zeme) spomaľuje a kinetická energia klesá. Ak bude tiažová sila jedinou silou, ktorá na loptu pôsobí (ak zanedbáme odporovú silu vzduchu), potom k zmene kinetickej energie prispieva iba práca tiažovej sily

$$\begin{aligned} W_g &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{\vec{h}_1}^{\vec{h}_2} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{h} \\ &= -m \int_{h_1}^{h_2} g \, \mathrm{d}h = -m\, g \int_{h_1}^{h_2} \mathrm{d}h = m\, g(h_1 - h_2) \, . \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ak zoberieme záporne vzatú prácu vykonanú tiažovou silou, môžeme pri pohybe telesa v blízkosti povrchu Zeme zadefinovať zmenu **tiažovej potenciálnej energie sústavy** teleso - Zem

$$\Delta E_p = -W \, , \tag{4.31}$$

ktorá sa tiež nazýva **potenciálna energia telesa** v tiažovom poli Zeme. V prípade sústavy častica - Zem budeme pod E_p rozumieť hodnotu tiažovej potenciálnej energie častice vo výške h. Vo vzťahu

$$\Delta E_p = E_{ph} - E_{p0} = m\, g\, (h - 0) \tag{4.32}$$

pod hodnotou E_{p0} budeme rozumieť tiažovú potenciálnu energiu v tzv. referenčnej konfigurácii, pri ktorej sa častica nachádza v referenčnom bode o súradnici h_0. Zvyčajne kladieme $E_{p0} = 0\, J$ pre $h_0 = 0\, m$. Predchádzajúci vzťah môžeme potom prepísať do tvaru

$$E_p(h) = m\, g\, h, \tag{4.33}$$

z ktorého vyplýva, že tiažová potenciálna energia sústavy častica - Zem závisí iba od zvislej polohy h častice vzhľadom na referenčnú polohu o súradnici $h_0 = 0\, m$ (t. j. na výške častice nad referenčným bodom). Ak vzťažnú sústavu a nulovú hladinu spojíme s povrchom Zeme, hovoríme stručne, že potenciálnu energiu má teleso. Ako sme však už spomenuli, v skutočnosti potenciálnu energiu tiažovú nemá samo teleso, ale presnejšie sústava Zem - teleso. Predchádzajúci vzťah (4.33) je možné použiť iba v nie veľkých vzdialenostiach od povrchu Zeme, kde hodnotu $\vec{g}$ považujeme za približne konštantnú. Podrobnejšie je táto problematika popísaná v kapitole Gravitačné pole.

4.3 Zákony zachovania energie

Mechanická energia sústavy je definovaná ako súčet jej potenciálnej energie a celkovej kinetickej energie jej objektov

$$E_m = E_p + E_k \ . \tag{4.34}$$

Aj keď hodnota potenciálnej energie závisí od voľby počiatku sústavy súradníc, zmena potenciálnej energie je od nej nezávislá. Tu treba pripomenúť, že fyzikálny význam má iba zmena ΔE_p potenciálnej energie, nie samotná hodnota potenciálnej energie, ktorá závisí na ľubovoľnej voľbe referenčnej konfigurácie (kde je $E_{p0} = 0\,J$).

Ak budeme uvažovať sústavu častíc neinteragujúcich s okolím (izolovaná sústava), práca W, ktorú vykonajú konzervatívne sily, ktorými na seba navzájom pôsobia častice sústavy, určuje zmenu kinetickej energie sústavy vzťah $\Delta E_k = W$ (4.29). No súčasne ju môžeme vyjadriť ako záporne vzatú zmenu potenciálnej energie $\Delta E_p = -W$ (4.31). Kinetická energia sústavy sa mení na úkor jej potenciálnej energie. Kombináciou predchádzajúcich vzťahov dostávame

$$\Delta E_k = -\Delta E_p \ , \tag{4.35}$$

inými slovami nárast jednej z oboch foriem energie je presne vyvážený poklesom druhej. Predchádzajúci vzťah môžeme prepísať do tvaru

$$E_{k2} - E_{k1} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) \ , \tag{4.36}$$

kde indexy 1 a 2 sa vzťahujú k dvom rôznym okamihom, t. j. konfiguráciám sústavy. Úpravou dostaneme vzťah

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} \ , \tag{4.37}$$

ktorý predstavuje matematickú formuláciu **zákona zachovania mechanickej energie**. Ľavá a pravá strana rovnice predstavujú mechanickú energiu v rôznych okamihoch, a teda aj v dvoch rôznych konfiguráciách sústavy. Predchádzajúci vzťah môžeme sformulovať nasledujúco: **Ak pôsobia v izolovanej sústave iba konzervatívne sily, mení sa jej kinetická a potenciálna energia tak, že ich súčet, t. j. mechanická energia sústavy, je stála.** Toto tvrdenie vyjadruje **zákon zachovania mechanickej energie**. Pomocou vzťahu (4.35) môžeme zákon zachovania mechanickej energie prepísať do tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \ . \tag{4.38}$$

Tento zákon má všeobecnú platnosť a týka sa všetkých prípadov izolovaných sústav (t. j. častice sústavy neinteragujú s jej okolím a na objekty sústavy nepôsobia žiadne vonkajšie sily), v ktorých pôsobením síl nenastávajú premeny na iné formy energie ako len na mechanickú potenciálnu a kinetickú energiu. Ak napr. budú v sústave pôsobiť trecie alebo odporové sily, pri ktorých sa telesá zohrievajú, mechanická energia telies sa postupne bude meniť na iné formy energie a v takomto prípade zákon zachovania mechanickej energie v izolovanej sústave už platiť nebude. Bude však platiť **zákon zachovania celkovej energie** izolovanej sústavy, ktorý vznikol zovšeobecnením veľkého počtu experimentov (nebol nijako odvodený). Tento zákon hovorí: **Energia izolovanej sústavy (keď práca vonkajších síl je rovná nule) ostáva konštantnou pri všetkých dejoch, ktoré prebiehajú vo vnútri sústavy.**

Pritom treba poznamenať, že energia sa môže meniť z jednej formy na inú (mechanická na elektrickú, elektrická na tepelnú a pod.). Doposiaľ sa neobjavila žiadna výnimka tohto zákona, takže sa celkovej energii prisudzuje úloha zachovávajúcej sa veličiny i v situáciách, kedy sa čiastkové energie rôznych typov menia. Menej formálne môžeme povedať, že energia nemôže ani záhadne zmiznúť ani sa objavovať.

Pre lepšie pochopenie a objasnenie predchádzajúcich zákonov si predstavme dve situácie pohybu telesa. V prvom prípade sa teleso pohybuje po dokonale hladkej vodorovnej podložke. Sústava tvorená samotným telesom je považovaná za izolovanú, pretože žiadna zo síl, ktoré naň pôsobia (tiažová sila a tlaková sila podložky), nekoná prácu. V tejto sústave môžeme aplikovať zákon zachovania mechanickej energie. V druhom prípade sa však teleso bude pohybovať po podložke, ktorá nie je dokonale hladká. Rozšírime sústavu tak, že do nej okrem telesa zahrnieme aj vodorovnú podložku pevne spojenú so Zemou. Keďže zo skúsenosti vieme, že teleso pri svojom pohybe bude postupne spomaľovať a nakoniec sa zastaví, museli v tejto sústave pôsobiť sily a kinetická energia telesa sa premenila na inú formu energie. Týmito vnútornými silami izolovanej sústavy boli trecie sily, ktoré spôsobili, že úbytok kinetickej energie ΔE_k (a v tomto prípade aj mechanickej energie) prispel k zvýšeniu vnútornej energie telesa a podložky (obe sa zahriali). Zmena vnútornej energie sústavy ΔE_{in} je teda

$$\Delta E_{in} = -\Delta E_k \ , \tag{4.39}$$

odkiaľ vyplýva

$$\Delta E_k + \Delta E_{in} = 0 \ . \tag{4.40}$$

Aj keď sa mechanická energia telesa nezachováva, je súčet mechanickej energie a vnútornej energie sústavy teleso – podložka, ktorý predstavuje celkovú energiu sústavy teleso - podložka, konštantný

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_{in} = 0 \ . \tag{4.41}$$

Ak bude v sústave pôsobiť viacero konzervatívnych síl, pričom v sústave môže okrem zmien kinetickej a vnútornej energie jednotlivých objektov sústavy dochádzať aj k zmenám ich potenciálnej energie, celková energia izolovanej sústavy ΔE_{celk} sa bude opäť zachovávať a zákon zachovania celkovej energie nadobudne tvar

$$\Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{in} = 0 \ . \tag{4.42}$$

Ak sústava nebude izolovaná a vonkajšie sily v nej budú konať prácu, zmena celkovej energie ΔE_{celk} neizolovanej sústavy bude rovná práci W vykonanej vonkajšími silami pôsobiacimi na objekty sústavy

$$W = \Delta E_{celk} = \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{in} \ . \tag{4.43}$$

V závere tejto časti môžeme povedať, že pri všetkých dejoch v izolovaných sústavách platia: zákon zachovania hmotnosti, zákon zachovania hybnosti a zákon zachovania celkovej energie, resp. v špecifických prípadoch ako zákon zachovania mechanickej energie.