7 Mechanika tuhého telesa

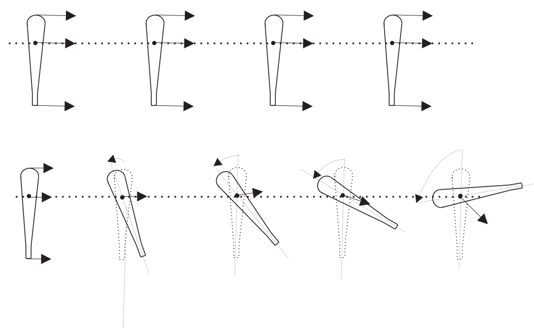
V tejto kapitole sú popísané základy dynamiky sústavy hmotných bodov a tuhého telesa. Zovšeobecnia sa vzorce pre pohyb, rýchlosť a zrýchlenie takýchto sústav pomocou ťažiska. Dozvieme sa, čo sa rozumie pod pojmom ťažisko a ako sa vypočíta jeho poloha. Rozšírime si platnosť II. Newtonovho pohybového zákona pomocou I. a II. impulzovej vety. Zistíme, ako vypočítať rotačnú energiu telesa pomocou momentu zotrvačnosti. Naučíme sa počítať moment zotrvačnosti a použiť Steinerovu vetu. A nakoniec, keďže s pohybom okolo osi sa stretávame takmer na každom kroku, preberieme si niekoľko prípadov z praxe pre kmitavý pohyb a valivý pohyb.

Doteraz používaný prístup, v ktorom skutočný objekt bol nahradený hmotným bodom, neumožňuje riešiť všetky úlohy dynamiky. Pre prípady, keď rozmery objektov nemôžu byť zanedbané, je užitočné zaviesť model sústavy hmotných bodov. Pomocou takého modelu je možné napr. skúmať pohyb sústavy telies, v ktorej každé teleso je nahradené hmotným bodom. Predstava sústavy hmotných bodov je vhodná aj pre tuhé telesá a látky v kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly), môžu byť považované za hmotné body.

Sústavou hmotných bodov rozumieme jednoduché teleso, ktoré sa môže na rozdiel od tuhého telesa, tvarovo meniť. Sústava hmotných bodov pozostáva z telies (hmotných bodov), ktoré sa navzájom voči sebe pohybujú. Pohyby jednotlivých hmotných bodov závisia od polohy ostatných bodov v priestore a sú určené pohybovými rovnicami, pre každý bod zvlášť. Tuhé teleso tvorí veľký počet hmotných bodov spojených tak, že ich vzájomná poloha sa pri pohybe telesa ako celku nemení. Pre tuhé teleso platia tie isté výsledky, ako výsledky odovodené pre pohyb sústavy hmotných bodov s obmedzením vzájomného pohybu jednotlivých hmotných bodov.

Mechanika dokonale tuhého telesa opisuje posuvno rotačný pohyb telesa.

Vychádza z mechaniky hmotného bodu a sústavy hmotných bodov, opakuje a rozvíja už známe skutočnosti. Cieľom kapitoly je nájsť kinematické veličiny opisujúce pohyb dokonale tuhého telesa, zostaviť pohybové rovnice dokonale tuhého telesa, vyjadriť zákony zachovania pre toto teleso a uviesť jednoduché aplikácie na pohyb dokonale tuhého telesa.



Obrázok 7.1: Posuvný a posuvno-otáčavý pohyb telesa.

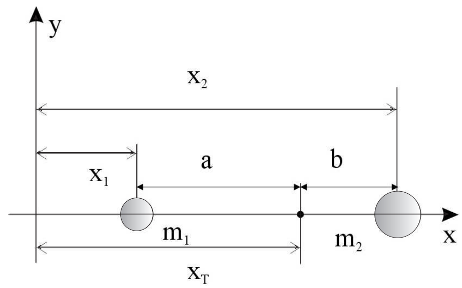
7.1 Ťažisko

Fyzici radi rozmýšľajú nad zložitými problémami a hľadajú v nich niečo jednoduché a známe. Predstavme si napríklad, že sme hodili baseballovú pálku. Pálka sa môže pohybovať viacerými spôsobmi: a) jednoduchým posuvným pohybom v určitom smere, b) otáčať sa okolo osi, c) pri posuvnom pohybe bude aj rotovať v rovine (obr. 7.1) a d) vykonáva zložitý priestorovo-rotačný pohyb. Jej pohyb je na popis teda zložitejší ako pri guľôčke, ktorá sa chová ako hmotný bod. Pálku vo všeobecnosti pri popise pohybu nemožno nahradiť hmotným bodom, lebo trajektórie jednotlivých elementov pálky sú navzájom odlišné. Pálku treba chápať už ako teleso s určitými rozmermi. Pri podrobnejšom skúmaní však zistíme, že jeden z bodov pálky má význačné postavenie. Pohybuje sa totiž po rovnakej dráhe, ako by sa pohybovala gulička pri hode. Jej pohyb je presne taký, ako keby a) v ňom bola sústredená všetka hmotnosť valca a po b) pôsobila v ňom celková tiažová sila pôsobiaca na pálku.

Tento význačný bod sa nazýva **ťažiskom** alebo **hmotným stredom telesa**. Vo všeobecnosti platí: **Ťažisko telesa alebo sústavy hmotných bodov je bod, ktorý sa pohybuje tak, ako by v ňom bola sústredená všetka hmotnosť telesa (sústavy) a pôsobili v ňom všetky vonkajšie sily pôsobiace na teleso (sústavu).**

Ťažisko pálky leží na jeho pozdĺžnej osi. Môžeme ho nájsť tak, že si pálku položíme vodorovne na vystretý prst a vyvážime ho. Ťažisko potom bude ležať na osi pálky práve nad prstom.

7.2 Ťažisko sústavy bodov



Obrázok 7.2: Poloha ťažiska dvoch hmotných bodov.

Určenie polohy ťažiska sústavy hmotných bodov patrí k jednej zo základných úloh pri popise danej sústavy. Ako už bolo povedané, zavedenie ťažiska (hmotného stredu) výrazne zjednodušuje mnohé úvahy pri popise pohybu. Začnime s najjednoduchším prípadom výpočtu ťažiska dvoch hmotných bodov. Pod pojmom ťažisko budeme rozumieť taký bod na ich spojnici (obr. 7.2), ktorý ju rozdeľuje v nepriamom pomere hmotností uvedených hmotných bodov. Platí teda

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{7.1}$$

Podľa (obr. 7.2) platí, že $a = x_T - x_1$ a $b = x_2 - x_T$. Po dosadení vyjadrení pre a, b do predošlej rovnice a jej úprave dostaneme pre $x-$ovú polohu ťažiska dvoch hmotných bodov vzťah

$$x_T = \frac{m_1\, x_1 + m_2\, x_2}{m_1 + m_2}\ . \tag{7.2}$$

Platnosť tohto vzťahu možno jednoduchou úvahou zovšeobecniť aj pre sústavu n hmotných bodov. Ak poloha $i-$tého hmotného bodu je x_i a jeho hmotnosť m_i, potom pre $x-$ovú polohu ťažiska danej sústavy platí vzťah

$$x_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i\ , \tag{7.3}$$

kde celková hmotnosť sústavy je $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

V skutočnosti sú však hmotné body sústavy rozmiestnené v trojrozmernom karteziánskom priestore, pričom ich polohy sú určené trojicou súradníc (x_i, y_i, z_i). Polohu ich ťažiska získame zovšeobecnením vzťahu (7.3) na trojrozmerný prípad

$$x_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i, \qquad y_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i, \qquad z_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i\,. \tag{7.4}$$

Polohu ťažiska môžeme zapísať i použitím vektorovej symboliky. Polohu $i-$tej častice možno zadať buď jej súradnicami (x_i, y_i, z_i) alebo polohovým vektorom $\vec{r}_i = x_i\,\vec{i} + y_i\,\vec{j} + z_i\,\vec{k}$. Index i označuje časticu, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sú jednotkové vektory karteziánskej sústavy súradníc. **Polohový vektor ťažiska sústavy hmotných bodov** je potom daný nasledujúcim vzťahom

$$\vec{r}_T = x_T\,\vec{i} + y_T\,\vec{j} + z_T\,\vec{k}\,. \tag{7.5}$$

Tri skalárne rovnice (7.4) potom možno nahradiť jednou vektorovou rovnicou

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i\,. \tag{7.6}$$

7.3 Tuhé teleso

Doteraz sme sa zaoberali jednotlivými hmotnými bodmi (časticami) alebo sústavou hmotných bodov. Pokiaľ sme používali názov "teleso", stotožňovali sme ho s hmotným bodom, napr. ťažiskom. Považovali sme ho za určitý hmotný objekt s troma stupňami voľnosti, ktorý sa pohybuje ako celok a jeho pohyb možno popísať zadaním troch súradníc daného bodu. Nezaoberali sme sa pohybom jednotlivých častí daného telesa a ani ich vplyvom na samotný pohyb. Reálne tuhé teleso má však určité rozmery a zaberá priestor s objemom V. Môžeme si ho predstaviť ako sústavu veľkého počtu bodov, ktoré sa z hľadiska makroskopického javia ako teleso so spojito rozloženou hmotnosťou m. Ide o spojitosť vo fyzikálnom zmysle - v každom uvažovanom objeme spojitého telesa musí byť dostatočný počet atómov na to, aby sa dalo hovoriť o jeho vlastnostiach. Pre jednoduchosť ďalších výpočtov zavádzame **dokonale tuhé teleso**, ktoré sa pôsobením síl nedeformuje, t. j. vzdialenosti medzi jeho jednotlivými časťami sa zachovávajú. Pretože v tejto kapitole sa budeme zaoberať len dokonale tuhým telesom, budeme používať skrátený názov **tuhé teleso**.

Jedna zo základných charakteristík tuhého telesa je **hustota** - ρ. V prípade, že teleso je homogénne s rovnomerne rozloženou hmotnosťou, je jeho hustota konštantná a definovaná ako

$$\rho = \frac{m}{V} \ ,$$

kde V je objem telesa a základná jednotka hustoty je $\rho\,(kg/m^3)$. Pri plošných útvaroch používame pojem plošná hustota σ (hmotnosť na jednotku plochy, (kg/m^2)) a pri lineárnych útvaroch lineárna hustota λ (hmotnosť na jednotku dĺžky, (kg/m).

V prípade, že teleso nie je homogénne, hustota nie je konštanta a je funkciou priestorových súradníc $\rho(x, y, z)$. Zvoľme v telese bod A so súradnicami $(x_A, y_A,\ z_A)$, ktorý obklopíme malým objemom $\triangle V$ s hmotnosťou $\triangle m = \rho(x, y, z)\triangle V$. Hmotnosť takéhoto telesa môžeme potom vypočítať cez integrálny vzťah:

$$m = \int_m dm = \int_V \rho(x, y, z)\, dV \ . \tag{7.7}$$

7.4 Ťažisko tuhého telesa

Vektor ťažiska sústavy hmotných bodov (častíc) definuje vzťah (7.6). V prípade, že máme definovať ťažisko tuhého telesa so spojite rozloženou hmotnosťou, postupujeme nasledujúcim spôsobom. Teleso fiktívne rozdelíme na fyzikálne konečne malé časti s objemami dV. V každej z nich sa nachádza malá časť hmotnosti dm celej hmotnosti telesa m. Na popis priestorového rozloženia hmotnosti telesa použijeme hustotu telesa $\rho(\vec{r})$ (7.7), kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu, ktorý určuje polohu objemu dV vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy. Keďže ide o spojite rozloženú hmotu v tuhom telese, používame namiesto konečného počtu častí telesa a konečných sumácií v čitateli a menovateli vzťahu (7.6) integrály a **polohový vektor ťažiska tuhého telesa** potom definujeme vzťahom

$$\vec{r}_T = \frac{\int_m \vec{r}dm}{\int_m dm} = \frac{\int_V \vec{r}\rho(x, y, z)\, dV}{\int_V \rho(x, y, z)\, dV} \ . \tag{7.8}$$

Pri homogénnom (rovnomernom) rozložení hmotnosti v celom objeme telesa je hustota ρ konštanta. V takomto prípade pri výpočte hustotu možno vybrať pred integrál a hmotnosť telesa môžeme vypočítať ako $m = \rho \int_V dV = \ \rho V$, pričom integrál cez objem telesa je jeho objem V. V karteziánskej súradnicovej sústave pre ťažisko tuhého telesa platí

$$x_T = \frac{\rho}{m}\int_V x\,dV, \quad y_T = \frac{\rho}{m}\int_V y\,dV, \quad z_T = \frac{\rho}{m}\int_V z\,dV\ . \tag{7.9}$$

Celý rad telies má určitú geometrickú symetriu, napr. stredovú, osovú alebo rovinnú. Poloha ťažiska takého symetrického homogénneho telesa potom úzko súvisí s jeho symetriou. Ak je teleso stredovo symetrické, splýva jeho ťažisko so stredom symetrie. Ťažisko telesa s osovou (resp. rovinnou) symetriou leží na osi (resp. v rovine) symetrie. Ťažisko homogénnej gule splýva s jej geometrickým stredom. Ťažisko homogénneho kužeľa leží na jeho osi. Ťažisko banánu, ktorého rovina symetrie ho delí na dve zrkadlovo rovnaké časti, leží v tejto rovine. Ťažisko však nemusí nutne ležať v telese. Tak napríklad, v ťažisku podkovy nie je žiadny kov a v ťažisku prsteňa nie je žiadne zlato.

7.5 Rýchlosť a zrýchlenie ťažiska

Poloha ťažiska sústavy hmotných bodov je určená rovnicou (7.6), pričom platí

$$m\,\vec{r}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{r}_i\ , \tag{7.10}$$

kde m je celková hmotnosť sústavy. Derivovaním tejto rovnice podľa času dostaneme

$$m\,\frac{d\vec{r}_T}{dt} = m\,\vec{v}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{v}_i\ , \tag{7.11}$$

kde $\vec{v}_T$ je **rýchlosť ťažiska** a $\vec{v}_i$ rýchlosť i-teho hmotného bodu. Podľa rovnice (7.11) môžeme vysloviť I. vetu o pohybe ťažiska sústavy hmotných bodov: **Hybnosť ťažiska sústavy hmotných bodov sa rovná súčtu hybností jednotlivých hmotných bodov sústavy.**

Ďalším derivovaním rovnice (7.11) podľa času dostávame vzťah

$$m\,\frac{d\vec{v}_T}{dt} = m\,\vec{a}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i\ , \tag{7.12}$$

kde $\vec{a}_T$ je **zrýchlenie ťažiska** a $\vec{a}_i$ zrýchlenie i-teho hmotného bodu. Aplikáciou II. Newtonovho zákona ($F = m\,a$) získame

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = m\,\vec{a}_T = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i\ , \tag{7.13}$$

čo je matematická formulácia II. vety o pohybe ťažiska sústavy: **Rovnovážny stav ťažiska sústavy hmotných bodov porušia len vonkajšie sily pôsobiace na sústavu. Ťažisko sa pohybuje ako bod, v ktorom je sústredená hmotnosť všetkých hmotných bodov sústavy a na ktorý pôsobia všetky vonkajšie sily pôsobiace na sústavu HB.**

Týmto sa rozširuje platnosť dynamiky hmotného bodu aj o dynamiku sústavy hmotných bodov, resp. tuhého telesa. Všetky výsledky odvodené pre pohyb hmotného bodu možno použiť pre posuvný pohyb ťažiska sústavy hmotných bodov i tuhého telesa. Okrem tohto posuvného pohybu sústavy treba mať na zreteli aj otáčavý pohyb sústavy hmotných bodov okolo ťažiska. Výsledné sily pôsobiace na jednotlivé body sústavy hmotných bodov možno nahradiť výslednou silou F v ťažisku, ktorá zapríčiňuje posuvný pohyb sústavy ako celku, a momentom sily M, ktorý zas vyvoláva otáčanie sústavy okolo ťažiska. V ďalších kapitolách si rozoberieme práve tento pohyb vzhľadom na ťažisko a odvodíme výsledky, ktoré budeme môcť použiť najmä pri pohybe tuhého telesa.

7.6 Impulzové vety

Druhý Newtonov zákon platí len pre jeden hmotný bod. Jeho zovšeobecnenie pre sústavu hmotných bodov, resp. tuhé teleso formulujú tzv. impulzové vety.

I. impulzová veta

Podľa druhého pohybového zákona je časová zmena hybnosti hmotného bodu rovná výslednej sile naň pôsobiacej. V sústave hmotných bodov môžeme pre každý jeden písať

$$\frac{\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \ ,$$

kde $i = 1, 2, ..., n$ a $\vec{p_i} = m_i\vec{v_i}$ je hybnosť $i-$teho bodu. Prvý člen $\vec{F_i}$ je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na $i-$ty hmotný bod, druhý člen je výslednica vnútorných síl na bod i. Sčítaním všetkých rovníc získame celkovú časovú zmenu hybnosti sústavy, pričom výslednica vnútorných síl medzi všetkými bodmi sústavy je rovná nule (akcia reakcia). Sumáciu potom zapíšeme ako

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \ . \tag{7.14}$$

Ak označíme $\vec{p} = \Sigma_i \vec{p}_i$ ako celkovú hybnosť sústavy hmotných bodov a výslednicu všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov ako $\vec{F} = \Sigma_i \vec{F}_i$, môžeme písať **I. impulzovú vetu** v tvare

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \ . \tag{7.15}$$

Zovšeobecnený druhý Newtonov zákon pre sústavu hmotných bodov, teda I. impulzová veta hovorí, že **časová zmena celkovej hybnosti sústavy je rovná výslednej vonkajšej sile pôsobiacej na sústavu hmotných bodov.**

Pri riešení príkladov pracujeme s pojmom izolovaná sústava, t. j. sústava, na ktorú nepôsobí vonkajšia sila, a teda platí $\vec{F} = \vec{0}\,N$. Z I. impulzovej vety pre ňu vyplývajú nasledujúce dôsledky:

- Celková hybnosť izolovanej sústavy hmotných bodov je konštantná, z čoho vyplýva **zákon zachovania celkovej hybnosti izolovanej sústavy hmotných bodov**:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n = \text{konšt.} \ . \tag{7.16}$$

- Celková mechanická energia izolovanej sústavy hmotných bodov je konštantná, z čoho vyplýva **zákon zachovania celkovej energie izolovanej sústavy hmotných bodov**.

- Hmotný stred izolovanej sústavy sa nachádza v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, z čoho vyplýva zákon pohybu hmotného stredu izolovanej sústavy hmotných bodov.

II. impulzová veta

Majme sústavu hmotných bodov, na ktorú pôsobí vonkajšia sila $\vec{F}$. Na jeden hmotný bod s hmotnosťou m_i a hybnosťou $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ pôsobí časť vonkajšej sily $\vec{F}_i$ a súčet vnútorných síl $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\vec{F}_{i,j}$. Moment týchto síl vzhľadom na ľubovoľý vzťažný bod O je

$$M_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \;, \tag{7.17}$$

kde vektor $\vec{r}_i$ určuje polohu $i-$teho hmotného bodu sústavy vzhľadom na vzťažný bod O. Uvažovaný $i-$ty hmotný bod vzhľadom na vzťažný bod O má moment hybnosti $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, ktorého súvis s momentom sily je daný pohybovou rovnicou $(dL/dt = M)$. Na tomto základe potom môžeme časovú zmenu momentu hybnosti hmotného bodu písať ako

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = M_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} \;, \tag{7.18}$$

čo predstavuje sústavu n rovníc pre $i = 1, 2, ..., n$. Sčítaním rovníc dostaneme časovú zmenu momentu hybnosti celej sústavy. Vzniknutý vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov $\Sigma_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ predstavuje výslednicu momentov všetkých vonkajších síl $\vec{M} = \Sigma_i \vec{M}_i$ a vektorový súčet momentov hybností jednotlivých hmotných bodov $\Sigma_i \vec{L}_i$ predstavuje celkový moment hybnosti sústavy $\vec{L}$. Z predchádzajúcich úvah vieme, že dvojitá suma v rovnici predstavuje vektorový súčet momentov všetkých vnútorných síl, ktorý je nulový. Po uvedených označeniach dostaneme rovnicu

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \;, \tag{7.19}$$

ktorá sa nazýva **II. impulzová veta**. Z nej vyplýva, že **vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy hmotných bodov.**

Pre izolovanú sústavu je výsledný moment síl $\vec{M}$ nulový, čiže celkový moment hybnosti $\vec{L}$ je konštantný, z čoho vyplýva **zákon zachovania momentu hybnosti sústavy** $\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = konšt.$. Vo všeobecnosti môžu tiež momenty jednotlivých síl pôsobiť v smere s rovnakou i opačnou orientáciou. Môže teda dôjsť k situácii, že sa otáčavé účinky jednotlivých síl navzájom vyrušia - teleso nebude vykonávať otáčavý pohyb. Túto situáciu popisuje **momentová veta: Otáčavý účinok síl pôsobiacich na tuhé teleso sa navzájom ruší, ak je vektorový súčet momentov všetkých síl vzhľadom na určitú os rovný nule.** Na základe momentovej vety môžeme určiť polohu ťažiska telesa, veľkosť sily alebo jej polohy aby bolo teleso v pokoji a pod.

7.7 Kinetická energia tuhého telesa

7.7.1 Translačný pohyb tuhého telesa

Jedným zo základných pohybov je translačný, čiže posuvný pohyb. Pri tomto pohybe sa všetky body telesa pohybujú po rovnobežných trajektóriách a majú v danom čase rovnakú rýchlosť a zrýchlenie. Kinetická energia takto pohybujúcej sa sústavy hmotných bodov je súčet jednotlivých kinetických energií hmotných bodov. Ak však zoberieme do úvahy fakt, že rýchlosti v_i všetkých bodov sústavy pri tomto type pohybu sú rovnaké a totožné s rýchlosťou ťažiska $v_i = v_T$, môžeme ju vybrať pred sumu a sumácia cez jednotlivé hmotnosti dá hmotnosť telesa m ako v nasledujúcej rovnici

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n\, v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_T^2 = \frac{1}{2}v_T^2\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2}m\, v_T^2\ . \end{aligned} \tag{7.20}$$

Tento vzťah je úplne identický so vzťahom pre kinetickú energiu hmotného bodu (4.28).

7.7.2 Rotačný pohyb tuhého telesa okolo osi

Tak ako posuvnému pohybu telesa sme priradili kinetickú energiu, tak rotujúcemu telesu zodpovedá kinetická rotačná energia. Teraz si ukážeme ako ju vypočítame. Známy vzťah $\frac{1}{2}m\, v^2$ (4.28) platí len pre kinetickú energiu jednej častice alebo tuhého telesa vykonávajúceho len posuvný pohyb. Pre výpočet kinetickej energiu rotujúceho telesa nie je priamo použiteľný. Nevieme, akú veličinu treba dosadiť za v.

Z technického hľadiska je dôležitý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi. Skôr ako vyjadríme rovnice opisujúce tento pohyb, hľadajme základné vlastnosti týchto rovníc. Predovšetkým všetky body telesa, a teda aj ťažisko, vykonávajú pohyb po kružnici so stredom na osi otáčania (často sa ťažisko nachádza na osi, takže sa nepohybuje). Časovo závislým parametrom je teda uhol pootočenia telesa okolo osi. Rotáciu charakterizujú kinematické veličiny rotačného pohybu: uhol otočenia α, uhlová rýchlosť ω a uhlové zrýchlenie ε. Považujeme teleso (všeobecne každé rotujúce teleso) za sústavu pohybujúcich sa častíc s rôznymi rýchlosťami. Rotačnú energiu takéhoto telesa potom môžeme vypočítať ako súčet kinetických energií jednotlivých častíc, t. j.:

$$E_r = \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n\, v_n^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 \ ,$$

pričom hmotnosť každej i-tej častice sme označili ako m_i a jej rýchlosť v_i. Získaný vzťah je však pre výpočet rotačnej energie rotujúceho telesa nepraktický. Častice sa pohybujú rôznymi rýchlosťami a dokonca aj rôznymi smermi. Ak si však uvedomíme, že ide o pohyb rotujúceho telesa okolo určitej osi, môžeme daný vzťah veľmi pekne upraviť. Vyjadríme si rýchlosť každej častice pomocou uhlovej rýchlosti, pomocou ktorej môžeme charakterizovať otáčavý pohyb, ako: $v_i = \omega\, r_i$. Použitím spomenutého vzťahu môžeme predošlú rovnicu upraviť na

$$E_r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\omega\, r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\right)\omega^2 \ . \tag{7.21}$$

Veličina v zátvorke po poslednej úprave záleží na rozložení hmoty telesa vzhľadom na otáčanie. Pomenujeme ju **moment zotrvačnosti telesa** J vzhľadom na os otáčania a jeho jednotka je (kg/m^2). Hodnota momentu zotrvačnosti telesa závisí od umiestnenia osi otáčania a nezávisí od uhlovej rýchlosti otáčavého pohybu. Dané tvrdenie platí aj všeobecne. Pomocou definície momentu zotrvačnosti

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 \ , \tag{7.22}$$

získame z rovnice (7.21) pre výpočet **rotačnej energie rotujúceho telesa** zjednodušený vzťah:

$$E_r = \frac{1}{2}J\,\omega^2 \ . \tag{7.23}$$

Všimnime si podobnosť rovnice (7.23) pre rotačnú energiu otáčajúceho sa tuhého telesa so vzťahom: $\frac{1}{2}m\, v_T^2$ (7.20), ktorý vyjadruje jeho kinetickú energiu pri posuvnom pohybe. V oboch vzťahoch sa vyskytuje faktor 1/2. Hmotnosť m vo vzťahu pre kinetickú energiu posuvného pohybu predstavuje "mieru zotrvačnosti". V prípade otáčania sa vo výraze pre E_r objavuje moment zotrvačnosti J, ktorý tiež možno chápať ako "mieru zotrvačnosti" telesa pri jeho rotácii. V oboch vzťahoch vystupuje druhá mocnina príslušnej rýchlosti (rýchlosť posuvného pohybu v_T, príp. rýchlosť otáčavého pohybu ω). Obidva výrazy predstavujú rovnaký typ energie, líšia sa len spôsobom zápisu v závislosti od pohybu telesa.

Všeobecný pohyb telesa v každom okamihu možno popísať posuvným pohybom s rýchlosťou ťažiska v_T a rotáciou s uhlovou rýchlosťou ω okolo osi rotácie telesa. **Celková kinetická energia tuhého telesa** sa dá potom vyjadriť ako súčet kinetickej energie posuvného pohybu a energie rotačného pohybu vo vzťahu:

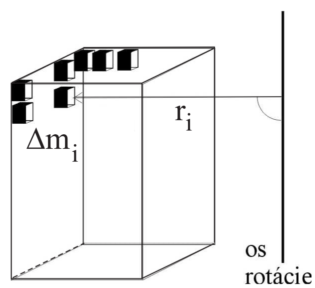
$$E_r = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J \,\omega^2 \ , \tag{7.24}$$

kde m je hmotnosť telesa a J moment zotrvačnosti telesa okolo rotačnej osi pohybu v danom okamihu.

7.8 Moment zotrvačnosti

Vzťahom (7.22) sme definovali moment zotrvačnosti tuhého telesa skladajúceho sa z konečného počtu hmotných bodov. Ak chceme nájsť moment zotrvačnosti tuhého telesa ako je valec alebo koleso, rozdelíme ho na hmotnostné elementy (obr. 7.3), ktoré možno charakterizovať fyzikálnymi veličinami: hustota ρ_i, objem ΔV_i a hmotnosť $\Delta m_i = \rho_i \, \Delta V_i$. Vzťah (7.22) potom nadobudne tvar:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \, r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta V_i \, r_i^2 \ .$$



Obrázok 7.3: Rozdelenie telesa na hmotnostné elementy Δm_i pri určení jeho momentu zotrvačnosti.

Daný vzťah možno zovšeobecniť na teleso, ak sumáciu nahradíme integráciou cez objem telesa a elementárnu hmotnosť umiestnenú v objeme $\mathrm{d}V$ budeme popisovať pomocou hustoty telesa $\rho(r)$ ako funkciu r

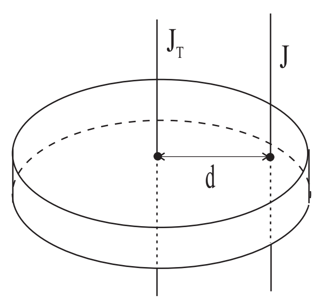
$$J = \int_V r^2 \,\mathrm{d}m = \int_V \rho(r)\, r^2 \,\mathrm{d}V \ , \tag{7.25}$$

kde r je kolmá vzdialenosť elementu telesa dm od osi rotácie s využitím d$m = \rho\, dV$. Výpočet momentu zotrvačnosti telesa integrálom (7.25) vzhľadom na niektorú os môže byť aj prácnou záležitosťou. V prípade, že hustota telesa je v celom objeme konštantná, a teleso má určitú priestorovú symetriu, výpočet sa dá zvládnuť pomerne jednoducho.

7.8.1 Steinerova veta

V predchádzajúcich odsekoch sme zaviedli pojem moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov, resp. tuhého telesa vzhľadom na istú os, ktorý možno vyrátať pomocou vzťahov (7.22), (7.25). Pri výpočte momentu zotrvačnosti vzhľadom na inú os ako máme vypočítané (obr. 7.4), je výhodné použiť **Steinerovu vetu**, ktorá hovorí: **moment zotrvačnosti J tuhého telesa vzhľadom na ľubovoľnú os sa rovná momentu zotrvačnosti J_T tohto telesa vzhľadom na os paralelnú s danou osou a prechádzajúcu ťažiskom telesa T plus súčin hmotnosti telesa a štvorca vzdialenosti d medzi týmito osami**

$$J = J_T + m\, d^2 \,. \tag{7.26}$$



Obrázok 7.4: Aplikácia Steinerovej vety.

Pre niektoré jednoduché homogénne telesá sú momenty zotrvačnosti uvedené v nasledujúcej tabuľke a z definície Steinerovej vety si môžeme prepočítať ich momenty zotrvačnosti vzhľadom na ľubovoľnú os.

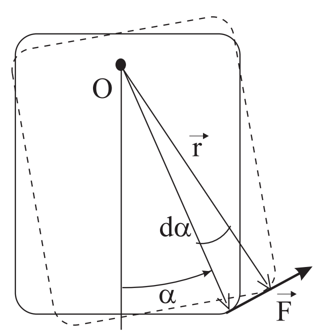
7.9 Pohybová rovnica telesa pri otáčaní okolo osi

Teleso otáčajúce sa okolo pevnej osi uhlovou rýchlosťou ω má rotačnú energiu $E_r = 1/2\, J\, \omega^2$ (7.23). Ak na teleso nepôsobia vonkajšie sily, bude E_r

Tabuľka 7.1: Momenty zotrvačnosti jednoduchých homogénnych telies.

Valec s hmotnosťou m s polomerom r vzhľadom na geometrickú os	$J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$
Valec s hmotnosťou m s polomerom r vzhľadom na obvodovú priamku	$J = \frac{3}{2}\,m\,r^2$
Tyč s hmotnosťou m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč: prechádzajúcu koncovým bodom tyče	$J = \frac{1}{3}\,m\,l^2$
Tyč s hmotnosťou m a dĺžky l zanedbateľného prierezu vzhľadom na os kolmú na tyč: prechádzajúcu stredom tyče	$J = \frac{1}{12}\,m\,l^2$
Guľa s hmotnosťou m a polomerom r vzhľadom na os prechádzajúcu jej stredom	$J = \frac{2}{5}\,m\,r^2$

konštantná a otáčanie bude rovnomerné so stálou uhlovou rýchlosťou. Aby nastala zmena uhlovej rýchlosti, a tým aj rotačnej energie, je treba pôsobenie vonkajších síl. Ich práca sa podobne ako v prípade posuvného pohybu bude rovnať zmene rotačnej energie. Z tejto podmienky môžeme odvodiť pohybovú rovnicu telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi.



Obrázok 7.5: Pôsobenie vonkajšej sily F spôsobujúcej zmenu rotačnej energie

Ako sme už povedali v predošlých odsekoch, všetky vonkajšie sily pôsobiace na teleso môžeme nahradiť pomocou superpozície síl jednou silou F, ktorej pôsobisko bude vzdialené vo vzdialenosti r od osi otáčania (obr. 7.5). Výsledný moment vonkajších síl (4.7) môžeme napísať potom ako

$$M = r\,F\,. \tag{7.27}$$

Pri posunutí pôsobiska sily F o dl, sila vykoná elementárnu prácu

$$\mathrm{d}\,W = F\,\mathrm{d}l = F\,r\,d\alpha = M\,\mathrm{d}\alpha\,, \tag{7.28}$$

kde posunutie dl predstavuje časť dráhy po kružnici s polomerom r: $r\,\mathrm{d}\alpha$. Touto elementárnou prácou sa zmení rotačná energia E_r telesa o dE_r. Pohybová energia telesa pri nehybnej polohe osi otáčania závisí len od uhlovej rýchlosti. Teda jej zmena energie sa dá vyjadriť ako: $\mathrm{d}E_r = J\,\omega\,\mathrm{d}\omega$ a tá sa musí rovnať vykonanej práci dW, čím dostaneme vyjadrenie:

$$J\,\omega\,\mathrm{d}\omega = M\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Ak delíme túto rovnicu časom dt, v ktorom nastáva elementárne pootočenie telesa, dostaneme

$$J\,\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{dt} = M\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.29}$$

Podiel $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ je rovný okamžitej uhlovej rýchlosti a podiel $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ je zase rovný uhlovému zrýchleniu ε, takže dostávame

$$M = J\,\varepsilon\,. \tag{7.30}$$

To je pohybová rovnica telesa konajúceho otáčavý pohyb okolo pevnej osi. Hovorí, že súčin momentu zotrvačnosti telesa k osi rotácie a uhlového zrýchlenia je rovný momentu všetkých vonkajších síl vzhľadom na pevnú os rotácie. Pozorujeme analógiu s pohybovou rovnicou pre posuvný pohyb $F = m\,a$. Hmotnosť telesa zastupuje moment zotrvačnosti, ktorý prihliada k rozloženiu hmotnosti okolo osi rotácie, zrýchlenie je tu vyjadrené uhlovým zrýchlením a momentom sily, lebo ide o otáčavý pohyb. Rovnica (7.30) platí len pre rotáciu okolo pevnej osi.

Pri rotácii okolo pevnej osi má vektor uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ v priestore stály smer a z pôsobiaceho momentu sa uplatňuje zložka $\vec{M}$, ktorá má tú istú orientáciu ako os rotácie. Pretože moment zotrvačnosti J vzhľadom na pevnú os v telese je konštanta, môžeme **pohybovú rovnicu** (7.30) písať aj vo vektorovom tvare

$$\vec{M} = J\,\vec{\varepsilon} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\,\vec{\omega})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7.31}$$

Táto rovnica nie je nič iné ako II. impulzová veta (7.19) aplikovaná na rotáciu telesa okolo pevnej osi. Príslušný moment hybnosti v danom prípade je určený súčinom

$$\vec{L} = J\,\vec{\omega} \tag{7.32}$$

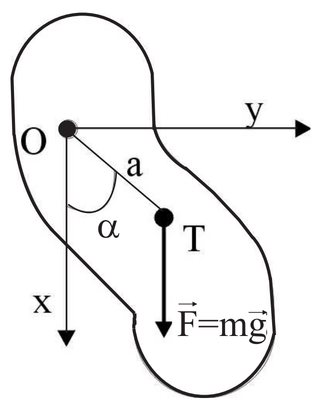
a $\vec{L}$ je vektor, ktorý leží v osi rotácie.

7.9.1 Fyzikálne kyvadlo

Tuhé teleso, ktoré môže kmitať okolo pevnej vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho hmotným stredom (ťažiskom) sa volá fyzikálne kyvadlo (obr. 7.6). Vzdialenosť ťažiska T od osi rotácie O nech je a a moment tiažovej sily vzhľadom na os O je $M = -m\,g\,a\,\sin\,\alpha$. Moment tiažovej sily pôsobí proti výchylke a snaží sa priviesť kyvadlo späť do rovnovážnej polohy (preto ho píšeme so záporným znamienkom). Pohyb kyvadla sa dá popísať pohybovou rovnicou (7.30), ktorá má pre tento prípad tvar

$$M = J\,\varepsilon = J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} = -m\,g\,a\,\sin\,\alpha\,, \tag{7.33}$$

kde J je moment zotrvačnosti k osi O.



Obrázok 7.6: Pôsobenie tiažovej sily vo fyzikálnom kyvadle pri vychýlení o uhol α okolo osi neprechádzajúcej ťažiskom.

Po úprave predošlej rovnice dostaneme

$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + m\,g\,a\,\sin\,\alpha = 0\,, \tag{7.34}$$

čo je diferenciálna rovnica druhého rádu s veľmi komplikovaným riešením, ktoré možno napísať len v tvare nekonečného radu. Riešenie rovnice (7.34) sa však veľmi zjednoduší, ak vezmeme do úvahy iba malé kmity kyvadla, t. j. pre malé uhly α, keď možno nahradiť $\sin\alpha \doteq \alpha$. Rovnicu môžeme potom písať ako

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \omega^2\,\alpha = 0, \qquad \text{kde} \qquad \omega^2 = \frac{m\,g\,a}{J} \tag{7.35}$$

a jej riešenie má jednoduchý tvar (presvedčíte sa dosadením)

$$\alpha = \alpha_m\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)\ , \tag{7.36}$$

kde α_m je amplitúda uhlovej výchylky a φ_0 je tzv. fázová konštanta, obe hodnoty sú určené počiatočnými podmienkami. Veličina ω určuje kruhovú frekvenciu kmitov a **perióda kmitov kyvadla** (doba kmitu) T teda je

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,a}}\ . \tag{7.37}$$

7.9.2 Matematické kyvadlo

Je to fiktívne kyvadlo, pričom jeho hmotnosť je sústredená v hmotnom bode zavesenom na nehmotnom závese dĺžky l. Takýto hmotný bod s hmotnosťou m pri svojom kmitavom pohybe má moment zotrvačnosti $J = m\,l^2$ (predpokladáme, že os otáčania je v mieste uchytenia). Pre periódu kmitov matematického kyvadla môžeme podľa (7.37) rovno napísať

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m\,l^2}{m\,g\,l}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ . \tag{7.38}$$

Vidíme, že perióda kmitov matematického kyvadla nezávisí od hmotnosti hmotného bodu, ale len od dĺžky závesu. Redukovanou dĺžkou fyzikálneho kyvadla l_{red} rozumieme takú dĺžku závesu matematického kyvadla, ktoré by sa kývalo s rovnakou periódou ako fyzikálne kyvadlo. Porovnaním (7.37) a (7.38) zistíme že: $l_{red} = J/m\,l$.

7.9.3 Torzné kyvadlo

Pohyb torzného kyvadla spôsobujú pružné sily, ktoré vznikajú pri skrúcaní vlákna alebo tyče. Torzné kyvadlo môže byť realizované pomocou dosky upevnenej v jej strede na zvislom vlákne (obr. 7.7). Z experimentov vyplýva, že súvis medzi momentom síl $\vec{M}$, ktoré spôsobujú otáčavý pohyb okolo pevnej osi a uhlom pootočenia α z rovnovážnej polohy je daný vzťahom

$$M = -M_0\,\alpha\ , \tag{7.39}$$

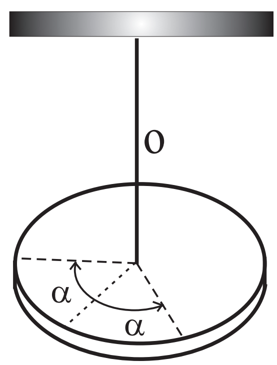
M_0 je torzná tuhosť vlákna, ktorá je určená jeho elastickými vlastnosťami a geometrickými rozmermi. Pre moment sily súčasne platí pohybová rovnica

$$M = J\,\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2}\ . \tag{7.40}$$

Porovnaním s rovnicou (7.39) a jednoduchou úpravou dostaneme pohybovú rovnicu torzného kyvadla

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \omega^2\,\alpha = 0, \qquad \text{kde} \qquad \omega^2 = \frac{m\,g\,a}{J}\ , \tag{7.41}$$

v ktorej $\omega^2 = M_0/J$.



Obrázok 7.7: Znázornenie pohybu torzného kyvadla okolo zvislej osi o. Kyvadlový pohyb sa uskutočňuje vo vodorovnej rovine.

Riešenie pohybovej rovnice môže byť vyjadrené pomocou závislosti

$$\alpha = \alpha_m\,\sin(\omega\,t + \varphi_0)\ , \tag{7.42}$$

v ktorej α_m je amplitúda uhlovej výchylky z rovnovážnej polohy. Hodnota fázovej konštanty φ_0 závisí od voľby začiatku merania času. Z rovnice (7.42) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva periodický pohyb s periódou pohybu

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{J}{M_0}}\ . \tag{7.43}$$

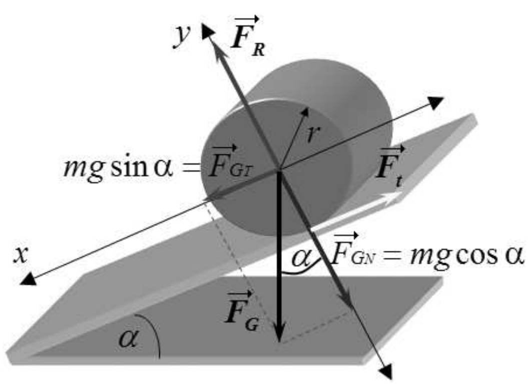
Výpočtom je možné ukázať, že torzná tuhosť pre vlákno kruhového prierezu polomeru r a dĺžky l má hodnotu

$$M_0 = \frac{\pi\, G\, r^4}{2\, l}\ , \tag{7.44}$$

kde G je modul pružnosti v šmyku materiálu, z ktorého je vlákno zhotovené. Modul pružnosti v šmyku G môže byť určený meraním periódy torzného kyvadla. Pre jeho výpočet môžeme použiť vzťah, ktorý dostaneme elimináciou torznej tuhosti M_0 z predchádzajúcich dvoch rovníc.

7.10 Pohyb valca po naklonenej rovine

Na príklade homogénneho telesa kruhového prierezu (valec, guľa) ktoré sa valí vplyvom svojej tiaže dole po naklonenej rovine si ukážeme výpočet zrýchlenia ťažiska telesa a_T a jeho rýchlosti v_T, ktorou sa pohybuje teleso po prejdení dráhy s, keď v čase $t = 0\,s$ bolo v pokoji. Teleso má polomer r a hmotnosť m, a naklonená rovina zviera uhol α s vodorovnou rovinou.



Obrázok 7.8: Teleso valiace sa po naklonenej rovine a sily, ktoré na neho pôsobia.

Na obrázku 7.8 sú znázornené sily, ktoré pôsobia na teleso: tiažová sila $\vec{F}_G$, reakcia podložky $\vec{F}_R$, ktorej pôsobisko sme posunuli pozdĺž jej vektorovej priamky do stredu telesa a trecia sila $\vec{F}_t$ pôsobiaca v mieste dotyku podložky a telesa. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že hmotnosť telesa je rozložená symetricky vzhľadom na os rotácie, a teda ťažisko splýva s geometrickým stredom telesa. Keďže sa teleso dotýka podložky nepatrnou plôškou, môžeme valivé trenie zanedbať. Keďže uvažujeme o pohybe okolo osi prechádzajúcej stredom telesa, budú momenty tiažovej sily $\vec{F}_G$ a reakcie podložky $\vec{F}_R$ rovné nule, a teda neprispievajú k urýchľovaniu otáčavého pohybu. Roztáčanie telesa proti smeru hodinových ručičiek spôsobuje výhradne trecia sila $\vec{F}_t$, ktorej rameno sily je r.

Súradnicovú sústavu sme si zvolili tak, že os x je rovnobežná s naklonenou rovinou a os y je kolmá na naklonenú rovinu. Podľa vety o pohybe ťažiska je zrýchlenie ťažiska dané pohybovou rovnicou (7.11)

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_T\ , \tag{7.45}$$

ktorú si môžeme rozpísať zvlášť pre x-ovú a y-ovú zložku

$$m\,a_{Tx} = m\frac{\mathrm{d}^2 x_T}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_x = F_{GT} - F_t\ , \tag{7.46}$$

$$m\,a_{Ty} = m\frac{\mathrm{d}^2 y_T}{\mathrm{d}t^2} = \sum F_y = F_{GN} - F_R, \tag{7.47}$$

kde x_T a y_T predstavujú súradnice ťažiska telesa. Keďže pohyb telesa sa bude uskutočňovať len v smere osi x a nie v smere kolmom na podložku (y-ová os), kde je ťažisko v pokoji, môžeme rovnicu (7.47) položiť rovnú nule

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_T}{dt^2} = 0 \quad \text{takže} \quad F_{GN} - F_R = 0\ , \tag{7.48}$$

čiže

$$F_{GN} = m\,g\,\cos\,\alpha = F_R\ . \tag{7.49}$$

Dostali sme, že tlaková sila podložky F_R pôsobiaca na teleso je rovnako veľká ako normálová zložka tiažovej sily F_{GN}. Keďže sily ležia na jednej priamke, navzájom sa rušia. Vzhľadom na to, že v prvej pohybovej rovnici sú dve neznáme (a_{Tx} a F_t), je potrebná ešte jedna pohybová rovnica, ktorá súvisí s otáčavým pohybom telesa a momentom trecej sily vzhľadom na os otáčania, ktorá prechádza stredom či už valca alebo gule

$$I\,\varepsilon = \sum M = I_T\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = F_t\,r\ . \tag{7.50}$$

Ak sa bude teleso valiť po naklonenej rovine bez šmýkania, bude pre rýchlosť ťažiska v každom okamihu platiť

$$v_T = \frac{\mathrm{d}x_T}{dt} = \omega\,r\ . \tag{7.51}$$

Pre zrýchlenie ťažiska potom dostávame

$$a_T = \frac{\mathrm{d}v_T}{dt} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \,. \tag{7.52}$$

Dosadením tohto výrazu do prvej pohybovej rovnice dostaneme

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m\,g\,\sin\,\alpha - F_t \,. \tag{7.53}$$

Vyjadrením trecej sily F_t z tretej pohybovej rovnice (7.50) a dosadením do predchádzajúcej dostaneme

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m\,g\,\sin\,\alpha - \frac{I_T}{r}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \,, \tag{7.54}$$

$$m\,r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\left(\frac{I_T}{m\,r^2} + 1\right) = m\,g\,\sin\,\alpha \tag{7.55}$$

a odtiaľ využitím rovnice (7.52) pre hľadané zrýchlenie dostávame

$$a_T = \frac{g\sin\,\alpha}{\frac{I_T}{mr^2} + 1} \,. \tag{7.56}$$

Vzhľadom na to, že zrýchlenie telesa je konštantné a teleso sa začína rozbiehať z pokoja, bude vykonávať rovnomerne zrýchlený pohyb pre dráhu ktorého platí

$$s = \frac{1}{2}\,a_T\,t^2 \,. \tag{7.57}$$

Odtiaľ pre čas, za ktorý prejde dráhu s môžeme písať

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_T}} \,. \tag{7.58}$$

Pre hľadanú rýchlosť ťažiska telesa v_T pohybujúceho sa z pokoja rovnomerne zrýchleným pohybom po prejdení dráhy s potom platí

$$v_T = a_T\,t \,, \tag{7.59}$$

$$v_T = a_T\sqrt{\frac{2s}{a_T}} = \sqrt{2\,s\,a_T} \,, \tag{7.60}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2\,s\,g\sin\,\alpha}{\frac{I_T}{m\,r^2} + 1}} \,. \tag{7.61}$$

Ak teraz budeme uvažovať, že po naklonenej rovine sa valí valec ($I_{Tv} = 1/2\, m\, r^2$, v prípade gule by to bolo $I_{Tg} = 2/5\, m\, r^2$), pre hľadané zrýchlenie ťažiska valca a_{Tv} a rýchlosť v_{Tv} dostávame

$$a_{Tv} = \frac{g \sin\,\alpha}{\frac{\frac{1}{2} m r^2}{m\, r^2} + 1} = \frac{2}{3} g\, \sin\,\alpha\;, \qquad (7.62)$$

$$v_{Tv} = \sqrt{\frac{2\, s\, g\, \sin\,\alpha}{\frac{\frac{1}{2} m\, r^2}{m\, r^2} + 1}} = \sqrt{\frac{4}{3} s\, g\, \sin\,\alpha}\;. \qquad (7.63)$$

Z predchádzajúcich vzťahov je možné vyjadriť veľkosť trecej sily F_t

$$F_t = \frac{I_T\, a_T}{r^2} = \frac{I_T}{r^2} \frac{g\, \sin\,\alpha}{\frac{I_T}{m\, r^2} + 1} = \frac{m\, g\, \sin\,\alpha}{1 + \frac{m\, r^2}{I_T}}\;. \qquad (7.64)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že veľkosť trecej sily F_t je menšia ako priemet tiažovej sily do smeru naklonenej roviny F_{GT}, ktorej veľkosť je $m\, g\, \sin\,\alpha$. Preto sa teleso bude valiť dole naklonenou rovinou zrýchleným pohybom. Valivý pohyb však nastane iba v tom prípade, ak trecia sila bude menšia ako maximálna statická trecia sila, čiže

$$F_t \;<\; \mu_s\, F_n = \mu_s\, m\, g\, \cos\alpha\;. \qquad (7.65)$$

Pre veľký uhol sklonu naklonenej roviny môže teda dôjsť k čiastočnému skĺzavaniu telesa.