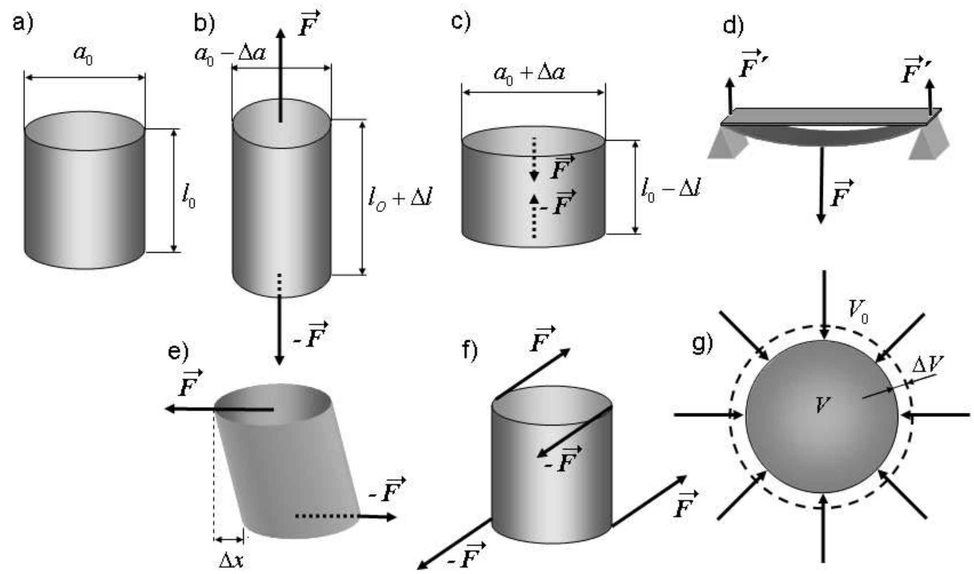
8 Mechanické vlastnosti tuhých látok

Pod mechanickými vlastnosťami tuhých látok rozumieme také vlastnosti, ktoré súvisia so zmenou tvaru telesa, jeho objemu účinkom vonkajších síl. Tieto zmeny nazývame **deformáciou**. Keď pevné teleso nadobudne pôvodný tvar po pôsobení vonkajších síl, hovoríme o **pružnej (elastickej) deformácii** (napr. napríklad skrátenie pružiny v pere), kedy je deformácia dočasná. Pri **tvárnej (plastickej) deformácii** nastane trvalá zmena telesa (napr. pri valcovaní alebo kovaní kovového predmetu).

Z mikroskopického hľadiska je deformácia tuhého telesa výsledkom zmien vo vzájomnom rozložení častíc tvoriacich teleso účinkom vonkajších síl.

Poznáme päť jednoduchých deformácií (obr. 8.1): **ťahom**, **tlakom**, **ohybom**, **šmykom** a **krútením**. Deformácia **ťahom** vznikne, keď na teleso budú pôsobiť dve rovnako veľké opačne orientované sily smerom von z telesa (obr. 8.1(b)) (napr. závesné lano výťahu). Ak sily budú smerovať dovnútra telesa, hovoríme o deformácii **tlakom** (obr. 8.1(c)) (napr. deformácia pilierov a podpier). Deformácia **ohybom** nastane napr. na nosníku podopretom na oboch koncoch, ak naň pôsobí sila kolmá na jeho pozdĺžnu os súmernosti (obr. 8.1(d)). Dolné vrstvy nosníka budú deformované ťahom, horné tlakom. Pri deformácii **šmykom** budú sily pôsobiť na hornú a dolnú podstavu a v rovinách podstáv (obr. 8.1(e)). Sily spôsobia posunutie jednotlivých vrstiev - šmyk, pričom sa ich vzdialenosť nezmení (napr. deformácia nitu alebo skrutky). Keď na koncoch tyče budú pôsobiť dve silové dvojice, pričom ich momenty budú rovnako veľké ale opačného smeru, vznikne deformácia **krútením** (obr. 8.1(f)) (napr. deformácia vrtákov). V technickej praxi sa však častejšie vyskytujú deformácie zložené z niekoľkých jednoduchých deformácií. Kryštalické materiály, špeciálne monokryštály sú vzhľadom na deformáciu tlakom alebo ťahom zväčša anizotropné, polykryštalické materiály s náhodnou distribúciou monokryštálov prejavujú izotropné vlastnosti. Teleso vystavené tlaku zo všetkých strán bude deformované **všestranným tlakom** (obr. 8.1(g)).



Obrázok 8.1: Deformácia telesa. a) nedeformovaný valec, b) deformácia valca ťahom, c) tlakom, d) deformácia kovovej dosky ohybom, e) deformácia valca šmykom, f) krútením, g) deformácia všestranným tlakom.

8.1 Hookov zákon a krivka deformácie

Pri pružne deformovanom pevnom telese budú na plochu ľubovoľného priečneho rezu pôsobiť z oboch strán sily pružnosti. V telese pri deformácii vznikne stav napätosti, ktorý charakterizujeme pomocou veličiny **normálové napätie** σ_n definované vzťahom

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \ , \tag{8.1}$$

kde F_n je veľkosť sily pružnosti pôsobiacej kolmo na plochu prierezu s obsahom S. Jednotkou normálového napätia je pascal[1] (Pa). Deformujúce sily spôsobia zmenu rozmerov deformovaného telesa. Ak napríklad pri deformácii ťahom

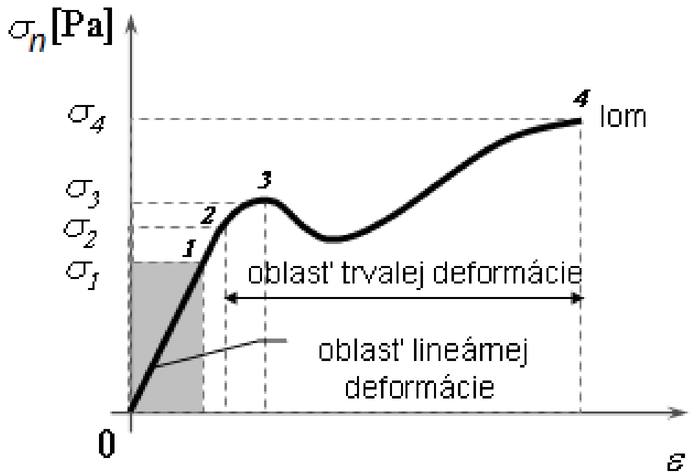
[1] BLAISE PASCAL (1623 – 1662) francúzsky matematik a fyzik. Venoval sa atmosférickému tlaku, jeho meraniu i zmene s nadmorskou výškou, čo vedel teoreticky vysvetliť. Objavil princíp tlakomeru.

sa tyč pôvodnej dĺžky l_0 predĺži na dĺžku l, zmenu dĺžky tyče charakterizuje veličina

$$\Delta l = l - l_0 \ , \tag{8.2}$$

ktorú nazývame **predĺženie**. V praxi sa častejšie používa **pomerné (relatívne) predĺženie** ε definované vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \ . \tag{8.3}$$



Obrázok 8.2: Krivka deformácie tyče z ocele. Časť grafu ležiaca v sivom obdĺžniku predstavuje oblasť lineárnej deformácie – platnosti Hookovho zákona. Medzou pružnosti σ_2 končí oblasť pružných deformácií a začína oblasť plastických deformácií, ktorá končí medzu pevnosti σ_4, kedy dochádza k porušeniu celistvosti materiálu.

Za pomoci trhacieho stroja a skúšobnej tyče sa v praxi experimentálne sleduje závislosť normálového napätia od pomerného predĺženia, pričom zaznamenaný graf funkcie $\sigma_n = f(\varepsilon)$ sa nazýva **krivka deformácie**. Na obrázku 8.2 je znázornená krivka deformácie skúšobnej tyče z mäkkej ocele. Na začiatku (oblasť **pružnej (elastickej) deformácie** - 1) je normálové napätie priamoúmerné deformácii (pomernému predĺženiu). Tento poznatok objavil v roku 1676 anglický fyzik R. Hooke[2], preto sa nazýva **Hookov zákon**.

[2]ROBERT HOOKE (1635 – 1703) britský všestranný fyzik, astronóm, rozumel sa chémii a venoval sa i architektúre. V roku 1662 prijal miesto plateného experimentátora v Royal Society, kde na ich zasadaniach predvádzal rôzne pokusy. Od roku 1665 pôsobil ako profesor geometrie na londýnskej Greshaw College.

V oblasti lineárnej deformácie je deformácia pružných telies priamoúmerná pôsobiacim silám

$$\sigma_n = E\,\varepsilon\ , \tag{8.4}$$

kde konštanta úmernosti E je **modul pružnosti** (tiež nazývaný **Youngov**[3] **modul**), ktorého rozmer je rovnaký, ako rozmer normálového napätia a udáva sa v N/m^2 (prípadne v Pa) (napr. pre oceľ $E = 220 \times 10^9\ Pa$). Bod 1 na krivke deformácie sa nazýva **medzou úmernosti** σ_1. Hookov zákon teda platí len pre normálové napätia, kedy $\sigma_n \leq \sigma_1$. Časť krivky, $1-2$ zodpovedá **dopružovaniu**. Keď na deformované teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily, deformácia nezanikne hneď, ale až po istom čase. Napr. ak zaťažíme na istý čas gumenú hadicu a následne odstránime záťaž, hadica sa vráti do polohy, kedy jej dĺžka bude o niečo väčšia, ako bola jej pôvodná dĺžka a až po istom čase deformácia zmizne. Dopružovanie však nastane iba v telesách, v ktorých nebolo vyvolané väčšie normálové napätie ako **medza pružnosti** σ_2 (bod 2). Pre niektoré látky je medza úmernosti a pružnosti rovnako veľká. V technickej praxi sa pod medzou pružnosti rozumie také napätie, pri ktorom zostáva trvalé predĺženie menšie ako $0,01$ až $0,003\,\%$ pôvodnej dĺžky. V tomto rozsahu je väčšina technicky dôležitých materiálov pružná, zvlášť oceľ. Medza pružnosti ohraničuje oblasť **pružných deformácií**. Pri vyšších napätiach nezmizne deformácia po odstránení deformačného napätia úplne, čo sa prejaví ako zvyšková deformácia. Teleso sa teda bude **deformovať nepružne (plasticky)** a dôjde k trvalej deformácii telesa. Oblasť **plastickej deformácie** predstavuje časť $2-3$ krivky deformácie. Napätie σ_3, pri ktorom nastáva náhle predĺženie materiálu, sa volá **medza klzu (medza prieťažnosti)**. Počiatočný úsek 3-4 zodpovedá **tečeniu materiálu**, kedy pri malej zmene normálového napätia dochádza k veľkej zmene relatívneho predĺženia, prípadne k nárastu deformácie dochádza aj bez zmeny napätia. Na konci tohto úseku dochádza k značnej zmene fyzikálnych vlastností deformovaného telesa a k **spevneniu materiálu**, ktoré končí dosiahnutím **medze pevnosti** σ_4. Prekročením medze pevnosti sa súdržnosť materiálu poruší, pričom sa tyč pretrhne (pre oceľ je medza pevnosti $350-800\,MPa$).

[3] THOMAS YOUNG ($1773-1829$) bol anglický matematik a fyzik. Zaoberal sa rôznymi oblasťami prírodných vied: svetlom a jeho šírením, tuhým telesom, energiou, filozofiou, jazykmi (13), medicínou i harmóniou v hudbe, a dokonca aj egyptskými hieroglyfmi.

Znalosť medze pružnosti a pevnosti má dôležitý význam pri výbere materiálov pre stavby a konštrukcie. Látka je **pružná**, keď pri veľkom relatívnom predĺžení je vyvolané normálové napätie menšie, ako je medza pružnosti (napr. oceľ je pružná do relatívneho predĺženia $\varepsilon = 1\%$). Ak sa bude medza pružnosti približovať medzi pevnosti, potom materiál patrí medzi **krehké** látky (napr. sklo, porcelán, mramor, liatina, ktorá sa pretrhne pri $\varepsilon = 0,45\,\%$).

Pri pôsobení ťahom na tyč dochádza popri jej predĺženiu v smere pôsobiacej sily súčasne aj k zmenšeniu jej priečneho rezu. Pre **pomerné (relatívne) priečne skrátenie**

$$\eta = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a_0 - a}{a_0}\ , \tag{8.5}$$

kde a_0 je jej priečny rozmer pred deformáciou a a je po deformácii (obr. 8.1(b)), platí

$$\eta = \frac{1}{m}\,\varepsilon = \frac{\sigma_n}{m\,E}\ , \tag{8.6}$$

kde m je **Poissonova konštanta** a jej prevrátená hodnota sa nazýva **Poissonovo číslo (pomer)**

$$\mu = \frac{1}{m} = \frac{\eta}{\varepsilon}\ , \tag{8.7}$$

ktoré charakterizuje pomer priečneho skrátenia k pozdĺžnemu predĺženiu. Tyč kruhového prierezu s rozmerom a_0 a pôvodnou dĺžkou l_0 deformovaná ťahom nadobudne nové rozmery a a l, pre ktoré zo vzťahov (8.2), (8.3) a (8.5) platí

$$l = l_0\,(1+\varepsilon) = l_0\left(1 + \frac{\sigma_n}{E}\right)\ , \tag{8.8}$$

$$a = a_0\,(1-\eta) = a_0\,(1-\mu\,\varepsilon) = a_0\left(1 - \mu\frac{\sigma_n}{E}\right) = a_0\left(1 - \frac{\sigma_n}{m\,E}\right)\ . \tag{8.9}$$

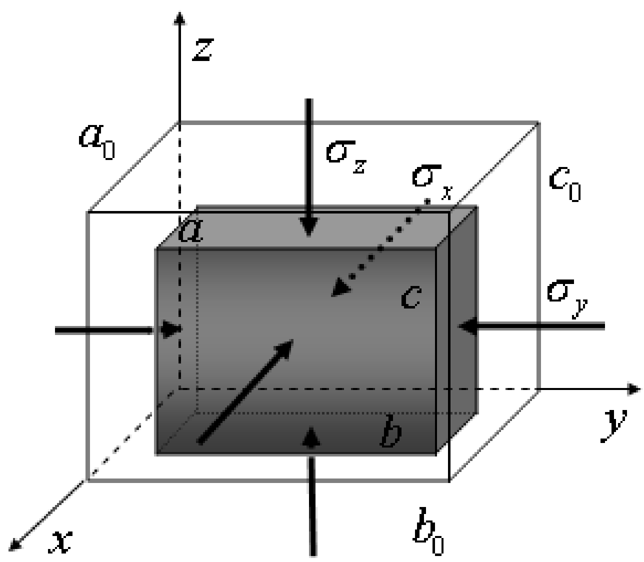
Predchádzajúce vzťahy, ktoré boli popísané pri namáhaní tyče ťahom platia aj pre namáhanie tlakom (predpokladáme ale tyč dostatočne krátku), pričom veličiny σ_n, ε a η majú záporné číselné hodnoty, čiže tyč sa tlakom v smere dĺžky skracuje a v priečnom smere predlžuje.

Podľa pôsobenia vonkajšej sily možno deformácie rozdeliť do dvoch základných skupín. Pôsobiacu silu možno rozdeliť na zložku, ktorá pôsobí kolmo na povrch a na zložku rovnobežnú s povrchom telesa. Kolmá zložka spôsobuje deformáciu telesa, ktorá sa prejavuje rozšírením alebo stlačením telesa (deformácia normálovým napätím). Druhá zložka sily, ktorá pôsobí rovnobežne s povrchom telesa spôsobuje posunutie (deformácia šmykovým napätím). Prípad deformácie šmykovým napätím je predmetom kapitoly 8.3.

8.2 Deformácia všestranným kolmým tlakom

Ak by sme kváder s počiatočnými rozmermi a_0, b_0, c_0 (obr. 8.3) ponorili do kvapaliny, v ktorej by bol v danom mieste tlak p, teleso by bolo vystavené tlaku zo všetkých strán, t. j. **všestrannému tlaku**. Objem izotropného telesa sa pri takomto tlaku zmenší, tvar však ostane rovnaký. Ak by pôsobil tlak len v jednom smere, napr. v smere hrany c_0, potom by sa hranol v tomto smere skrátil a v smere kolmom naopak predĺžil, takže by platili vzťahy

$$a = a_0(1+\eta), b = b_0(1+\eta), c = c_0(1-\varepsilon) \; . \tag{8.10}$$



Obrázok 8.3: Deformácia všestranným tlakom.

Ak bude tlak pôsobiť taktiež v smere b_0, bude v tomto smere pomerné pozdĺžne skrátenie ε, ale zároveň aj pomerné priečne predĺženie v smere hrán a_0 a c_0, takže z tejto úvahy pre rozmery kvádra vyplýva

$$a = a_0\,(1+2\,\eta)\,, b = b_0\,(1-\varepsilon+\eta)\,, c = c_0\,(1-\varepsilon+\eta) \; . \tag{8.11}$$

Nakoniec ak zarátame aj tlak pôsobiaci v smere a_0, bude aj v tomto smere pomerné pozdĺžne skrátenie ε a v priečnych smeroch pomerné priečne predĺženie η, takže konečná dĺžka hrán kvádra po deformácii bude

$$a = a_0\,(1-\varepsilon+2\,\eta)\,, b = b_0\,(1-\varepsilon+2\,\eta)\,, c = c_0\,(1-\varepsilon+2\,\eta) \; . \tag{8.12}$$

Tento spôsob kombinovanej deformácie založený na princípe superpozície tvrdí, že efekt kombinovaného zaťaženia na určitú štruktúru možno určiť ako súčet jednotlivých deformácií. Tento princíp možno použiť, ak zmeny závislé od napätia sú lineárne a deformácie vplyvom napätí sú malé a neovplyvňujú pôsobenia ostatných napätí. Vzhľadom na splnenie týchto predpokladov a predpokladu rovnakého tlaku zo všetkých strán môžeme pre objem deformovaného hranola písať

$$V = a_0\, b_0\, c_0\, (1 - \varepsilon + 2\,\eta)^3 \cong V_0\, [1 - 3\,(\varepsilon - 2\,\eta)] \;, \tag{8.13}$$

pričom sme zanedbali všetky členy druhého a vyššieho rádu, pretože pomerné deformácie ε a η malé.

Pre **pomernú zmenu objemu (objemové pretvorenie)** υ telesa podrobeného všestrannému tlaku platí

$$\upsilon = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = -3\,(\varepsilon - 2\,\eta) = -3\left(\frac{\sigma_n}{E} - 2\frac{\sigma_n}{m\,E}\right) = -\frac{3\,(m-2)}{m\,E}\sigma_n \;, \tag{8.14}$$

Z predchádzajúceho vzťahu vyplýva v zhode s Hookovým zákonom, že deformácia (v tomto prípade pomerná zmena objemu) je úmerná napätiu σ_n. V kvapalinách je zvykom napätie σ_n nazývať tlakom p. Podiel relatívneho úbytku objemu a tlaku, ktorý príslušné zmenšenie objemu spôsobuje sa nazýva **objemová stlačiteľnosť** χ

$$\chi = -\frac{1}{V_0}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \;. \tag{8.15}$$

Prevrátená hodnota objemovej stlačiteľnosti sa nazýva **modul objemovej pružnosti** K

$$K = \frac{1}{\chi} = -\frac{p}{\upsilon} = \frac{mE}{3\,(m-2)} = \frac{E}{3\,(1-2\mu)} \;. \tag{8.16}$$

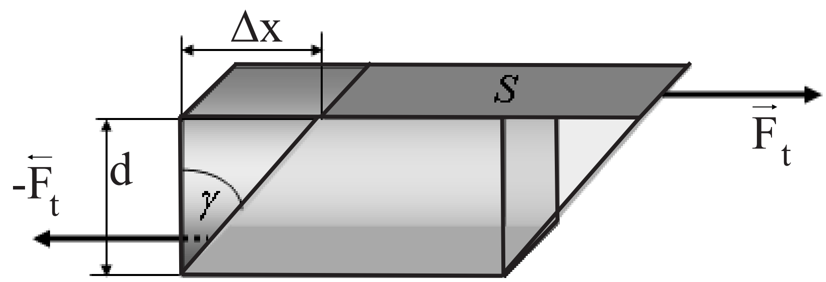
Modul objemovej pružnosti K je vždy kladný, inak by sa objem telesa stlačovaním zväčšoval, čo je v rozpore s realitou. Rovnako aj modul E musí byť kladný, takže aj výraz v zátvorke predchádzajúceho vzťahu musí byť kladný, z čoho vyplýva, že $\mu \simeq 0,5$. Zároveň $\mu > 0$ (pretože pri predlžovaní tyče sa zmenšuje jej prierez). Pre **Poissonovo číslo** teda platí

$$0 < \mu < \frac{1}{2} \;. \tag{8.17}$$

Z meraní vyplýva, že μ leží v intervale $1/4$ a $1/2$, priemerne býva asi $0,3$. Pre krajnú hodnota $\mu = 1/2$ alebo $m = 2$ je $\chi = 0$, t.j. $\Delta V = 0\,m^3$. Objem telesa sa teda zvyšovaním tlaku nemení a teleso sa chová ako **nestlačiteľné**.

8.3 Deformácia šmykom

Ak sa jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu budú posúvať po sebe bez toho, žeby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť, hovoríme o deformácii **šmykom**. Takáto deformácia nastane, keď napr. na hranol dostatočne malej výšky (aby nenastal ohyb) bude pôsobiť dotyčnicová sila $\vec{F_t}$ (obr. 8.4).



Obrázok 8.4: Deformácia šmykom.

Vplyvom tejto sily dôjde pri hranole s plochou podstavy S a hrúbkou d k posunutiu hornej steny voči spodnej podstave o hodnotu Δx. Podľa Hookovho zákona bude táto deformácia úmerná pôsobiacej sile. Je zrejmé, že veľkosť posunu Δx pri stálej pôsobiacej sile bude úmerná hrúbke hranolu d, pretože dotyčnicové sily medzi jednotlivými vrstvami musia byť rovnako veľké, keď nastane rovnováha a vrstvy budú v pokoji. Preto je posunutie medzi dvoma susednými vrstvami v celom hranole rovnaké a posun hornej vrstvy je úmerný vzdialenosti od pevnej podstavy. Pôsobením tangenciálnej sily F_t na hornú stenu hranola o ploche S vznikne **šmykové napätie** τ

$$\tau = \frac{F_t}{S} \, . \tag{8.18}$$

Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však k **skoseniu** γ **(natočeniu o uhol** γ niekedy označované aj **pomerné posunutie)**

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d} \, , \tag{8.19}$$

pretože pre malé uhly platí $tg\,\gamma \approx \gamma = \Delta x/d$. Hookov zákon pre šmyk potom nadobúda tvar

$$\gamma = k\,\tau = \frac{1}{G}\tau \qquad \text{alebo} \qquad \tau = G\,\gamma \, , \tag{8.20}$$

kde G je **modul pružnosti v šmyku** a jeho rozmer je taký istý ako pri ostatných moduloch ($Pa = N/m^2$). Z predchádzajúcej rovnice vyplýva (**Hookov zákon pre šmyk**):

Šmykové napätie je priamoúmerné skoseniu, pričom konštantou úmernosti je modul pružnosti v šmyku.

Z teórie pružnosti, ktorá skúma deformáciu bez prihliadnutia na molekulové procesy prebiehajúce v telese, vyplýva vzťah medzi modulom pružnosti v ťahu E, modulom pružnosti v šmyku G a Poissonovým číslom μ (prípadne Poissonovou konštantou m)

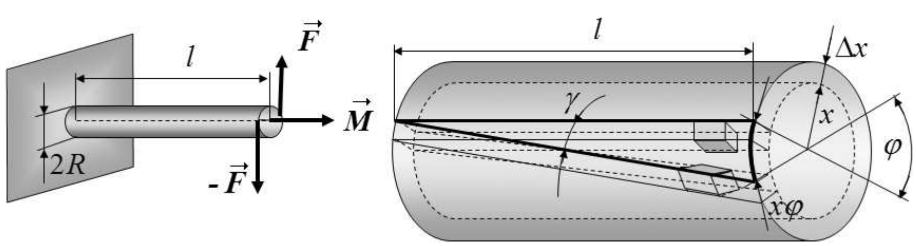
$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)} = \frac{m\,E}{2\,(m+1)}\ , \tag{8.21}$$

Keďže pri pružných telesách má Poissonovo číslo veľkosť $0 < \mu < \frac{1}{2}$ (8.17), z predchádzajúceho vzťahu všeobecne pre modul pružnosti v šmyku platí

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}\ . \tag{8.22}$$

8.4 Deformácia krútením

Deformáciu tuhého telesa spôsobenú krútením (torziou) možno previesť na deformáciu spôsobenú šmykom. Šmyk (presnejšie posunutie) však predstavuje homogénnu deformáciu, krútenie je deformácia nehomogénna. Deformácia krútením vzniká napr. pri krútení jedného konca tyče, ktorej druhý koniec je upevnený, prípadne pri namáhaní oboch koncov tyče dvojicami momentov síl navzájom opačného smeru, ktorých vektory sú rovnobežné s osou tyče. Pri krútení sa rôzne prierezy tyče pootočia o rôzne uhly a rôzne elementy toho istého prierezu posunú o rôznu vzdialenosť (obr. 8.5).



Obrázok 8.5: a) Deformácia tyče krútením - pôsobením dvojice síl $\vec{F}$. b) Elementárny hranolček sa deformuje ako pri šmyku.

Ak vyrežeme z tyče elementárnu trubicu s polomerom x a hrúbkou steny dx, môžeme si všimnúť, že elementárny hranolček sa deformuje podobne ako hranol z predchádzajúcej časti pri deformácii šmykom. Ak sa tyč dĺžky l skrúti na voľnom konci o uhol φ, pre skosenie γ platí

$$\gamma = \frac{x\,\varphi}{l}\ . \tag{8.23}$$

Toto skosenie vzniká šmykovým napätím τ

$$\tau = G\frac{x\,\varphi}{l}\ , \tag{8.24}$$

ktoré je dané podielom dotyčnicovej sily dF a plochy medzikružia dS $(dS = 2\,\pi\,x\,dx)$

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{G\,x\,\varphi}{l}\ . \tag{8.25}$$

Elementárny moment tejto dotyčnicovej sily vzhľadom na os tyče je

$$dM = x\,dF = x\,\tau dS = \frac{G\,\varphi}{l}x^2 dS = 2\,\pi\frac{G\,\varphi}{l}x^3 dx\ . \tag{8.26}$$

Celkový krútiaci moment elementárnych síl dostaneme integráciou v hraniciach od $x = 0\,m$ po $x = R$

$$M = \int_0^R 2\pi\frac{G\,\varphi}{l}x^3 dx = \frac{\pi\,G\,\varphi}{2\,l}R^4\ . \tag{8.27}$$

Odtiaľ pre uhol pootočenia φ (v radiánoch) platí

$$\varphi = \frac{2\,M\,l}{\pi\,G\,R^4}\ . \tag{8.28}$$

Ako vidieť z predchádzajúceho vzťahu, uhol pootočenia je priamoúmerný dĺžke tyče l a nepriamoúmerný štvrtej mocnine polomeru tyče R. Pomocou tohto vzťahu je možné určovať modul pružnosti v šmyku, kde zo známych parametrov tyče (dĺžka a prierez) určíme pri statickej metóde uhol pootočenia pôsobením známeho momentu dvojice síl.