10 Kmitanie

S kmitavými pohybmi sa stretávame všade okolo nás. Niekedy je kmitanie žiaduce (chvenie v prípade hudobných nástrojov), inokedy je nežiaduce (napr. kmitanie auta, práčky). Niekedy ho vnímame (chvenie struny, membrány v telefónnom reproduktore, slúchadle), inokedy si ho uvedomujeme veľmi málo (kmitanie molekúl vzduchu, ktoré prenášajú zvuk, kmitanie kremenných kryštálov v náramkových hodinkách).

V reálnom svete je kmitanie zvyčajne tlmené. Trecie sily a odpor prostredia postupne premieňajú mechanickú energiu na teplo, a tak sa pohyb postupne zmenšuje. Ak budeme energiu dopĺňať, nielenže zabránime stratám, ale za určitých podmienok sa môže výchylka pri kmitavom pohybe zväčšovať (napr. pohyb detí na hojdačke).

10.1 Harmonický pohyb

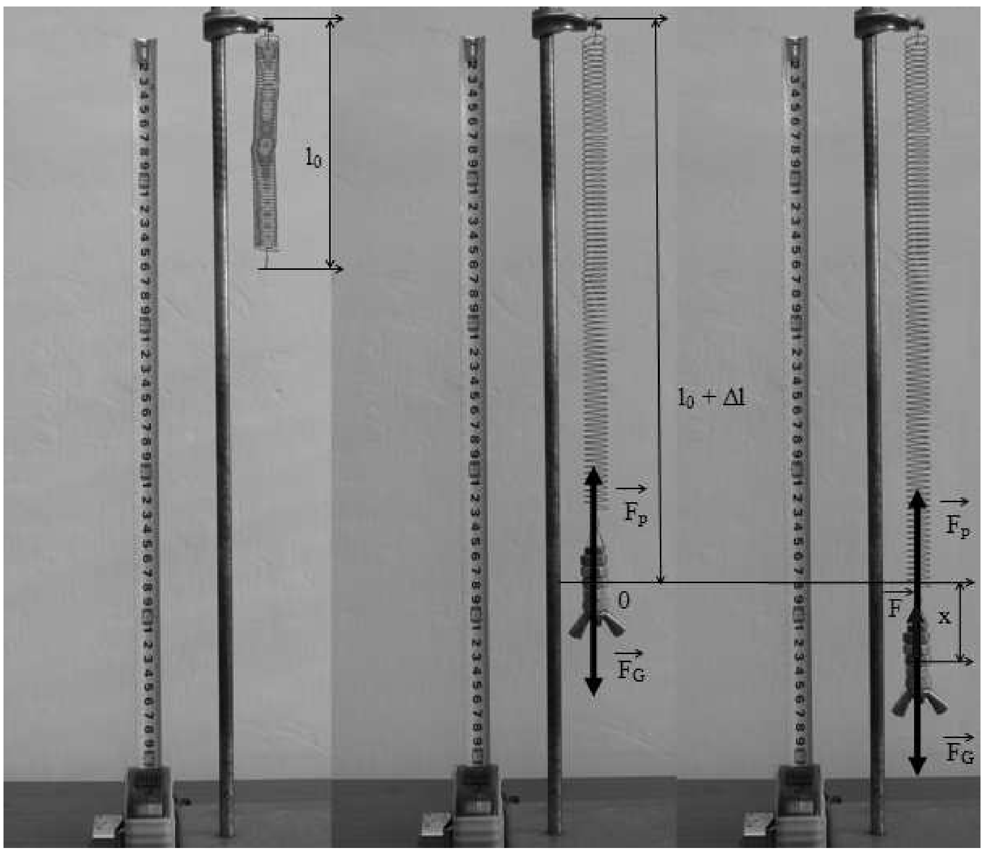
Akýkoľvek pohyb, ktorý sa opakuje v pravidelných intervaloch sa nazýva **periodický pohyb** alebo **kmitanie**. Podľa veličín, s ktorými sa pri kmitaní stretávame, hovoríme o kmitoch mechanických, elektrických atď. Pod pojmom **harmonický oscilátor** budeme rozumieť každé voľné zariadenie, ktoré môže voľne kmitať bez vonkajšieho pôsobenia, napríklad závažie zavesené na pružine po vychýlení z rovnovážnej polohy, fyzikálne kyvadlo pri malých odchýlkach a pod. Potom hovoríme, že mechanické oscilátory vykonávajú **kmitavý pohyb**. Trajektória kmitavého pohybu môže byť priamočiara aj krivočiara, ale pohyb sa vždy uskutočňuje po tej istej krivke (alebo aspoň jej časti). **Rovnovážna poloha** predstavuje polohu, v ktorej sú sily pôsobiace na oscilátor v rovnováhe, t. j. ich výslednica sa rovná nule. Je to poloha, v ktorej by sa kmitajúci objekt nachádzal, keby bol v pokoji. Kmitanie oscilátorov spôsobuje buď sila pružnosti, ktorá vzniká pri deformácii pružiny alebo tiažová sila. (Predpokladáme pri tom, že nedochádza k trvalým zmenám pružiny a pre deformáciu pružiny (predĺženie alebo stlačenie) platí Hookov zákon (8.4) a deformácia pružiny je priamoúmerná pôsobiacej sile.) Na úvod sa budeme venovať jednoduchým kmitavým pohybom po priamke. Tejto požiadavke najlepšie vyhovuje kmitanie závažia zaveseného na pružine. Takýto oscilátor sa nazýva **pružinový oscilátor** (obr. 10.1). Najjednoduchším mechanickým oscilátorom, ktorého kmitanie spôsobuje tiažová sila a pohyb sa uskutočňuje po časti kružnice je **kyvadlo**. V minulosti malo veľký význam ako zariadenie na meranie času (kyvadlové hodiny). Hlavnom črtou oscilátora je, že po istom čase sa dostane do rovnakej polohy, má tú istú rýchlosť a zrýchlenie. Periodicky sa opakujúcu časť kmitavého pohybu nazývame **kmit**, polovička kmitu je **kyv**. Charakteristické veličiny kmitavého pohybu sú **perióda** (**doba kmitu**) T alebo **frekvencia (kmitočet)** f, s ktorými sme sa už stretli v kinematike hmotného bodu. Perióda predstavuje dobu, za ktorú oscilátor prebehne jeden kmit a vráti sa do zvoleného počiatočného stavu. Jednotkou periódy je sekunda. Frekvencia sa rovná počtu kmitov, ktoré prebehnú za jednu sekundu. Je teda prevrátenou hodnotou periódy a udáva sa v hertzoch[1] (Hz). Ak je možné kmitavý pohyb matematicky popísať jednou harmonickou funkciou, hovoríme, že teleso vykonáva **harmonický kmitavý pohyb**. Ak na teleso bude pôsobiť výsledná sila, ktorá je priamoúmerná jeho výchylke pri pohybe po priamke budeme takúto kmitajúcu sústavu označovať **netlmený lineárny harmonický oscilátor**. V prípade priamočiareho pohybu, kedy už uvažujeme o odpore prostredia, hovoríme o kmitajúcej sústave ako o **tlmenom lineárnom harmonickom oscilátore.** Ak na takýto oscilátor bude pôsobiť vonkajšia periodická sila, hovoríme o **vynútených kmitoch**. Ak bude kmitanie prebiehať bez vplyvu vonkajších síl, budeme hovoriť o **vlastných kmitoch**.

10.1.1 Kinematika a dynamika kmitavého pohybu

Kým pružina oscilátora nie je zaťažená závažím, má dĺžku l_0 (obr. 10.1). Keď na pružinu zavesíme závažie, pružina sa pôsobením tiaže $\vec{G} = m\,\vec{g}$ závažia

[1]HEINRICH HERTZ (1857 – 1894) nemecký fyzik a objaviteľ elektromagnetických vĺn. Existenciu elektromagnetických vĺn dokázal odrazom, ohybom a lomom, podobne ako je to pri zvukových vlnách. Jeden vodič (oscilátor) rozkmital iskrovým výbojom a na vzdialenom druhom (rezonátore) pozoroval preskakujúce iskry ako dôkaz kmitania, dopadu elektromagnetickej vlny.

predĺži na dĺžku $l = l_0 + \Delta l$, pričom sa pružina deformuje (v inerciálnej vzťažnej sústave majú tiažová sila $\vec{F}_G$, ktorou je závažie priťahované k Zemi a tiaž $\vec{G}$, ktorou pôsobí závažie na záves, rovnakú veľkosť aj smer). V dôsledku pružnosti pružiny vznikne sila $\vec{F}_p$, ktorej veľkosť sa v závislosti od predĺženia zväčšuje a ktorá má opačný smer ako tiažová sila $\vec{F}_G$. Jej veľkosť je $F_p = k\,(l - l_0) = k\,\Delta l$, kde k je tuhosť pružiny. **Tuhosť pružiny** $k = F_p/\Delta l$ zodpovedá sile, ktorá spôsobí predĺženie o jeden meter. Sila F_p sa bude zväčšovať až do okamihu, pokiaľ nenastane rovnovážny stav, teda sily $\vec{F}_G$ a $\vec{F}_p$ sa nevyrovnajú.



Obrázok 10.1: K vysvetleniu kmitania mechanického oscilátora.

Pri tomto stave pôsobia na závažie sily rovnako veľké, ale opačne orientované. Závažie sa ustáli v rovnovážnej polohe O, do ktorej umiestnime začiatok vzťažnej sústavy, v ktorej platí $\vec{F}_p = -\vec{F}_G$. Ďalším predĺžením pružiny sa rovnováha poruší. Sila pružnosti sa zväčší, kým tiažová sila ostáva konštantná. Výslednica pôsobiacich síl bude pôsobiť nahor smerom do rovnovážnej polohy. (To platí, ak predĺženie smeruje nadol, v opačnom prípade stlačenia pružiny nahor bude výslednica síl smerovať nadol, ale opäť do rovnovážnej polohy.) To znamená, že na oscilátor v prípade akejkoľvek deformácie pružiny bude pôsobiť premenlivá sila, ktorá je príčinou kmitavého pohybu. Ak teda vychýlime závažie z rovnovážnej polohy v smere osi x a teleso uvoľníme, sila mu udelí zrýchlenie a závažie bude voľne kmitať. Okamžitá poloha závažia je určená súradnicou x, ktorú nazývame **okamžitá výchylka**. Okamžitá výchylka vzhľadom na rovnovážnu polohu dosahuje kladné aj záporné hodnoty. Najväčšia hodnota okamžitej výchylky sa nazýva **amplitúda výchylky** x_m.

Pri okamžitej výchylke x bude pôsobiť na oscilátor celková sila veľkosti

$$F = F_G - F_p = m\,g - k\,(\Delta l + x)\ . \tag{10.1}$$

Keďže platí $m\,g = k\,\Delta l$, je príčinou kmitania sila, ktorej priemet do osi x je

$$F = -k\,x\ . \tag{10.2}$$

Môžeme teda konštatovať, že harmonický pohyb mechanického oscilátora je spôsobený silou F, ktorá stále smeruje do rovnovážnej polohy a je priamoúmerná okamžitej výchylke. Keďže uvažujeme, že pohyb oscilátora nie je ovplyvňovaný vonkajšími silami (prípadne ich vplyv môžeme zanedbať), môžeme jeho harmonický pohyb považovať za **vlastné kmitanie**. (Vlastné kmitanie oscilátora prebieha iba s istou uhlovou frekvenciou ω_0, ktorá súvisí s vlastnosťami oscilátora.) Sústava pružina + teleso na obrázku 10.1 sa nazýva **harmonický**, niekedy aj **lineárny harmonický oscilátor,** čo znamená, že sila je úmerná prvej (a nie inej) mocnine výchylky x.

Ak chceme riešiť pohybovú rovnicu vlastného kmitania oscilátora, prepíšeme si ju do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x\ . \tag{10.3}$$

Krátkou úpravou dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\,x = 0\ . \tag{10.4}$$

Keď zavedieme substitúciu $\omega_0^2 = k/m$, dostaneme rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,x = 0\ . \tag{10.5}$$

Daná rovnica (10.5) je lineárnou diferenciálnou rovnicou 2. rádu. Jej spôsob riešenia presahuje rámec tejto knihy, preto v ďalšom kroku budeme používať zovšeobecnené riešenie pohybovej rovnice pre vlastné (netlmené) kmitanie harmonického oscilátora, ktoré má tvar

$$x(t) = x_m \cos\left(\omega_0 \, t + \varphi\right) , \tag{10.6}$$

kde x predstavuje okamžitú výchylku v čase t, x_m je maximálna výchylka (spodný index m znamená maximum) alebo aj **amplitúda kmitov**, argument $(\omega_0 \, t+\varphi)$ je **fáza kmitu** a φ je **fázová konštanta** (alebo začiatočná fáza kmitavého pohybu v čase $t = 0\,s$.) Môže mať kladnú aj zápornú hodnotu a meria sa v zvyčajne v radiánoch. Obidve konštanty x_m a φ vyplývajú z počiatočných podmienok a určujú hodnotu výchylky na začiatku pohybu (v čase $t = 0\,s$). Keďže funkcia kosínus v rovnici (10.6) sa mení medzi krajnými hodnotami $\pm\,1$, výchylka $x(t)$ sa bude meniť medzi krajnými hodnotami $\pm\,x_m$.

Vysvetlíme si teraz fyzikálny význam konštanty ω_0. Doba, za ktorú sa teleso dostane znova do tej istej polohy a nazýva sa **perióda kmitov** (T_0). Z toho vyplýva, že pre ľubovoľný čas t musí platiť $x(t) = x(t + T_0)$. Pre jednoduchosť uvažujme $\varphi = 0\,rad$ a zapracujme túto úvahu do rovnice (10.6). Následne dostávane

$$x_m \cos(\omega_0 \, t) = x_m \cos(\omega_0 \,(t + T_0)) \, .$$

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou $2\,\pi\;rad$, z predchádzajúcej rovnice dostávame

$$\omega_0 \, t + 2\,\pi = \omega_0 \,(t + T_0) \, ,$$

odtiaľ

$$2\,\pi = \omega_0 \, T_0 \, .$$

Ak zakomponujeme do predchádzajúceho vzťahu známy vzťah medzi periódou a frekvenciou a použitú substitúciu z rovnice (10.5), dostávame

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{T_0} = 2\,\pi\,f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \, . \tag{10.7}$$

Veličina ω_0 definovaná predchádzajúcim vzťahom sa nazýva **uhlová frekvencia** (tiež **kruhová frekvencia**) pohybu a jej jednotka v sústave SI je radián za sekundu, fyzikálny rozmer je s^{-1}. Jednoduchý kmitavý pohyb je periodický, priamočiary a nerovnomerný. Využitím predchádzajúceho vzťahu môžeme vyjadriť **periódu vlastných kmitov** netlmeného harmonického oscilátora

$$T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{10.8}$$

Frekvencia netlmených kmitov f_0 predstavuje počet kmitov za jednotku času

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{10.9}$$

Zaujímavosťou je, že frekvencia kmitania nijako nezávisí od toho, ako veľmi sme pružinu natiahli, čiže od veľkosti amplitúdy kmitov. Ako môžeme zo vzťahu (10.9) vidieť, závisí len od hmotnosti kmitajúceho telesa a konštanty - tuhosti pružiny.

V literatúre sa taktiež môžeme stretnúť s riešením pohybovej rovnice (10.5) v tvare $x = x_m\,\sin(\omega_0\,t+\varphi)$, čo zodpovedá rovnici (10.6), ibaže hodnota fázovej konštanty je posunutá o $\pi/2$, čo vyplýva z vlastností funkcie sínus a kosínus.

Pre vyjadrenie rýchlosti kmitavého pohybu využijeme znalosti z kinematiky hmotného bodu, kedy rýchlosť telesa pohybujúceho sa po priamke je daná ako derivácia jeho polohy podľa času. Môžeme teda písať

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_m\,\omega_0\sin(\omega_0\,t+\varphi) = x_m\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t+\varphi+\frac{\pi}{2})\,. \tag{10.10}$$

Podobne, ako bol parameter x_m v rovnici (10.6) nazvaný amplitúdou, z predchádzajúcej rovnice vyplýva, že amplitúda rýchlosti je rovná $v_m = x_m\,\omega_0$. Zrýchlenie kmitavého pohybu telesa určíme ako deriváciu rýchlosti daného telesa podľa času (prípadne druhú deriváciu výchylky podľa času).

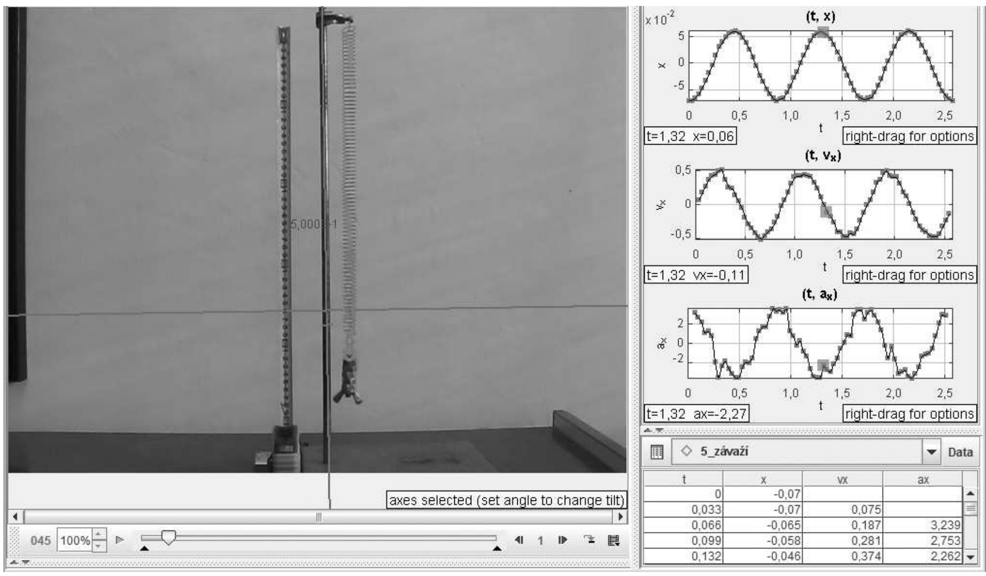
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -x_m\,\omega_0^2\,\cos(\omega_0\,t+\varphi) = x_m\,\omega_0^2\cos(\omega_0\,t+\varphi+\pi) = -\omega_0^2\,x\,. \tag{10.11}$$

Kladná veličina $x_m\,\omega_0^2$ predstavuje v tomto prípade amplitúdu zrýchlenia a_m. Za povšimnutie stojí, že rýchlosť predbieha výchylku vo fáze o $\pi/2$ a zrýchlenie predbieha výchylku vo fáze o uhol π (obr. 10.2). Zo vzťahu taktiež vyplýva, že zrýchlenie kmitavého pohybu je priamoúmerné okamžitej výchylke a v každom okamihu má opačný smer.

Z predchádzajúceho vzťahu pre zrýchlenie kmitavého pohybu $a(t) = -\omega_0^2\,x(t)$ a substitúcie zavedenej v rovnici (10.5) dostávame

$$a(t) = -\frac{k}{m}\,x(t)\,, \quad \text{kde} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2\,. \tag{10.12}$$

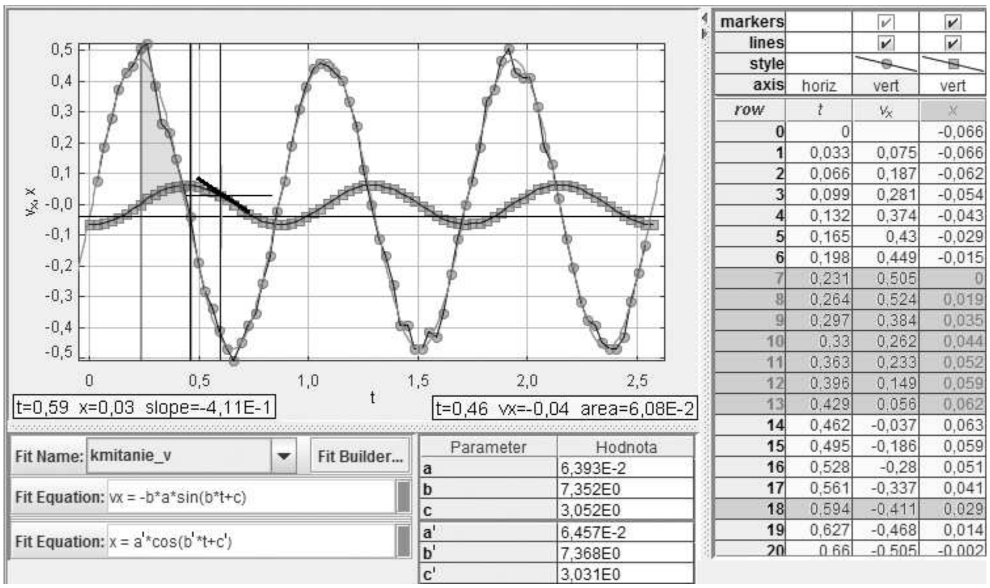
Zo vzťahu vyplýva, že zrýchlenie kmitajúceho telesa je úmerné jeho výchylke a má opačné znamienko, pričom konštantou úmernosti je druhá mocnina uhlovej frekvencie, ktorá zas závisí len od vlastností samotného oscilátora, t. j. od jeho hmotnosti a tuhosti pružiny (tieto veličiny sa nazývajú tiež aj parametre oscilátora). Najväčšia kladná hodnota výchylky bude zodpovedať zápornému zrýchleniu s najväčšou veľkosťou a naopak. Ak bude výchylka nulová, zrýchlenie bude taktiež nulové, avšak veľkosť rýchlosti kmitavého pohybu v danom okamihu bude maximálna.



Obrázok 10.2: Analýza vlastných kmitov harmonického pohybu pružinového oscilátora.

Časový priebeh harmonického kmitania telesa je znázornený na obr. 10.2. Súradnicovú sústavu sme pre lepšiu analýzu pootočili o $\pi/2$, takže kladný smer osi x bude smerovať zvislo nadol. Detailnejšou analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 10.3), že kmitavý pohyb možno popísať rovnicami $x(t) = 0,065\,\cos(7,4\,t + 3,03)$ (okamžitú výchylku oscilátora predstavujú štvorčeky) a $v_x = -7,4.0,064\,\sin(7,4\,t + 3,05)$ (okamžitá rýchlosť je znázornená guľôčkami), z čoho vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,065\,m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 7,4\;rad\,s^{-1}$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx 3,03\,rad$.

Aj v prípade tohto pohybu možno v ktoromkoľvek okamihu určiť rýchlosť kmitavého pohybu v čase t ako smernicu dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky v danom bode (obr. 10.3 - v čase $t = 0,59\,s$ má smernica dotyčnice hodnotu $-0,411\ m/s$, čo zodpovedá rýchlosti pohybu v danom čase určenej z tabuľky: $v_x(0,594\,s) = -0,411\ m/s$) a okamžitú výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času (obr. 10.3 - obsah vyznačenej plochy je $0,061\,m$, čo zodpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{13} - t_7 = 0,429\,s - 0,231\,s = 0,198\,s$: $\Delta x = x_{13} - x_7 = 0,062\,m$).

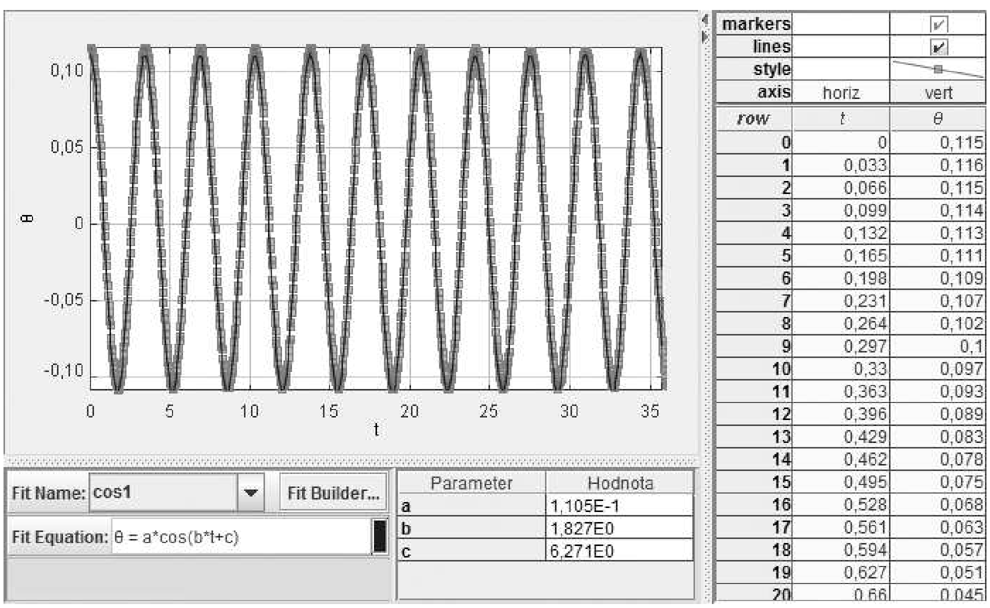


Obrázok 10.3: Analýza rýchlosti (guľôčky) a výchylky (štvorčeky) harmonického pružinového oscilátora.

Ako netlmený harmonický pohyb si s dostatočnou presnosťou môžeme predstaviť pohyb hmotnej gule zavesenej na vlákne zanedbateľnej hmotnosti oproti guli po slabom vychýlení z rovnovážnej polohy (uvažujeme o výchylkách do 5°, kedy sin $\alpha \approx \alpha$ (kde α je v radiánoch)). Takýto oscilátor v ideálnom prípade môžeme považovať za matematické kyvadlo, s popisom ktorého sme sa už stretli v predchádzajúcich kapitolách (7.9.2 Matematické kyvadlo). Ak bude uhlová výchylka matematického kyvadla malá, môžeme ho považovať za harmonický oscilátor, podobný sústave pružina-teleso. Úlohu tuhosti pružiny k tu bude zohrávať veličina $m\,g/L$. Pre periódu matematického kyvadla môžeme teda použiť upravený vzťah (10.8)

$$T_0 = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{m\,g/L}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{L}{g}}\ . \tag{10.13}$$

Analýzou uhlovej výchylky θ z rovnovážnej polohy (obr. 10.4) (prípadne okamžitej výchylky v smere osi x) sa možno dopracovať jednak k uhlovej frekvencii kyvadla a následne k perióde kmitov. Daný priebeh môžeme popísať rovnicou $\theta(t) = 0,111\,\cos(1,827\,t + 6,27)$ (prípadne pre okamžitú výchylku vo zvislom smere bude platiť $x(t) = 0,33\,\cos(1,827\,t + 6,27)$), z čoho vyplýva, že uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega_0 = 1,827\ rad/s$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi = 6,27\,rad$. Z hodnoty uhlovej frekvencie kmitavého pohybu kyvadla môžeme určiť periódu kmitavého pohybu, ktorá je $T_0 = 3,44\,s$. (Tú môžeme odhadnúť aj z grafu (obr. 10.4), keď dokážeme odčítať čas desiatich kmitov.) Odtiaľ už nie je problémom určiť zo vzťahu (10.13) aj hodnotu tiažového zrýchlenia Zeme, ktoré pri dĺžke daného kyvadla $L = 3\,m$ a z určených parametrov vychádza $g = 10,01\ m/s^2$.



Obrázok 10.4: Analýza uhlovej výchylky matematického kyvadla.

10.1.2 Premeny energie v mechanickom oscilátore

Aby sme mechanický oscilátor uviedli do kmitavého pohybu, musíme ho vychýliť z rovnovážnej polohy. Ak teleso uvoľníme, nadobudnutá potenciálna energia natiahnutej pružiny sa premení na kinetickú energiu kmitajúceho telesa. Po prechode rovnovážnou polohou teleso začne pružinu stláčať (prípadne naťahovať v závislosti od počiatočného vychýlenia) a kinetická energia pružiny sa mení na potenciálnu energiu stlačenej pružiny. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky je potenciálna energia pružnosti oscilátora najväčšia. Potom sa oscilátor vracia späť do rovnovážnej polohy, jeho okamžitá výchylka sa zmenšuje, no na druhej strane sa zväčšuje rýchlosť závažia a jeho kinetická energia E_k je pri prechode rovnovážnou polohou najväčšia a rovná potenciálnej energii pri najväčšej výchylke z rovnovážnej polohy. Po prechode rovnovážnou polohou sa rýchlosť oscilátora bude opäť zmenšovať, pružina oscilátora sa naťahuje a zväčšuje sa jeho potenciálna energia. Keď oscilátor dosiahne amplitúdu výchylky, bude rýchlosť závažia, a teda aj kinetická energia opäť nulová. Pri harmonickom pohybe sa periodicky premieňa potenciálna energia oscilátora na kinetickú a naopak. Celková mechanická energia oscilátora je pritom konštantná a v každom okamihu sa rovná súčtu potenciálnej a kinetickej energie.

Ak budeme uvažovať o netlmenom harmonickom pohybe, celková mechanická energia v izolovanej sústave, v ktorej pôsobí iba konzervatívna sila, je konštantná a je rovná súčtu kinetickej a potenciálnej energie. V miestach s maximálnou výchylkou je rýchlosť oscilátora nulová (kinetická energia je taktiež nulová) a celková mechanická energia je rovná potenciálnej energii, pre ktorú platí:

$$E = E_{p\,max} = \int_{x_m}^{0} -k\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2\,. \tag{10.14}$$

Rovnakú hodnotu celkovej energie dostaneme, keď budeme analyzovať kinetickú energiu, ktorá dosahuje maximálne hodnoty pri prechode oscilátora rovnovážnou polohou, pričom potenciálna energia je nulová. Po dosadení maximálnej hodnoty rýchlosti zo vzťahu (10.10) do vzťahu pre kinetickú energiu dostaneme

$$E = E_{k\,max} = \frac{1}{2}\,m\,v_{max}^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,x_m^2 = \frac{1}{2}\,k\,x_m^2\,. \tag{10.15}$$

Pre okamžité hodnoty kinetickej a potenciálnej energie platí

$$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2\, \sin^2(\omega_0\, t + \varphi)\ , \tag{10.16}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, x_m^2 \cos^2(\omega_0\, t + \varphi) = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 \cos^2(\omega_0\, t + \varphi)\ . \tag{10.17}$$

Možno sa presvedčiť, že súčet okamžitých hodnôt kinetickej a potenciálnej energie harmonického oscilátora nezávisí od času.

$$\begin{aligned} E_{celk} &= E_k + E_p = \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 \left(\sin^2(\omega_0\, t + \varphi) + \cos^2(\omega_0\, t + \varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x_m^2 = \frac{1}{2}\, k\, x_m^2\ , \end{aligned} \tag{10.18}$$

pričom sme využili, že pre každý uhol α platí

$$\cos^2\, \alpha + \sin^2\, \alpha = 1\ .$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, celková mechanická energia netlmeného harmonického oscilátora je konštantná a priamoúmerná tuhosti pružiny a štvorcu amplitúdy kmitov.

10.2 Tlmený harmonický oscilátor a tlmené kmitanie

Predchádzajúce úvahy boli robené za predpokladu, že v priebehu harmonického kmitania nepôsobia na oscilátor žiadne iné vplyvy. Za daného ideálneho predpokladu by sa amplitúda výchylky nemenila a oscilátor by kmital neobmedzene dlho. V skutočnosti však na oscilátor pôsobia sily, ktoré sú príčinou premeny mechanickej energie na inú formu energie, zväčša na jeho vnútornú energiu. To sa prejaví postupným zmenšovaním amplitúdy výchylky, až postupne kmitanie zanikne. Tomuto procesu hovoríme **tlmené kmitanie**.

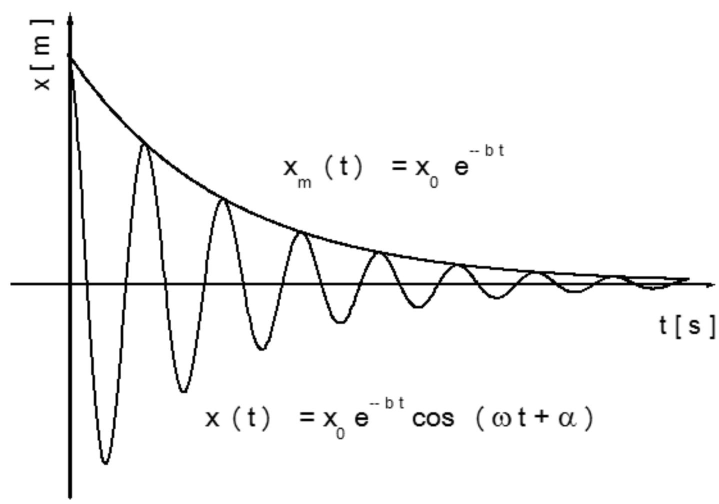
Príčinou tlmeného kmitania oscilátora je najčastejšie trecia sila, ktorá vzniká vzájomným pôsobením oscilátora a prostredia, v ktorom sa oscilátor pohybuje. Ak je tlmenie oscilátora príliš veľké, kmitanie nenastane a oscilátor sa po vychýlení vráti do rovnovážnej polohy (aperiodický pohyb).

V praxi, keď sa vyžaduje malé tlmenia, príčiny tlmenia sa obmedzujú, a naopak, tam, kde je kmitanie nežiaduce, tlmenie sa umelo zväčšuje (napr. tlmiče perovania v automobiloch, tlmenie pohybu ručičiek meracích prístrojov a pod.).

Vlastné kmitanie oscilátora je vždy tlmené. Časový priebeh tlmenia závisí jednak od vlastností oscilátora, ale aj od prostredia, v ktorom sa kmitanie uskutočňuje. Tlmenie ovplyvňuje amplitúdu výchylky aj periódu kmitania. Tlmený oscilátor má väčšiu periódu kmitania ako rovnaký oscilátor bez tlmenia.

Experimentálne môžeme tlmený kmitavý pohyb realizovať napríklad ponorením kmitajúcej sústavy - harmonického oscilátora do viskóznej kvapaliny (prípadne nechať oscilátor kmitať dostatočne dlho na vzduchu). Predpokladajme pri danom pohybe, že odpor prostredia je priamoúmerný rýchlosti $F_{odp} = -k' v$, kde $k' > 0$. Sila odporu prostredia bude smerovať proti smeru rýchlosti, čo vyjadruje znamienko mínus v pohybovej rovnici

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k\, x - k' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ . \tag{10.19}$$



Obrázok 10.5: Tlmené harmonické kmity.

Ak použijeme substitúciu (vzťah (10.7))

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{a} \qquad \frac{k'}{m} = 2\, b \ ,$$

pohybová rovnica prejde na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\, b \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x = 0 \ . \tag{10.20}$$

Konštantu $b = \frac{k'}{2m}$ charakterizuje vplyv trenia a nazýva sa **koeficient útlmu**, ω_0 je vlastná uhlová frekvencia, t. j. uhlová frekvencia netlmeného harmonického oscilátora. Všeobecné riešenie predchádzajúcej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0 \, e^{-b\,t} \cos\left(\omega\, t + \varphi\right) \ . \tag{10.21}$$

Uhlová frekvencia ω je menšia, ako uhlová frekvencia pri netlmenom kmitaní ω_0 tej istej sústavy a mení sa aj amplitúda, ktorá s časom exponenciálne klesá:

$$x_m = x_0 \, e^{-b\,t} \ . \tag{10.22}$$

Priebeh kmitania a zmeny amplitúdy je znázornený na obrázku 10.5.

Prísne vzaté, nemôžeme tlmený kmitavý pohyb pokladať za periodický pohyb, pretože kmitajúci bod nedosiahne svoju pôvodnú výchylku. Pohyb je kváziperiodický a o perióde T môžeme hovoriť iba ako o časovom intervale, za ktorý hmotný bod prechádza rovnovážnou polohou.

Pre periódu tlmených kmitov platí

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \ , \tag{10.23}$$

pričom $T > T_0$, kde T_0 predstavuje periódu vlastných kmitov. Ak je tlmenie malé, perióda kmitavého pohybu sa takmer rovná perióde netlmených kmitov a predchádzajúci vzťah sa zmení na vzťah (10.8). Pri zväčšovaní tlmenia bude aj perióda tlmených kmitov narastať. Pre mechanickú energiu tlmeného oscilátora bude platiť, že sa s časom zmenšuje. Pre slabé tlmenie môžeme amplitúdu x_m v rovnici (10.18) nahradiť výrazom (10.22) a získame tak závislosť

$$E(t) \approx \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 \, \exp(-2\,b\,t) \ . \tag{10.24}$$

Podiel amplitúdy dvoch po sebe nasledujúcich maximálnych výchyliek na tú istú stranu nazývame **útlm** a označujeme λ, pričom platí

$$\lambda = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \frac{x_0\, e^{-b\,t}}{x_0\, e^{-b\,(t+T)}} = e^{b\,T} \ . \tag{10.25}$$

Prirodzený logaritmus útlmu je **logaritmický dekrement útlmu** δ a využijúc predchádzajúcu rovnicu môžeme písať

$$\delta = \ln\lambda = b\,T \ . \tag{10.26}$$

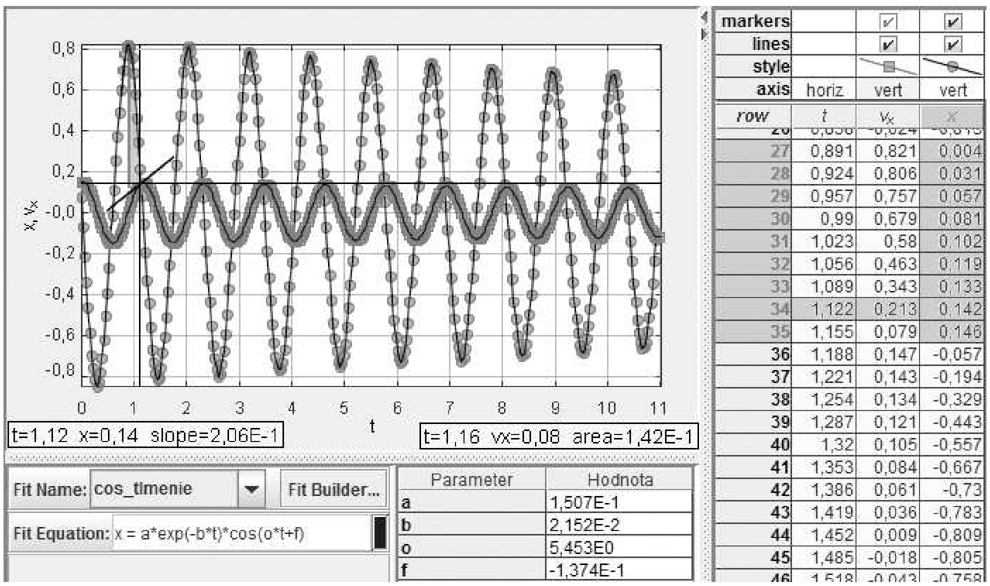
Čím väčší je logaritmický koeficient útlmu, tým je potrebný menší počet kmitov na určité zníženie amplitúdy.

Na obrázku 10.6 je vykonaná analýza tlmených harmonických kmitov kyvadla - loptičky zavesenej na vlákne. Ako aj v predchádzajúcom prípade netlmeného pružinového oscilátora, aj v tomto prípade si môžeme všimnúť fázový posun medzi okamžitou výchylkou, rýchlosťou a zrýchlením kyvadla v danom čase.

Obrázok 10.6: Analýza tlmených kmitov harmonického pohybu kyvadla.

Analýzou časových závislosti možno usúdiť (obr. 10.7), že ide o tlmený harmonický pohyb, keďže amplitúda okamžitej výchylky a rýchlosti sa s časom znižuje.

Okamžitú výchylku tlmeného kmitavý pohyb možno popísať rovnicou $x(t) = 0,15\ \exp(-0,0215\,t)\cos(5,453\,t - 0,137)$. Smernica dotyčnice ku grafu okamžitej výchylky má v čase $t = 1,12\,s$ hodnotu $0,206\ m/s$. To zodpovedá okamžitej rýchlosti v smere osi x určenej z tabuľky: $v_x(t = 1,122\,s) = 0,21\ m/s$. Analýza rýchlosti tlmeného harmonického oscilátora je v tomto prípade trochu zložitejšia, nakoľko rýchlosť tlmeného kmitavého pohybu dostaneme, keď zderivujeme výchylku kyvadla podľa času, ktorá v tomto prípade predstavuje zloženú funkciu (exp() cos()). Takže danú matematickú funkciu musíme derivovať ako súčin. (Samotnú deriváciu ponechávame na čitateľovi.) Po zderivovaní výchylky ($x(t)$) tlmeného harmonického pohybu kyvadla v smere osi x dostávame $v_x(t) = 0,15\ (-0,0215)\ \exp\ (-0,0215\, t)\ \cos(5,45\, t - 0,131) - 0,15\ \exp\,(-0,0215\, t)5,45\ \sin\,(5,45\, t{-}0,131)$. (Vyjadrenie zrýchlenia ponechávame na samotnom čitateľovi, nakoľko ide o dvojnásobnú deriváciu súčinu.)



Obrázok 10.7: Grafy závislosti okamžitej výchylky tlmených harmonických kmitov kyvadla (štvorčeky) a okamžitej rýchlosti tlmených harmonických kmitov kyvadla (guľôčky) a analýza okamžitej výchylky kmitov.

Zo získaných vzťahov pre výchylku a rýchlosť kmitavého pohybu vyplýva, že amplitúda kmitov je $x_m = 0,15\, m$, uhlová frekvencia kmitavého pohybu je $\omega = 5,45\ rad\, s^{-1}$, koeficient útlmu $b = 0,0215\, s^{-1}$ a fázová konštanta kmitavého pohybu je $\varphi \approx -0,14(-0,13)\, rad$.

Aj pri tomto pohybe je možné v ktoromkoľvek okamihu určiť výchylku v danom časovom intervale ako obsah plochy pod krivkou závislosti rýchlosti od času (obr. 10.7 - obsah vyznačenej plochy je $0,142\, m$, čo zodpovedá zmene okamžitej výchylky vo vyznačenom časovom intervale $\Delta t = t_{35}{-}t_{27} = 1,155\, s{-}0,891\, s = 0,264\, s$: $\Delta x = x_{35} - x_{27} = 0,146\, m - 0,004\, m = 0,142\, m$).

Vplyvom trenia pri kmitavom pohybe bude dochádzať k stratám mechanickej energie, ktorá sa mení na energiu tepelnú a pohyb bude postupne zanikať. Ak chceme v kmitajúcej sústave pohyb udržať, musíme sústave vhodným spôsobom dodávať energiu. Za istých podmienok je možné dosiahnuť, aby výchylky oscilátora boli väčšie, ako samotná počiatočná amplitúda kmitavého pohybu.

10.3 Vynútený kmitavý pohyb

V každom kmitajúcom systéme pôsobia určité trecie sily a voľné kmity vyvolané v takomto systéme budú vždy tlmené. Aby sme v systéme dosiahli netlmené kmity, je potrebné kompenzovať energetické straty vyvolané trením pomocou vonkajšieho zdroja. Pod vynúteným kmitavým pohybom budeme rozumieť taký pohyb, ktorý nastane, keď na kmitajúcu sústavu bude okrem sily veľkosti $k\,x$ a odporovej sily prostredia $b\,v$ pôsobiť aj periodická sila. Môžeme si predstaviť napríklad dieťa na hojdačke, ktoré sa snaží hojdať jeho rodič stojaci pred (za) ním periodickým dodávaním energie. Ak by rodič postrkával hojdačku s frekvenciou rovnou vlastnej frekvencii hojdačky, dosiahol by tak veľké amplitúdy výchylky aj rýchlosti. Ako možno zo skúsenosti vieme, je možné naučiť sa takto rozhojdať hojdačku metódou pokus-omyl. Ak by sme ju rozhojdávali s inou frekvenciou, buď vyššou alebo nižšou, amplitúdy výchylky a rýchlosti by boli malé. Ak by hojdačku nerozhojdával rodič, ale dieťa by sa hojdalo samé, pričom by sa udržiavalo stále kmitanie pravidelne sa meniacim vnútorným parametrom - napr. kývaním nôh, vtedy hovoríme o tzv. **parametrickej rezonancii**. Rezonančná frekvencia takéhoto mechanizmu hojdania sa je dvojnásobná oproti vlastnej frekvencii hojdačky. Ďalšou zvláštnosťou parametrickej rezonancie oproti vynúteným kmitom je to, že ňou možno zosilniť už existujúce kmity, ale nemožno sa ňou rozhojdať z úplného pokoja.

Uvažujme teraz o tom, že časová závislosť vynucujúcej sily má tvar $F_v = F_0\,\cos(\Omega\,t)$, kde F_0 je amplitúda pôsobiacej sily a Ω je jej kruhová frekvencia. Pod vplyvom takejto sily vzniknú v systéme kmity, ktoré nazývame **vynútené**. Výslednicu síl pôsobiacich na teleso hmotnosti m môžeme zapísať v tvare

$$F = -k\,x - k'\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\,\cos(\Omega\,t)\;. \tag{10.27}$$

Pohybová rovnica má pre vynútený kmitavý pohyb tvar

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x - k'\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + F_0\cos(\Omega\,t)\;, \tag{10.28}$$

čo môžeme s využitím substitúcie prepísať do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\,b\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = f_0\,\cos\left(\Omega\,t\right)\,, \tag{10.29}$$

kde $f_0 = F_0/m$ a b a ω_0 majú ten istý význam, ako pri tlmenom kmitavom pohybe. Od predchádzajúcich pohybových rovníc sa táto rovnica líši tým, že jej pravá strana sa nerovná nule a v matematike ju poznáme pod pojmom diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou. Všeobecné riešenie danej pohybovej rovnice má tvar

$$x = x_0\,e^{-b\,t}\,\cos\left(\omega\,t + \varphi\right) + B\,\cos\left(\Omega\,t + \alpha\right)\,. \tag{10.30}$$

Z rovnice vyplýva, že ak vonkajšia periodická sila bude pôsobiť na teleso dostatočne dlhý čas, sústava bude konať len vynútené harmonické kmity s amplitúdou B a frekvenciou rovnajúcou sa frekvencii vynucujúcej sily, pričom fáza vynútených kmitov bude posunutá o uhol α vzhľadom na vonkajšiu pôsobiacu silu, keďže prvý člen rovnice exponenciálne zaniká. V ustálenom stave je riešenie kmitajúceho systému s vonkajšou silou $F_v = F_0\cos\left(\Omega\,t\right)$ dané vzťahom

$$x = B\,\cos\left(\Omega\,t + \alpha\right)\,. \tag{10.31}$$

Pre amplitúdu vynútených kmitov platí

$$B = \frac{F_0}{m\,\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\,b^2\,\Omega^2}}\,. \tag{10.32}$$

Ako z predchádzajúceho vzťahu vyplýva, amplitúda vynútených kmitov bude závisieť od amplitúdy vynucujúcej sily F_0, ale aj od vzťahu medzi vlastnou frekvenciou kmitajúceho systému ω_0 a vynucujúcou frekvenciou Ω. Najväčšia hodnota amplitúdy B sa dosiahne, keď sa obe frekvencie budú rovnať, t. j. $\omega_0 = \Omega$. Daný jav sa nazýva **rezonancia**. Kmity s maximálnou amplitúdou sa nazývajú **rezonančné kmity** a frekvencia, pri ktorej dochádza k takýmto kmitom sa nazýva **rezonančná frekvencia amplitúdy**. Rezonančnú frekvenciu je možné určiť z podmienky extrému funkcie $B(\Omega)$. Ako si môžeme všimnúť, rezonančná frekvencia nezávisí od veľkosti tlmenia. Maximálna hodnota amplitúdy B je vyjadrená

$$B = \frac{F_0}{2\,m\,b\,\Omega}\,. \tag{10.33}$$

Všetky mechanické sústavy vykazujú jednu alebo viacero vlastných frekvencií. Keď na ne bude pôsobiť veľká vonkajšia sila s frekvenciou blízkou jednej z vlastných frekvencií sústavy, môžu vznikajúce vynútené kmity spôsobiť mechanické porušenie. Mechanické rezonancie môžu mať veľké negatívne účinky. Už pôsobením malej sily môže dôjsť k veľkým amplitúdam kmitov, pričom sa môže porušiť pevnosť materiálov, mostov, čo môže spôsobiť ich deštrukciu (obr. 10.8). Preto musia aj leteckí konštruktéri zaistiť, aby sa vlastná frekvencia krídel líšila od frekvencie piestov pri otáčkach motora počas letu.

V roku 1940 postavili v štáte Washington visutý most cez Tacomskú úžinu, ktorý otvorili 1.7. Vietor, ktorý sa opieral do mosta, spôsoboval nekontrolovateľné vlnenie vozovky. 7.11. dosiahla sila vetra rýchlosť 70 km/hod a to spôsobilo také silné krútenie mosta, že to most nevydržal a zrútil sa do rieky.

Obrázok 10.8: Most Tacoma Narrows Bridge v krátkych okamihoch za sebou počas fúkania vetra a silného krútenia mosta.

10.4 Skladanie kmitov

Výsledný kmitavý pohyb môže byť niekedy vytvorený zložením rôznych pohybov v rôznych smeroch. V závere tejto časti si popíšeme dva špeciálne prípady z množstva pohybov - rovnobežné a kolmé kmity.

Skladanie rovnobežných kmitov

Rovnobežné kmity vznikajú zložením dvoch kmitov rovnakej amplitúdy, ale rôznej (pritom blízkej) frekvencie, ak sa pohyb uskutočňuje v rovnakom smere. Pre jednoduchosť budeme uvažovať kmitavé pohyby s rovnakými amplitúdami x_0 a fázovými konštantami pohybu φ, pričom uhlová frekvencia prvého kmitania je ω_1 a druhého ω_2. Potom pre okamžité výchylky z rovnovážnych polôh pohybov platí:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) \ , \tag{10.34}$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \ . \tag{10.35}$$

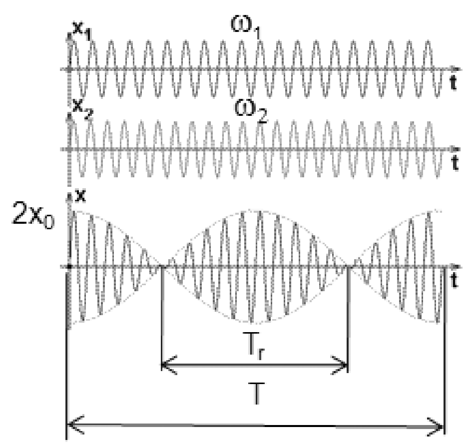
Využitím vlastností goniometrických funkcií pre výchylku výsledného pohybu x zloženého z dvoch kmitavých pohybov x_1 a x_2 ($x = x_1 + x_2$) dostaneme:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) + x_0 \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= 2\, x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t + \varphi\right) \ , \end{aligned} \tag{10.36}$$

pričom sme využili známy vzťah z trigonometrie

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\, \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \ .$$

Prvá časť výsledného vzťahu (10.36) sa mení oveľa pomalšie a charakterizuje amplitúdu pohybu a druhá časť predstavuje fázu pohybu. Preto výsledný pohyb môžeme chápať ako kmitanie s uhlovou frekvenciou $(\omega_1 + \omega_2)/2$ a pomaly sa meniacou amplitúdou. Priebeh kmitania je znázornený na obrázku 10.9.



Obrázok 10.9: Vznik rázov.

Výsledná amplitúda kmitavého pohybu je kladné číslo a platí pre ňu

$$A(t) = \left| 2\, x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\, t\right) \right| . \tag{10.37}$$

Uhlová frekvencia výsledného pohybu bude mať tvar

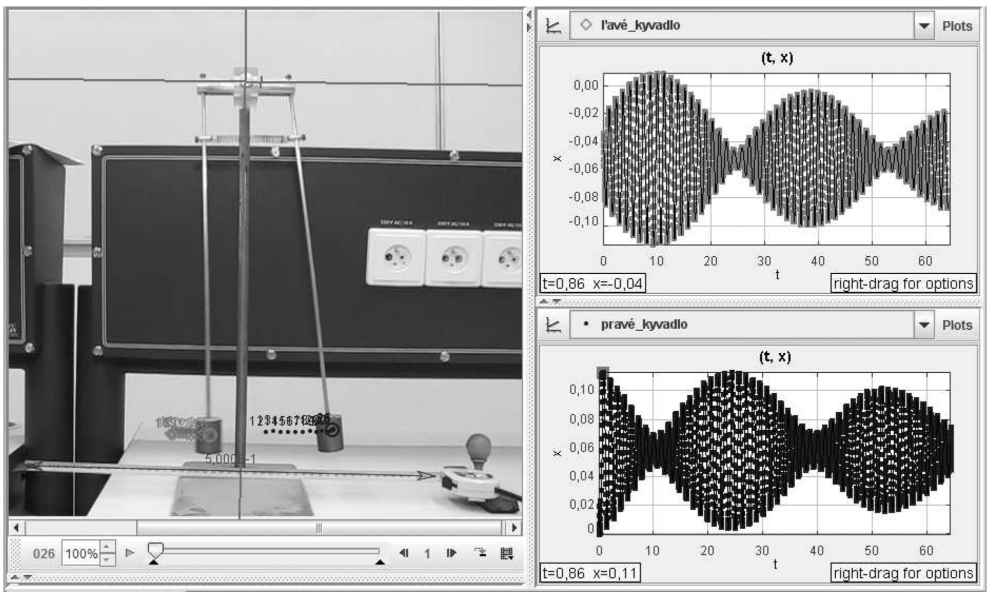
$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{\frac{2\,\pi}{T_1} + \frac{2\,\pi}{T_2}}{2} = \frac{\pi\;(T_1 + T_2)}{T_1\,T_2}\,. \tag{10.38}$$

Pre periódu výsledného pohybu môžeme teda písať:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}} = \frac{4\,\pi}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{2\,T_1\,T_2}{T_1 + T_2}\,. \tag{10.39}$$

Amplitúda výsledného pohybu (10.37) sa s časom mení periodicky, pričom platí

$$T_A = \frac{2\,\pi}{\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}} = \frac{4\,\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}\,. \tag{10.40}$$



Obrázok 10.10: Analýza kmitov spriahnutých kyvadiel a vznik rázov.

Keďže za jednu periódu zmeny amplitúdy vzniknú dve zosilnenia a dve zoslabenia, t. j. **rázy**, pre periódu rázov platí:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = \frac{T_A}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} = \frac{2\pi}{2\pi\,(|f_1 - f_2|)} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \\ &= = \frac{1}{\left|\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right|} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}\,. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Pre výslednú frekvenciu rázov môžeme teda písať:

$$f_r = |f_2 - f_1|\;. \tag{10.42}$$

Skladanie kolmých kmitov

Budeme uvažovať hmotný bod, ktorý môže vykonávať kmitavé pohyby na osi x a osi y. Pohyb začneme skúmať v čase, kedy fázová konštanta prvého z pohybov je nulová a budeme pre jednoduchosť uvažovať skladanie kolmých kmitov rovnakej frekvencie, rôznej amplitúdy a fázy. Pre jednotlivé kmity platí:

$$x = A\,\cos\omega\,t\ ,\ y = B\,\cos\left(\omega\,t + \varphi\right)\ . \tag{10.43}$$

Využitím súčtových vzorcov pre funkciu $\cos\left(\omega\,t + \varphi\right)$ a elementárnych matematických úprav pre súčet kolmých kmitov $x + y$ dostaneme

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2\,x\,y}{A\,B}\cos\varphi = \sin^2\varphi\ . \tag{10.44}$$

Daná rovnica predstavuje všeobecný tvar rovnice elipsy, ktorj vlastnosti určuje fázový posun φ. Podľa toho, akú má hodnotu, vznikajú niektoré špeciálne prípady:
a) Ak fázový rozdiel bude $\varphi = 0$, potom trajektória je rovnicou priamky.

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0\ \Longrightarrow y = \frac{B}{A}\,x\ . \tag{10.45}$$

Kmitajúci bod sa bude pohybovať po úsečke prechádzajúcej počiatkom súradníc vo vzdialenosti od počiatku

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ = \sqrt{A^2 + B^2}\,\cos\omega\,t\ . \tag{10.46}$$

b) Ak fázový rozdiel bude $\varphi = \pm\,\pi$, rovnica 10.44 bude mať tvar

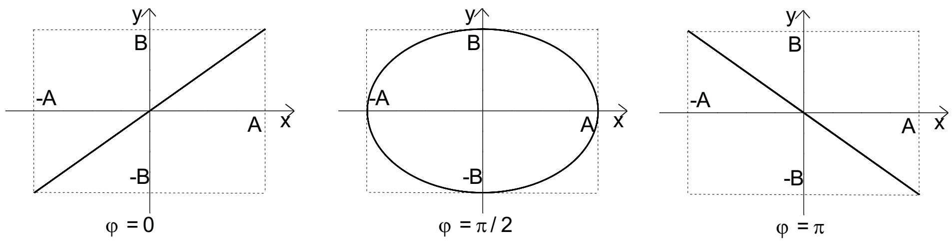
$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0\ \Longrightarrow y = -\frac{B}{A}\,x\ , \tag{10.47}$$

a pohyb sa bude uskutočňovať opäť po priamke zobrazenej na obr. 10.11.
c) Ak bude fázový rozdiel je $\varphi = \pm\,\pi/2$, rovnica 10.44 bude popisovať elipsu, ktorej polosi majú veľkosti A a B (obr. 10.11).

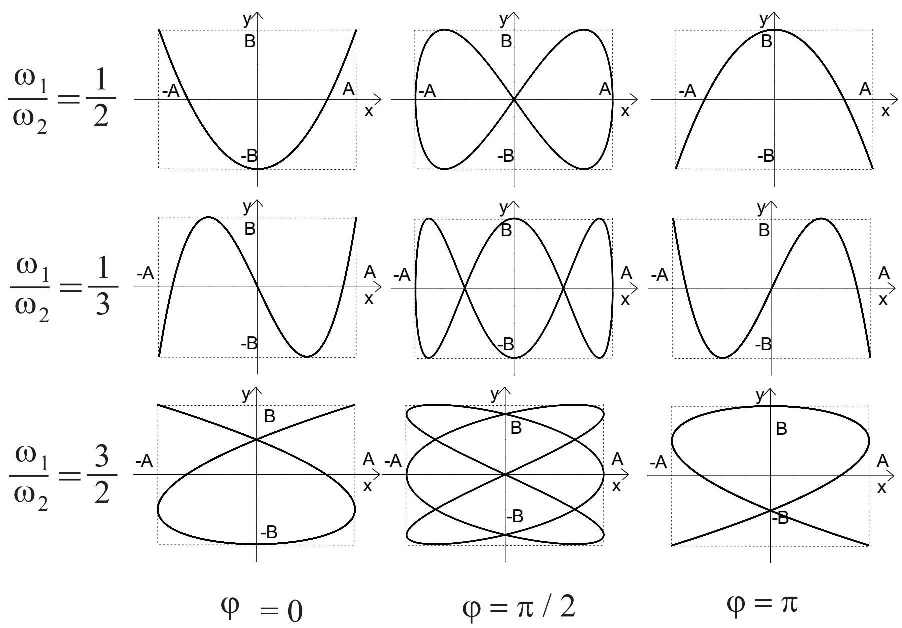
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\ . \tag{10.48}$$

Ak $\varphi = +\pi/2$ $(-\pi/2)$, pohyb sa bude uskutočňovať v smere (proti smeru) pohybu hodinových ručičiek. Pri rovnosti $A = B$ prejde elipsa na kružnicu.

Ak frekvencie ω skladaných kolmých kmitov nebudú rovnaké a pomer frekvencií ω_1, ω_2 sa dá vyjadriť ako podiel prirodzených čísel $(1:2, 1:3, 2:3)$, pre rôzne hodnoty fázového rozdielu $(0, \pi/2, \pi)$ sa výsledný pohyb bude uskutočňovať po krivkách, ktoré nazývame **Lissajousove krivky**. Príklady Lissajousových kriviek sú na obrázku 10.12.



Obrázok 10.11: Lissajousove krivky pri rovnakej uhlovej frekvencii.



Obrázok 10.12: Lissajousove krivky pri vhodných pomeroch uhlových frekvencií.