12 Elektrostatické pole vo vákuu

Na telesá, s ktorými sa bežne stretávame v prírode, pôsobí hlavne príťažlivá gravitačná sila. No už v staroveku poznali aj inú interakciu. Grécky učenec Thales z Milétu[1] v 6. stor. p. n. l. popísal schopnosť jantáru treného vlnou priťahovať ľahké predmety. Anglický lekár W. Gilbert[2] v 16. storočí vykonal pokusy, pri ktorých aj iné predmety pri trení vykazovali podobné vlastnosti ako jantár. Pretože jantár je grécky elektrón, dostal tento stav názov **elektrický stav.** O telesách v tomto stave hovoríme, že sú elektricky nabité. Sile, ktorou pôsobia tieto telesá na okolie, sa hovorí **elektrická sila** a na rozdiel od gravitačnej môže byť príťažlivá a odpudivá. Elektrické pole charakterizujeme vektorovou funkciou. Silové pôsobenie medzi elektrickými nábojmi vo všeobecnosti závisí od toho, či sú náboje v pokoji, alebo vo vzájomnom pohybe. V tejto kapitole sa budeme zaoberať elektrostatickým poľom, teda poľom, ktoré vytvára elektrický náboj, ktorý je v pokoji.

12.1 Charakteristiky elektrického náboja

Príčinou elektrického stavu daného telesa je jeho **elektrický náboj**, jedna zo základných charakteristík mikročastíc. Poznáme dva typy elektrického náboja: **kladný** a **záporný**. Pokiaľ sa v telese nachádza rovnaký počet kladných aj záporných nábojov, hovoríme, teleso je elektricky neutrálne, výsledný náboj je nulový (napr. atóm). Pokiaľ jeden typ náboja prevyšuje, prejavuje sa

[1] THALES z MILÉTU (asi 624 – 547) grécky učenec, prvý predstaviteľ milétskej školy.

[2] WILLIAM GILBERT (1544 – 1603) bol anglický prírodovedec a lekár. Zaoberal sa najmä elektrinou a magnetizmom. Uznávaný londýnsky doktor (a osobný lekár Alžbety I.) Napísal knihu De Magnete (O magnetizme) vysvetlil, ako sa magnety priťahujú a odpudzujú. Poukázal aj na to, že Zem je ako obrovský tyčový magnet, a preto strelka kompasu vždy smeruje na sever.

ich rozdiel ako voľný náboj a hovoríme o elektrickom stave telesa. Elektrické náboje vytvárajú okolo seba elektrické pole, ktoré pôsobí na iné náboje elektrickou silou. Ak elektrický náboj zmení svoju polohu, tak sa zmení aj jeho elektrické pole, pričom táto zmena poľa sa šíri rýchlosťou svetla. To, že silové pôsobenie sa šíri konečnou rýchlosťou, ukázala až teória relativity na začiatku minulého storočia.

Základné poznatky o elektrických nábojoch:

1. Elektrický náboj je vždy spojený s časticou s nenulovou hmotnosťou.

2. Elektrický náboj môžeme prenášať z povrchu jedného telesa na povrch iného telesa. Náboj sa môže premiestňovať aj v telese. Látky, v ktorých sa elektrický náboj voľne premiestňuje, voláme vodiče. V iných látkach sa zas nemôže voľne pohybovať prakticky žiadny náboj, preto tieto látky voláme dielektriká - nevodiče.

3. Existujú dva druhy elektrického náboja: kladný a záporný.

4. Zákon zachovania náboja: v elektricky izolovanej sústave telies je celkový elektrický náboj konštantný, elektrický náboj nemožno vytvoriť ani zničiť, je ho možné len premiestňovať.

5. Elektrický náboj je deliteľný. Nemožno ho však deliť neobmedzene, ale iba po **elementárny elektrický náboj**: $e = 1,602 \times 10^{-19}\,C$. Nositeľmi náboja sú elementárne častice: elektrón (záporný náboj), protón (kladný náboj) a iné. V atóme je rovnaký počet protónov (jadro) a elektrónov (obal), takže navonok sa tvári ako elektricky neutrálny. Pokiaľ bol z atómu vyrazený elektrón, hovoríme o kladnom ióne a v prípade zachytenia ďalšieho elektrónu atómom ide o záporný ión.

6. Zákon superpozície: pri súčasnom pôsobení viacerých bodových nábojov je účinok rovnaký, ako keby pôsobil jeden náboj s nábojom všetkých ostatných nábojov.

7. Zákon invariantnosti: elektrický náboj je vo všetkých sústavách invariantný, t. j. nameraná veľkosť náboja je celkom nezávislá od rýchlosti pohybu častice.

Elektrický náboj ako fyzikálnu veličinu označujeme Q alebo q a jeho jednotka je 1 **coloumb** (C), teda $[Q] = 1\,C$. Pri definícii tejto jednotky sa nevychádza z Coulombovho zákona. Jeden Coulomb je elektrický náboj, ktorý prejde vodičom za 1 s pri ustálenom prúde 1 A. Ampér (A) je jednou zo základných veličín v sústave SI. Význam tohto vyjadrenia bude celkom jasný až po preštudovaní nasledujúcej kapitoly: Elektrický prúd. Elektrický prúd súvisí na jednej strane s elektrickým nábojom, no na drujej strane tiež má magnetické účinky (kap. 15.5).

Všetky nabité makroskopické telesá obsahujú určité množstvo elektrického náboja. Tento náboj je rozložený v objeme (resp. na povrchu) telesa v takom množstve, že dané rozloženie považujeme za spojité.

Vzhľadom na tvar a rozmery telesa definujeme objemovú, plošnú a dĺžkovú hustotu elektrického náboja.

- objemová hustota elektrického náboja: $\rho = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$, (C/m^3),
- plošná hustota elektrického náboja: $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$, (C/m^2),
- dĺžková hustota elektrického náboja: $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$, (C/m).

Ak poznáme objemovú hustotu elektrického náboja $\rho(x, y, z)$ ako funkciu priestorových súradníc, dokážeme si potom vypočítať celkový náboj Q v danom objeme V podľa vzťahu

$$Q = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V, \tag{12.1}$$

pričom podobný vzťah platí aj pre plošnú a dĺžkovú hustotu el. náboja.

12.2 Coulombov zákon

Kvantitatívnou charakteristikou elektrickej interakcie je sila. Veľkosť elektrickej sily, ktorou pôsobia na seba dva bodové náboje, prvýkrát zmeral na torzných váhach v roku 1785 francúzsky fyzik Ch. A. Coulomb[3] (12.2). Na základe svojich meraní vyslovil zákon, ktorý sa podľa neho volá **Coulombov zákon**: **Dva bodové náboje v pokoji pôsobia na seba silou, ktorá je priamoúmerná súčinu ich veľkostí a nepriamoúmerná druhej mocnine ich vzdialenosti:**

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{12.2}$$

[3]CHARLES COULOMB (1736 – 1806) francúzsky vojenský inžinier a objaviteľ známeho Coulombovho zákona.

kde $\varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\, C^2.N^{-1}.m^{-2}$ je permitivita vákua.

Vzťah pre Coulombov zákon je formálne podobný Newtonovmu gravitačnému zákonu (6.4). Podstatný rozdiel je však v pôvode síl a tým aj vo veľkosti konštánt $\kappa = 6,670 \times 10^{-11}\, N.m^2/kg^2$ a $k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \doteq 9 \times 10^9\, N.m^2/C^2$. Ak porovnáme elektrickú a gravitačnú silu medzi dvoma elektrónmi zistíme, že elektrická je o neuveriteľných 40 rádov väčšia ako gravitačná sila.

12.3 Intenzita elektrostatického poľa

Podobne ako sme definovali v gravitačnom poli intenzitu gravitačného poľa (6.5), tak aj v prípade elektrického poľa definujeme **intenzitu elektrického poľa**. **Intenzita elektrostatického poľa $\vec{E}$ náboja Q_1 je určená podielom elektrickej sily, ktorá v danom mieste poľa pôsobí na daný bodový náboj Q_2 a veľkosti tohto náboja**

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{Q_2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^3}\vec{r}\,, \tag{12.3}$$

Jednotkou intenzity sú: $[E] = N/C = m.kg.s^{-3}.A^{-1} = V/m$. Jednotku V (**volt**) zavedieme v nasledujúcej časti: 12.7 Elektrické napätie. Napriek tomu, že sme definovali intenzitu ako podiel sily na bodový náboj Q_2, jej hodnota od neho nezávisí a je iba funkciou veľkosti náboja Q_1 a vzdialenosti r od neho. Intenzita poľa je vektorová veličina, ktorej smer a orientácia sú dané vektorom príslušnej sily.

V prípade viacerých nábojov platí pre výsledné elektrostatické pole princíp superpozície, čiže vektorový súčet intenzít od jednotlivých nábojov je rovný výslednej intenzite v danom mieste

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E_i}\ . \tag{12.4}$$

Ak vieme vyjadriť intenzitu elektrického poľa v okolí náboja ako funkciu $\vec{r}$ ($\vec{E}(\vec{r})$), tak **elektrická sila** pôsobiaca na náboj Q_2 v hociktorom mieste je daná vzťahom

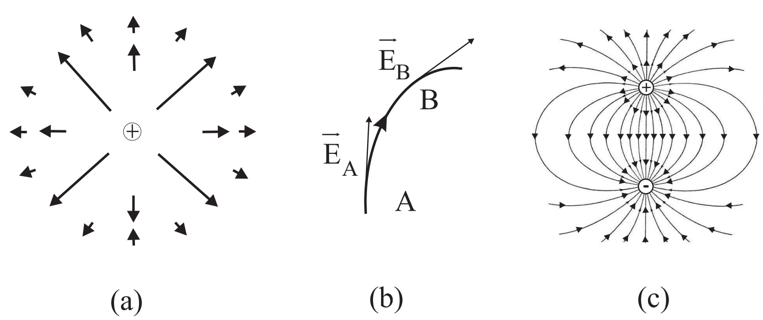
$$\vec{F_e} = Q_2\,\vec{E}\ . \tag{12.5}$$

Tento vzťah je po formálnej stránke totožný so vzťahom pre silu pôsobiacu na hmotné teleso v gravitačnom poli $\vec{F} = m\,\vec{K}$ (6.5). Ak však použijeme II. Newtonov pohybový zákon $\vec{F} = m\,\vec{a}$, tak vidíme, že náboj sa v elektrickom poli bude pohybovať zrýchlene. Vektor zrýchlenia tohto náboja má rovnaký smer s intenzitou elektrického poľa v danom mieste ($\vec{a} \parallel \vec{E}$) a pre veľkosť zrýchlenia platí: $a = (Q_2/m)\, E$.

Doteraz sme formulovali vzťahy pre intenzitu poľa vytvoreného jedným bodovým elektrickým nábojom, resp. sústavou bodových elektrických nábojov. Vo všeobecnom prípade, ak elektrické pole je vytvorené nabitým telesom určitého tvaru, určíme výslednú intenzitu elektrického poľa integráciou elementárnych príspevkov od elektrických nábojov rozložených spojito v elementoch objemu, resp. na plošných elementoch povrchu telesa (využijeme pri tom pojem hustota elektrického náboja a princíp superpozície).

Intenzita elektrostatického poľa $\vec{E}(Q, \vec{r})$ je vektorová funkcia a v každom bode má určitú veľkosť a smer. Môžeme ju znázorniť orientovanou úsečkou príslušnej dĺžky a smeru, a tak znázorniť priebeh poľa (obr. 12.1(a,c)). Druhý, častejšie používaný spôsob je zobrazenie pomocou **siločiar**. Sú to čiary, ku ktorým má vektor intenzity v každom ich bode smer dotyčnice (obr. 12.1(b)), a sú rovnako orientované ako daný vektor. Siločiary daného poľa sa nikde nepretínajú. Siločiary začínajú v kladnom a končia v zápornom elektrickom náboji.

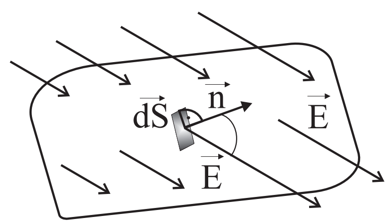
Podľa tvaru rozloženia siločiar rozdeľujeme elektrostatické pole na homogénne a nehomogénne. V homogénnom poli je hodnota intenzity všade konštantná a má rovnaký smer. S homogénnym elektrickým poľom sa stretávame napríklad v rovinnom kondenzátore. Nehomogénne sú všetky polia, pre ktoré neplatí jedno z predošlých tvrdení. Špeciálnym prípadom nehomogénneho poľa je radiálne pole bodového náboja (obr. 12.1(a)).



Obrázok 12.1: Možné tvary siločiar elektrostatického poľa.

12.4 Tok intenzity elektrostatického poľa. Gaussova veta.

Intenzita elektrického poľa charakterizuje pole v celom priestore. Ak však chceme charakterizovať pole v určitej oblasti, zavádzame skalárnu veličinu - tok vektora intenzity elektrického poľa. Vo fyzike pojem tok zovšeobecňujeme aj na iné vektorové polia. Pritom však nič konkrétne netečie. Je tu iba analógia napríklad s poľom vektora rýchlosti prúdiacej kvapaliny - objemu vody, ktorá by pretiekla danou plochou za jednotku času (objemový tok).



Obrázok 12.2: Tok intenzity elektrostatického poľa cez plochu.

Pri definovaní toku elektrickej intenzity budeme postupovať nasledujúco (pozri obr. 12.2). Zvolíme si malú orientovanú rovinnú plôšku d$\vec{S}$. Tejto plôške priradíme vektor plošného elementu d$\vec{S}$ = d$S\,\vec{n}$ ($\vec{n}$ jednotkový normálový vektor roviny). Pretože plôšky dS sú ľubovoľne malé, môžeme predpokladať, že elektrické pole určené vektorom intenzity $\vec{E}$ je na každej z nich konštantné. Tok T intenzity elektrického poľa plochou dS definujeme ako skalárny súčin vektora $\vec{E}$ a vektora elementu plochy d$\vec{S}$

$$dT = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{12.6}$$

Definíciu toku môžeme rozšíriť na tok ľubovoľnou spojitou plochou. Teda **tok vektoru intenzity** vybranou plochou je určený nasledujúcim integrálom:

$$T = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{12.7}$$

Vypočítajme teraz tok vektora intenzity elektrostatického poľa bodového náboja z objemu uzavretého guľovou plochou so stredom v mieste náboja. V každom bode tejto guľovej plochy má vektor intenzity (12.3) konštantnú veľkosť a smer zhodný so smerom vonkajšej normály guľovej plochy, teda $\vec{E}\|d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\,dS$. Teraz aplikujeme tento poznatok na Gaussovu vetu, pričom intenzitu môžeme vybrať pred integrál, lebo je na danej ploche konštanta. Zostane nám integrál z uzavretej guľovej plochy, ktorého veľkosť je $S = 4\,\pi\,r^2$. Matematický zápis našej úvahy vyzerá takto:

$$T = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Porovnaním koncových vyjadrení predošlého vzťahu dostaneme vyjadrenie pre **Gaussovu**[4] **vetu: Celkový tok intenzity $\vec{E}$ elektrického poľa ľubovoľnou uzavretou plochou S obklopujúcu elektrický náboj sa rovná podielu toho náboja Q a permitivity vákua:**

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{12.8}$$

Pre kladný náboj je tok kladný, pre záporný náboj je tok záporný. Uzavretá guľová plocha okolo bodového náboja Q sa volila pre jednoduchosť výpočtu. V prípade všeobecnej plochy okolo náboja, musí z nej vychádzať rovnaký počet siločiar ako z guľovej plochy. Ak bude náboj mimo uzavretej plochy, potom siločiary plochu buď nepretnú alebo ju pretnú dvakrát, takže celkový výtok sa bude rovnať nule. Ak sa vnútri uzavretej plochy bude nachádzať viacero nábojov, tak potom $Q = \sum_i Q_i$ predstavuje celkový náboj. Vo všeobecnosti teda vzťah (12.8) možno interpretovať: **Celkový tok vektora intenzity elektrostatického poľa ľubovoľnou uzavretou plochou sa rovná algebrickému súčtu nábojov materiálnych objektov uzavretých touto plochou, delenému permitivitou vákua.**

Aplikácie Gaussovej vety

Ako prvú aplikáciu si vypočítame intenzitu elektrostatického poľa od priameho vodiča. Uvažujeme nekonečne dlhé vlákno nabité konštantnou dĺžkovou hustotou elektrického náboja λ. Pri riešení budeme využívať valcovú symetriu, ktorá zjednodušuje výpočet. Keďže predpokladáme nekonečne dlhé vlákno, bude vektor intenzity elektrického poľa v každom bode kolmý na os vlákna (obr. 12.3). Ďalej z valcovej symetrie vyplýva, že veľkosť intenzity elektrického poľa je iba funkciou vzdialenosti $E = E(a)$. V takomto prípade je výhodné voliť Gaussovu plochu S ako valcovú plochu s polomerom a, určitou výškou

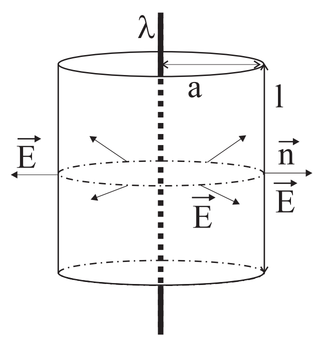
[4]KARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) bol jeden z najväčších matematikov a fyzikov všetkých čias. Zaoberal sa teóriou čísel, matematickou analýzou, geometriou, geodéziou, magnetizmom, astronómiou a optikou.

l, ktorej osou je nabité vlákno. Na podstavách tejto plochy je vektor poľa $\vec{E}$ kolmý na miestnu normálu k ploche $\mathrm{d}\vec{S}$, takže príspevok k toku elektrickej intenzity poľa je nulový. Nenulový príspevok dostaneme iba od plášťa valca, kde je vektor $\vec{E}$ v každom bode rovnobežný s normálou $\vec{n}$. Vektory $\vec{E}$ majú na tomto plášti rovnakú veľkosť a tok vektora elektrickej intenzity je podľa Gaussovej vety

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S = E\,2\,\pi\,a\,l = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Elektrický náboj na úseku vlákna dĺžky l môžeme vyjadriť pomocou dĺžkovej hustoty elektrického náboja vzťahom $Q = \lambda\, l$. Z tohoto pre intenzitu elektrického poľa E vo vzdialenosti a od vlákna dostávame

$$E = \frac{\lambda}{\varepsilon_0\, 2\,\pi\, a}\,. \tag{12.9}$$



Obrázok 12.3: Výpočet intenzity elektrického poľa nekonečne dlhého nabitého vlákna.

Ako druhú aplikáciu si vypočítame intenzitu elektrostatického poľa homogénne nabitej dosky. Tak ako v predošlom prípade, tak aj teraz použijeme Gaussovu vetu (12.8) k výpočtu intenzity poľa v okolí nekonečne homogénnej nabitej dosky s plošnou hustotou σ. Keďže uvažujeme nekonečnú rovinu, ktorá má vo všetkých smeroch rovnaké vlastnosti, nemôže byť vektor $\vec{E}$ k rovine šikmý, ale musí byť na ňu kolmý (obr. 12.4(a)). Ďalej vzhľadom na súmernosť, musí byť intenzita poľa E na obidvoch stranách roviny rovnako veľká.

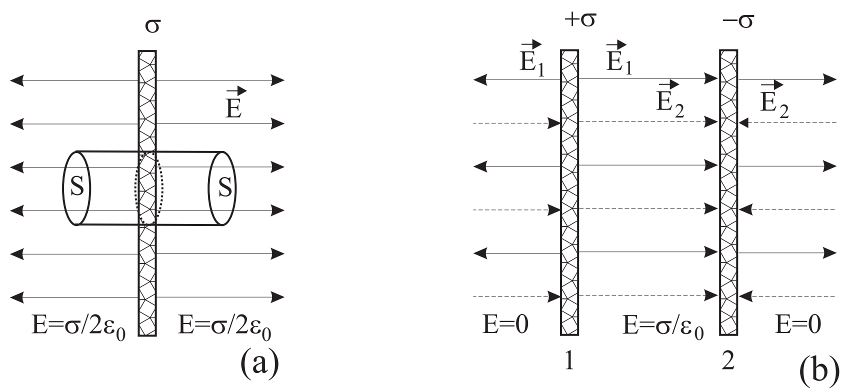
Ako Gaussovu plochu si vyberieme malý valec (obr. 12.4(a)). Tok intenzity prechádzajúci plášťom valca je nulový, keďže $\vec{E}$ je kolmá na plochu plášťa valca. Zostáva nám potom len tok dvomi podstavami daného valca, ktorý sa dá vyjadriť ako

$$T = E\,2\,S\ .$$

Náboj, ktorý sme uzavreli do valca, má hodnotu: $Q = \sigma\, S$. Spojením posledných dvoch vzťahov pomocou Gausovej vety (12.8) dostávame pre **intenzitu homogénnej nabitej dosky** vzťah

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\ . \tag{12.10}$$

Intenzita poľa E teda nezávisí od vzdialenosti od roviny a vzniká homogénne elektrické pole.



Obrázok 12.4: Priebeh intenzity elektrického poľa v okolí homogénne nabitej dosky.

Ukážme si, aká bude intenzita elektrického poľa v prípade dvoch homogénne nabitých rovín, na ktorých sa nachádzajú elektrické náboje opačnej polarity. Situáciu znázorňuje obrázok 12.4(b). Na prvej ploche je rozložený elektrický náboj s plošnou hustotou $+\sigma$ a na druhej $-\sigma$. Pre pole blízko nabitej plochy použijeme vzťah (12.10). Intenzita elektrického poľa je na roviny kolmá a jej vektor má iba zložku v smere kolmej na rovinu. Intenzitu elektrického poľa od prvej - kladne nabitej roviny označme E_1 a elektrickú intenzitu od druhej - záporne nabitej roviny označme E_2. V priestore medzi doskami majú obe intenzity rovnaký smer, takže výsledná intenzita bude súčet obidvoch a jej hodnota je

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ . \tag{12.11}$$

V priestore mimo dosiek majú intenzity opačný smer, teda sa odčítajú a intenzita je tam nulová, keďže roviny sú nabité opačnými nábojmi čím, sa pole ruší.

V prípade, že roviny sú konečných rozmerov (napr. kondenzátor), je pole homogénne len v strednej časti a na okrajoch dochádza k rozptylu siločiar a intenzita sa mení. Vhodným usporiadaním elektród - dosiek, je možné minimalizovať rozptyl siločiar.

12.5 Práca a potenciál elektrostatického poľa

Sily elektrostatického poľa vyjadrené Coulombovým zákonom (12.2) sú matematicky analogické gravitačným silám definovaným Newtonovým zákonom (6.4), z čoho vyplýva, že na popis vlastností daného poľa sa môžu používať rovnaké veličiny. V obidvoch prípadoch ide o konzervatívne polia. Elektrostatické sily rovnako ako gravitačné sily majú tú vlastnosť, že práca nimi vykonaná, nezávisí od tvaru dráhy pohybu náboja, ale len od počiatočnej a konečnej polohy. Takže tiež definujeme skalárnu veličinu **elektrický potenciál**, pomocou ktorého charakterizujeme zase elektrostatické pole.

Majme elektrostatické pole vytvorené bodovým elektrickým nábojom Q_1 umiestneným v počiatku súradnicovej sústavy a vo vzdialenosti r_A v bode A bodový náboj Q_2. Pri presune tohto náboja do bodu $B(r_B)$ vykonáme prácu, ktorú vypočítame ako

$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q_1\,Q_2}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} ,$$

teda

$$W = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) . \tag{12.12}$$

Pri úprave integrovanej funkcie sme využili, že $\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = r\,\mathrm{d}r$, lebo v prípade radiálneho poľa oba vektory majú rovnaký smer.

Ak zoberieme do úvahy fakt, že silu pôsobiacu na náboj Q_2 si môžeme zapísať pomocou elektrickej intenzity náboja Q_1 ako $\vec{F}_e = Q_2\,\vec{E}$ (12.5), potom všeobecné vyjadrenie práce (12.12) má tvar

$$W = Q_2 \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,. \tag{12.13}$$

Elektrostatické pole má však tú pozoruhodnú vlastnosť, že práca vykonaná prenosom náboja medzi dvoma bodmi nezávisí od dráhy, po ktorej náboj prenášame, ale iba od začiatočnej a konečnej polohy prenášaného náboja. Je to práve taká dôležitá vlastnosť elektrostatického poľa, ako fakt, že toto pole je žriedlové alebo konzervatívne. Skutočnosť, že hodnota krivkového integrálu nezávisí od dráhy, nie je triviálna, a neplatí pre ľubovoľné silové pole (neplatí napr. pre sily trenia). Práca týchto síl na uzavretej dráhe je nulová, čo sa dá vyjadriť vzhľadom na predošlý vzťah ako

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0\ . \tag{12.14}$$

Tak ako v gravitačnom poli, tak aj v elektrostatickom poli si definujeme potenciálnu energiu V_p pomocou práce (12.12), ktorú musí vykonať vonkajšia sila pri premiestňovaní náboja z nekonečna do určitého miesta A. Potenciálnu energiu náboja Q_2 v elektrostatickom poli náboja Q_1 vo vzájomnej vzdialenosti r_A teda vyjadruje výraz

$$V_p(r_A) = \int_{r_A}^{\infty} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q_1\,Q_2}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{\infty} = \frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{1}{r_A}\ . \tag{12.15}$$

Prácu (12.12), ktorá sa koná pri presune bodového náboja Q_2 z bodu A do bodu B v elektrostatickom poli náboja Q_1 sa dá potom vyjadriť aj ako rozdiel potenciálnych energií v daných bodoch: $W = V_p(r_A) - V_p(r_B)$. V homogénnom elektrostatickom poli sa všetko zjednoduší, pretože v takomto poli je intenzita všade konštantná a potom pre prácu vykonanú pri prenesení náboja Q_2 o vzdialenosť d platí: $W = Q_2\,E\,d$.

Potenciálna energia náboja je skalárna veličina, ktorá jednoznačne závisí od jeho veľkosti. Je to veličina, ktorá popisuje stav náboja, ktorý sa nachádza v elektrostatickom poli iného náboja. Ak však túto veličinu budeme počítať vzhľadom na jednotkový náboj, získame veličinu, ktorá popisuje samotné elektrické pole. Touto veličinou je potenciál elektrostatického poľa náboja Q. **Potenciál φ elektrostatického poľa náboja Q definujeme ako podiel potenciálnej energie $V_p(r_A)$ bodového elektrického náboja Q_2** (12.15) **v danom mieste poľa a veľkosťou daného náboja** ako

$$\varphi(r_A) = \frac{V_p(r_A)}{Q_2} = \int_{\infty}^{r_A} \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \frac{Q}{r_A}\ , \tag{12.16}$$

čo je potenciálová funkciu v okolí bodového náboja. Ak si uvedomíme, že výraz v integráli v predošlom vzťahu je veľkosť intenzity elektrostatického poľa náboja Q (12.3), potom sa dá zapísať **potenciál elektrostatického poľa pomocou intenzity elektrostatického poľa** ako

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \,. \tag{12.17}$$

Tento vzťah platí pre akúkoľvek intenzitu elektrostatického poľa sústavy bodových nábojov či nabitého telesa.

Bodom, v ktorých má elektrický potenciál rovnakú hodnotu hovoríme **ekvipotenciálne hladiny**, podobne ako v gravitačnom poli. Pri prenášaní náboja po ekvipotenciálnej hladine sa nekoná práca. Intenzita elektrostatického poľa je kolmá na ekvipotenciálnu hladinu v každom bode. Ekvipotenciálne hladiny - v reze ekvipotenciálne čiary a siločiary tvoria navzájom ortogonálne trajektórie. V elektrickom poli bodového náboja alebo rovnomerne nabitej gule sú ekvipotenciálnymi čiarami sústredné kružnice, resp. guľové vrstvy v prípade trojrozmerného pohľadu. V homogénnom poli tvoria tieto čiary sústavu rovnobežiek kolmých na siločiary.

12.6 Vzťah intenzity a potenciálu elektrostatického poľa

V predchádzajúcom odseku bolo uvedené, že intenzita a potenciál elektrostatického poľa navzájom súvisia integrálnym vzťahom (12.17). S podobným vyjadrením sme sa už stretli v gravitačnom poli medzi potenciálom a intenzitou gravitačného poľa (6.10). Inverzné vyjadrenie sme vyjadrili pomocou gradientu (6.14). Keďže v prípade elektrostatického poľa matematicky ide formálne o ten istý vzťah ako v gravitačnom poli, môžeme použiť rovnaké odvodenie. Teda platí, že **intenzita elektrostatického poľa je rovná zápornému gradientu potenciálu**

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(\vec{r}) \,. \tag{12.18}$$

Gradient skalárnej funkcie je vektorová funkcia, ktorej hodnota v každom bode poľa sa rovná maximálnej zmene skalárnej funkcie na jednotku dĺžky v danom bode a má smer jej maximálneho rastu.

12.7 Elektrické napätie

Rozdiel potenciálov $\varphi_B - \varphi_A$ medzi dvoma miestami A a B nazývame **elektrickým napätím**. Ako vidieť zo vzťahu (12.17), pre elektrické napätie platí vzťah

$$U = \Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r}\,. \tag{12.19}$$

Elektrické napätie medzi dvoma bodmi elektrostatického poľa sa rovná práci na prenesenie jednotkového kladného elektrického náboja medzi týmito bodmi elektrostatického poľa. Jednotka napätia je rovnaká ako jednotka potenciálu, teda 1 **volt** [5] (V). S využitím tohto vzťahu môžeme tiež definovať prácu potrebnú na priemestnenie náboja Q_2 z jedného bodu do druhého ako súčin napätia (rozdielu potenciálu daných bodov) a daného náboja: $W = U\,Q_2$.

12.8 Elektrický dipól

Druhým dôležitým systémom nábojov je dvojica bodových nábojov uložených v istej vzájomnej vzdialenosti d. Intenzita poľa v ľubovoľnom bode priestoru je daná superpozíciou polí dvoch nábojov a matematicky súčtom dvoch výrazov typu (12.3). Najjednoduchšie pole vytvárajú dvojice v absolútnej hodnote rovnako veľkých nábojov, pričom najčastejšie používaná je dvojica rovnako veľkých nábojov opačného znamienka, ktorú nazývame **elektrický dipól.** Kvôli zjednodušeniu si ukážeme len charakteristické črty poľa elektrického dipólu. Elektrický dipól popisujeme elektrickým dipólovým momentom $\vec{p} = Q\,\vec{d}$, pričom smer dipólového momentu je od záporného ku kladnému náboju. Pre výsledný elektrický potenciál dipólu platí:

$$\varphi_{dip} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\,. \tag{12.20}$$

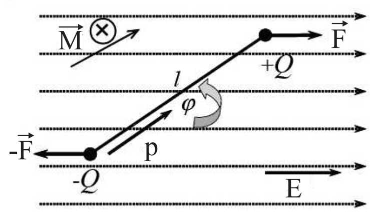
Na rozdiel od elektrického potenciálu bodového elektrického náboja, ktorý klesá nepriamoúmerne prvej mocnine vzdialenosti od elektrického náboja, elektrický potenciál dipólu klesá s druhou mocninou vzdialenosti od stredu dipólu.

Vzťah pre intenzitu poľa bodového dipólu nájdeme pomocou vzťahu (12.18), t. j. vypočítaním gradientu vzťahu (12.20). Teda intenzita elektrického poľa dipólu má tvar

$$\vec{E} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{3\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)\,. \tag{12.21}$$

[5] ALESSANDRO VOLTA (1745 – 1827) taliansky vynálezca, fyzik a venoval sa elektrine. Vytvoril ako prvý galvanickú batériu, ktorá dostala pomenovanie Voltov článok.

Vo výrazoch pre elektrickú intenzitu je treba si všimnúť, že intenzita elektrického poľa dipólu klesá úmerne s treťou mocninou vzdialenosti od stredu dipólu. Podrobnejšou analýzou by sme dospeli k tomu, že intenzita elektrického dipólu pre $r >> l$ v smere kolmom na dipól má pri rovnakej vzdialenosti práve polovičnú hodnotu ako na osi dipólu. V chemických štruktúrach sa často stretávame s dipólmi, ktoré vznikajú v molekulách. Takáto molekula potom nadobúda elektrický dipólový moment a polaritu. Napríklad molekula vody je polárna a má elektrický dipólový moment $p_{H_2O} = 6.17 \times 10^{-30}\, C.m.$



Obrázok 12.5: Dipól v homogénnom elektrickom poli.

Predpokladajme, že máme teraz elektrický dipól v homogénnom elektrickom poli $\vec{E}$ (obr. 12.5). Sily poľa pôsobiace na elektrické náboje tvoria dvojicu síl. Pre moment pôsobiacej dvojice síl platí

$$\vec{M} = \vec{l} \times Q\,\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}\ . \tag{12.22}$$

Dvojica síl sa snaží dipól natočiť, a to tak, aby vektor elektrického dipólového momentu mal smer siločiar elektrického poľa. Takáto orientácia dipólu v homogénnom elektrickom poli zodpovedá stabilnej polohe. Ak je voľný, zorientuje sa tak, že os dipólu l je rovnobežná so smerom $\vec{E}$. Pri pružnom upnutí sa iba vychýli zo základnej polohy o nejaký uhol, určený rovnováhou momentu sily od vonkajšieho poľa a momentu väzby. Vo vhodnom elektrickom poli sa kúsky papiera, vlasy alebo drobné predmety stávajú dipólmi, zorientujú sa v smere siločiar a sú potom priťahované k zdroju elektrického poľa (napr. nabitá sklenená tyč.)

12.9 Pohyb nabitej častice v elektrickom poli

Preskúmajme teraz pohyb nabitej častice s hmotnosťou m a nábojom q v homogénnom elektrickom poli. Z praktického hľadiska sú zaujímavé dva prípady pohybu častice v pozdĺžnom a priečnom elektrickom poli. Smer elektrického poľa vzťahujeme vzhľadom na smer rýchlosti častice.

V prípade vstupu častice **rovnobežne s elektrickým poľom** v mieste s potenciálom φ_1 sa v dôsledku pôsobenia elektrostatickej sily náboj dostane do miesta s potenciálom φ_2. Pri tomto presune sa zvyšuje aj rýchlosť danej častice z rýchlosti v_0 na rýchlosť v. Pre zmenu kinetickej energie častice potom platí:

$$\frac{1}{2}m\,v^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = q\,(\varphi_2 - \varphi_1) = q\,U\ . \qquad (12.23)$$

Častica sa ďalej pohybuje v pôvodnom smere. Ak by $v_0 = 0\,m/s$ potom rýchlosť pro prejdení potenciálového rozdielu U je: $v = \sqrt{2\,q\,U/m}$.

Pri vstupe častice **kolmo na elektrické pole** môžeme na základe II. Newtonovho zákona písať pre silu pôsobiacu na náboj vzťah:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m\,\vec{a} = q\,\vec{E}\ ,\\
F_x &= m\,a_x = m\frac{dx^2}{dt} = 0\ ,\\
F_y &= m\,a_y = m\frac{dy^2}{dt} = q\,E\ .
\end{aligned}$$

Postupnou integráciou podľa času dostaneme zložky rýchlosti a súradnice polohy častice v ľubovoľnom čase t. Výsledné vzťahy sú

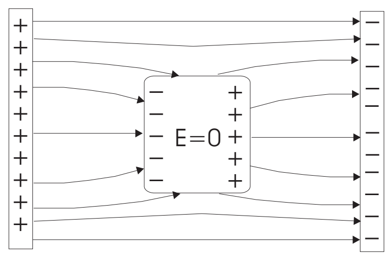
$$\begin{aligned}
v_x &= v_0, & x &= v_0\,t,\\
v_y &= \frac{q\,E}{m}t, & y &= \frac{1}{2}\frac{q\,E}{m}t^2.
\end{aligned}$$

Častica sa bude pohybovať po parabolickej dráhe.

12.10 Elektrostatická indukcia

Elektrické vodiče sú látky, ktoré obsahujú veľký počet častíc s nábojom, ktoré sa môžu v nich voľne pohybovať. Tieto častice nazývame **voľné častice s nábojom**. V kovových vodičoch (napr. meď, hliník, striebro) sú to voľné elektróny, v kvapalinových vodičoch (elektrolyty, roztoky solí) sú to kladné a záporné ióny. Tieto voľné častice sa vo vodičoch ustavične a neusporiadane pohybujú. Preto je vo vodiči, ktorý nie je nabitý a nie je vo vonkajšom elektrickom poli, ich rozloženie také, že v ľubovoľnej časti vodiča je celkový náboj nulový.

Zmena rozloženia voľných nosičov náboja nastane, ak vložíme nenabitý vodič do elektrického poľa. Tomuto prerozdeleniu nábojov hovoríme **elektrostatická indukcia**. **Pri tomto jave sa protiľahlé časti povrchu vodiča vloženého do elektrického poľa nabijú elektrickým nábojom s rovnakou veľkosťou, ale opačným znamienkom. Takto prerozdelené elektrické náboje na povrchu vodiča nazývame indukované náboje.** Keď vodič vyberieme z elektrického poľa, elektrická indukcia zanikne. Vodič sa vráti do pôvodného rovnovážneho stavu.



Obrázok 12.6: Vodič v elektrostatickom poli.

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že elektrické náboje sa vo vodičoch prerozdelia tak, aby kompenzovali účinok vonkajšieho elektrického poľa pôsobiaceho na vodič. Toto prerozdelenie spôsobuje vznik indukovaných nábojov na povrchu vodiča, čoho výsledkom je zmena elektrického vonkajšieho poľa a tvaru siločiar. Schematicky je to znázornené na obrázku 12.6. Na záporne nabitej strane vodiča siločiary vstupujú do vodiča a opäť vystupujú na kladne nabitom povrchu vodiča (obr. 12.6). Intenzita elektrického poľa od indukovaných nábojov má opačný smer ako intenzita vonkajšieho elektrického poľa. Po dosiahnutí výsledného ustáleného stavu je intenzita elektrického poľa vo vnútri vodiča nulová. Prerozdelenie elektrických nábojov vo vodičoch nie je okamžité, prebieha s veľmi krátkym časovým intervalom 10^{-12} až 10^{-14} s.

Vzhľadom na to, že intenzita je vo vnútri vodiča nulová, vnútro vodičov je dokonale tienené pred účinkom vonkajších statických elektrických polí. Tento jav sa využíva na elektrické tienenie citlivých zariadení (niektoré meracie prístroje, vstupné diely rozhlasových a televíznych prijímačov a pod.), ale aj na ochranu pred elektrickým výbojom - Faradayova klietka. Kovová karoséria auta je takým príkladom bezpečného útočiska pred prípadným úderom blesku. Ďalším príkladom jednoduchej ukážky Faradayovej klietky je nedostupnosť mobilného telefónu zabaleného do alobalu.

12.11 Kapacita vodiča a kondenzátora

Dôležitou vlastnosťou vodiča, sústavy vodičov a telies je schopnosť akumulovať elektrický náboj. Táto vlastnosť má veľké praktické využitie v prvkoch elektrických obvodov a zariadení, ktoré voláme kondenzátory. Pri nabíjaní vodičov zistíme, že rôzne telesá nabité rovnakým nábojom majú rôzny potenciál. Tento potenciál závisí od veľkosti a tvaru telesa, vzdialenosti od ostatných telies ako i prostredia, v ktorom sú uložené. **Potenciál každého telesa je v bežných prostrediach priamoúmerný náboju $\varphi = C\,Q$.** Konštantu úmernosti C, ktorá charakterizuje schopnosť hromadiť istý elektrický náboj, nazývame **kapacita**. Kapacitu vodiča možno definovať vzťahom

$$C = \frac{Q}{\varphi}\,. \tag{12.24}$$

Jednotkou kapacity v sústave SI je **farad** (F). Jeden farad je kapacita vodiča, ktorý sa nábojom $1\,C$ nabije na potenciál $1\,V$. V technickej praxi sa kapacita meria v menších jednotkách. Sú to $1\,\mu F = 10^{-6}\,F$, $1\,nF = 10^{-9}\,F$, $1\,pF = 10^{-12}\,F$.

Kapacita osamotených vodičov je veľmi malá. Napríklad guľový vodič ($C = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$) s polomerom $9\,cm$ vo vákuu má kapacitu len $10\,pF$. Väčšiu kapacitu má sústava dvoch navzájom izolovaných vodičov, ktorú nazývame **kondenzátor**. Pokiaľ majú spomínané vodiče rovnako veľké náboje opačných znamienok, hovoríme, že kondenzátor je nabitý. Jeho kapacitu určíme zo vzťahu

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}\,, \tag{12.25}$$

kde U je napätie medzi vodičmi s potenciálmi φ_1 a φ_2. V zásade rozlišujeme tri druhy kondenzátorov: doskový, guľový a valcový, pričom každý z nich má svoje modifikácie.

12.12 Kapacita doskového kondenzátora

Jednoduchým kondenzátorom je **doskový kondenzátor**, ktorý je znázornený na obrázku 12.4(b). Tvoria ho dve rovinné kovové platne s plochou S vzdialené o d. Predpokladajme, že na doskách kondenzátora je náboj Q rovnomerne rozložený po povrchu dosiek s plošnou hustotou $\sigma = Q/S$. Elektrické pole medzi doskami môžeme považovať za homogénne s intenzitou

$E = \sigma/\varepsilon_0$ (12.11) a nehomogenity na okrajoch dosiek zanedbávame. Zo vzťahu pre potenciálový rozdiel (12.19) v prípade homogénneho poľa sa dá napätie medzi doskami vyjadriť ako

$$U = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = E \int_{r_A}^{r_B} \mathrm{d}r = E\,d = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0\,S}\,. \tag{12.26}$$

Po dosadení do (12.25) sa **kapacita doskového kondenzátora** rovná

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,. \tag{12.27}$$

Elektrická kapacita doskového kondenzátora je priamoúmerná plošnému obsahu dosiek a nepriamoúmerná vzájomnej vzdialenosti dosiek.

Z vykonaného postupu určenia kapacity doskového kondenzátora sa dá formulovať "návod", ako určiť elektrickú kapacitu iného usporiadania vodičov.

- Najprv stanovíme rozloženie elektrického náboja.
- Vypočítame intenzitu elektrického poľa, napr. pomocou Gaussovej vety (12.8).
- Vyjadríme napätie pomocou vzťahu (12.19).
- Zo známeho napätia a náboja vypočítame kapacity podľa vzťahu (12.25).

12.13 Spájanie kondenzátorov

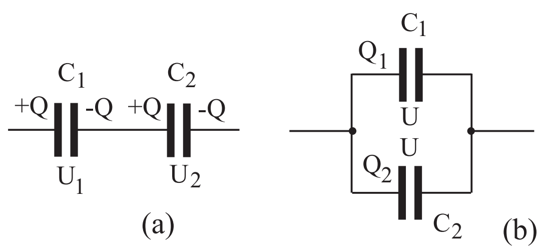
Väčšina kondenzátorov má hodnoty kapacít stále. Požadované hodnoty kapacít dosahujeme rôznym spájaním kondenzátorov. Najjednoduchšie prípady spojenia sú paralelné (spojenie vedľa seba) a sériové zapojenie (spojenie za sebou). Pri **sériovom zapojení** dvoch kondenzátorov s kapacitami C_1 a C_2 (obr. 12.7(a)) majú náboje na obidvoch kondenzátoroch rovnakú veľkosť $Q = C_1\,U_1$ a $Q = C_2\,U_2$, kde U_1 a U_2 sú napätia medzi platňami kondenzátorov.

Z obrázku 12.7(a) vyplýva, že pri sériovom zapojení kondenzátorov je celkové napätie $U = U_1 + U_2$. Zo vzťahu pre kapacitu (12.25) a po nasledujúcej úprave dostaneme pre výslednú kapacitu dvoch kondenzátorov zapojených sériovo vzťah

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\,. \tag{12.28}$$

Pri **paralelnom zapojení** dvoch kondenzátorov s kapacitami C_1 a C_2 (obr. 12.7(b)) vzniká vlastne kondenzátor s väčšou účinnou plochou platní, čiže s väčšou kapacitou. Napätie U medzi platňami oboch kondenzátoroch je síce rovnaké, ale náboje na nich sú rôzne $Q_1 = C_1 U$ a $Q_2 = C_2 U$. Celkový náboj na sústave dvoch kondenzátorov je $Q = Q_1 + Q_2$ a zo vzťahu $Q = C\,U$ je zrejmé, že výsledná kapacita dvoch kondenzátorov zapojených paralelne je

$$C = C_1 + C_2 \,. \tag{12.29}$$



Obrázok 12.7: Sériové (a) a paralelné (b) zapojenie kondenzátorov.

V prípade zapojenia viacerých kondenzátorov sériovo alebo paralelne platia obdobné vzťahy ako (12.29 a 12.28) s daným počtom kondenzátorov

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i \,. \tag{12.30}$$

12.14 Energia elektrostatického poľa

Na vytvorenie sústavy dvoch alebo viacerých nábojov musíme vykonať prácu spojenú s prekonaním odpudivých či príťažlivých síl pôsobiacich medzi nimi. Pod energiou danej sústavy budeme potom rozumieť veľkosť práce, ktorú sme spotrebovali na jej vytvorenie. Vytvorme na začiatok sústavu dvoch bodových nábojov. Práca, ktorú musíme vykonať je rovná práci (12.12) potrebnej na premiestnenie jedného bodového náboja Q_2 z nekonečna k náboju Q_1 do vzdialenosti r_{12}, ktorá je medzi týmito nábojmi. Táto práca zodpovedá potenciálnej energii daných bodových nábojov definovanej podľa vzťahu (12.15).

Pre potenciál elektrického poľa φ_1 prvého náboja v poli druhého a pre potenciál φ_2 druhého náboja v poli prvého náboja môžeme na základe vzťahu (12.16) písať:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r_{12}}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{21}} \,.$$

Výsledná **energia dvoch nábojov** je potom daná vzťahom

$$E = \frac{1}{2}(Q_1\,\varphi_1 + Q_2\,\varphi_2)\ . \tag{12.31}$$

Pre sústavu n bodových nábojov by sme postupným pridávaním nábojov dostali vzťah

$$E = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\,\varphi_i\ , \tag{12.32}$$

kde symbolom φ_i sme označili potenciál elektrického poľa vytvoreného ostatnými elektrickými nábojmi sústavy v bode, v ktorom sa nachádza náboj Q_i.

Energia kondenzátora

Pri výpočte energie nabitého kondenzátora postupujeme rovnakým spôsobom ako v predošlom prípade. Majme kondenzátor kapacity C, na ktorom je náboj Q, a teda napätie medzi doskami kondenzátora je $U = Q/C$. Na to, aby sme zväčšili náboj kondenzátora o hodnotu dq (z kladnej dosky prenesieme tento náboj na zápornú dosku), musíme vykonať elementárnu prácu $\mathrm{d}W = U\,dq$. Aby sme nabili nenabitý kondenzátor na hodnotu Q, musíme vykonať prácu

$$W = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\ , \tag{12.33}$$

ktorá je rovná **energii nabitého kondenzátora**

$$E = \frac{1}{2}\,Q\,U = \frac{1}{2}\,C\,U^2\ . \tag{12.34}$$