RIEŠENIE POHYBOVEJ ROVNICE FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \tag{1}$$

kde $\vec{M}$ je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\vec{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Kyvadlo znázornené na obr. 1 vykonáva kmity v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákresňu. Veľkosť moment sily je daná vzťahom (pozor, *v tejto prílohe* $r_0 = d$)

$$M = -G_p.d = -(G\,sin\alpha)d = -mgd\,sin\alpha \tag{2}$$

kde m je hmotnosť telesa, g je tiažové zrýchlenie a d je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej sa kyvadlo kýva. Znamienko (-) vo vzťahu (2) vyjadruje tú skutočnosť, že sila G_p smeruje vždy do rovnovážnej polohy).

Veľkosť uhlového zrýchlenia je daná vzťahom

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}\,. \tag{3}$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare, $M=I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3) a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli harmonické kmity netlmené) dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare:

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgd\,sin\alpha = 0\ . \tag{4}$$

Pre malé výchylky $\sin\alpha \approx \alpha$ (rádovo do 5°) a po ďalšej úprave (vydelíme rovnicu (4) veličinou I) dostávame rovnicu

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0\ . \tag{5}$$

Rovnica (4) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami. Jej riešenie má tvar

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi)\ , \tag{6}$$

kde α je okamžitá uhlová vychýlka v danom čase t, α_0 je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ počiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina (ωt+α) je fáza kmitania. Ak funkciu (6) zderivujeme dvakrát podľa času a dosadíme do (5) a súčasne (6) dosadíme za α, ľahko sa presvedčíme, že (6) je riešením rovnice (5) vtedy, keď $\omega^2 = mgd/I$,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}\ . \tag{7}$$

(Záporná hodnota ω nemá fyzikálny význam). Veličina ω je uhlová rýchlosť kyvadla.