KMITY SPRIAHNUTÝCH KYVADIEL

Najjednoduchším periodickým kmitavým pohybom je taký, pri ktorom sa hmotný bod pohybuje po priamke. Kmitajúci bod voláme lineárnym oscilátorom. Lineárny oscilátor napr. tvorí závažie zavesené na pružine alebo kyvadlo. Pohyb lineárneho oscilátora je vyjadrený rovnicou

$$F_y = ky,$$

ak sme súradnicovú os y položili na priamku, po ktorej sa hmotný bod (teleso) pohybuje. F_y je veľkosť sily pružnosti (riadi pohyb, preto sa volá aj riadiacou alebo direkčnou silou), y je výchylka, konštanta k charakterizuje pružnú väzbu telesa. Uvedenú rovnicu môžeme na základe Newtenovho pohybového zákona upraviť:

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

$$\frac{d^2t}{dt^2} = -\frac{k}{m}y = -\omega^2 y.$$

Z fyzikálneho dôvodu sme položili k/m=ω^2. ω je uhlová frekvencia a má rozmer s^{-1}. Tejto rovnici vyhovuje riešenie

$$y = Asin(\omega t + \varphi_0),$$

kde A je amplitúda výchylky (najväčšia výchylka oscilátora – hmotného bodu – z rovnovážnej polohy), φ_0 začiatočná fáza (hodnota fázy oscilátora na začiatku počítania času), t čas. Ak teleso (hmotný bod) kmitá po priamke tak, že výchylka je sínusovou (kosínusovou) funkciou času, potom koná harmonický pohyb a volá sa **harmonický oscilátor**.

Kedy nebolo odporu prostredia, v ktorom teleso kmitá a nedokonalosť materiálu pružiny, vykonávalo by kmity netlmené. Aj vo vákuu pri každom cykle sa celková energia oscilátora zmenšuje o hodnotu, ktorá sa spotrebuje na prekonanie vnútorného trenia v materiáli pružiny. Celková energia oscilátora postupne klesá, v dôsledku čoho nastáva postupné zmenšovanie amplitúdy výchylky až sa teleso zastaví v rovnovážnej polohe. Teleso vykonáva tlmený kmitavý pohyb.

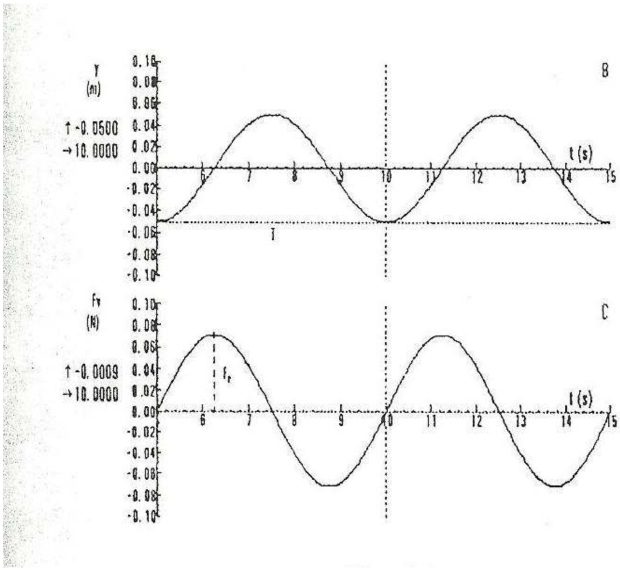
Keď chceme kmitavý pohyb oscilátora udržať, musíme z vonkajšieho zdroja dodávať energiu, ktorú oscilátor pri každom cykle stratí. Vonkajšia sila však nemôže byť konštantná, pretože celková práca konštantnej sily sa počas jedného cyklu rovná nule. Vonkajšia sila bude počas cyklu konať prácu len vtedy, keď mení svoj smer tak, aby pôsobila vždy v smere pohybu oscilátora. Najjednoduchší prípad nastane, keď vonkajšia sila má priebeh sínusový:

$$F_v = F_0 sin\Omega t,$$

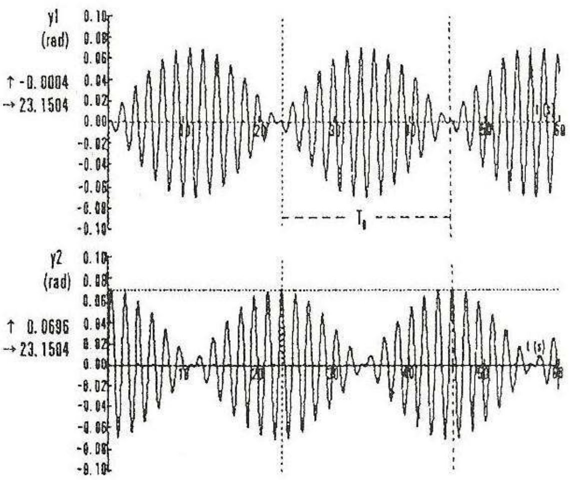
kde F_0 je amplitúda sily a Ω uhlová frekvencia. Keď sú kmity oscilátora vzhľadom na časový priebeh vonkajšej sily oneskorené o 1/4 periódy, a keď má sila rovnakú frekvenciu ako oscilátor, pôsobí vonkajšia sila v smere pohybu oscilátora, ako je to zrejmé z *obr. 3.1*.

Kmitavý pohyb, ktorý môže oscilátor vplyvom vonkajšej sily konať ľubovoľne dlho, sa volá **núteným kmitavým pohybom.** ak má budiaca sila rovnakú frekvenciu ako vlastné kmity oscilátora, nastáva rezonancia. Keď budiaca sila nemá túto frekvenciu, koná síce oscilátor nútené kmity v rytme budiacej sily, ale jej účinnosť je menšia ako pri rezonancii.

Vonkajšia periodická sila môže mať pôvod v inom oscilátore, ktorý na prvý nejakým spôsobom pôsobí. Také oscilátory voláme spriahnutými alebo viazanými.

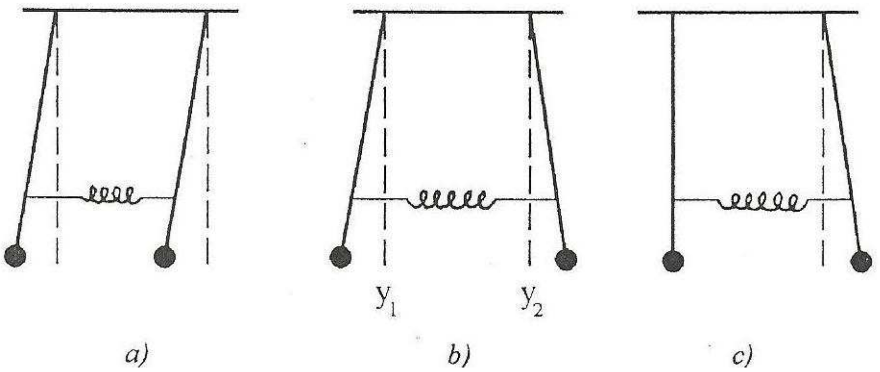


Obr. 3.1



Obr. 3.2

Budeme skúmať dva rovnaké oscilátory (fyzikálne kyvadlá), ktoré sú spriahnuté väzbou, realizovanou elastickou špirálou (elastická väzba). Vychýľme oscilátor 1 z rovnovážnej polohy, kým 2 podržme v jeho rovnovážnej polohe a potom oba uvoľnime (obr. 3.3c). Amplitúda výchylky oscilátora 1 sa začne zmenšovať, lebo časť jeho energie sa väzbou prenesie na oscilátor 2, ktorý začne kmitať s postupne narastajúcou amplitúdou výchylky. Prenášanie energie z oscilátora 1 na oscilátor 2 pokračuje a trvá tak dlho, až sa oscilátor 1 zastaví v rovnovážnej polohe a oscilátor 2 kmitá s takmer rovnakou amplitúdou výchylky ako oscilátor 1 na začiatku pokusu. V tom okamihu je pohybový stav oscilátorov práve opačný ako pôvodný stav a dej sa opakuje pri zmenených úlohách oscilátorov. Tak prechádza energia z jedného oscilátora na druhý a vplyvom tlmenia sa mechanická energia oscilátorov postupne zmenšuje, ako to vidno na obr. 3.2, na ktorom je znázornená závislosť výchyliek oscilátorov od času.



Obr. 3.3

V spriahnutých oscilátoroch **dochádza k rázom**, i keď obidva majú rovnakú periódu, teda uhlovú frekvenciu. Rázy nevznikajú rozladením oscilátorov, ale ich väzbou, čo možno experimentálne overiť, keď meníme tesnosť väzby. Čím je väzba tesnejšia, tým rýchlejšie sa prenáša energia z oscilátora na oscilátor a tým sú rázy častejšie.

K rázom a k výmene energie nedochádza iba vtedy, keď obidva oscilátory vychýlime na začiatku rovnako v jednom smere (obr. 3.3a) alebo symetricky v opačnom smere (obr. 3.3b). Kmity, ktoré v tomto prípade oscilátory konajú, voláme základnými kmitmi spriahnutých oscilátorov.

Keď sú oscilátory rozladené, t. j. majú napríklad rôznu hmotnosť, rôzne tuhú vlastnú väzbu, nastane tiež výmena energie, ale tak, že oscilátor, ktorý je prv vychýlený z rovnovážnej polohy, bude mať najmenšiu amplitúdu výchylky odlišnú od nuly a nulovú hodnotu dosahuje len amplitúda výchylky toho oscilátora, ktorý je na začiatku v pokoji.

Opísané experimenty vysvetlíme teraz teoreticky. Skúmajme pohyb dvoch harmonických netlmených oscilátorov, ktoré sú z fyzikálneho hľadiska presne rovnaké. Ďalej predpokladajme, že tlmenie v ložiskách a odpor vzduchu sú zanedbateľné. Keď nie je medzi oscilátormi väzba, platia pre oba rovnaké ohybové rovnice:

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -ky_1, \qquad m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -ky_2,$$

kde *m* sú hmotnosti kmitajúcich oscilátorov, súradnice v priamke, po ktorých sa hmotné body pohybujú označíme y_1, y_2. Začiatky súradníc $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ volíme tak, aby odpovedali rovnovážnym polohám oscilátorov. Obidva oscilátory vykonávajú podľa uvedených rovníc harmonické kmity s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{k/m}$, ktorú voláme **vlastná frekvencia** oscilátorov. Keď medzi oscilátory vložíme väzbu, prejaví sa tým, že oscilátory na seba pôsobia rovnako veľkými, ale opačnými silami $F_1 = - F_2$, ktoré sú úmerné rozdielu výchyliek oscilátorov (takejto väzbe totiž hovoríme pružná väzba): $F_1 = k_1 (y_1 - y_2)$. Pre oscilátory spojené väzbou dostaneme potom pohybové rovnice

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y_1}{dt^2} &= -ky_1 - k_1(y_1 - y_2), \\ m\frac{d^2y_2}{dt^2} &= -ky_2 - k_1(y_1 - y_2). \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Konštanta k_1 je tuhosť väzby medzi oscilátormi. budeme riešiť túto sústavu diferenciálnych rovníc tak, že ich sčítame a odčítame:

$$m\frac{d^2(y_1 + y_2)}{dt^2} = -k_1(y_1 + y_2),$$

$$m\frac{d^2(y_1 - y_2)}{dt^2} = -(k + 2k_1)(y_1 - y_2).$$

Tieto rovnice sú rovnice harmonických kmitov s frekvenciami $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}}$, ktoré sa skladajú. Frekvencie ω_1, ω_2 sú **základné frekvencie spriahnutých oscilátorov.** Ak vykonáme substitúciu $x_1 = y_1 + y_2$ a $x_2 = y_1 - y_2$, dostaneme

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_1^2 x_1, \qquad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_2^2 x_2,$$

ktorých všeobecné riešenia sú

$$x_1 = B_1 sin\omega_1 t + B_2 cos\omega_1 t, \qquad x_2 = C_1 sin\omega_2 t + C_2 cos\omega_2 t.$$

Pre hľadané výchylky potom platí

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(B_1 sin\omega_1 t + B_2 cos\omega_1 t + C_1 sin\omega_2 t + C_2 cos\omega_2 t), \\ y_2 &= \frac{1}{2}(B_1 sin\omega_1 t + B_2 cos\omega_1 t + C_1 sin\omega_2 t + C_2 cos\omega_2 t). \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Integračné konštanty B_1, B_2, C_1, C_2 určíme zo začiatočných podmienok. V čase r = 0 nech sú oscilátory v pokoji, kedy ich rýchlosti $\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = 0$. Vypočítame derivácie $\frac{dy_1}{dt}$ $a - \frac{dy_1}{dt}$, ktoré sa rovnajú nule. Z tejto podmienky dostaneme

$$B_1 = C_1 = 0 \tag{3.3}$$

a)Uvažujeme, že v čase t=0, vychýlime oscilátory do hodnoty $y_1 = y_2 = A$. Potom z rovnice (3.2) pri uvážení (3.3) dostaneme

$$B_2 = 2A \qquad\qquad C_2 = 0$$

a pre výchylky oscilátorov v tomto prípade platí

$$y_1 = y_2 = Acos\omega_1 t \tag{3.4}$$

Oscilátory kmitajú súhlasne s vlastnou frekvenciou ω_1.

b) Uvažujeme, že v čase t=0, vychýlime oscilátory na opačné strany tak, že $y_1 = -y_2 = A$. Potom z rovníc (3.2) pri uvážení (3.3) dostaneme

$$B_2 = 0 \qquad\qquad C_2 = 2A$$

a pre výchylky jednotlivých oscilátorov platí

$$y_1 = A\,cos\omega_2 t \qquad\qquad y_2 = -Acos\omega_2 t \tag{3.5}$$

Obidva oscilátory kmitajú s rovnakou uhlovou frekvenciou ω_2 (druhou základnou frekvenciou), ale sú fázovo posunuté o π.

c) Nechajme jeden oscilátor na začiatku v rovnovážnej polohe a druhý vychýľme o A, teda v čase t=0 bude $y_1 = 0, y_2 = A$. Potom z rovníc (3.2) pri podmienke (3.3) dostaneme

$$B_2 = A, \qquad\qquad C_2 = -A.$$

Výchylky pre jednotlivé oscilátory majú teraz tvar

$$y_1 = \frac{A}{2}(cos\omega_1 t - cos\omega_2 t),$$

$$y_2 = \frac{A}{2}(cos\omega_1 t + cos\omega_2 t), \tag{3.6}$$

ale po úprave

$$y_1 = Asin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\,sin\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t,$$

$$y_2 = Acos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\,cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t. \tag{3.7}$$

Použime označenie

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_0 \qquad\qquad \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \overline{\omega} \tag{3.8}$$

potom

$$y_1 = A\sin\omega_0 t\sin\overline{\omega}t, \qquad\qquad y_2 = A\cos\omega_0 t\cos\overline{\omega}t.$$

Alebo

$$y_1 = A_0(t) sin\overline{\omega}t, \qquad y_2 = B_0(t) cos\overline{\omega}t,$$

kde (3.9)

$$A_0(t) = Asin\omega_0 t, \qquad B_0(t) = Acos\omega_0 t.$$

Všeobecne sú to zložité neharmonické kmitavé pohyby. Majú však jednoduchý fyzikálny význam, keď je rozdiel frekvencií $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ veľmi malý, čo pri viazaných oscilátoroch predstavuje slabú väzbu $k_1 \ll k$. Máme teda tieto predpoklady

$$\omega_1 \approx \omega_{2,} \qquad \Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2 \qquad \to \qquad \omega_0 \ll \overline{\omega}. \tag{3.10}$$

Výsledné kmitanie každého oscilátora môžeme považovať za sínusové s vysokou frekvenciou $\overline{\omega}$, ktorého amplitúda výchylky *A₀(t)*, resp. *B₀(t)* nie je konštantná, ale sa pomaly mení medzi nulou a *A* s nízkou frekvenciou ω_0. Vznikajú teda rázy. Výsledné kmitanie každého oscilátora má periódu $T = 2\pi/\overline{\omega}$ a jeho amplitúda výchylky sa mení s veľkou periódou $T_0 = \pi/\omega_0$. Pretože amplitúda výchylky prvého oscilátora sa mení s funkciou $sin\omega_0 t$ a amplitúda výchylky druhého oscilátora ako funkcia $cos\omega_0 t$, minimum amplitúdy výchylky prvého oscilátora je v okamiu maximálnej výchylky druhého oscilátora.

Pre vystihnutie sily väzby užívame pomer $K = \frac{k_1}{k_1+k}$, ktorý sa volá **stupňom väzby.** Pomocou základných frekvencií spriahnutých oscilátorov ω_1, ω_2 a základných periód T_1 , T_2 môžeme ho vyjadriť nasledovne

$$K = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}, \qquad K = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}, \tag{3.11}$$

alebo pomocou periódy T kmitov každého oscilátora a periódy T_0 rázov (či frekvencií ω_0 a $\overline{\omega}$)

$$K = \frac{2\omega_0\overline{\omega}}{\omega_0^2 + \overline{\omega}^2}, \qquad K = \frac{4TT_0}{4T_0^2 + T^2}. \tag{3.12}$$

Analogické periodické fyzikálne procesy. s akými sme sa stretli pri mechanických oscilátoroch, možno pozorovať aj v elektrických obvodoch, pri vzájomnej premene energie elektrickej na energiu magnetickú a pod. Zariadenia, v ktorých sa periodické procesy tohto druhy realizujú, možno označiť ako elektrické, resp. elektromagnetické oscilátory. S elektrickými spriahnutými rezonančnými okruhmi sa stretávame vo všetkých rozhlasových vysielačoch a prijímačoch a mnohých ďalších zariadeniach.

Presné vyšetrenie spriahnutých oscilátorov – akýchkoľvek, aj spriahnutých elektrických obvodov, vychádza zo sústavy Lagrangeových rovníc II. druhu. Pre účely fyzikálneho praktika v I. ročníku vystačíme s uvedeným výkladom.