MATEMATICKÉ KYVADLO (domáci experiment)

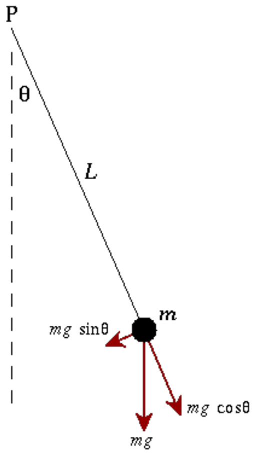
Ciele úlohy: a) meranie tiažového zrýchlenia matematickým kyvadlom
b) overiť závislosť periódy kmitov kyvadla na dĺžke závesu

Teoretický úvod

Túto úlohu robil Galieo Galilei na začiatku 17. storočia ako súčasť jeho experimentov s kyvadlami, ktoré sa považujú za začiatok experimentálnej fyziky

Matematické kyvadlo pozostáva z telesa s hmotnosťou m, ktoré je zavesené na vlákne s dĺžkou závesu L, pozri obr. Rozmery telesa sú zanedbateľné v porovnaní s L.

Po vychýlení telesa z rovnovážnej polohy o uhol θ a pustení bude teleso kmitať pod pôsobením zložky tiažovej sily



$$m \cdot g \cdot \sin\,\theta$$

kde m je hmotnosť telesa a g je tiažové zrýchlenie.
Perióda T je čas, za ktorý kmitajúce kyvadlo vykoná jeden kmit (napr. čas pohybu z jednej krajnej polohy do druhej a naspäť).
Ak je amplitúda kmitov kyvadla θ malá, kyvadlo sa chová ako harmonický oscilátor a perióda kmitov je daná približne vzťahom

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

Tento vzťah je presný len v limite, keď amplitúda kmitov ide do nuly. Pre nenulovú amplitúdu je tým nepresnejší, čím väčšia je amplitúda. V praxi zvyčajne používame tento vzťah len v prípade, ak je uhlová amplitúda kmitov kyvadla menšia ako 5 až 10 stupňov. Z tohoto vzťahu dokážeme vypočítať tiažové zrýchlenie g meraním periódy kmitov kyvadla T a dĺžky závesu L.

Matematické kyvadlo je špeciálnym prípadom fyzikálneho kyvadla (pozrite úlohu *Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla*), keď fyzikálne kyvadlo necháme otáčať okolo osi, ktorej vzdialenosť od ťažiska telesa je oveľa väčšia ako L. V praxi táto aproximácia znamená, že rozmery telesa sú zanedbateľné oproti L. Perióda fyzikálneho kyvadla je v skutočnosti o niečo väčšia ako perióda matematického kyvadla, ktoré ho aproximuje.

Aparatúra

Ako teleso vám v domácich podmienkach môže poslúžiť malý, ale pomerne ťažký a symetrický predmet, napr. malý sklený pohár s viečkom, aké sa používajú na zaváranie. Ako vlákno môžete použiť špagát dĺžky aspoň l = 250 cm. Autor použil pohár s výškou h = 10 cm. Viečko prevŕtal, cez otvor prevliekol špagát, koniec zauzlil. Pohár naplnil vodou takmer po okraj a viečko zaskrutkoval (voda zvýši hmotnosť kyvadla a robí ho stabilnejším pri kmitaní). Druhý koniec špagátu upevníte v dostatočnej výške nad zemou (pozor, aby kyvadlo nepadlo niekomu na nohu alebo na hlavu) a pripravíte sa so stopkami na meranie.

Postup merania

Odmeriate jedenkrát rozmer (výšku telesa, v prípade autora h = 10 cm), odmeriate dĺžku závesu kyvadla L ako L = h/2 + l, kde l je dĺžka špagátu od bodu závesu (osi otáčania) po bod upevnenia na telese. Dĺžka závesu L je teda od osi otáčania po ťažisko telesa, ktoré je v prípade symetrického telesa v polovičnej výške. Odhadnete chybu merania h a l. Pre doplnkovú informáciu si aj odvážite teleso na váhe a zapíšete jeho hmotnosť.

Rozkmitáte kyvadlo pamätajúc na to, že amplitúda by nemala prekročiť 5-10 stupňov. Dbáte na to, aby kyvadlo kmitalo v jednej rovine (a nie aj do strany). Keď ste spokojní s kmitmi, v jednej krajnej polohe spustíte stopky a postupnou metódou určíte periódu kmitov: necháte kyvadlo odkmitať 100 kmitov s tým, že zapíšete do Tab.1 medzičasy po 10, 20, 30, … 100 kmitoch.

Tab. 1 Priebežné časy 10 kmitov t_i a periódy T_i vypočítané z časov 50 kmitov Δt_i. Dĺžka L = 2,219 m

					Perióda
i	t_i = i.10.T [s]	i + 5	t_{i+5} = (i+5).10.T [s]	$\Delta t_i = t_{i+5} - t_i$ [s]	$T_i = \Delta t_i/50$ [s]
1	29.92	6	178.89	148.97	2.9794
2	59.73	7	208.60	148.87	2.9774
3	89.50	8	238.44	148.94	2.9788
4	119.27	9	268.21	148.94	2.9788
5	149.13	10	298.11	148.98	2.9796

Potom kyvadlo zastavíte a zmeníte dĺžku závesu. Tento postup zopakujete pre najmenej 5 rôznych dĺžok závesu od maximálnej, ktorá by mala byť aspoň dva metre (čím viac tým lepšie vám to vyjde) po minimálnu, ktorá by mala byť väčšia ako 5h (inak čím väčší rozdiel medzi minimálnou a maximálnou dĺžkou závesu, tým lepšie). Podmienka viac ako 5h je kvôli tomu, že pre menšie dĺžky závesu sa už matematické kyvadlo mení na fyzikálne. Tabuliek budete mať teda najmenej päť.

Spracovanie výsledkov:

Pre každú z piatich dĺžok L určite periódu kmitov kyvadla a jej neurčitosť (spriemerujete 5 hodnôt T_i v poslednom stĺpci Tab. 1 a nájdete príslušnú strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru) . **Príslušné tabuľky a všetky výpočty robte v Exceli (alebo inej alternatíve)!** Zo vzťahu (1) vyjadrite tiažové zrýchlenie g a vypočítajte jeho hodnotu pre každú z piatich dĺžok kyvadla. Pomocou metód pre určenie neurčitosti merania nepriamo meranej veličiny nájdite neurčitosť g pomocou neurčitosti priamo meraných veličín T,l a h. Ktorá z týchto dvoch veličín prispieva do výslednej neurčitosti veličiny g viac? Spriemerujte vašich 5 výsledkov pre g a nájdite výslednú neurčitosť ako chybu aritmetického priemeru. Porovnajte váš výsledok s tabuľkovou hodnotou g vo vašej nadmorskej výške! Zhodujete sa?

Nakreslite (v Exceli) graf, ktorý zobrazí závislosť periódy T od dĺžky závesu L a overte, že táto závislosť je druhá odmocnina z L: fitujte vašich 5 (alebo viac) bodov priamkou, polynómom druhého stupňa a mocninnou funkciou ($T = k\,L^n$). Najlepší fit by teoreticky mal byť pre mocninnú funkciu, pričom exponent n by mal byť blízko k 0,5. V LibreOffice (ktorý by mal imitovať Excel) urobíte fit kliknutím na bod v grafe pravým gombíkom na myši, z ponuky vyberiete *Insert trend line*, vyberiete *Regression type*, odkliknete *Show equation* a *Show coeficient of determination (R^2)*. Najlepší fit má hodnotu R^2 najbližšie k 1.

Z úlohy spíšete plný referát podľa pravidiel na stránkach LC. V tejto úlohe nepracujete vo dvojiciach, ale každý sám!