

# VYŠETROVANIE PRUŽNEJ DEFORMÁCIE: MERANIE MODULU PRUŽNOSTI V ŤAHU Z PRIEHYBU TYČE

M. Gintner

## Teoretický úvod:

Výsledkom pôsobenia vonkajšej sily na teleso môže byť zmena jeho tvaru alebo objemu. Takúto zmenu nazývame **deformáciou** telesa.

Deformovateľnosť telies je dôsledkom ich **atomárnej štruktúry**. V telese pôsobia medzi atómami (iónmi, molekulami) sily, ktoré sú príťažlivé, keď sa atómy pokúsime priveľmi vzdialiť a odpudivé, keď ich zase príliš približujeme. V každom tuhom telese existuje pri danej teplote a tlaku istá špeciálna vzdialenosť medzi atómami, v ktorej sú medziatomárne sily nulové. Takáto predstava nám umožňuje pochopiť, prečo si tuhé teleso, ponechané samo na seba, zachováva svoj tvar a prečo ho nie je ľahké roztriahnuť alebo stlačiť.

**Youngov modul pružnosti v ťahu** je materiálová charakteristika, ktorá nám hovorí o tom, ako veľmi sa bude deformovať teleso, keď ho budeme naťahovať alebo stláčať. Konkrétne, majme drôt o dĺžke  $\ell_0$  a kolmom priereze  $S_0$ , ktorý je na jednom konci upevnený. Ak budeme drôt napínať silou  $F$  v pozdĺžnom smere, drôt sa predĺži o hodnotu  $\Delta\ell$ . Pokiaľ bude predĺženie malé v porovnaní s pôvodnou dĺžkou drôtu, čiže  $\Delta\ell \ll \ell_0$ , potom je toto predĺženie úmerné pôsobiacej sile. Konštanta úmernosti závisí na materiáli, z ktorého je drôt vyrobený. Tieto skutočnosti vyjadruje v matematickej podobe **Hookov zákon**

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma, \quad (1)$$

kde  $\varepsilon \equiv \Delta\ell/\ell_0$  je relatívne predĺženie drôtu,  $\sigma \equiv F/S$  je mechanické napätie v drôte spôsobené napínacou silou  $F$  a  $E$  je Youngov modul pružnosti v ťahu.

Uvažujme rovnorodú tyč s konštantným prierezom po celej dĺžke, ktorá je na koncoch podopretá a v strede zaťažená silou  $\vec{F}$  pôsobiacou kolmo na tyč, ako je to napríklad schématicky zobrazené na obr. 1. So skúsenosti vieme, že tyč sa pôsobením dostatočne veľkej sily viditeľným spôsobom prehne. Teoretický opis tejto skutočnosti je postavený na tom, že si tyč konečnej hrúbky predstavíme ako súbor tenkých rovnako dlhých drôtov (vlákien) ležiacich na sebe. Keď sa tyč pôsobením sily ohýba, jej tvar sa mení z priameho na zakrivený. To ale znamená, že sa musí meniť dĺžka jednotlivých myslenných vlákien a to v závislosti od toho, ku ktorej strane zakrivenia tyče sa príslušné vlákno nachádza bližšie. To, ako ťažké je tyč ohnúť teda priamo súvisí s tým, ako ťažko je predĺžiť jednotlivé vlákna! Preto veľkosť priehybu tyče musí súvisieť s Youngovým modulom pružnosti v ťahu pre materiál, z ktorého je vyrobená naša tyč.

Ak zostavíme experiment podľa obr. 1, kde pôsobiacou silou bude tiaž závažia zaveseného v strede tyče, potom sa pre veľkosť priehybu tyče dá odvodiť nasledovná rovnica

$$y = \frac{1}{E} \frac{gL^3}{4ab^3} m, \quad (2)$$

kde  $a$  je priečny rozmer tyče kolmý na smer pôsobenia sily a  $b$  je priečny rozmer tyče rovnobežný so smerom pôsobenia sily,  $m$  je hmotnosť závažia,  $g$  je gravitačné zrýchlenie. Význam ostatných veličín je zrejmý z obr. 1. Keď zmeriame veľkosť priehybu tyče pri danom zaťažení, vieme zo vzťahu (2) vypočítať Youngov modul pružnosti v ťahu.

## Úlohy:

1. Meraním priehybu tyče obdĺžnikového prierezu **určiť modul pružnosti v ťahu** pre dva rôzne materiály.
2. **Stanoviť neurčitost' výsledku** na základe parciálnych príspevkov meraných veličín.

## Postup merania:

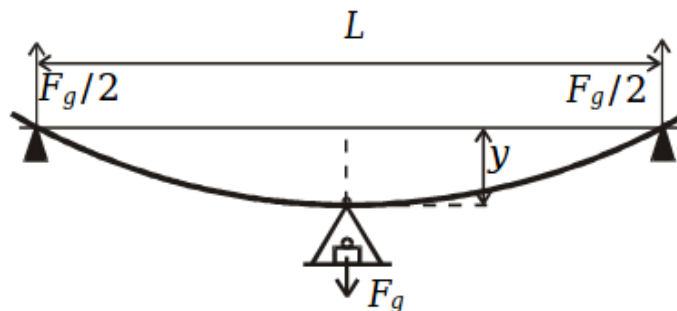
1. **Vzdialenosť  $L$  podpier** určíme priamym meraním jedenkrát a jeho nepresnosť  $\sigma_L$  odhadneme.
2. **Priečne rozmery tyče  $a$  a  $b$**  bez zaťaženia zmeriame na 10-tich rôznych miestach. Určíme aritmetický priemer (strednú hodnotu)  $\bar{d}$  ( $d = a, b$ ) a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru  $\sigma_{\bar{d}}$ .
3. Zmeriame **teplotu** v miestnosti.
4. Určíme **priehyb  $y$**  drôtu pre závažia rôznych hmotností. Zostrojíme graf závislosti  $y$  na  $m$ .
5. Opäť zmeriame **teplotu** v miestnosti.
6. Určíme aritmetický priemer (strednú hodnotu) pomeru  $k \equiv y/m$  a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru  $\sigma_{\bar{k}}$  k tejto strednej hodnote na základe hodnôt nameraných dvojíc  $(m, y)$ .
7. Spočítame **Youngov modul pružnosti** drôtu pomocou zmeraných hodnôt  $L, \bar{a}, \bar{b}$  a  $\bar{k}$ . Zo vzťahu (2) vyplýva, že

$$E = \frac{1}{\bar{k}} \frac{gL^3}{4\bar{a}\bar{b}^3} \quad (3)$$

8. Spočítame chybu (**štandardnú odchýlku**)  $\sigma_{\bar{E}}$ , s ktorou sa nám podarilo hodnotu  $E$  určiť na základe našich meraní. Túto odchýlku spočítame pomocou štandardného vzťahu pre chybu nepriameho merania. Konkrétne v našom prípade

$$\sigma_{\bar{E}} = \bar{E} \left[ \left( \frac{\sigma_{\bar{k}}}{\bar{k}} \right)^2 + \left( \frac{3\sigma_L}{L} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{\bar{a}}}{\bar{a}} \right)^2 + \left( \frac{3\sigma_{\bar{b}}}{\bar{b}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

9. Zistíte, ktorá zo 4 veličín  $k, L, a, b$  prispieva podľa vzťahu (4) najviac k výslednej chybe  $\sigma_{\bar{E}}$
10. Porovnajzte váš výsledok (pozri súbor Užitočné vzťahy) s tabuľkovou hodnotou pre obe tyče.



**Obr. 1:** Určovanie Youngovho modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče.