

Určenie koeficientu statického a dynamického trenia

Úlohy:

A. Určenie koeficientu statického trenia

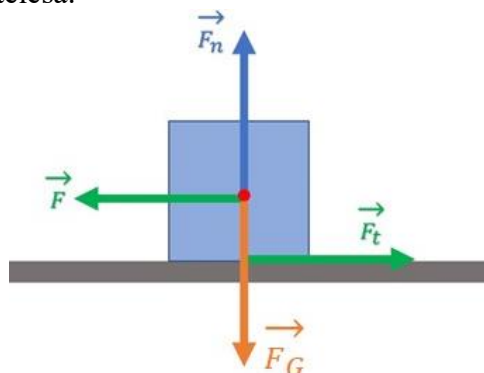
B. Určenie koeficientu dynamického trenia

Teoretický úvod

Za vodorovnú rovinu vo všeobecnosti môžeme považovať akúkoľvek plochu (podložka, podlaha...), ktorá je rovnobežná so zemským povrchom. Teleso položené na takejto podložke pôsobí na podložku svojou tiažou $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, ktorá sa prejavuje ako tlaková sila na podložku a je spôsobená tiažovou silou \mathbf{F}_G . Podľa zákona akcie a reakcie na toto teleso pôsobí reakcia podložky, ktorú nazývame **normálová sila** \mathbf{F}_n . Normálová sila (Obr. 1) je vždy kolmá na dotykovú rovinu, v prípade telesa nachádzajúceho sa na vodorovnej ploche v pokoji musí byť splnená podmienka

$$\mathbf{F}_n + \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Predstavme si kváder, ktorý leží na podlahe. Snažíme sa ho tlačiť vodorovne konštantnou silou \mathbf{F} , ale kváder sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila \mathbf{F} , ktorou na kváder pôsobíme, je kompenzovaná vodorovnou trecou silou \mathbf{F}_t , ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste spodnej podstavy kvádra (Obr. 1). Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na kváder pôsobili. Sily trenia vznikajú medzi pevnými telesami, ktoré sa navzájom dotýkajú a sú k sebe pritláčané určitou silou. Ak teleso napriek pôsobeniu sily je v pokoji, hovoríme o **statickom trení**. Ani jedna z kontaktných síl (sila trenia a reakcia podložky) nemôžu samostatne zmeniť pohybový stav telesa.



Obr. 1. Smer pôsobenia tiažovej sily \mathbf{F}_G , normálovej sily \mathbf{F}_n a smer trecej sily \mathbf{F}_t pri pôsobení sily \mathbf{F}

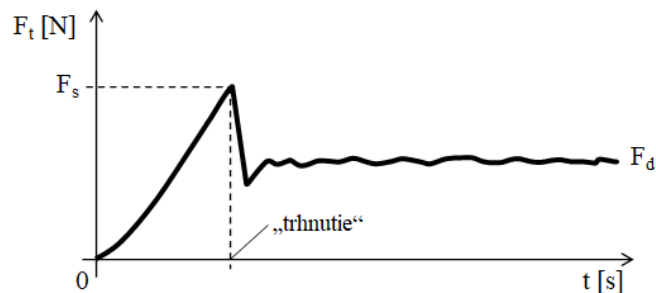
Ak trecie sily vznikajú pri vzájomnom pohybe dvoch dotýkajúcich sa telies, hovoríme o **dynamickom trení**. Dynamické trenie sa prejavuje silami pôsobiacimi proti smeru vzájomného pohybu telesa. Má vždy smer opačný, ako je smer okamžitej rýchlosti. Pri

dynamickom trení rozlišujeme **šmykové trenie** a **valivé trenie**. Ak sú dotýkajúce sa povrchy suché, hovoríme o **suchom trení**.

V prípade rovinných dotykových plôch sa používa pri určení trenia **Amontonsov - Coulombov zákon**. Pri suchom trení, podľa tohto zákona, veľkosť trecej sily F_t nezávisí na obsahu dotykovej plochy, ale je priamo úmerná veľkosti normálovej zložky sily F_n

$$F_t = \mu F_n \quad (2)$$

Konštanta μ sa nazýva **koeficient trenia**. Keďže rozlišujeme dve sily trenia, statickú a dynamickú, potom hovoríme o koeficientoch statického trenia μ_s a dynamického trenia μ_d . Silu statického trenia si možno ozrejmiť pomocou nasledovného experimentu. Po horizontálnej rovine začneme na kváder pôsobiť malou ťahovou silou F , ktorá je rovnobežná s horizontálnou rovinou. Kváder, aj napriek pôsobeniu malej sily, svoju začiatočnú polohu nezmení. Pozorujeme, že poloha kvádra sa so vzrastajúcou veľkosťou sily nemení, a kváder sa pohne, až keď sila nadobudne určitú kritickú hodnotu F_s . Hraničnú hodnotu (Obr. 2), ktorú musíme prekonať, aby sme teleso uviedli do pohybu, nazývame silou statického trenia F_s a vypočítame ju ako $F_s = \mu_s F_n$. Koeficient μ_s závisí od materiálu, od povrchovej úpravy jednotlivých dotykových plôch telesa a podložky (drsnoty, resp. hladkosti) a na množstve iných vplyvov ako je napr. teplota. Koeficient μ_s prakticky nezávisí od veľkosti plochy vzájomného dotyku telies.

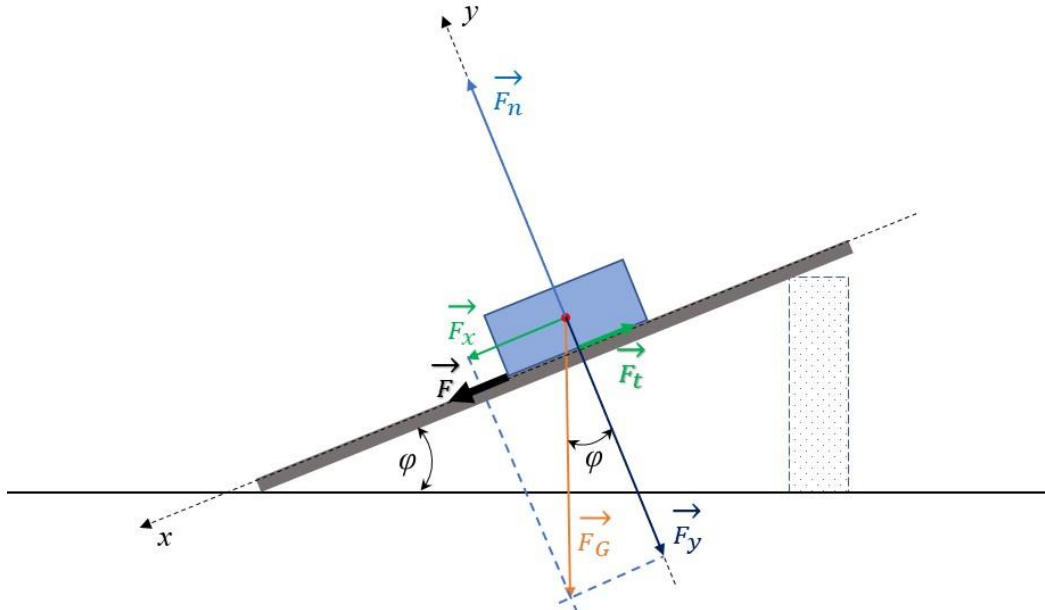


Obr. 2. Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je kváder v pokoji, cez začiatok pohybu, až po približne rovnomerný pohyb

Keď veľkosť pôsobiacej sily F prekročí hodnotu sily statického trenia F_s kváder sa „trhne“ stratí svoj pokojový kontakt s podložkou, a začne sa pohybovať so zrýchlením a , na čo však už stačí len sila o veľkosti F_d . Ak sa teleso v dôsledku pôsobenia ťahovej sily F šmýka po drsnej podložke konštantnou rýchlosťou v , podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na teleso rovnako veľká, opačne orientovaná sila, nazývaná **sila dynamického trenia** F_d . Aj pre silu dynamického trenia platí Amontonsov-Coulombov zákon, t. j. $F_d = \mu_d F_n$. Ak je teleso na naklonenej rovine tak sa situácia so silami trochu komplikuje, lebo tiaž telesa G má iný smer ako normálová sila F_n (Obr. 3). Tiaž telesa má vždy zvislý smer a normálová sila je vždy kolmá na povrch roviny, ktorej sa telesá svojimi povrchmi dotýkajú. Pri šmýkaní telesa po naklonenej rovine je výsledná sila spôsobujúca pohyb

telesa vektorovým súčtom tiažovej sily \mathbf{F}_G , normálovej sily (reakcie podložky) \mathbf{F}_n a sily trenia \mathbf{F}_t

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t \quad (3)$$



Obr. 3. Teleso na naklonenej rovine a sily pôsobiace na teleso pri šmýkaní smerom nadol

Pri pohybe po naklonenej rovine, zvierajúcej s vodorovnou podložkou uhol φ je vhodné rozložiť pôsobiace sily na zložky rovnobežné s naklonenou rovinou (os x) a na zložky kolmé na naklonenú rovinu (os y)

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [F_x, F_y] = [G \sin(\varphi), -G \cos(\varphi)], & \mathbf{F}_n &= [0, F_n] \\ \mathbf{F}_t &= [-F_t, 0], & \mathbf{F} &= [m a, 0] \end{aligned} \quad (4)$$

V smere rovnobežnom (os x) s naklonenou rovinou platí

$$m a = G \sin(\varphi) - F_t \quad (5)$$

V smere kolmom (os y) na naklonenú rovinu platí

$$0 = -G \cos(\varphi) + F_n \quad \text{a teda} \quad F_n = G \cos(\varphi) \quad (6)$$

Po dosadení vyjadrenia normálovej sily z rovnice (6) do vzťahu (2) pre silu trenia dostávame

$$F_t = \mu_d F_n = \mu_d G \cos(\varphi)$$

ktorý keď vložíme do rovnice (5), dostaneme

$$m a = m g \sin(\varphi) - \mu_d m g \cos(\varphi) \quad (7)$$

Z rovnice (7) matematickou úpravou dostaneme vzťah pre koeficient dynamického trenia

$$\mu_d = \frac{g \sin(\varphi) - a}{g \cos(\varphi)} \quad (8)$$

kde μ_d je dynamický koeficient trenia a a zrýchlenie telesa. Keďže predpokladáme, že sila trenia nie je funkciou rýchlosti, tak šmykavý pohyb je rovnomerne zrýchlený s konštantným zrýchlením (výsledná sila $F = ma$, vo vzťahu (7) je konštantná). Ak zmeriame čas t od začiatku pohybu, za ktorý teleso prejde dráhu s , tak potom zrýchlenie vypočítame zo vzťahu

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (9)$$

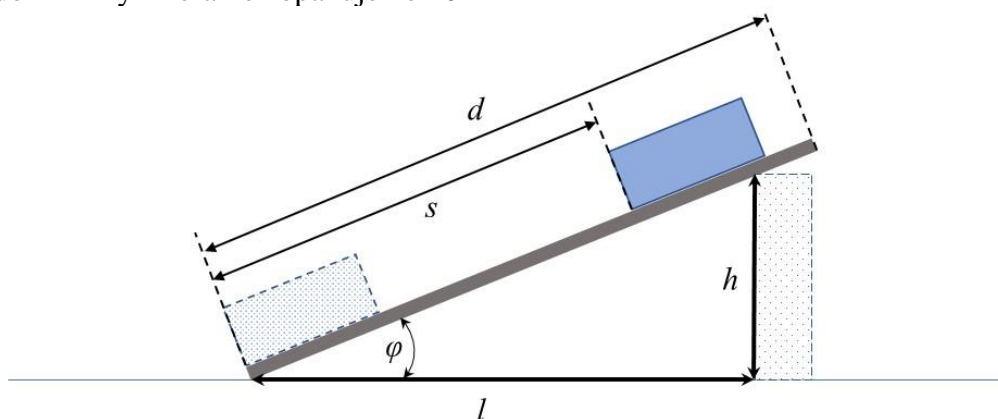
V prípade, že chceme určiť statické trenie, koniec dosky, na ktorom je položené teleso, budeme postupne dvíhať nahor, v dôsledku čoho zväčšujeme uhol φ naklonenej roviny. V hraničnom prípade, kedy $\varphi = \varphi_k$, je ešte zrýchlenie kvádra nulové ($a = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), takže z rovnice (7) pre koeficient statického trenia platí vzťah

$$\mu_s = \frac{\sin(\varphi_k)}{\cos(\varphi_k)} = \operatorname{tg}(\varphi_k) \quad (10)$$

A. Určenie koeficientu statického trenia

Postup a vyhodnotenie merania

1. Na koniec dosky položíme teleso. Vzdialenosť prednej steny telesa od začiatku naklonenej roviny označíme s .
Dosku postupne dvíhame na jednom konci do určitej výšky naklonenej roviny h , pri ktorej je teleso v danom okamihu uvedené do pohybu, t. j. začne sa šmykať (Obr. 4). Odmeriame výšku h a vzdialenosť l a hodnoty l , h zaznamenáme do tabuľky. Meranie zopakujeme 10 krát.



Obr. 4. Parametre pri meraní na naklonenej rovine

2. Vypočítame koeficienty statického trenia μ_{si} pre jednotlivé hodnoty výšky h a vzdialenosti l podľa vzťahu

$$\mu_{si} = \frac{h_i}{l_i}$$

- Určíme priemernú hodnotu (aritmetický priemer) koeficientu statického trenia $\bar{\mu}_s$, strednú kvadratickú odchýlku jedného merania σ_{μ_s} a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\bar{\sigma}_{\mu_s}$. Ak je niektorá z 10 hodnôt μ_{s_i} mimo interval $(\mu_s - 3\sigma, \mu_s + 3\sigma)$, vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a chyby merania znovu prepočítame.
- Výsledok merania uvádzame v tvare $\mu_s = (\bar{\mu}_s \pm \bar{\sigma}_{\mu_s})$.
- Vypočítame kritický uhol zo vzťahu $\varphi_k = \arctg(\mu_s)$.

Tabuľka 1.

č. m.	h_i [m]	l_i [m]	φ_i [°]	μ_{s_i}	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$
1					
2					
3					
⋮					
i					
				$\bar{\mu}_s = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

B. Určenie koeficientu dynamického trenia

Postup a vyhodnotenie merania

- Na naklonenú rovinu, ktorá zvierá s podložkou uhol $\varphi > \varphi_k$ (kritický uhol φ_k poznáme z časti A) umiestnime teleso tak, aby jeho predná stena bola vo vzdialenosti s od začiatku naklonenej roviny (Obr. 4). Toto teleso pridržíme v začiatkovej polohe a súčasne so spustením stopiek ho uvoľníme. Meriame čas t , za ktorý sa teleso presunie z jedného konca naklonenej roviny na druhý koniec (prejde vzdialenosť s). Uhol φ určíme na základe odmeraných vzdialeností h a l výpočtom zo vzťahu $\varphi = \arctg\left(\frac{h}{l}\right)$.
- Meranie opakujeme 10 krát pre 2 rôzne uhly φ väčšie ako kritický uhol φ_k , t. j. vykonáme 2 krát po 10 meraní. Namerané hodnoty s , t , h a l zapisujeme do tabuľky.
- Z nameraných hodnôt času šmýkania t a dráhy s po ktorej sa teleso pohybovalo určíme zrýchlenie a zo vzťahu (9) a koeficient dynamického trenia μ_d zo vzťahu (8).
- Určíme priemernú hodnotu μ_d a prislúchajúce chyby merania σ_{μ_d} a $\bar{\sigma}_{\mu_d}$.

5. Ak je niektorá z hodnôt μ_{d_i} mimo interval $(\mu_d - 3\sigma, \mu_d + 3\sigma)$, vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a chyby merania znovu prepočítame.
6. Výsledok merania uvádzame v tvare $\mu_d = (\bar{\mu}_d \pm \bar{\sigma}_{\mu_d})$.
7. Vypočítame váhovaný priemer koeficientu dynamického trenia a jeho chybu z dvoch priemerných hodnôt μ_d získaných pre dva uhly φ .

Tabuľka 2.

$\varphi_1 = \arctg(h/l)$					
$h = \dots\dots\dots \text{ m}$			$l = \dots\dots\dots \text{ m}$		
č. m.	$t_i \text{ [s]}$	$s \text{ [m]}$	$a_i \text{ [m.s}^{-2} \text{]}$	μ_{d_i}	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$
1					
2					
3					
⋮					
i					
				$\bar{\mu}_d = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$
$\varphi_2 = \arctg(h/l)$					
$h = \dots\dots\dots \text{ m}$			$l = \dots\dots\dots \text{ m}$		
č. m.	$t_i \text{ [s]}$	$s \text{ [m]}$	$a_i \text{ [m.s}^{-2} \text{]}$	μ_{d_i}	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$
1					
2					
3					
⋮					
i					
				$\bar{\mu}_d = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$