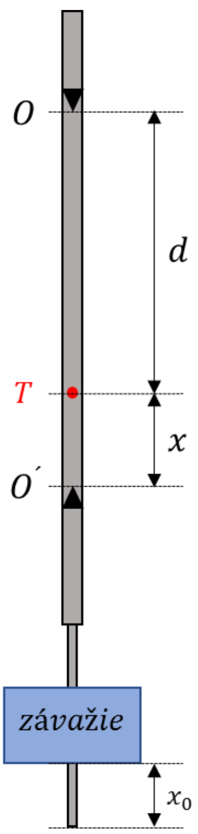
URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM

Úlohy:

A. ***Určenie periódy kmitov reverzného kyvadla***
B. ***Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia g v mieste fyzikálneho laboratória***

Teoretický úvod:

V tejto úlohe si ukážeme, ako sa dá využitím fyzikálneho kyvadla, ktoré je upravené určitým spôsobom, určiť tiažové zrýchlenie (zrýchlenie voľného pádu). Predstavme si fyzikálne kyvadlo schematicky znázornené na obr. 1. Položme si otázku, môže sa takéto kyvadlo kývať s rovnakou periódou T okolo osi O a aj okolo osi O', ktorá sa nachádza na opačnej strane od ťažiska.



Obr. 1. Kyvadlo

Periódu s ktorou bude kyvadlo kmitať okolo osi O' si označme T'. Ukázali sme, že pre periódu fyzikálneho kyvadla platí vzťah (pozri úlohu „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“ vzťah):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{1}$$

kde I je moment zotrvačnosti vzhľadom na os O, m je hmotnosť kyvadla, g je tiažové zrýchlenie a d vzdialenosť osi O od ťažiska T. Pre periódu T' kyvadla vzhľadom na os O' platí analogický vzťah:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgx}} \tag{2}$$

V tomto vzťahu je I' moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os O' a x je vzdialenosť tejto osi od ťažiska T (Obr. 1.). Ak požadujeme, aby tieto periódy boli rovnaké musí platiť

$$T = T' \tag{3}$$

Po dosadení vzťahu (1) a (2) do vzťahu (3) po úprave dostaneme

$$\frac{I}{d} = \frac{I'}{x} \tag{4}$$

Použitím Steinerovej vety (pozri literatúru alebo úlohu „Určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla“) pre momenty zotrvačnosti I a I' platí

$$I = I_0 + md^2 \text{ a } I' = I_0 + mx^2 \tag{5}$$

Po dosadení vzťahu (5) do vzťahu (4) dostávame

$$\frac{I_0 + md^2}{d} = \frac{I_0 + mx^2}{x} \tag{6}$$

odkiaľ po úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$mdx^2 - (I_0 + md^2)x + I_0 d = 0 \tag{7}$$

Táto rovnica poskytuje pre x nasledovné dve riešenia

$$x_1 = \frac{I_0}{md} \quad ; \; x_2 = d \tag{8}$$

Z riešenia kvadratickej rovnice vidíme, že pre príslušné kyvadlo existujú na druhej strane ťažiska dve osi, okolo ktorých kyvadlo kýva s rovnakou periódou ako okolo osi O. Jedna je symetricky a druhá nesymetricky položená voči osi O vzhľadom na ťažisko. Riešenie $x_2 = d$ určuje polohu symetricky položenej osi. Riešenie $x_1 = I_0/md$ určuje polohu nesymetricky položenej osi. Vzájomnú vzdialenosť osi O a nesymetricky položenej osi O' (okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou) nazývame *redukovanou dĺžkou fyzikálneho kyvadla*, pre ktorú platí

$$l_r = d + \frac{I_0}{md} = \frac{md^2 + I_0}{md} = \frac{I}{md} \tag{9}$$

Vzťah (9) dosadíme do vzťahu (1) a pre periódu fyzikálneho kyvadla dostaneme

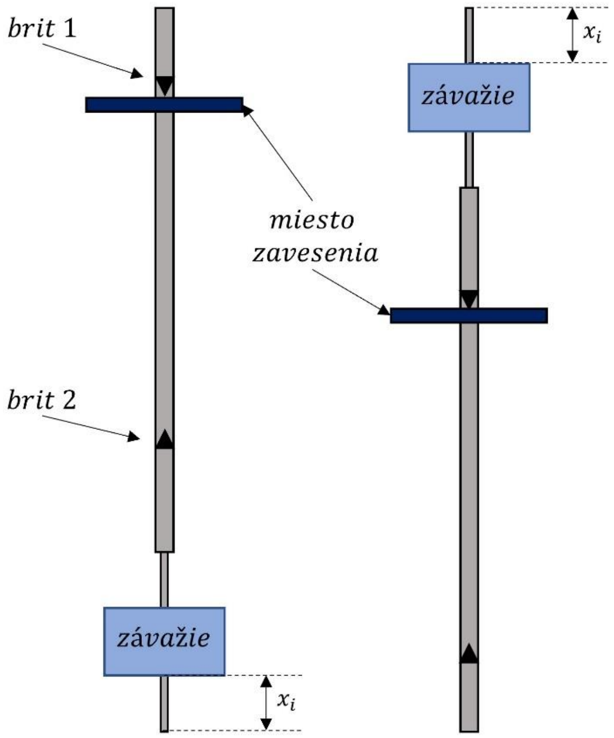
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \tag{10}$$

Po úprave vzťahu (10) dostaneme pre tiažové zrýchlenie

$$g = \frac{4\pi^2 l_r}{T^2} \tag{11}$$

Vzťah (11) nám umožňuje určiť tiažové zrýchlenie ak poznáme redukovanú dĺžku a periódu použitého kyvadla.

Kyvadlo, ktoré má vyššie popísané vlastnosti nazývame **reverzné kyvadlo**. Reverzné kyvadlo je tyč s dvomi osami s britmi obrátenými proti sebe (Obr. 2.). Na jednom konci tyče je posúvateľné závažie, ktoré spôsobuje, že osi O a O' sú vzhľadom na ťažisko T nesymetricky položené. Posúvaním tohto závažia na vhodné miesto a jeho zafixovaním (fixačnou skrutkou) môžeme dosiahnuť, aby perióda kyvadla bola vzhľadom na osi O a O' rovnaká. Potom vzdialenosť $\overline{OO'}$ (čo je vzdialenosť britov) je vzdialenosť, kedy by mala byť perióda kyvadla vzhľadom na osi O a O' rovnaká. Potom vzdialenosť $\overline{OO'}$ (vzdialenosť britov) je redukovaná dĺžka l_r reverzného kyvadla.



Obr. 2. Spôsoby zavesenia reverzného kyvadla

Pomôcky:

reverzné kyvadlo, stopky, dĺžkové meradlo

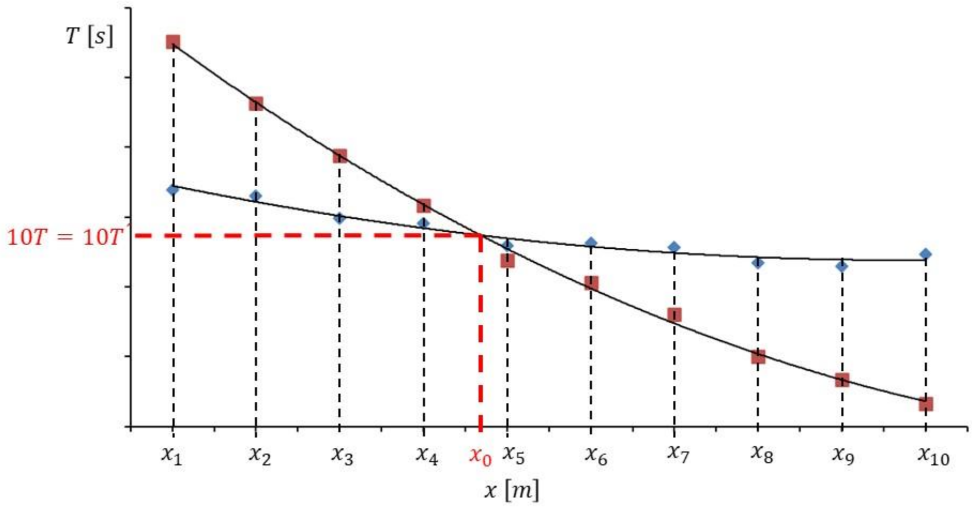
Postup merania:

1. Posúvateľné závažie dáme do polohy x_1 (napr. 1 cm od konca tyče, Obr. 2.) a odmeriame stopkami dobu kmitov desiatich periód $10T$ okolo osi O.
2. Po zavesení kyvadla na druhý brit podobne zmeriame dobu kmitov desiatych periód $10T'$, kyvadlo sa kýva okolo osi O' (Obr. 2.).
3. Postup opakujeme pre ďalšie polohy posúvateľného závažia, napr. x_2 (napr. 5 cm), x_3 (napr. 9 cm), x_4 (napr. 12 cm), ... a hodnoty zapisujeme do tabuľky 1 s presnosťou na najmenší dielik.

Tabuľka 1.

i	1.	2.	3.	...	n
x_i [m]					
$10T_i$ [s]					
$10T'_i$ [s]					

4. Získané hodnoty doby kmitov $10T$ a $10T'$ pre rôzne polohy x_i vynesieme do grafu (Obr. 3.), preložíme regresiou kvadratického polynómu (pretože teoretická závislost je parabolická). To urobíme pre konfiguráciu so závažím hore aj dole a určíme priesečník kriviek graficky, alebo vypočítaním pomocou regresných koeficientov.



Obr. 3. Závislosť doby kyvu vzhľadom na os O a O' od vzdialenosti x

5. Z takto zostrojeného grafu určíme polohu x_0 posúvateľného závažia, ktorá zodpovedá prípadu, keď $10T = 10T'$, t. j. keď perióda okolo obidvoch osí O a O' je rovnaká.
6. Po nastavení závažia na túto hodnotu polohy x_0 experimentálne overíme súhlas $10T$ a $10T'$ okolo obidvoch osí. Ak je rozdiel týchto dvoch hodnôt väčší ako $0{,}09\ s$ posúvateľné závažie jemne posunieme (cca o $0{,}5\ cm$) na jednu alebo druhú stranu okolo polohy x_0. Postup opakujeme.
7. Určíme štandardnú neistotu redukovanej dĺžky σ_{l_r}, pričom jej hodnota približne zodpovedá polovici najmenšieho dielika meracieho zariadenia, dĺžkového meradla.
8. Po získaní rovnosti $10T = 10T'$ vykonáme meranie periódy okolo jednej z osí postupnou metódou (odporúčame vzdialenejšiu os O od ťažiska kyvadla, obr. 2.). a namerané hodnoty zaznamenávame do tabuľky 2.
9. Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. t_{10}

v prvom riadku je hodnota odpovedajúca súčtu prvých 10 periód, ktorú sme získali stopkami s medzičasom, atď.

Tabuľka 2.

i	t_{i*10} [s]	$i+5$	$t_{(i+5)*10}$ [s]	$T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ [s]	$\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2\ [s^2]$
1.	t_{10}	6.	t_{60}	$T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$	
2.	t_{20}	7.	t_{70}	$T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$	
3.	t_{30}	8.	t_{80}		
4.	t_{40}	9.	t_{90}		
5.	t_{50}	10.	t_{100}		
				$\bar{T} = \cdots$	$\sum_{i=1}^{5} \Delta_i^2 = \cdots$

Vyhodnotenie merania:

1. Určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla $\bar{T}$ a neurčitosť, strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$.
2. Výsledok určenia periódy kmitov kyvadla uvádzame v tvare $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\sigma_{\bar{T}}})$.
3. Hodnotu tiažového zrýchlenia určíme podľa vzťahu (11), do ktorého dosadíme nameranú hodnotu redukovanej dĺžky l_r (vzdialenosť britov) a priemernú hodnotu periódy $\bar{T}$, t. j.
$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l_r}{\bar{T}^2}$$
4. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu $\sigma_{\bar{g}}$ pomocou neistôt priamo meraných veličín T, l_r podľa vzťahu
$$\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \sigma_{\bar{T}}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l_r}\right)^2 \sigma_{l_r}^2}$$
5. Určíme, ktorá z týchto veličín (T, l_r) prispieva k výslednej neistote veličiny g najväčšou mierou, t. j. ktorý z dvoch sčítancov v rovnici je najväčší.
6. Výsledok merania tiažového zrýchlenia uvedieme v tvare $g = (\bar{g} \pm \sigma_{\bar{g}})$.

Doplnkové úlohy:

7. Určenú hodnotu tiažového zrýchlenia porovnáme s vypočítanou hodnotou, určenou pre konkrétnu polohu „Žilina“ (uhol a nadmorskú výšku určíte kartograficky). Hodnoty stredného polomeru a hmotnosti Zeme použijeme z tabuliek.
8. Určenú hodnotu tiažového zrýchlenia porovnáme s experimentálne zistenou hodnotou tiažového zrýchlenia v úlohe s matematickým kyvadlom.

V závere porovnajte, ktorá s metód na určenie tiažového zrýchlenia je presnejšia.