



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií

NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

RNDr. Gabriela Tarjániová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021:
Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

© Gabriela Tarjániová, Tomáš Mizera, 2023

ISBN 978-80-554-2044-8

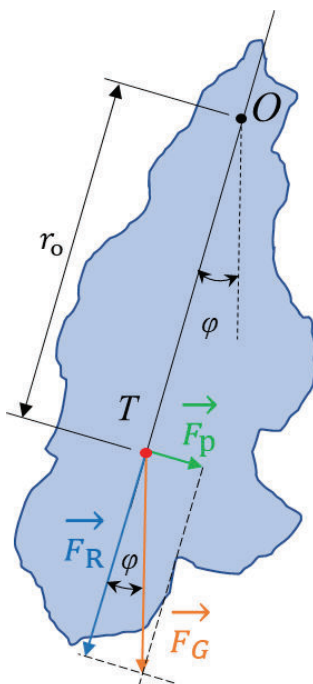
URČENIE MOMENTU ZOTRVAČNOSTI FYZIKÁLNEHO KYVADLA

Úlohy

- A. Meranie periódy fyzikálneho kyvadla v simulovanom experimente
- B. Určenie periódy fyzikálneho kyvadla pomocou postupnej metódy pre tri osi otáčania a vyjadrenie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania

Teoretický úvod

Fyzikálne kyvadlo je teleso (napr. doska, tyč), ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Ak sa ťažisko nachádza pod osou otáčania, kyvadlo môže zotrvať v stabilnej rovnovážnej polohe. Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy pôsobením vonkajšej sily F , je príčinou pohybu fyzikálneho kyvadla tiažová sila F_G pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol φ do rovnovážnej polohy vracia zložka tiažovej sily F_p (Obr. 1).



Obr. 1. Fyzikálne kyvadlo pri vychýlení o uhol φ

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Moment zotrvačnosti I pre teleso so spojitou rozloženou hmotnosťou je definovaný vzťahom $I = \int_m r^2 dm$, kde m je hmotnosť telesa a r je vzdialenosť hmotného elementu dm od osi

otáčania. Pre sústavu hmotných bodov je moment zotrvačnosti definovaný vzťahom $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$, kde m_i je hmotnosť i -teho hmotného bodu a r_i je jeho vzdialenosť od osi otáčania.

Kyvadlo znázornené na obrázku (Obr. 1) vykonáva kmitavý pohyb v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákres kyvadla. Veľkosť momentu sily je určená vzťahom

$$M = -F_p r_o = -F_G \sin(\varphi) r_o = -m g r_o \sin(\varphi), \quad (2)$$

kde m je hmotnosť telesa, g je tiažové zrýchlenie a r_o je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej kyvadlo kmitá. Po vychýlení sa kyvadlo snaží dostať naspäť do rovnovážnej polohy, preto sila F_p vždy smeruje do rovnovážnej polohy, čo vo vzťahu vyjadruje znamienko mínus.

Veľkosť uhlového zrýchlenia je určená vzťahom

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3)$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m g r_o \sin(\varphi) = 0, \quad (4)$$

ktorá nemá analytické riešenie (str. 58). Pre malé výchylky (do 10°), kedy platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$ a po vydelení rovnice (4) veličinou I , dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m g r_o}{I} \varphi = 0. \quad (5)$$

Rovnica (5) je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou a jej riešenie môžeme nájsť v tvare

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania.

Ak urobíme druhú deriváciu funkcie vyjadrenej vzťahom (6) podľa času a túto deriváciu ako i samotnú funkciu popisujúcu okamžitú uhlovú výchylku dosadíme do rovnice (5), zistíme, že $\omega^2 = m g r_o / I$

$$\omega = \sqrt{\frac{m g r_o}{I}}. \quad (7)$$

Veličina ω je tzv. vlastná uhlová rýchlosť kyvadla. Zo známeho vzťahu vyjadrujúceho súvis periódy T a uhlovej rýchlosti hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr_0}}, \quad (8)$$

z ktorého pre moment zotrvačnosti vyplýva

$$I = \frac{T^2 mgr_0}{4\pi^2}. \quad (9)$$

Ako je známe z dynamiky tuhého telesa, ak poznáme moment zotrvačnosti rotujúceho telesa vzhľadom na určitú os, môžeme určiť moment zotrvačnosti vzhľadom na inú os, ktorá je s ňou rovnobežná pomocou tzv. **Steinerovej vety**, ktorá hovorí: Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o mr_0^2 , kde m je hmotnosť telesa a r_0 je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí, t. j.

$$I = I_0 + mr_0^2. \quad (10)$$

A. Meranie periódy fyzikálneho kyvadla v simulovanom experimente

Simulačný program "mKyvadlo" slúži na meranie periódy fyzikálneho kyvadla potrebnej na určenie momentu zotrvačnosti fyzikálneho kyvadla. Dôležité časti programu sú očíslované (Obr. 2).

Napište Vaše osobné číslo. 1

Hodnoty pre 999104:
 $m = 1.220 \text{ kg}$
 $a = 0.079 \text{ m}$
 $b = 0.213 \text{ m}$

$d01 = 0.050 \text{ m}$
 $d02 = 0.070 \text{ m}$ 2
 $d03 = 0.040 \text{ m}$

Vybratá hodnota d0: 0.050 m

Pozn.: 8
 F5 - znovunačítanie stránky,
 CTRL++, CTRL-- a CTRL0 -
 "zoom" stránky.

ŠTART 3 **RESET** 4
Start 5 **Stop** 6

9 5.2, 5.0, 4.9, 4.7, 4.5,
 4.4, 4.2, 4.0, 3.9, 3.7,
 3.6, 3.4, 3.2, 3.1, 2.9,

7

uhol [°]
 čas [s]

Graf znázorňuje priebeh len pre prvé 3 sekundy.

Obr. 2. Snímka obrazovky programu "mKyvadlo"

Postup merania

1. Vyplníte osobné číslo (pod ktorým ste vedený na <http://vzdelavanie.uniza.sk>) a potvrdíte kliknutím na tlačidlo (1).
2. Vygenerované fyzikálne hodnoty pre dané osobné číslo sa zobrazia nižšie.
3. Tlačidlá nazvané "výber" (2) slúžia na výber parametra "d0", ktorý určuje vzdialenosť osi otáčania od ťažiska kmitajúceho telesa (v teórii „d0“ odpovedá hodnote r_0). Po kliknutí na tlačidlo „výber“ je automaticky aktualizovaná pozícia otvoru v kyvadle.
4. Vpravo hore sa nachádzajú tlačidlá "ŠTART" (3), "RESET" (4), "Start" (5) a "Stop" (6). Kliknutím na "ŠTART" sa spustí simulácia, teleso začne kmitať.
5. Meranie času sa vykonáva tlačidlami "Start" a "Stop". Tlačidlo "Start" spúšťa stopky, tlačidlo "Stop" zaznamenáva časový interval, ktorý uplynul od začiatku merania (od stlačenia tlačidla "Start") až po okamih stlačenia tohto tlačidla.
6. Keďže určujeme periódu kmitov kyvadla postupnou metódou, tlačidlo "Stop" sa bude stláčať viackrát. Tým získame sériu medzičasov potrebných na výpočet periódy kmitu kyvadla.
7. V pravom dolnom rohu sa znázorňuje časový priebeh výchylky pre prvé tri sekundy merania, pre hodnotu $d_0 = d_{01}$ (7).
8. Tlačidlo "RESET" slúži na zastavenie kyvadla, vynulovanie a zastavenie stopiek.
9. Hodnoty medzičasov sa zobrazujú po stlačení tlačidla "Stop" pod týmto tlačidlom (9).
10. K referátu je potrebné priložiť celú snímku obrazovky (Obr. 2) obsahujúcu osobné číslo, vygenerované hodnoty, parametre "d0" a zmerané medzičasy. Poznámka: tlačidlo "F5" slúži na opätovné načítanie stránky. Zväčšovanie, zmenšovanie a návrat na pôvodnú veľkosť stránky sa vykonáva stlačením CTRL++, CTRL-- a CTRL0 (8).

B. Určenie periódy fyzikálneho kyvadla pomocou postupnej metódy pre tri osi otáčania a vyjadrenie momentu zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania

V laboratórnych podmienkach fyzikálne kyvadlo tvorí homogénna kovová doska, ktorá môže vykonávať kmitavý pohyb okolo jednej zo zvolených osí vytvorených britom, ktorý môžeme zaskrutkovať alebo vložiť do zvoleného otvoru. Os otáčania je vytvorená dotykovým miestom britu na opornej ploche stojana alebo opornej ploche kovovej doky. Toto usporiadanie umožňuje vychýlenie dosky o uhol φ_0 z jej rovnovážnej polohy (Obr. 3), pričom po uvoľnení bude doska kmitať ako fyzikálne kyvadlo. Vložením britu do iného otvoru v doske máme možnosť meniť vzdialenosť osi otáčania dosky od jej ťažiska.

Pomôcky

Kovová doska, stojan, brit, stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, váhy, program na meranie doby kmitu kyvadla.

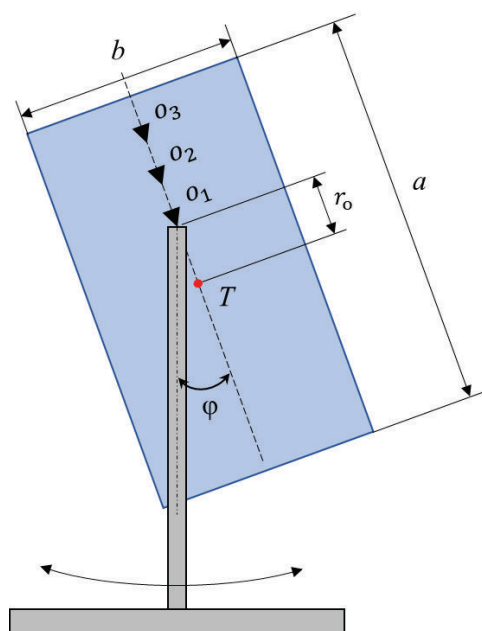
Postup merania

1. Určíme rozmery dosky a , b (v prípade telesa tvaru obdĺžnika) a hmotnosť m fyzikálneho kyvadla. Ak bude brit pevne spojený s kovovou doskou, vážením určíme hmotnosť kovovej dosky aj so skrutkami a britom.
2. Určíme štandardné neistoty merania hmotnosti σ_m a rozmerov dosky σ_a , σ_b , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia, t. j. váh, dĺžkového a posuvného meradla.
3. Zo známej hodnoty hmotnosti m a rozmerov a , b kovovej dosky obdĺžnikového tvaru vypočítame moment zotrvačnosti I_T vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom podľa vzťahu

$$I_T = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

Pre iný tvar fyzikálneho kyvadla (napr. trojuholník), vypočítame teoretický ťažiskový moment zotrvačnosti I_T podľa vzťahu uvedeného v dodatku laboratórnej úlohy.

4. Vzdialenosť r_0 ťažiska od zvolenej osi otáčania (britu) určíme posuvným meradlom, určíme štandardnú neistotu merania σ_{r_0} , pričom ich hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$.
5. Zostavíme meraciu aparátúru podľa obrázku (Obr. 3).



Obr. 3. Meracia aparátúra v laboratórnych podmienkach

6. Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Kyvadlo by malo kmitať iba v rovine kolmej na vodorovnú rovinu. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov fyzikálneho kyvadla. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 1, kde t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď. Podobný zápis urobíme pre zvolené osi č. 2 a č. 3.

Tabuľka 1.

a (m)		b (m)		r_{oi} (m)		m (kg)	
i	t_{i*10} (s)	$i + 5$	$t_{(i+5)*10}$ (s)	$T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s)		$\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²)	
1.	t_{10}	6.	t_{60}	$T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$			
2.	t_{20}	7.	t_{70}	$T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$			
3.	t_{30}	8.	t_{80}				
4.	t_{40}	9.	t_{90}				
5.	t_{50}	10.	t_{100}				
$\bar{T} = \dots$						$\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$	

7. Po určení periódy pre danú vzdialenosť osi otáčania od ťažiska kyvadlo zastavíme a zmeníme túto vzdialenosť umiestnením britu do ďalšieho zvoleného otvoru.
8. Postup vedúci k určeniu periódy fyzikálneho kyvadla opakujeme pre 3 rôzne osi otáčania a príslušné namerané hodnoty zapisujeme do tabuliek, budeme mať tri tabuľky.

Vyhodnotenie merania

- Pre každú z troch osí otáčania určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T}_i a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}_i}$.
- Výsledok určenia periód kmitov pre dané osi otáčania kyvadla uvádzame v tvare $T_i = (\bar{T}_i \pm \sigma_{\bar{T}_i})$.
- Z priemerných hodnôt periód \bar{T}_i vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu momentu zotrvačnosti I_i pre dané vzdialenosti r_{oi} ťažiska od osi otáčania podľa vzťahu (9).
- Využitím Steinerovej vety vypočítame moment zotrvačnosti I_0 vzhľadom na ťažiskovú os podľa vzťahu

$$I_0 = I - mr_0^2 = \frac{T^2 mgr_0}{4\pi^2} - mr_0^2.$$

Výsledky získané podľa uvedeného vzťahu vyhodnotíme pre každú os otáčania

$$I_{o1} = I_1 - mr_{o1}^2, \quad I_{o2} = I_2 - mr_{o2}^2, \quad I_{o3} = I_3 - mr_{o3}^2.$$

5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu k momentom zotrvačnosti I_{o1}, I_{o2}, I_{o3} pomocou neistôt priamo meraných veličín T, m, r_o podľa vzťahu

$$\sigma_{I_o} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_o}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial I_o}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial I_o}{\partial r_o}\right)^2 (\sigma_{r_o})^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial I_o}{\partial T} = \frac{Tmgr_o}{2\pi^2}, \quad \frac{\partial I_o}{\partial m} = \frac{r^2gr_o}{4\pi^2} - r_o^2, \quad \frac{\partial I_o}{\partial r_o} = \frac{r^2mg}{4\pi^2} - 2mr_o.$$

6. Určíme, ktorá z týchto troch veličín (T, m, r_o) prispieva k výslednej neistote veličiny I_o najväčšou mierou, t. j. ktorý z troch sčítancov v rovnici je najväčší.
7. Určené výsledky momentu zotrvačnosti uvedieme v tvare $I_{oi} = (\bar{I}_{oi} \pm \sigma_{\bar{I}_{oi}})$.
8. Zistíme, či vypočítané hodnoty I_{o1}, I_{o2}, I_{o3} navzájom súhlasia, t. j. porovnáme každú z troch dvojíc podľa kritéria pre porovnávanie, kapitola Spracovanie merania. Ak súhlasia tri dvojice, nájdeme vážený priemer zo všetkých troch hodnôt, ak súhlasí len jedna dvojica, nájdeme vážený priemer len z tejto dvojice podľa vzťahu

$$\bar{I}_o = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{I_{oi}}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}$$

a neistotu váženého priemeru podľa vzťahu

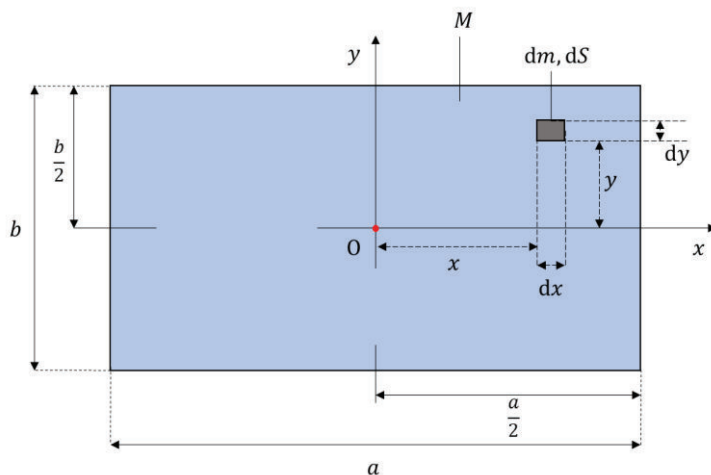
$$\sigma_{\bar{I}_o} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_{I_{oi}})^2}}}.$$

9. Porovnaním zistíme, či vypočítaná hodnota váženého priemeru momentu zotrvačnosti \bar{I}_o súhlasí s teoretickou hodnotou I_T , kapitola Spracovanie merania. Ak nie, uvažujeme nad príčinou.
10. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

C. Odvodenie vzťahu pre moment zotrvačnosti

Moment zotrvačnosti pre dosku tvaru obdĺžnika

Odvodíme vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky obdĺžnikového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá. Uvažovanú dosku orientujeme vzhľadom na súradnicovú sústavu (Obr. 4).



Obr. 4. Grafické znázornenie homogénnej dosky pre odvodenie momentu zotrvačnosti

V našom prípade os, voči ktorej moment zotrvačnosti I_0 určujeme, je totožná s osou z (t. j. je kolmá na nákresňu). Moment zotrvačnosti pre štvrt dosky (časť nachádzajúca sa v prvom kvadrante) vyjadríme podľa definície nasledovne

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{4} &= \int_M r^2 dm, \\ \frac{I_0}{4} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \frac{M}{S} dS = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) \frac{M}{ab} dx dy \\ &= \frac{M}{ab} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{\frac{b}{2}} (x^2 + y^2) dx dy, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{I_0}{4} = \frac{1}{48} M(a^2 + b^2).$$

Pre plošnú hustotu sme použili vzťah $\rho_S = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS} = \frac{dm}{dx dy}$ a z neho sme vyjadrili hmotnosť nekonečne malého elementu dm . Plocha tohto elementu je $dS = dx dy$ a jeho poloha vzhľadom na uvažovanú os je $r^2 = x^2 + y^2$. Rozmery celej dosky sú dané stranami a , b . Hľadaný moment zotrvačnosti potom bude

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2), \quad (12)$$

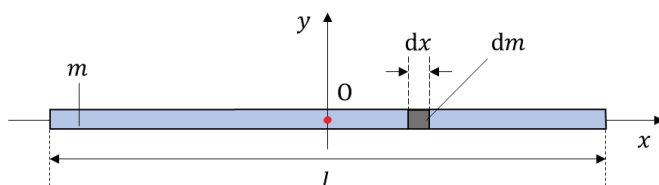
kde M je hmotnosť dosky a a , b jej rozmery.

Moment zotrvačnosti pre dosku trojuholníkového tvaru

Odvodíme si vzťah pre moment zotrvačnosti homogénnej dosky trojuholníkového tvaru vzhľadom na os, ktorá prechádza ťažiskom tejto dosky a je na dosku kolmá. Na označenie hustoty trojuholníkovej dosky použijeme ρ a budeme predpokladať, že táto hustota je jednotná v celom objekte.

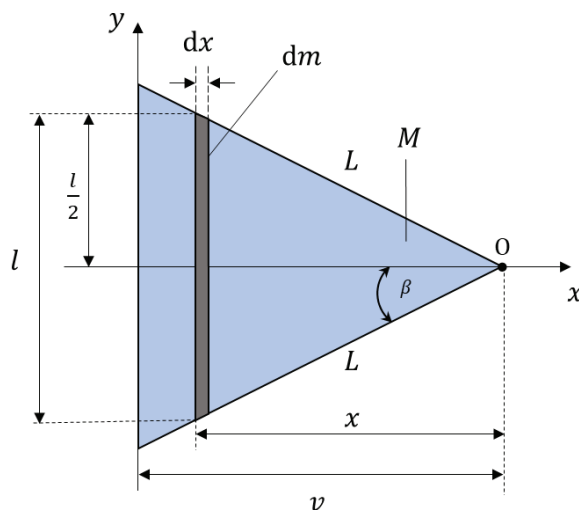
Najskôr si vyjadríme moment zotrvačnosti I_0 tenkej rovnorodej tyče hmotnosti m , dĺžky l pre os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom (Obr. 5.). Pre hustotu platí $\rho = \frac{m}{l}$ (lineárna hustota), $dm = \rho dx$.

$$I_0 = \int_m x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12} \rho l^3 = \frac{1}{12} ml^2 \quad (13)$$



Obr. 5. Grafické znázornenie homogénnej tyče pre odvodenie momentu zotrvačnosti

V ďalšom budeme uvažovať rovnoramenný trojuholník s hmotnosťou M , s vrcholovým uhlom veľkosti 2β a dĺžkou ramien L . Trojuholník orientujeme vzhľadom na súradnicovú sústavu xy . Os, voči ktorej moment zotrvačnosti I určujeme, je rovnobežná s osou z , t. j. os je kolmá na rovinu nákresu a prechádza vrcholom O trojuholníka (Obr. 6.).



Obr. 6. Grafické znázornenie homogénnej trojuholníkovej dosky pre odvodenie momentu zotrvačnosti

Nech v je výška trojuholníka, pre ktorú platí $v = L \cos \beta$. Rozdelíme si trojuholník na tenké rovnorodé pásy rovnobežné so základňou a nech x je vzdialenosť od pásu k vrcholu O . Výška vybraného elementárneho pásu trojuholníka je $l = 2x \tan \beta$ a jeho šírka je dx . Elementárna

plocha dS elementárneho pásu sa preto vypočíta ako $dS = l dx = (2x \tan \beta) dx$. Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na ľubovoľnú os sa vypočíta podľa definície nasledovne

$$I = \int_m x^2 dm. \quad (14)$$

Tento matematický zápis integrálu znamená, že musíme sčítať všetky elementárne body telesa s hmotnosťami dm vynásobené druhou mocninou ich vzdialenosti od osi otáčania. Skôr ako budeme integrovať, je potrebné všetky veličiny pod integrálom vyjadriť pomocou jednej rovnakej veličiny, inak tento integrál nevieme vyriešiť. V našom prípade to znamená, hmotnosť vyjadriť pomocou vzdialenosti x .

Trojuholník, ktorého moment zotrvačnosti počítame, predstavuje zložitý útvar z hľadiska integrovania a výpočtu, preto pri riešení použijeme Steinerovu vetu. Jej diferenciálny zápis pre daný trojuholník je

$$dI = dI_o + x^2 dm, \quad (15)$$

kde dI je diferenciál momentu zotrvačnosti nášho homogénneho pásika vzhľadom na os prechádzajúcu bodom O , dI_o je diferenciál momentu zotrvačnosti homogénneho pásika (tyče) vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom pásika (vypočítané na začiatku kapitoly, vzťah 13) a x je vzdialenosť ťažiska pásika od bodu O . Ak zderivujeme moment zotrvačnosti homogénnej tyče podľa m dostaneme

$$\frac{dI_o}{dm} = \frac{l^2}{12}, \quad (16)$$

z čoho sa dá dI_o vyjadriť v tvare

$$dI_o = \frac{l^2}{12} dm. \quad (17)$$

Ak si dI_o dosadíme do Steinerovej vety v diferenciálnom tvare dostaneme

$$dI = \frac{l^2}{12} dm + x^2 dm \quad (18)$$

a po dosadení za l dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$dI = \frac{(2x \tan \beta)^2}{12} dm + x^2 dm, \quad (19)$$

ktorú vyriešime tak, že obidve strany rovnice integrujeme a dostaneme

$$I = \int_M \left(\frac{(2x \tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) dm. \quad (20)$$

Pre vyjadrenie elementárnej hmotnosti dm v integráli pomocou x použijeme plošnú hustotu rovnorodého telesa $\rho = \frac{M}{S} = \frac{dm}{dS}$, kde M je celková hmotnosť telesa, S je celková plocha telesa, dS je elementárna plocha rovnorodého pásika, ktorá sa rovná $l dx$. Dosadením za l a vyjadrením elementárnej hmotnosti pomocou ρ dostaneme $dm = \rho(2x \tan \beta) dx$. Ak si do integrálu (vzťah 20) dosadíme za dm , dostaneme

$$I = \int_0^v \left(\frac{(2x \tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) (\rho 2x \tan \beta dx). \quad (21)$$

V tomto integráli sú vyjadrené všetky meniace sa fyzikálne veličiny vo výpočte momentu zotrvačnosti iba pomocou dĺžky x , ktorá sa mení od 0 po v . Tento integrál sa dá postupnými matematickými úpravami vypočítať nasledovne

$$\begin{aligned} I &= 2\rho \tan \beta \int_0^v \left(\frac{4x^2 (\tan \beta)^2}{12} + x^2 \right) x dx = 2\rho \tan \beta \int_0^v \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) x^2 dx \\ &= 2\rho \tan \beta \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) \frac{v^3}{3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Výsledný vzťah sa dá zapísať aj pomocou celkovej hmotnosti M trojuholníka a dĺžky jeho strany L nasledovnou úpravou. Pre plochu trojuholníka S s ohľadom na uhol β platí $S = \frac{v(2v \tan \beta)}{2} = v^2 \tan \beta$ a s ohľadom na skutočnosť, že $\rho = \frac{M}{S}$, potom pre I platí

$$I = \rho S \left(1 + \frac{(\tan \beta)^2}{3} \right) \frac{v^2}{3} = \left(\frac{Mv^2}{2} \right) \left[1 + \frac{1}{3} (\tan \beta)^2 \right]. \quad (23)$$

Ak si vyjadríme výšku trojuholníka prostredníctvom strany trojuholníka $v = L \cos \beta$ a dosadíme do vzťahu (23), bude platiť

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{ML^2 (\cos \beta)^2}{2} \right] \left[1 + \frac{1}{3} (\tan \beta)^2 \right] = \\ &= \frac{ML^2}{2} \left[(\cos \beta)^2 + \frac{1}{3} \frac{(\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} (\cos \beta)^2 \right] = \frac{ML^2}{2} \left[(\cos \beta)^2 + \frac{1}{3} (\sin \beta)^2 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Po úprave využitím vzťahu medzi goniometrickými funkciami rovnakého uhla ($\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$) dostaneme vzťah pre moment zotrvačnosti rovnoramenného trojuholníka vzhľadom na os prechádzajúcu jeho vrcholom v tvare

$$I = \frac{ML^2}{2} \left[1 - \frac{2}{3} (\sin \beta)^2 \right]. \quad (25)$$

Pre rovnostranný trojuholník je vrcholový uhol rovný 60° . S ohľadom na túto vlastnosť, ak zadefinujeme uhol $\beta = 30^\circ$, dostaneme pre moment zotrvačnosti rovnostranného trojuholníka vzťah

$$I = \frac{5}{12} ML^2. \quad (26)$$

V tomto kroku použijeme Steinerovu vetu (vzťah 10), aby sme si vyjadrili moment zotrvačnosti I_T vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom. V nasledujúcej rovnici za moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom dosadíme vzťah (26) a za r_0 vzájomnú vzdialenosť oboch spomínaných osí, t. j. $\frac{2}{3}v$, pričom platí $v^2 = \frac{3}{4}L^2$.

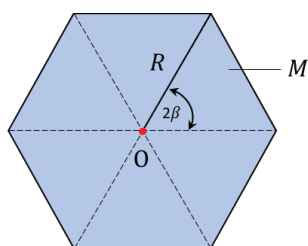
$$\begin{aligned} I &= I_T + mr_0^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \left(\frac{2}{3} v \right)^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \frac{4}{9} v^2, \\ \frac{5}{12} ML^2 &= I_T + M \frac{4}{9} \frac{3}{4} L^2, \\ I_T &= \frac{1}{12} ML^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Pre moment zotrvačnosti rovnostranného trojuholníka vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a kolmú na rovinu trojuholníka platí vzťah

$$I = \frac{1}{12} ML^2. \quad (28)$$

Moment zotrvačnosti pre dosku tvaru pravidelného N-uholníka

Odvodíme si vzťah pre rovinný pravidelný mnohoúhelník s N vrcholmi a s rovnomerne rozloženou hmotnosťou M , ktorý rotuje okolo osi kolmej na rovinu mnohoúhelníka a idúcou stredom. R je polomer opísanej kružnice mnohoúhelníka. N-uholník sa skladá z rovnoramenných trojuholníkov (Obr. 7.), takže môžeme použiť niektoré skutočnosti z odvodenia momentu zotrvačnosti pre trojuholník.



Obr. 7. Grafické znázornenie homogénnej dosky tvaru N-uholníka pre odvodenie momentu zotrvačnosti

V N-uholníku bude pre uhol platiť

$$\beta = \frac{\pi}{N}. \quad (29)$$

Hmotnosti trojuholníkov sa jednoducho sčítajú, takže ak M je hmotnosť celého N-uholníka, dostaneme použitím vzťahu (25) vzťah pre ťažiskový moment zotrvačnosti pravidelného N-uholníka s osou kolmou na jeho rovinu v tvare

$$I = \frac{MR^2}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\sin \frac{\pi}{N} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Pre pravidelný 6-uholník, s ktorým sa stretáme pri meraní je $\beta = \frac{\pi}{6}$. Jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom a kolmú na rovinu N-uholníka je daný

$$I = \frac{5}{12} MR^2. \quad (31)$$

V prílohe (tabuľka 14, strana 162) uvádzame ďalšie hodnoty momentov zotrvačnosti pre niekoľko N-uholníkov odvodených z rovnice (30).

Tabuľka 12. Hmotnostná tepelná kapacita vzduchu c_p a Poissonova konštanta vzduchu $\kappa = c_p/c_V$ v závislosti od teploty (pri tlaku 101,325 kPa)

t (°C)	c_p ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	κ
-50	1 006	1,41
0	1 006	1,40
20	1 006	1,40
40	1 008	1,40
60	1 009	1,40
80	1 011	1,40
100	1 012	1,395

Tabuľka 13. Molárna tepelná kapacita C_p , C_V a Poissonova konštanta κ ideálneho plynu

Ideálny plyn s molekulami	C_p ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	C_V ($\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	κ
1 atómovými	$\frac{5}{2}R = 20,786$	$\frac{3}{2}R = 12,472$	$\frac{5}{3} = 1,6667$
2 atómovými	$\frac{7}{2}R = 29,100$	$\frac{5}{2}R = 20,786$	$\frac{7}{5} = 1,4$
3 a viac atómovými	$4R = 33,358$	$3R = 24,943$	$\frac{4}{3} = 1,3333$

Tabuľka 14. Moment zotrvačnosti I pre os idúcu stredom mnohouholníka a kolmú na rovinu, kde M je hmotnosť a R je polomer opísanej kružnice mnohouholníka

N-uholník	I ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)
3	$\frac{1}{4}MR^2$
4	$\frac{1}{3}MR^2$
6	$\frac{5}{12}MR^2$

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023
ako svoju 4933. publikáciu

Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk