ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021:
Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

© Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera, 2023

ISBN 978-80-554-2044-8

SPRACOVANIE MERANIA

Tak ako je samo o sebe staré meranie, tak je stará aj pochybnosť, či je nameraná hodnota presná. V tejto kapitole bude našou snahou Vám priblížiť a čiastočne vysvetliť komplikovaný proces merania a vyhodnocovania nameraných údajov.

Na úvod je potrebné, aby sme si jednotlivé veličiny rozdelili do kategórii. Pre toto rozdelenie využijeme jednoduchý príklad jazdy vlaku z jedného miesta na druhé.

Prvým typom sú **statické veličiny,** sú to také, ktoré sa v čase nemenia a sú konštantné. Ak zoberieme do úvahy vlak, jedná sa o hmotnosť vlaku, rozmery vlaku, vzdialenosť medzi miestami, kde sa vlak presúva a tak ďalej.
Druhým typom sú **veličiny krátkodobo statické**. Do tejto kategórie môžeme zaradiť veličiny, ktoré sú z krátkodobého hľadiska konštantné. Ak by sme ich hľadali na spomínanom vlaku, išlo by napríklad o množstvo paliva v nádrži, vonkajšia teplota, barometrický tlak, atď.
Poslednou skupinou sú **dynamické (časovo premenlivé) veličiny**. Typickým príkladom je napr. rýchlosť vlaku, otáčky motora, stúpanie trate. Túto kategóriu by sme mohli deliť na základe rôznych kategórii na ďalšie podskupiny.

Poznanie o aký typ veličiny sa jedná je prvým a dôležitým krokom k jeho správnemu spracovaniu a vyhodnoteniu.

A. Meranie a metóda merania

V experimentálnej činnosti, kvalitnej výrobe alebo v technickom rozvoji zohráva meranie dôležitú úlohu. **Meranie** je súbor činností, ktorých cieľom je stanoviť hodnotu neznámej fyzikálnej veličiny. Pod týmto pojmom rozumieme všetky potrebné úkony na určenie fyzikálnej veličiny. Vo všeobecnosti sem patrí príprava a kontrola meradla, prípadná inštalácia snímača, nastavenie a kalibrácia a samotné získanie a spracovanie údajov. Nie je možné očakávať, že výsledkom merania bude skutočná hodnota. Dôležité je, ako blízko je získaný výsledok k tejto skutočnej hodnote, čo závisí od metódy merania, kvality aparatúry určenej na meranie, kvality realizovaného merania a iných vplyvov. Za daných podmienok predpokladáme, že získané výsledky sa pohybujú v okolí hľadanej hodnoty meranej veličiny a sú ovplyvnené chybami merania.
Metóda merania nám vyjadruje, akým spôsobom danú veličinu získame. Každú meranú veličinu dokážeme odmerať viacerými metódami. Výber metódy ovplyvňuje o aký typ meranej veličiny ide, aké máme podmienky a čo máme k dispozícii. V praxi sa najčastejšie využívajú štyri metódy merania.

Metóda jednorazového a opakovaného merania

Ako už vyplýva zo samotného názvu, ak hľadanú veličinu odmeriame meracím prístrojom raz, hovoríme o jednorazovom meraní. Táto metóda merania je najmenej presná.

Ak by sme chceli túto presnosť zvýšiť, bolo by potrebné vykonať viac meraní. Týmto spôsobom by sme získali súbor nameraných hodnôt $x_1, x_2 \ldots, x_n$, kde n je počet meraní. Túto metódu logicky nazývame opakované meranie. Z praktického hľadiska, je viac než potrebné súbor nameraných hodnôt získaných touto metódou charakterizovať jednou jedinou hodnotou. Túto hodnotu budeme nazývať **stredná hodnota**. Strednú hodnotu týchto meraní je najlepšie charakterizovať aritmetickým priemerom nameraných hodnôt

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_\mathrm{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} x_i. \tag{1}$$

Pri tomto type metódy merania existuje aj špeciálny prípad, tzv. **metóda postupných meraní**. V tomto prípade je začiatok každého nasledujúceho merania totožný s koncom toho predchádzajúceho.

Priame a nepriame metódy

Ak hodnotu meranej veličiny odčítame zo stupnice meracieho prístroja priamo, hovoríme o **priamom meraní**. Napríklad pri meraní dĺžky pomocou dĺžkového meradla alebo priemeru pomocou mikrometrického meradla.
Ak je potrebné hľadanú veličinu určiť pomocou matematického vzťahu alebo je funkciou niekoľkých veličín rôzneho druhu, t. j. $x = \mathrm{f}(y_1, \ \ldots, y_\mathrm{n})$, hovoríme o **nepriamej metóde**.

Absolútne a relatívne metódy

Absolútne metódy poskytujú priamo číselnú hodnotu meranej veličiny. V prípade relatívnych metód ide o podiel dvoch veličín toho istého druhu, pričom hodnota jednej z porovnávaných veličín musí byť známa.

Statické a dynamické metódy

Ak meraná veličina a aj ostatné veličiny, s ktorými meraná veličina súvisí, majú v čase konštantné hodnoty, ide o statickú metódu. Pri dynamickej metóde sa niektorá z veličín mení s časom.

Pri meraniach sa častokrát používajú viaceré metódy súčasne. Typickým príkladom je prípad opakovaného nepriameho merania. V tomto prípade pri spracovaní hodnôt musíme brať do úvahy, že meraná veličina závisí od viacerých veličín y_i, ktoré sú merané niekoľkokrát. Preto v prvom kroku určíme strednú hodnotu každej veličiny podľa vzťahu (1) a až potom určíme hľadanú veličinu. Z toho vyplýva, že hľadaná veličina bude určená strednými hodnotami $\bar{x} = \mathrm{f}(\overline{y_1}, \ \ldots, \overline{y_\mathrm{n}})$. S podobným typom spájania metód sa stretme napr. pri úlohe s názvom Určenia objemu valčeka.

B. Chyby merania

Úlohou merania je určiť hodnotu meranej veličiny a odhadnúť chybu merania a neistotu, ktorej sa dopúšťame pri meraní. Rozdiel medzi nameranou a skutočnou (tzv. pravou) hodnotou meranej veličiny nazývame **chyba merania.**

Pojem skutočná hodnota je ideálny pojem, ktorý vyjadruje hodnotu, ktorá je v zhode s definíciou bližšie určenej veličiny. Jedná sa o jednočíselnú hodnotu u spojitých veličín s veľkým počtom desatinných miest, ktorú by sme získali veľmi presným meraním pri vysokých požiadavkách na technickú vyspelosť meradiel, spôsobilosť osoby a dobu merania. Takáto hodnota je pre praktické využitie nepoužiteľná, preto sa zavádza pojem **konvenčne pravá hodnota (stredná hodnota).** Táto hodnota predstavuje hodnotu dostatočne blízku ku skutočnej hodnote. Získame ju za primeraných technických, finančných, časových a personálnych podmienok. Za konvenčne pravú hodnotu môžeme pokladať tabuľkovú hodnotu, strednú hodnotu meranej veličiny alebo hodnotu meranej veličiny určenú z definície. Tento ústupok má za následok zníženie presnosti a navýšenie chyby a neistoty merania.

Zdrojom chýb v rámci merania je viacero. Na základe pôvodu chyby ich môžeme rozdeliť na tri kategórie.

Hrubé chyby

Prvú skupinu tvoria hrubé chyby, ktorých výskyt je predovšetkým systémovým zlyhaním a vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- sú nápadné svojou veľkosťou (napr. merací prístroj ukazuje neobvykle veľkú alebo malú hodnotu, alebo jedna hodnota sa výrazne líši od ostatných)
- môžu byť doplnené ďalšími negatívnymi ukazovateľmi
- vyžadujú zásadný zásah do procesu merania (ukončenia merania, oprava meradla, výmena experimentátora,...).

Možné príčiny hrubých chýb merania:

- zlé odčítanie nameraných hodnôt experimentátorom
- poškodené meradlo alebo snímač
- zle nastavené meradlo
- nevhodné meradlo
- nepripravenosť experimentátora
- nevhodná metóda
- nevhodné podmienky merania.

Výskyt hrubých chýb sa najčastejšie prejavuje pri opakovanom meraní. V súbore hodnôt hodnotu, ktorá je zaťažená hrubou chybou pri spracovaní neberieme do úvahy, alebo je potrebné odstrániť chybu a meranie zopakovať.

Systematické chyby

Systematické chyby, na rozdiel od hrubých chýb, namerané hodnoty posúvajú od výslednej hodnoty vždy rovnakým smerom, a preto sú ťažko odhaliteľné.
Vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- majú poznateľnú príčinu (vieme priamo určiť konkrétny zdroj chyby)
- sú stále, čo do veľkosti a orientácie (znamienka)
- existuje jednoznačné riešenie
- nedá sa ich charakterizovať na základe opakovaného merania

Možné príčiny systematických chýb:

- zlá kalibrácia alebo začiatočné nastavenie
- chyba paralaxy (vzniká u analógových meracích prístrojov v prípade, kedy rovina pohybu ručičky a rovina stupnice sú od seba vzdialené a stupnica nie je pozorovaná v kolmom smere)
- nevhodne upevnený snímač
- poškodenie vedenia
- znečistený merací dotyk.

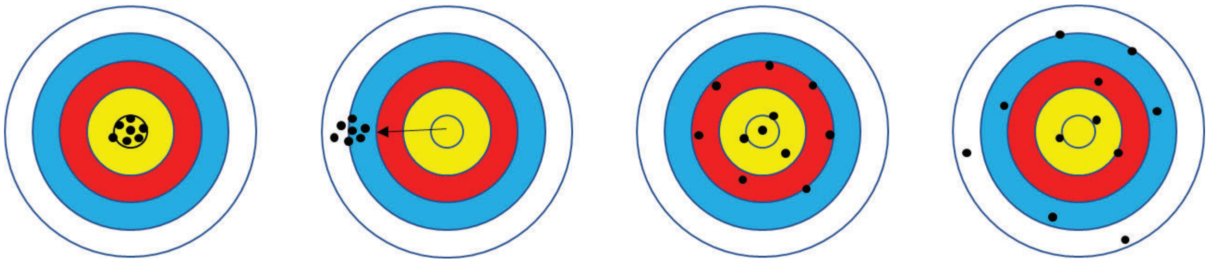
Aj pri veľmi dobrej analýze príčin systematických chýb sa určitá časť neodhalí. Tieto chyby potom spadajú pod kategóriu náhodných chýb.

Náhodné chyby

Čo nevieme zaradiť do predchádzajúcich chýb logicky spadá do tejto kategórie. Jedná sa o chyby spôsobené náhodnými vplyvmi prostredia alebo prebiehajúcimi dejmi v prístrojoch. Pri týchto chybách nevieme predpokladať kedy nastanú.
Vyznačujú sa nasledujúcimi vlastnosťami:

- nevieme ich identifikovať z hľadiska konkrétnych príčin
- nevieme ich presne vyčísliť
- sú nestále z hľadiska veľkosti aj orientácie
- neexistuje proces spracovania iba štatisticky (opakovaným meraním).

Pre lepšenie pochopenie jednotlivých typov chýb si predstavme tieto chyby ako strely na terč. Obrázok (Obr. 1.a) zobrazuje ideálny stav, keď všetky strely zasiahli stred terča, ich rozptyl je malý a sú blízko pri sebe. Takýto stav v rámci merania je veľmi ťažké, resp. nemožné dosiahnuť. Obrázok (Obr. 1.b) zobrazuje systematické chyby. Vidíme, že rozptyl jednotlivých zásahov ostáva malý, ale každá jedna strela je posunutá do jedného smeru. Z tohto pohľadu vidíme, že systém je ovplyvňovaný systematickým vonkajším vplyvom a každá hodnota je systematicky posunutá rovnakým smerom. Obrázok (Obr. 1.c) zobrazuje náhodné chyby, kde vidíme, že strely majú veľký rozptyl a každá sa od ideálneho stavu líši, či už do veľkosti odchýlky alebo smeru.



Obr. 1. Názorná ukážka jednotlivých typov chýb: a) ukážka ideálneho stavu, b) systematické chyby, c) náhodné chyby, d) reálne namerané hodnoty

Život by bol oveľa jednoduchší keby existujú iba tieto uzavreté prípady, ale v reálnom procese merania tieto diskrétne stavy neexistujú. V prípade reálneho merania (Obr. 1.d) vidíme, že strely sú náhodné a ovplyvnené systematickými, náhodnými a hrubými chybami. Úlohou experimentátora je následne odhaliť možné chyby a určenými postupmi charakterizovať dané merania a súbor nameraných dát.

V rámci experimentálnej práce a vyhodnocovania sa experimentátor častokrát stretáva s pojmami absolútna a relatívna chyba. Tento typ chýb sa najčastejšie používa na porovnávanie dvoch hodnôt.

Absolútna chyba

Absolútna chyba Δx predstavuje rozdiel medzi výsledkom merania x_i a konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny x_{p}

$$\Delta x = x_i - x_{\mathrm{p}}. \tag{2}$$

Jednotka absolútnej chyby je rovnaká ako jednotka meranej veličiny. Táto chyba môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Relatívna chyba

Relatívna chyba predstavuje podiel medzi absolútnou hodnotou absolútnej chyby a konvenčne pravou hodnotou meranej veličiny x_{p}

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{x_{\mathrm{p}}}. \tag{3}$$

Ak relatívnu chybu δx vyjadríme v percentách, platí vzťah

$$\delta x_{\%} = \frac{|\Delta x|}{x_{\mathrm{p}}} 100\ \%. \tag{4}$$

Hodnota relatívnej chyby je vždy kladná a je vyjadrená ako bezrozmerné číslo alebo v percentách.

C. Neistoty merania

V predchádzajúcich častiach sme častokrát spomenuli, že jednotlivé chyby sa nedajú presne číselne vyjadriť. Ich hodnotu vieme určiť iba ako približné číslo, ktoré nevypovedá dostatočne dobre o meraní. Aby sme získali skutočnú predstavu o výslednej hodnote merania, musíme túto hodnotu vyjadriť ako interval, v ktorom sa s určitou pravdepodobnosťou bude nachádzať meraná veličina. Tento interval určíme pomocou matematickej štatistiky a teórie pravdepodobnosti. Jedná sa o neistotu merania. **Neistota merania** je parameter charakterizujúci interval hodnôt meranej veličiny okolo výsledku merania, ktorý s určitou pravdepodobnosť obsahuje skutočnú hodnotu. Pri neistote merania je potrebné si uvedomiť tri kľúčové vlastnosti:

- neistota je pridružená k výsledku merania, a teda neistota je parametrom, ktorý sám o seba nemá veľký význam
- neistota je v podstate rozptyl hodnôt, čím sa neistote dáva štatistická podoba
- pri neistote vzniká povinnosť určiť a zdôrazniť zdroje neistôt a ich príspevky k celkovej neistote.

Neistota merania sa stáva kvalitatívnym ukazovateľom výsledku a do istej miery vyjadruje aj kvalitu merania. Základnou charakteristikou neistoty je štandardná neistota σ, ktorú vieme určiť z matematickej štatistiky pre náhodné procesy. Častokrát sa pri analýzach meraní využívajú absolútna štandardná neistota, ale aj relatívna štandardná neistota.

Matematickým vyjadrením závislosti na metóde merania je **absolútna štandardná neistota** σ_x meranej veličiny x. Vyjadrená býva v rovnakých jednotkách ako meraná veličina.

Vzhľadom na komplikovanosť meraní v praxi (použitie viacerých meradiel alebo typov metód merania) určenie absolútnej štandardnej neistoty má presne definované postupy a zákonitosti.

Najčastejšie používanou absolútnou štandardnou neistotou je tzv. kombinovaná štandardná neistota. Tento typ neistoty v sebe spája štandardnú neistotu typu A a štandardnú neistotu typu B.

Štandardná neistota typu A

Túto neistotu môžeme použiť len v prípade, že máme k dispozícii (alebo sme schopní vykonať) opakované merania. Pre výpočet štandardnej neistoty typu A je potrebné poznať výberovú smerodajnú odchýlku jedného merania s pre ktorú platí

$$s = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} (\Delta x_i)^2}, \qquad (5)$$

kde n je počet meraní a Δx_i je absolútna chyba zadefinovaná vo vzťahu (2).

Výberovú smerodajnú odchýlku môžeme zo štatistického hľadiska použiť na posúdenie presnosti jednotlivých meraní. Všeobecne platí, že čím je s menšie, tým je meranie presnejšie. V literatúre sa výberová smerodajná odchýlka jedného merania označuje aj ako stredná kvadratická odchýlka jedného merania.

Takýmto spôsobom sme schopný určiť presnosť (rozptyl) jedného merania. Avšak, ak uskutočníme n opakovaných meraní niekoľkokrát za sebou, dostaneme pre každú z týchto n-tíc nameraných hodnôt všeobecne rozdielnu skutočnú hodnotu. Ak sú výsledky jednotlivých meraní navzájom nezávislé, potom smerodajná odchýlka $\sigma_{\bar{x}}$ aritmetického priemeru určeného z n opakovaných meraní je $\sqrt{n}$-krát menšia ako smerodajná odchýlka jedného merania s. Pre štandardnú neistotu typu A v určitých podmienkach potom platí $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{\mathrm{A}\bar{x}}$ a môžeme napísať

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_{\mathrm{A}\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}, \qquad (6)$$

kde n predstavuje počet meraní, x_i výsledok i-teho merania a výraz $(x_i - \bar{x})$ predstavuje absolútnu chybu ako je uvedené vo vzťahu (2).

Zo vzťahu (6) je zrejmé, že $\sigma_{\mathrm{A}\bar{x}}$ bude tým menšie čím:

- bude menší rozptyl opakovaných meraných hodnôt
- bude viac opakovaní meraní n.

Pri určovaní štandardnej neistoty typu A sa všeobecne odporúča:

- aby počet meraní nebol menší ako 5
- aby sa počet meraní 5 až 10 využíval len vo výnimočných prípadoch
- aby počet meraní bol 10 a viac.

Štandardná neistota typu B

Štandardná neistota typu B, vyjadruje neistoty spôsobené najčastejšie zdrojmi, ktoré sa vyznačujú nasledujúcimi vlastnosťami:

- určujú sa nestatickými metódami
- ich množstvo závisí na rozhodnutí experimentátora
- ich vplyv sa nedá znížiť opakovanými meraniami.

V praxi sa najčastejšie ako zdroje neistoty typu B vyskytujú:

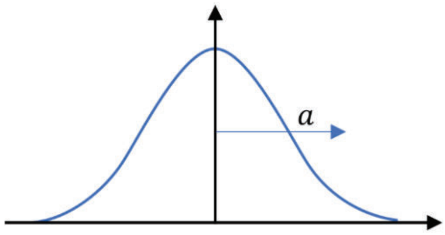
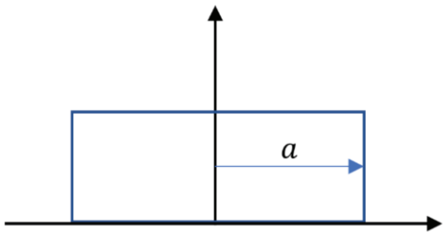
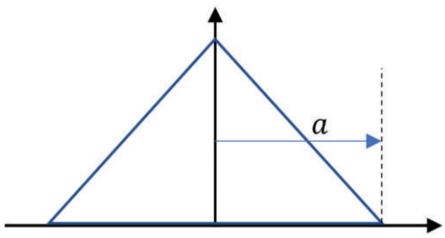
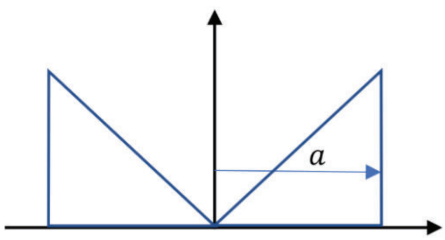
- vplyv poveternostných podmienok
- vplyv kalibrácie
- vplyv meracích káblov
- vplyv uloženia snímačov
- vplyv rozlíšiteľnosti meradla
- vplyv konštánt pri výpočte nepriamo meraných veličín.

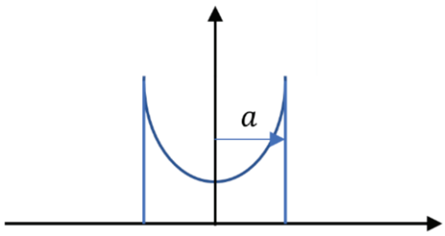
Pre samotný výpočet štandardnej neistoty typu B je potrebné do istej miery poznať typ rozdelenia pravdepodobnosti. Následne štandardnú neistotu typu B $\sigma_{\mathrm{B}\bar{x}}$ vieme vypočítať pomocou zjednodušeného vzťahu

$$\sigma_{\mathrm{B}\bar{x}} = \frac{z_{\max}}{\chi}, \tag{7}$$

kde $z_{\max}$ predstavuje maximálnu dovolenú odchýlku meracieho zariadenia a χ je koeficient na popis statického rozdelenia. Základné hodnoty koeficientu χ pre výpočet štandardnej neistoty typu B sú uvedené v tabuľke 1.

Tabuľka 1.

Statické rozdelenie	$z_{\max}$	χ
Normálne (Gaussovo) 	$a = 2s$ $a = 3s$ $a = \mathrm{h}s$ s - smerodajná odchýlka rozdelenia	2 3 h
Rovnomerné (Pravouhlé) 	a	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$
Trojuholníkové (Simpsonovo) 	a	$\sqrt{6} \approx 2{,}45$
Trojuholníkové (Bimodálne) 	a	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

U – rozdelenie 	a	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$

V prípade nesymetrického rozdelenia by sme uvažovali dlhšiu vzdialenosť od zdroja neistoty ku krajnej hodnote. Výpočet by sa veľmi skomplikoval a nemohli by sme použiť vzťah (7). Tieto prípady sú však veľmi ojedinelé a v praxi sa preferuje hlavne symetrické rozdelenie.

Štandardná neistota nepriameho merania

Nepriame meranie je z hľadiska spracovania nameraných hodnôt najnáročnejšie. Zatiaľ čo v prípade priamych meraní hodnoty získavame priamo meraním, v prípade nepriameho merania je táto meraná veličina funkciou viacerých premenných rôzneho druhu (t. j. od viacerých fyzikálnych veličín). Tieto premenné (fyzikálne veličiny) môžeme merať jednorazovo alebo opakovaným meraním. Hodnota meranej veličiny x sa v prípade opakovaného merania určuje nepriamo pomocou jednotlivých stredných hodnôt meraných veličín $x = \mathrm{f}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_\mathrm{n})$. V prípade, ak veličiny meriame jeden krát je meraná veličina x funkciou veličín rôzneho druhu $x = \mathrm{f}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mathrm{n})$. Pre určenie tejto neistoty v prípade nepriameho merania musíme využiť nasledovný vzťah

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\partial x}{\partial y_i}\right)^2 \sigma_{y_i}^2}, \tag{8}$$

kde $\frac{\partial x}{\partial y_i}$ je parciálna derivácia veličiny x podľa y_i a platí $\frac{\partial x}{\partial y_i} = \frac{\partial f(y_1, y_2, \dots, y_i)}{\partial y_i}$, σ_{y_i} je v prípade jednorazového merania štandardná neistota typu B a v prípade opakovaného merania σ_{y_i} predstavuje štandardnú neistotu typu A alebo kombinovanú štandardnú neistotu. Zároveň zo vzťahu (8) vyplýva, že na určenie štandardnej neistoty nepriameho merania je potrebné určiť parciálne derivácie meranej veličiny x, podľa každej premennej y_i, od ktorej meraná veličina závisí. V prípade ak $x = \mathrm{f}(y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mathrm{n})$ je potrebné vykonať n parciálnych derivácií a vzťah (8) môžeme zapísať aj v tvare

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_3}\right)^2 \sigma_{y_3}^2 + \dots + \left(\frac{\partial x}{\partial y_\mathrm{n}}\right)^2 \sigma_{y_\mathrm{n}}^2}\,. \tag{9}$$

Maximálna dovolená odchýlka

Maximálna dovolená odchýlka najčastejšie predstavuje presnosť meradla a jej určenie vo veľkej miere závisí od použitej metódy merania a samotného meradla. Pri najčastejšie sa vyskytujúcich meracích prístrojoch (výnimku tvoria len ručičkové) je maximálna dovolená odchýlka daná najmenším dielikom stupnice.

Pri ručičkových (analógových) prístrojoch sa za maximálnu dovolenú odchýlku považuje trieda presnosti p najčastejšie uvedená v %. Potom pre maximálnu dovolenú odchýlku meracieho zariadenia platí

$$z_{\mathrm{max}} = \frac{\mathrm{p}}{100} \cdot \mathrm{rozsah}. \tag{10}$$

Samozrejmosťou je aj výpočet maximálnej odchýlky v prípade nepriamych meraní. V tomto prípade sa maximálna dovolená odchýlka vypočíta nasledovne

$$z_{\mathrm{max}} = \left|\frac{\partial x}{\partial y_1}\right| y_{1\mathrm{max}} + \left|\frac{\partial x}{\partial y_2}\right| y_{2\mathrm{max}} + \cdots + \left|\frac{\partial x}{\partial y_n}\right| y_{\mathrm{nmax}}\,, \tag{11}$$

kde $\frac{\partial x}{\partial y_1}$ predstavuje parciálnu deriváciu veličiny x, kde $x = \mathrm{f}(y_1, y_2, \ldots, y_\mathrm{n})$.

Kombinovaná štandardná neistota

Keď vieme stanoviť štandardnú neistou typu A a štandardnú neistotu typu B môžeme stanoviť štandardnú kombinovanú neistotu nasledujúcim vzťahom

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\mathrm{A}\bar{x}}{}^2 + \sigma_{\mathrm{B}\bar{x}}{}^2}. \tag{12}$$

Zo vzťahu vyplýva, že zápis je iba formálnym spojením časti A a časti B. Je dôležité si uvedomiť, že zdroj neistôt typu A má rovnaký význam ako zdroj neistôt typu B. Význam vzťahu (12) spočíva hlavne v uvedomení si spojenia dvoch metód určenia štandardných neistôt a tiež ich porovnaniu. Ak

- $\sigma_{\mathrm{A}\bar{x}}$ je výrazne (rádovo) väčšie ako $\sigma_{\mathrm{B}\bar{x}}$, môžeme predpokladať, že v systéme merania prevažujú náhodne chyby a mali by sme sa zamerať na ich odstránenie,
- $\sigma_{\mathrm{B}\bar{x}}$ je výrazne (rádovo) väčšie ako $\sigma_{\mathrm{A}\bar{x}}$ môžeme predpokladať, že je systém merania nesprávne navrhnutý alebo sú v systéme dominantné zdroje typu B.

Relatívna štandardná neistota merania

Podiel príslušnej absolútnej štandardnej neistoty a meranej veličiny označujeme ako relatívna štandardná neistota $\sigma_{\mathrm{R}\bar{x}}$ a matematicky ju môžeme vyjadriť vzťahom

$$\sigma_{\mathrm{R}\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{x} 100\ \%. \tag{13}$$

Rozšírená neistota

Na úvod k neistotám merania sme si povedali, že aby sme získali skutočnú predstavu o výslednej hodnote merania musíme túto hodnotu vyjadriť ako interval, v ktorom sa s určitou pravdepodobnosťou bude nachádzať meraná veličina. Podľa štatistickej teórie je hodnota tejto pravdepodobnosti rovná 68,3 % za predpokladu, že sa jedná o symetrické rozloženie. Interval $x = (\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}})$ nám teda vyjadruje, že v tomto intervale sa okolo strednej hodnoty $\bar{x}$ nachádza 68,3 % všetkých meraní. Ďalej môžeme povedať, že s pravdepodobnosťou 68,3 % ďalšia nameraná hodnota spadne do tohto intervalu.

Z praktickej stránky takýto úzky interval často nemá zmysel, a preto sa zavádzajú intervaly so širším pokrytím. Tieto neistoty sa nazývajú rozšírené neistoty. Rozšírená neistota je daná ako súčin kombinovanej neistoty a faktora rozšírenia (pokrytia) k a platí

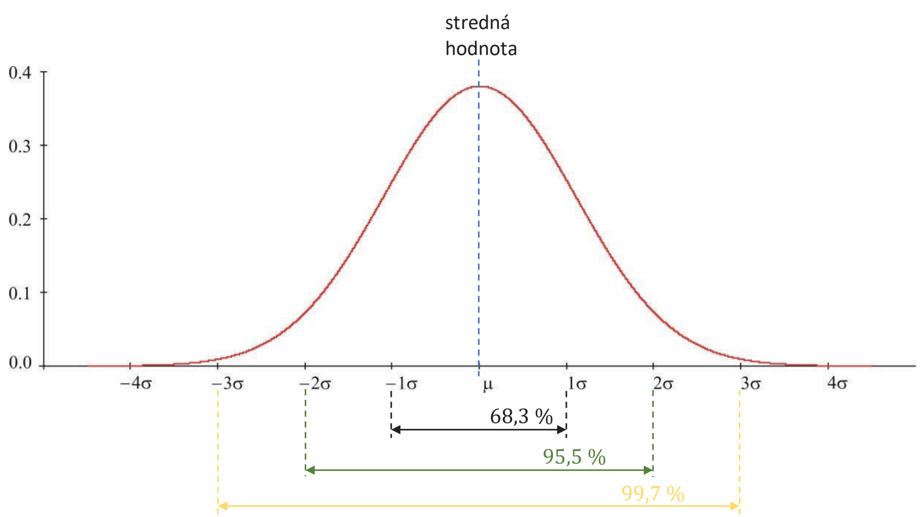
$$U_{\bar{x}} = k \cdot \sigma_{\bar{x}} \,. \tag{14}$$

Hodnota faktora pokrytia sa volí na základe požadovanej pravdepodobnosti, pričom platí

Tabuľka 2.

k	pravdepodobnosť
1	68,3 %
2	95,5 %
3	99,7 %

Pre lepšiu predstavu uvedieme príklad: Pri opakovom meraní pre $n = 10$ vyjadruje absolútna štandardná neistota $\sigma_{\bar{x}}$, že 68,3 % všetkých meraní, čo je v tomto prípade 6 meraní, sa bude nachádzať v intervale $(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}})$ okolo strednej hodnoty. Ak použijeme rozšírenú neistotu $U_{\bar{x}}$ s faktorom rozšírenia $k = 2$, potom zväčšíme počet odmeraných hodnôt, ktoré budú ležať v intervale $(\bar{x} \pm U_{\bar{x}}) = (\bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}})$ okolo strednej hodnoty na deväť hodnôt.



Obr. 2. Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti

V prípade najčastejšie sa vyskytujúceho normálneho rozloženia, tzv. Gaussovo rozdelenie pravdepodobnosti, môžeme rozšírené neistoty zakresliť aj graficky (Obr. 2), kde vidíme, že približne 99,7 % spadá do intervalu $(\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}})$. Podľa dohovoru všetky hodnoty, ktoré spadajú mimo tento interval môžeme považovať za nepresné a môžeme ich z merania vylúčiť.

D. Zásady pre zápis a zaokrúhľovanie nameraných veličín, neistôt a chýb

Pri procese merania nie je dôležité len meranie a spracovanie výsledkov, ale dôležitou súčasťou merania je aj zápis nameraných výsledkov. Tento výsledok musí byť zapísaný správne a má mať fyzikálny význam. Ako bolo uvedené vyššie v texte, neistota je pridružená k výsledku merania, preto zápis výsledku každého merania obsahuje strednú hodnotu meranej veličiny a príslušnú neistotu merania. Hodnota nameranej veličiny ako aj príslušná neistota musia byť správne zaokrúhlené a zapísané podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie meranej veličiny.

Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie chyby a neistoty

1. Pri zaokrúhľovaní chyby alebo neistoty má význam iba prvá nenulová číslica (platná číslica). Jedinou výnimkou je zaokrúhľovanie v čiastkových výpočtoch, kedy je dovolené zaokrúhľovanie na prvé dve platné číslice. Dôvod pre používanie jednej (dvoch) platnej číslice je ten, že chyby, ktoré budeme určovať v laboratóriu, nikdy neurčíme presnejšie ako na jednu platnú číslicu. Dve platné číslice vo výpočtoch používame kvôli tomu, aby nám zaokrúhľované chyby počas výpočtov nezväčšili finálnu chybu.

   Napríklad:
   Pri meraní dĺžky má štandardná neistota hodnotu 7 484 mm. Prvá platná číslica je 7 (7 484 mm), prvé dve platné číslice sú 74 (7 484 mm).
   Pri meraní prúdu má štandardná neistota hodnotu 0,02301 A. Prvá platná číslica je 2 (0,02301 A), prvé dve platné číslice sú 23 (0,02301 A).

2. Pri zaokrúhľovaní chýb a neistôt **vždy zaokrúhľujeme smerom nahor**, okrem prípadu, kedy je za platnou číslicou 0. Zaokrúhľovaním smerom nadol by dochádzalo k umelému a štatisticky nesprávnemu zužovaniu intervalu pravdepodobnosti. Zužovanie intervalu pravdepodobnosti zaokrúhľovaním neistoty smerom nadol nemá praktický význam, nakoľko ide o vynútené zvyšovanie presnosti nameraných hodnôt.

   Napríklad:
   a) Pri meraní dĺžky má štandardná neistota hodnotu 7 484 mm.
   Prvá platná číslica je 7 (7 484 mm) za ňou nasleduje 4, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 8000 mm.
   Prvé dve platné číslice sú 74 (7 484 mm) za nimi nasleduje 8, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 7 500 mm.

b) Pri meraní prúdu má štandardná neistota hodnotu 0,02301 A.

Prvá platná číslica je 2 (0,0<u>2</u>301 A) za ňou nasleduje 3, a teda hodnotu zaokrúhlime nahor a zaokrúhlená hodnota má tvar 0,03 A.

Prvé dve platné číslice sú 23 (0,0<u>23</u>01 A) za nimi nasleduje 0, a teda hodnotu zaokrúhlime nadol a zaokrúhlená hodnota má tvar 0,023 A.

Pravidlá pre zápis a zaokrúhľovanie nameranej veličiny

1. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme <u>na rovnaký počet desatinných miest</u> ako je určená neistota. V prvom kroku zaokrúhlime neistotu a v ďalšom kroku podľa počtu platných desatinných miest neistoty zaokrúhlime nameranú veličinu na rovnaký počet platných desatinných miest.

   Napríklad:

   Pri meraní reakčného času sme získali hodnotu reakčného času $t = 0{,}16430$ s prislúchajúca neistota má hodnotu $\sigma_{\bar{t}} = 0{,}004284$ s. Ak neistotu zaokrúhlime na tri desatinné miesta $\sigma_{\bar{t}} = 0{,}004$ s, potom aj hodnotu meranej veličiny $t = 0{,}16430$ s zaokrúhlime na tri desatinné miesta $t = 0{,}164$ s.

2. Hodnotu nameranej veličiny zaokrúhľujeme nasledovne: ak číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú chceme zaokrúhľovať, nameranej veličiny je

   a) od 1 po 4 – zaokrúhľujeme <u>nadol</u>

   Napríklad:

   Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17<u>3</u>59 cm^3 a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (v tomto prípade za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 3. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,17 cm^3.

   b) od 6 po 9 - zaokrúhľujeme <u>nahor</u>

   Napríklad:

   Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17<u>7</u>59 cm^3 a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme (v tomto prípade za druhou číslicou za desatinnou čiarkou) je 7. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,18 cm^3.

   c) 5 - zaokrúhľujeme nadol, ak je pred ňou párne číslo

   Napríklad:

   Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,18<u>5</u>59 cm^3 a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5 a pred ňou je párne číslo 8. Preto nameraný objem zaokrúhlime nadol na 7,18 cm^3.

d) 5 - nahor, ak je pred ňou nepárne číslo

Napríklad:

Nameraný objem valčeka má hodnotu 7,17559 cm³ a zaokrúhľujeme ho na dve desatinné miesta. Číslica nasledujúca za pozíciou, na ktorú zaokrúhľujeme je 5 a pred ňou je nepárne číslo 7. Preto nameraný objem zaokrúhlime nahor na 7,18 cm³.

E. Zápis výsledku

Pri zápise výsledku merania sa číselné hodnoty veličiny a absolútnej štandardnej neistoty (rozšírenej neistoty) udávajú v okrúhlych zátvorkách a rovnaká značka ich jednotiek sa umiestňuje za zátvorkou:

úplný údaj výsledku merania = (**hodnota meranej veličiny** ± **neistota merania**) **jednotky**

Pričom pri zápise výsledku dôrazne dbáme na to, aby hodnota meranej veličiny a neistota mali rovnaký počet desatinných miest a boli správne zaokrúhlené v zmysle vyššie uvedených pravidiel. Pri určovaní počtu desatinných miest je potrebné si uvedomiť význam číslice 0, ktorá sa započítava do tohto počtu. V prípade situácie, kedy by nameraná hodnota mala po zaokrúhlení alebo nameraní len jedno desatinne miesto a určená neistota by mala tri v zmysle pravidla o rovnakom počte výsledok, musíme zapísať v tvare $m = (40{,}500 \pm 0{,}003)\ \mathrm{kg}$. Napríklad pre určenie objemu valčeka budú výsledky zapísane v nasledujúcom tvare.

$$h = \left(\bar{h} \pm \sigma_{\bar{h}}\right) = (23{,}94 \pm 0{,}02)\ \mathrm{mm}$$
$$d = \left(\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}}\right) = (14{,}729 \pm 0{,}003)\ \mathrm{mm}$$
$$V = (\bar{V} \pm \sigma_{\bar{V}}) = (4079 \pm 4)\ \mathrm{mm}^3$$

Najčastejšie chyby pri zápise výsledku

1. Nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty.
   Príklad chybného zápisu výsledku: $m = (40{,}5 \pm 0{,}003)\ \mathrm{kg}$
2. Nie je rovnaký rád desiatok nameranej veličiny a neistoty.
   Príklad chybného zápisu výsledku: $l = (5{,}1 \cdot 10^{-2} \pm 2{,}3 \cdot 10^{-3})\ \mathrm{m}$
3. Je rovnaký rád desiatok, ale nie je rovnaký počet desatinných miest nameranej veličiny a neistoty.
   Príklad chybného zápisu výsledku: $I = (6{,}12 \cdot 10^{-2} \pm 0{,}2 \cdot 10^{-2})\ \mathrm{A}$
4. Nie sú zaokrúhlené hodnoty meranej veličiny a neistoty.
   Príklad chybného zápisu výsledku: $t = (2{,}3585 \pm 0{,}02408905)\ \mathrm{s}$

Hodnoty relatívnej štandardnej neistoty, absolútnej a relatívnej chyby sa zapisujú samostatne bez číselnej hodnoty meranej veličiny, zaokrúhlené podľa pravidiel pre zápis a zaokrúhľovanie.

F. Porovnanie dvoch meraní

Ak sme urobili aspoň dve merania tej istej fyzikálnej veličiny, môžeme zistiť, ako sa tieto merania zhodujú. Výsledky merania máme uvedené vo výslednom tvare

$$X_1 \pm \sigma_{X_1},$$
$$X_2 \pm \sigma_{X_2}, \tag{15}$$

kde X_1, X_2 sú stredné hodnoty nameraných veličín a $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ sú k nim prislúchajúce neistoty merania. To, či tieto dva výsledky súhlasia, zistíme podľa toho, či sa prekrývajú intervaly definované neistotami.

V prvom kroku vypočítame rozdiel Δ stredných hodnôt merania

$$\Delta = X_2 - X_1. \tag{16}$$

V druhom kroku vypočítame prislúchajúcu neistotu

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2}. \tag{17}$$

V treťom kroku vypočítame pomer

$$R = \left|\frac{\Delta}{\sigma_\Delta}\right|. \tag{18}$$

V prípade, že chceme meranie porovnať s teoretickou alebo tzv. tabuľkovou hodnotou pri ktorej nie je známa neurčitosť σ_{X_2} (neistota teoretickej alebo tabuľkovej hodnoty). Pomer R v takomto prípade vypočítame veľmi podobne, pričom $\sigma_{X_2} = 0$ a bude teda platiť

$$R = \left|\frac{\Delta}{\sigma_\Delta}\right| = \left|\frac{\Delta}{\sigma_{X_1}}\right|. \tag{19}$$

Ak sa obidve merania zhodujú je $R = 0$. V dôsledku neistôt merania takáto situácia nastáva len veľmi zriedka. Z teórie štatistiky vieme, že pravdepodobnosť, že pri správnom meraní tej istej strednej hodnoty sa budú dve hodnoty v dôsledku náhodných chýb od seba odlišovať o $\Delta = \sigma_\Delta$ čo je približne 33 % a tomu zodpovedá pomer $R = 1$. Pravdepodobnosť, že sa budú merania odlišovať až o $\Delta = 2\sigma_\Delta$, t. j. $R = 2$ je približne 4 %. Pravdepodobnosť, že by sa odlišovali až o $\Delta = 3\sigma_\Delta$, t. j. $R = 3$ je približne 0,3 %. Z toho vyplýva, že čím väčší bude rozdiel medzi dvoma meraniami tej istej veličiny, tým menej budeme týmto meraniam dôverovať. Rozhodnutie, aký veľký rozdiel nameraných hodnôt sa bude považovať ešte za akceptovateľný, je subjektívne a závisí na experimentátorovi. Všeobecne sa však považujú dve namerané hodnoty tej istej veličiny za konzistentné (rovné), pokiaľ pomer $R \leq 2$.

Vážený priemer

Pri meraní sa stretávame s rôznymi prípadmi, keď urobíme viac meraní tej istej fyzikálnej veličiny $X_1 \pm \sigma_{X_1}$, $X_2 \pm \sigma_{X_2}$, ..., $X_\mathrm{n} \pm \sigma_{X_\mathrm{n}}$. Ak by boli neistoty merania rovnaké v každom z týchto meraní, bolo by možné vypočítať obyčajný priemer. Avšak často tieto neistoty nie sú rovnaké, preto obyčajný priemer nie je vhodný nástroj na výpočet. V takom prípade meranie s najmenšou chybou doň vstupuje s rovnakou váhou ako meranie s najväčšou chybou. Avšak meranie s najmenšou chybou by malo mať najväčšiu váhu, pretože je najdôveryhodnejšie. Aby sme toto zohľadnili, definujeme tzv. vážený priemer, ktorý berie do úvahy veľkosti neistôt, t. j. ich váhu. Vážený priemer poskytuje charakteristiku vybraného štatistického súboru v prípade, že hodnoty v tomto súbore majú rôznu dôležitosť (váhu), t. j. majú rôznu neistotu merania. Na výpočet váženého priemeru potrebujeme stredné hodnoty nameraných veličín a k nim prislúchajúce neistoty.

Ak máme súbor hodnôt $X_1, X_2, \dots, X_\mathrm{n}$ a k nim odpovedajúce neistoty merania $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \dots, \sigma_{X_\mathrm{n}}$ vypočítame vážený priemer nasledovne

$$\bar{X} = \frac{\frac{X_1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{X_1}{\sigma_{X_2}^2} + \cdots + \frac{X_\mathrm{n}}{\sigma_{X_\mathrm{n}}^2}}{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_{X_\mathrm{n}}^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{X_i}{\sigma_{X_i}^2}}{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\sigma_{X_i}^2}} \tag{20}$$

a neistotu váženého priemeru vypočítame podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{X_1}^2} + \frac{1}{\sigma_{X_2}^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_{X_\mathrm{n}}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\sigma_{X_i}^2}}}. \tag{21}$$

Výsledok takéhoto vyhodnotenia potom nadobúda tvar

$$X = \bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}}. \tag{22}$$

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023
ako svoju 4933. publikáciu
Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk