



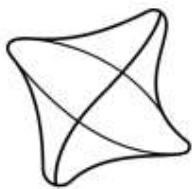
ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií

NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjániová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023



ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021:
Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

© Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera, 2023

ISBN 978-80-554-2044-8

SKÚMANIE VLASTNOSTÍ PRUŽNEJ DEFORMÁCIE

Úlohy

- A. *Určenie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče*
- B. *Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou*
- C. *Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou s použitím torzného kyvadla*

Teoretický úvod

Účinkom vonkajších síl na teleso môže nastať zmena pohybového stavu telesa alebo deformácia telesa. Pevné teleso, v ktorom sa môžu vzájomné vzdialenosti jeho častí meniť účinkom vonkajších síl, nazývame deformovateľné. Medzi hmotnými elementami (atómami, molekulami alebo iónmi v kryštalickej mriežke) pôsobia príťažlivé a odpudivé sily. Ak na teleso nepôsobia vonkajšie sily, tak vnútorné príťažlivé a odpudivé sily sú v rovnováhe. Ak na teleso začnú pôsobiť vonkajšie sily a teleso ostáva v pokoji, teleso sa môže deformovať. Zmena tvaru pevného telesa, jeho objemu alebo oboch vlastností súčasne zapríčinená účinkom vonkajších síl sa nazýva **deformácia** telesa. Podľa toho ako sa správajú telesá pri deformácii, rozdeľujeme deformáciu na pružnú (elastickú) a tvárnu (plastickú). Pružná deformácia je typ deformácie telesa, pri ktorej teleso nadobudne pôvodný tvar v okamihu, keď na teleso prestanú pôsobiť vonkajšie sily. Vlastnosť telies obnovovať svoje rozmery, tvar a objem sa nazýva **pružnosť** (napríklad malé predĺženie pružiny). Typ deformácie telesa, ktorá zostáva aj potom, ako prestanú na teleso pôsobiť deformujúce sily sa nazýva tvárna deformácia. V praxi sa vyskytujú najčastejšie oba druhy deformácie súčasne a najčastejšie sú zložené z niektorých jednoduchých deformácií.

Pri zväčšovaní vzájomnej vzdialenosti častíc (deformácia v ťahu) prevládnu príťažlivé sily, pri znižovaní tejto vzdialenosti (deformácia tlakom) prevládnu odpudivé sily. Ak sa obmedzíme na veľmi malé deformácie, bude výsledná sila približne úmerná výchylke z rovnovážnej polohy. V oblasti malých deformácií je súvis medzi účinkujúcimi silami a deformáciou, ktorú vyvolávajú, vyjadrený Hookeovým zákonom, ktorý hovorí, že deformácia pružného telesa je úmerná vonkajším deformujúcim silám. Vonkajšie deformujúce sily pôsobia spravidla cez povrchové plochy. Ak sa teleso deformuje tak, že sa jeden rozmer telesa predĺži (alebo sa skrúti) a ostatné rozmery (prične) sa skrúti (predĺžia), hovoríme o **deformácii ťahom** (alebo **tlakom**). Ak deformujúca sila pôsobí kolmo na povrch telesa, vyvoláva **deformáciu ťahom** alebo **tlakom** a koeficient úmernosti v Hookeovom zákone (bude uvedené nižšie v texte) je modul pružnosti v ťahu E (charakterizujúci materiál pri deformácii ťahom, tlakom a ohybom), nazývaný aj Youngov modul. Ak deformujúca sila pôsobí v rovine povrchu telesa (je jej dotyčnicou), vyvoláva **deformáciu šmykom** a G je modul pružnosti v šmyku (charakterizujúci materiál pri deformácii šmykom alebo torziou). Moduly pružnosti E a G majú

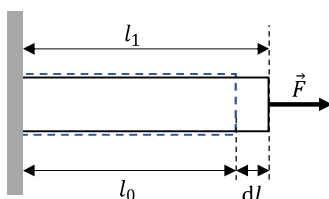
rovnakú jednotku ako napätie (Pa). Takéto deformácie (ťahom, šmykom) nazývame jednoduché a možno ich využiť na experimentálne stanovenie modulu pružnosti v ťahu E a modulu pružnosti v šmyku G .

A. Určenie modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče

Najjednoduchším príkladom deformácie v ťahu je predĺženie tyče (drôtu) namáhanej ťahom. Ak pričný prierez tyče s obsahom S namáhame silou F , ktorá je kolmá na plochu S (Obr. 1), vzniká v tyči napätie

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (1)$$

Pretože v tomto prípade pôsobí sila kolmo na prierez, nazývame toto **napätie normálové** a jeho jednotkou je pascal, $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 1. Tyč na jednej strane upevnená a na druhej strane napínaná silou F

Na predĺženie tyče s pôvodnou dĺžkou l_0 o hodnotu dl potrebujeme pôsobiť elementárnym normálovým napätím $d\sigma$, pričom sa ukazuje, že hodnota predĺženia dl je úmerná pôsobiacemu napätiu σ a samotnej dĺžke tyče, t. j. $dl = k l d\sigma$, kde k je konštanta úmernosti. V dôsledku pôsobenia napätia σ sa tyč predĺži a jej novú dĺžku l_1 vypočítame ako

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{dl}{l} = k \int_0^\sigma d\sigma. \quad (2)$$

Zintegrovaním vzťahu (2) dostaneme

$$\ln \frac{l_1}{l_0} = k\sigma \quad (3)$$

a nová dĺžka tyče l_1 bude $l_1 = l_0 e^{k\sigma}$. Vidíme, že dĺžka tyče sa s pôsobiacim napätím mení exponenciálne. Ak funkciu $e^{k\sigma}$ rozvieme do Maclaurinovho radu $e^{k\sigma} = 1 + \frac{k\sigma}{1!} + \frac{(k\sigma)^2}{2!} + \frac{(k\sigma)^3}{3!} + \dots$ a uvedomíme si, že pre väčšinu materiálov pri použití bežných reálne vyvíjaných napätí σ je súčin $k\sigma \ll 1$, potom členy Maclaurinovho radu obsahujúce druhé a vyššie mocniny môžeme voči prvým dvom členom radu zanedbať, keďže prispievajú ku zmene dĺžky len veľmi malou mierou. Pre novú dĺžku tyče l_1 tak môžeme napísať $l_1 = l_0(1 + k\sigma)$ a úpravou tohto vzťahu dostaneme

$$l_1 = l_0 + l_0 k \sigma,$$

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = k \sigma. \quad (4)$$

Ak delíme predĺženie tyče $\Delta l = l_1 - l_0$ pôvodnou dĺžkou l_0 , dostaneme deformáciu jednotky dĺžky tyče, ktorá nezávisí od dĺžky tyče. Tento pomer $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$ rovný ľavej strane druhej rovnice (4) nazývame **relatívne (pomerné) predĺženie** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5)$$

Potom môžeme vzťah (4) napísať v tvare $\varepsilon = k \sigma$, kde k má význam koeficientu pružnosti v ťahu. Jeho prevrátená hodnota $1/k = E$ je **modul pružnosti v ťahu** E (**Youngov modul**). Získaný vzťah medzi napätím a deformáciou vyjadrenou relatívnym predĺžením ε nazývame **Hookeov zákon** pre deformáciu v ťahu (tlaku)

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (6)$$

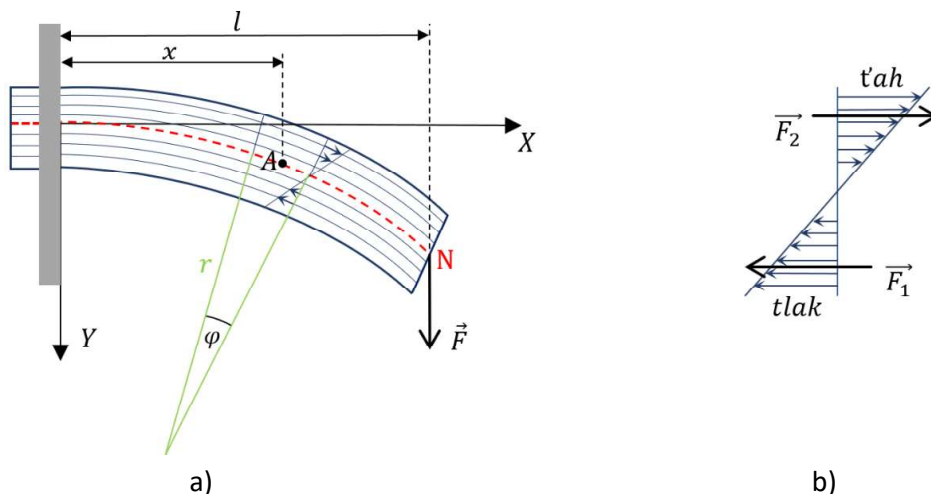
Hookeov zákon môžeme využitím predchádzajúcich vzťahov napísať aj v tvare

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}. \quad (7)$$

Modul pružnosti v ťahu má rozmer napätia a vyjadruje priamu úmernosť medzi pôsobiacim napätím a vyvolanou deformáciou. Je to jedna zo základných veličín, ktorá charakterizuje pružné vlastnosti materiálu, okrem iného závisí aj od teploty.

Deformácia v ťahu sa uplatňuje aj pri ohybe tyče. Pri určovaní modulu pružnosti v ťahu z priehybu tyče sa vychádza z popisu deformácie telies ohybom. Deformácia ohybom (priehybom) je zložitejšou formou deformácie v ťahu (tlaku).

Na popísanie deformácie ohybom uvažujme rovnorodú tyč s dĺžkou l s konštantným prierezom po celej dĺžke, ktorá je na jednom konci upevnená a na druhom konci zaťažená silou F (Obr. 2.a). Sila F pôsobiaca na jej druhom konci vyvoláva jej priehyb. Prehnutie tyče vplyvom jej vlastnej hmotnosti bude veľmi malé, a preto ho môžeme zanedbať. Ak si tyč rozdelíme na tenké vrstvy, ktoré sú zložené z jednotlivých vlákien rovnobežných s osou tyče, na obrázku (Obr. 2.a) vidíme, že horné vrstvy sa predlžujú, pretože sú namáhané ťahom, a spodné vrstvy skracujú v dôsledku namáhania tlakom. Niekde v strede tyče preto musí existovať vrstva, ktorá nie je namáhaná vôbec. Je to tzv. neutrálna vrstva N , ktorá si zachováva svoju pôvodnú dĺžku. Neutrálna vrstva prechádza ťažiskom prierezu tyče, čiže pri pravidelných prierezoch ich stredom. Experimentálne je možné polohu neutrálnej vrstvy potvrdiť pozorovaním ohybu na priehľadnej tyči napr. z polymetylmakrylátu, ak sa ohyb tyče pozoruje v polarizovanom svetle (fotoelastický jav).



Obr. 2. a) Schematické zobrazenie tyče na jednom konci upevnenej a na druhom konci namáhanej silou F , b) Detail rozloženia vnútorných síl

Sila F pôsobiaca na konci tyče vytvorí v ľubovoľnom priereze tyče, ktorý je vzdialený o x od miesta upevnenia tyče moment vonkajšej sily

$$M = F(l - x). \quad (8)$$

Pri tomto vzťahu predpokladáme, že ohyb tyče je malý. Pri malom ohybe tyče vektor sily F a vektor ramena sily $(l - x)$ zvierajú uhol takmer 90° , a preto nemusíme vo výpočte momentu sily vo vzťahu (8), ktorý je definovaný ako vektorový súčin medzi ramenom, na ktorom sila pôsobí a silou, uvažovať uhol medzi nimi, lebo $\sin 90^\circ = 1$.

Voči tomuto momentu vonkajšej sily, ktorý sa transformuje na moment vnútornej sily, pôsobí v priereze tyče moment vnútorných síl pružnosti, ktorý je vytváraný vnútornými silami, ktoré pôsobia medzi jednotlivými časticami materiálu tyče a snažia sa tyč udržať v rovnováhe. V rovnovážnom stave prehnutej tyče sú moment vonkajšej sily a moment vnútorný síl pružnosti v rovnováhe, to znamená, že vektory uvedených momentov síl sú rovnako veľké, ale opačne orientované.

Aby sme našli súvislosť medzi momentom vonkajšej sily a momentom vnútornej sily, ktoré pôsobia na prehnutú tyč, vyberme si malý kúsok prehnutej tyče vo vzdialenosti x od upevnenia tyče (Obr. 3.a).

Pri malom prenutí tyče bude mať vlákno neutrálnej vrstvy tvar kruhového oblúka s polomerom krivosti r , ktorého dĺžka bude s , pričom dĺžke s na kruhovom oblúku prislúcha rovinný uhol φ . Pred prenutím tyče mali v tejto časti tyče všetky vlákna vrstiev dĺžku s . Po prenutí tyče sa však vlákno vo vzdialenosti u nad neutrálnym vláknom predĺži o nejakú vzdialenosť. Keďže všetky vlákna prehnutej tyče vidíme pod rovnakým rovinným uhlom φ , môžeme dĺžku vlákna s neutrálnej vrstvy vo vzdialenosti r od stredu oblúka vyjadriť v tvare

$$s = r \varphi \quad (9)$$

a dĺžku vlákna s_u vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna vyjadriť v tvare

$$s_u = (r + u)\varphi. \quad (10)$$

Vyšetrované vlákno vo vzdialenosti u od neutrálneho vlákna sa teda predĺžilo o

$$\Delta s = s_u - s = (r + u)\varphi - r\varphi = u\varphi. \quad (11)$$

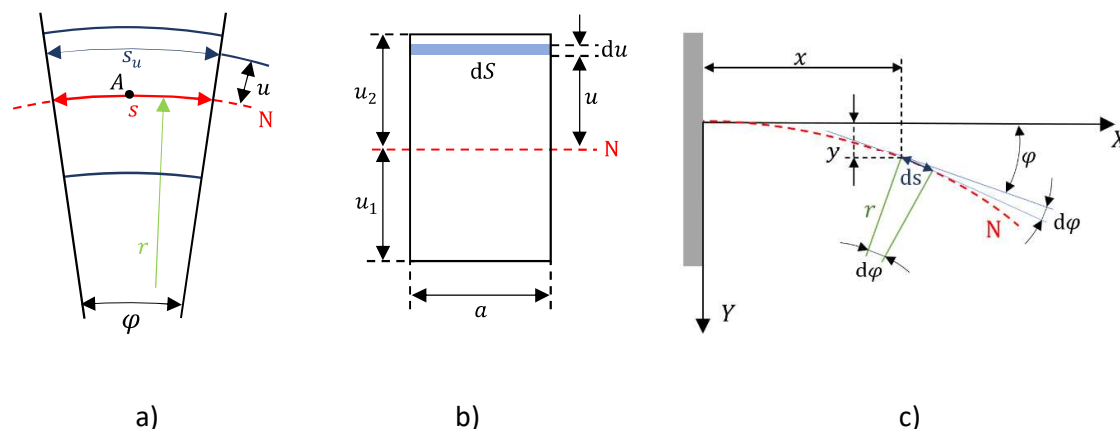
Ak použijeme vzťah (5) pre relatívne predĺženie ε , môžeme relatívne predĺženie vyšetrovaného vlákna vyjadriť v tvare

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{s} = \frac{u\varphi}{r\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

Toto relatívne predĺženie je vyvolané napätím v ťahu. Ak predpokladáme, že priehyb tyče sa odohráva v medziach pružnej deformácie, ktorá je popísaná Hookeovým zákonom daným vzťahom (6), môžeme pre normálové napätie vo vyšetrovanej vrstve vlákna napísať

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{u}{r}. \quad (13)$$

Zo vzťahu (13) vyplýva, že s narastajúcou vzdialenosťou od neutrálneho vlákna sa napätie vo vláknach tyče zväčšuje. Pod neutrálnym vláknom sa mení ťah na tlak. Normálové napätie v tlaku sa pod neutrálnym vláknom riadi tou istou rovnicou (13).



Obr. 3. K popisu odvodenia pre ohyb tyče a) bočný pohľad na výrez tyče b) pohľad na prierez tyče, c) bočný pohľad na neutrálnu vrstvu tyče

Ako je naznačené na obrázku (Obr. 2.b), všetky napätia nad neutrálnym vláknom vytvárajú výslednú silu F_2 a všetky napätia pod neutrálnym vláknom silu F_1 . Ak nemá byť neutrálna vrstva namáhaná, musí platiť

$$F_1 + F_2 = 0. \quad (14)$$

Pomocou normálového napätia daného vzťahom (1), ktoré sa v diferenciálnom tvare rovná $\sigma = \frac{dF}{dS}$, môžeme elementárnu silu dF , ktorá pôsobí na elementárnu plochu prierezu tyče dS , vyjadriť v tvare

$$dF = \sigma dS = \frac{E}{r} u dS. \quad (15)$$

Zo vzťahu (14) vyplýva, že v priereze tyče je výslednica všetkých síl pôsobiacich na prehnutú tyč rovná nule. Z uvedeného vyplýva, že aj výslednica elementárnych síl pôsobiacich v priereze tyče musí byť nulová, a preto musí platiť

$$F = \int_{-u_1}^{u_2} dF = \int_{-u_1}^{u_2} \frac{E}{r} u dS = \frac{E}{r} \int_{-u_1}^{u_2} u dS = 0, \quad (16)$$

kde $-u_1$ a u_2 sú vzdialenosti krajných vrstiev od neutrálnej vrstvy. Aby bol vzťah (16) platný, musí sa integrál v ňom rovnať nule. Je možné ukázať, že integrál vo vzťahu (16) je rovný nule, ak neutrálna vrstva (plocha) prechádza ťažiskom prierezovej plochy. A to je dôkaz tvrdenia, ktoré bolo uvedené vyššie, že neutrálna plocha (vlákno) prechádza ťažiskom prierezu tyče. Každá elementárna sila dF vytvára vzhľadom k osi N (Obr. 3.b), ktorú nazývame neutrálnou osou, elementárny moment vnútornej sily dM_v , ktorý je rovný

$$dM_v = u dF = \frac{E}{r} u^2 dS. \quad (17)$$

Celkový moment vnútornej sily M_v vzhľadom k neutrálnej osi vypočítame ako integrál poslednej rovnice cez výšku prierezu tyče, t. j.

$$I = \int_{-u_1}^{u_2} u^2 dS \quad (18)$$

sa nazýva plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na neutrálnu os a pomocou neho môžeme vyjadriť celkový moment vnútornej sily M_v v tvare

$$M_v = \frac{E I}{r}. \quad (19)$$

V rovnovážnom stave prehnutej tyče je celkový moment vnútornej sily M_v vzhľadom na neutrálnu os tyče rovný momentu vonkajšej sily M , t. j. $M_v = M$, a potom

$$\frac{E I}{r} = (l - x)F. \quad (20)$$

Dôležitým parametrom pri priehybe tyče je veľkosť priehybu y , ktorý je vytvorený momentom vonkajšej sily M . Ak nahradíme oblúk krivky, do ktorého sa prehne niektoré neutrálne vlákno kruhovým oblúkom polomeru r a so stredovým uhlom $d\varphi$, ktorý je totožný so zmenou uhla φ ,

ktorý zvierá dotyčnica k oblúku s osou X pri zvolenom usporiadaní súradnicových osí, je dĺžka oblúka $ds = r d\varphi$ (Obr. 3.c). Pri veľmi malom priehybe môžeme uvažovať, že $ds \approx dx$ (pre dobré grafické znázornenie situácie sme volili na obrázku väčší priehyb), a potom pre tangens uhla φ platí $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx$. Pri veľmi malom uhle je $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$, takže $\varphi = dy/dx$ a pre polomer krivosti r môžeme napísať

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (21)$$

Ak z rovnice (20) vyjadríme r a dosadíme do vzťahu (21), dostaneme diferenciálnu rovnicu ohybovej čiary v tvare

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{F}{EI} (l - x). \quad (22)$$

Integráciou tejto rovnice (22) dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Flx}{EI} - \frac{Fx^2}{EI} + C_1. \quad (23)$$

Rovnica (23) udáva smernicu dotyčnice ohybovej čiary v mieste x . Integračná konštanta C_1 sa určí z okrajovej podmienky, ak položíme $x = 0$, potom $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = C_1 = 0$, pretože smernica dotyčnice v mieste upevnenia je nulová. Ďalšou integráciou dostaneme

$$y = \frac{Flx^2}{2EI} - \frac{Fx^3}{6EI} + C_2. \quad (24)$$

Integračnú konštantu C_2 určíme z okrajovej podmienky. Ak $x = 0$, potom $(y)_{x=0} = C_2 = 0$, pretože priehyb v mieste upevnenia je nulový. Ohyb tyče y na voľnom konci, čiže pre $x = l$ zaťaženom silou F bude

$$y = \frac{Fl^3}{3EI}. \quad (25)$$

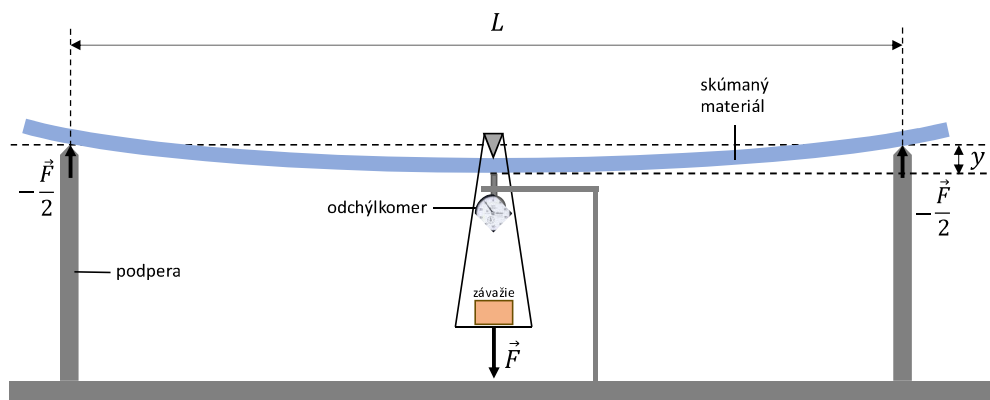
Ako vidíme zo vzťahu (25), meranie ohybu tyče umožňuje experimentálne určiť modul pružnosti v ťahu E , ak poznáme dĺžku deformovanej tyče l , plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče I , veľkosť priehybu tyče y a veľkosť deformujúcej sily F .

Jednou z možností ako realizovať experiment podľa vyššie uvedeného odvodenia je upnutie tyče do zveráka a koniec tyče zaťažovať silou F (to odpovedá meraniu ohybom). Inou možnosťou je merať priehyb tyče.

Ak meranú vzorku, materiál v tvare hrubšej tyče s obdĺžnikovým prierezom s výškou b a šírkou a podoprieme na dvoch koncoch britmi, ktorých vzdialenosť je L a uprostred nich tyč zaťažíme silou F , môžeme v pôsobisku sily pozorovať priehyb y (Obr. 4). Keď dosadíme do vzťahu (25) za $l = L/2$, $F = mg/2$ a za plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče $I = \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u^2 adu = \frac{1}{12} ab^3$,

a následne z neho vyjadríme E , tak dostaneme vzťah pre modul pružnosti tyče obdĺžnikového prierezu v tvare

$$E = \frac{gL^3 m}{4ab^3 y}. \quad (26)$$



Obr. 4. Tyč podpretá na dvoch britoch a zaťažená silou F

Pre tyč kruhového prierezu (kde d je priemer tyče) je plošný moment zotrvačnosti I vzhľadom na ohybovú os rovný $I = \frac{\pi d^4}{64}$ a pre modul pružnosti tyče s kruhovým prierezom platí vzťah

$$E = \frac{4gL^3 m}{3\pi d^4 y}. \quad (27)$$

Zo vzťahov (26) a (27) vyplýva, že priehyb y je priamo úmerný veľkosti pôsobiacej deformujúcej sily F , respektíve hmotnosti m . Na základe týchto rovníc môžeme merať modul pružnosti E , ak odmeriame rozmery tyče a , b , vzdialenosť britov L a závislosť priehybu na pôsobiacej sile.

Pomôcky

Sada závaží, mikrometrické meradlo, dĺžkové meradlo, odchýlkomer, vyšetrované materiály v tvare tyče, konštrukcia na uchytenie tyčí a odchýlkomera, stojany a závesný systém.

Postup merania

1. Priamym meraním určíme vzdialenosť medzi podperami L a určíme štandardnú neistotu merania dĺžky σ_L , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia.
2. Priamym meraním určíme charakteristické rozmery prierezu vyšetrovaného materiálu tvaru tyče a , b . Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky 1.
3. Odchýlkomer umiestnime do stredu medzi dve podpery a nastavíme ho tak, aby pri základnom zaťažení tyče (dané záťažou prázdneho závesného systému na zaťažovanie materiálu, na ktorý kladieme závažia) ukazoval nulu.

Tabuľka 1.

i	$L = \dots m$			
	a_i (m)	$\Delta_{a_i}^2 = (a_i - \bar{a})^2 (\text{m}^2)$	b_i (m)	$\Delta_{b_i}^2 = (b_i - \bar{b})^2 (\text{m}^2)$
1				
2				
⋮				
n				
	$\bar{a} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{a_i}^2 = \dots$	$\bar{b} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{b_i}^2 = \dots$

- Zmeriame teplotu miestnosti t_1 .
- Pomocou digitálnych váh odvážíme hmotnosť použitých závaží. Skúmanú tyč z daného materiálu postupne zaťažujeme závažiami, ktoré ukladáme na závesný systém. Meriame priehyb tyče y , ktorého hodnotu odčítame z odchýlkomera. Meranie uskutočníme pre 10 rôznych zaťažení tyče. Namerané hodnoty zapisujeme do tabuľky 2.
- Po dokončení merania opäť zmeriame teplotu miestnosti t_2 .
- Meranie opakujeme pre rôzne materiály (meď, oceľ, drevo, ...).

Tabuľka 2.

i	m (kg)	F (N)	y (m)	$k_i = \frac{y}{m}$ ($\text{m} \cdot \text{kg}^{-1}$)	$\Delta_{k_i}^2 = (k_i - \bar{k})^2 (\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})$
1					
2					
⋮					
n					
				$\bar{k} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{k_i}^2 = \dots$

Vyhodnotenie merania

- Z nameraných hodnôt rozmerov tyče a_i, b_i vypočítame ich stredné hodnoty \bar{a}, \bar{b} a stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{a}}, \sigma_{\bar{b}}$.
- Výsledky uvádzame v tvare $a = (\bar{a} \pm \sigma_{\bar{a}}), b = (\bar{b} \pm \sigma_{\bar{b}}), L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$.
- Linearitu závislosti priehybu tyče y od zaťaženia m overíme tak, že ich namerané hodnoty vynesieme do grafickej závislosti $y = f(m)$.
- Pre každé zaťaženie tyče vypočítame konštantu úmernosti $k_i = y_i/m_i$.
- Určíme aritmetický priemer \bar{k} , jeho štandardnú neistotu $\sigma_{\bar{k}}$ a výsledok uvádzame v tvare $k = (\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}})$.

6. Vypočítané aritmetické priemery pre priamo merané veličiny $\bar{a}, \bar{b}, \bar{k}, \bar{L}$ dosadíme do vzťahu (26), pričom pomer m/y vo vzťahu nahradíme prevrátenou hodnotou konštanty úmernosti $1/\bar{k}$ a určíme hľadaný modul pružnosti E vyšetřovaného materiálu

$$E = \frac{g\bar{L}^3}{4\bar{a}\bar{b}^3} \frac{1}{\bar{k}}.$$

7. Použitím metódy na určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu E pomocou neistôt priamo nameraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 (\sigma_a)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b}\right)^2 (\sigma_b)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial k}\right)^2 (\sigma_k)^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial E}{\partial L} = \frac{3gL^2}{4ab^3} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{gL^3}{4a^2b^3} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -\frac{3gL^3}{4ab^4} \frac{1}{k},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{gL^3}{4ab^3} \frac{1}{k^2}.$$

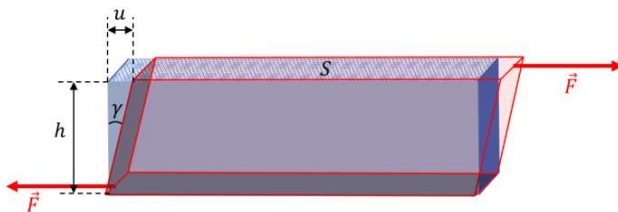
Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny E najväčšou mierou.

8. Finálny výsledok merania modulu pružnosti v ťahu uvedieme v tvare $E = (E \pm \sigma_E)$.
9. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v ťahu E s tabuľkovou hodnotou E_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|E - E_t|}{E_t} 100 \text{ \%}.$$

B. Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou

Modul pružnosti v šmyku, nazývaný aj modul torzie, môžeme určiť napríklad z konkretizácie Hookeovho zákona pre deformáciu v šmyku. O deformácii pružných telies šmykom hovoríme vtedy, keď sa jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu posúvajú po sebe bez toho, aby sa menila ich vzájomná kolmá vzdialenosť h . Takáto deformácia nastáva, napríklad ak pôsobí sila F v smere dotýčnice na rovinu hornej steny hranola s obsahom S a vzniká posunutie hornej podstavy voči dolnej o vzdialenosť u . Výška hranola h je dostatočne veľká, aby nenastala deformácia ohybom (Obr. 5).



Obr. 5. Deformácia šmykom

Pôsobením dotýčnicovej (tangenciálnej) sily F na hornú stenu hranola s obsahom S vzniká šmykové, tangenciálne napätie τ . Deformácia závisí aj na veľkosti plochy S , na ktorú dotýčnicová sila pôsobí a určuje tangenciálne napätie

$$\tau = \frac{F}{S}. \quad (28)$$

Pre deformáciu šmykom má **Hookeov zákon pre šmyk** tvar

$$\tau = G \gamma. \quad (29)$$

G je modul pružnosti v šmyku. Je to materiálová konštanta, ktorá má rozmer napätia a jej jednotka je pascal ($\text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}$). Vplyvom pôsobiacej sily sa dĺžky jednotlivých strán hranola nemenia, dôjde však ku skoseniu γ , ktoré sa nazýva relatívne posunutie (skosenie) hornej základne vzhľadom na dolnú. Uhol γ môžeme vyjadriť pomocou funkcie tangens ako $\tan \gamma = \frac{u}{h}$. Ak je však uhol γ malý, pre funkciu tangens platí $\tan \gamma \approx \gamma$. Pre malé skosenia môžeme potom relatívne posunutie γ vyjadriť v tvare

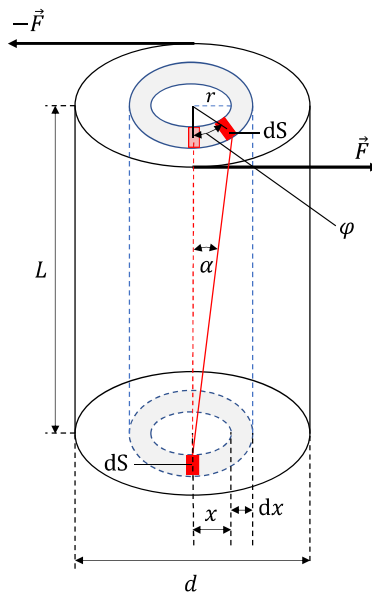
$$\gamma = \frac{u}{h}, \quad (30)$$

kde u je posunutie rezu hranola rovnobežného s podstavou a h je vzdialenosť rezu od podstavy. Hookeov zákon pre deformáciu v šmyku má využitím vzťahov (28) a (29) tvar

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}. \quad (31)$$

Priame využitie Hookeovho zákona na určenie modulu pružnosti v šmyku je pomerne málo praktické a príslušná metóda aj málo presná. Preto sa modul v šmyku častejšie určuje z torzie tyčí alebo drôtov. Pri torzii je totiž každá časť vzorky namáhaná iba šmykom a pritom, i keď šmyk v každej časti vzorky je pomerne malý (leží hlboko pod mierou úmernosti deformácie a napätia), výsledný uhol stočenia vzorky môže byť veľký a teda dobre merateľný. Torzná deformácia je zložitejším prípadom deformácie v šmyku. Jednotlivé priečne vrstvy telesa sa krútením vzájomne natáčajú.

Uvažujme drôt alebo tyč tvaru valca s dĺžkou L a rovnakým prierezom po celej dĺžke s priemerom d , ktorá je na jednom konci upevnená. Na druhý koniec tyče pôsobíme krútiacim momentom sily M , ktorého smer je rovnobežný s osou tyče (drôtu). Tento moment sily M vyvoláva šmykovú deformáciu každého pozdĺžneho vlákna dĺžky L a elementárneho prierezu dS (Obr. 6). Sledované deformované vlákno je vo vzdialenosti r od torznej osi predstavovanej neutrálnym vláknom, ktoré sa pri krútení nedeformuje. Pri natočení voľného konca tyče (vplyvom krútiaceho momentu) o uhol skrútenia φ sa posunie voľný koniec vlákna po kružnici polomeru r o úsek $u = r\varphi$. Šmykový deformačný uhol $\alpha = u/L = r\varphi/L$ súvisí podľa Hookeovho zákona s tangenciálnym napätím $\tau = dF/dS = G\alpha$.



Obr. 6. Schéma torznej deformácie tyče s kruhovým prierezom

Celkový torzný moment sily dostaneme integráciou elementárnych momentov sily po celej ploche voľnej podstavy

$$M = \int_S dM = \frac{G\varphi}{L} \int_S r^2 dS = \frac{GI}{L} \varphi, \quad (32)$$

kde $I = \int_{(S)} r^2 dS$ je plošný moment zotrvačnosti prierezu tyče vzhľadom na torznú os. Pre tyč s kruhovým prierezom postupujeme pri výpočte I tak, že plochu kruhu rozdelíme na plošné elementy dS (Obr. 6), ktoré v polárnych súradniciach nadobúdajú vyjadrenie

$$dS = r d\beta du \quad (33)$$

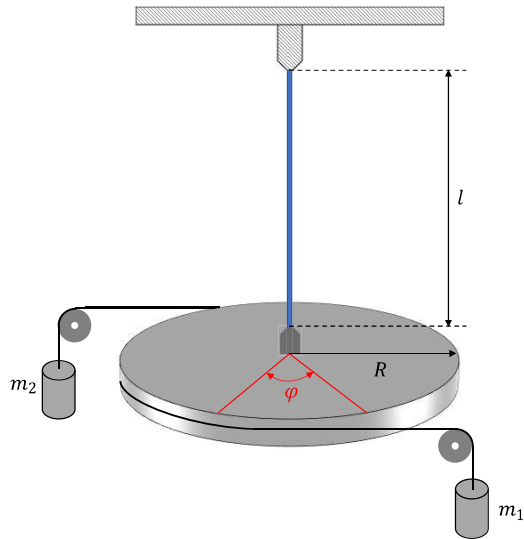
a vypočítame príslušný integrál

$$I = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (34)$$

Zo vzťahu (32) vidíme, že torzný uhol φ je priamo úmerný torznému momentu M . Konštantu $\frac{GI}{L}$ nazývame direkčný moment tyče

$$M_0 = \frac{GI}{L}. \quad (35)$$

Statická metóda merania modulu pružnosti v šmyku využíva torziu tenkej tyče (drôtu). Meranie je usporiadané tak, že k tyči, ktorej horný koniec je upevnený v držiaku, pripevníme na druhý koniec kotúč s priemerom D a uhlovou stupnicou. Na kotúči je drážka, v ktorej sú vyvedené pevné vlákna na opačných stranách kotúča cez kladky k miskám na zaťaženie závažiami (Obr. 7).



Obr. 7. Schéma meracieho zariadenia pre určenie momentu zotrvačnosti v torzii tyče (drôtu)

Na obvode kotúča pôsobia sily kolmo na torznú os vyvolané cez kladky tiažou závaží o hmotnostiach m_1 a m_2 . Pre výsledný torzný (krútiaci) moment týchto síl platí $M = (m_1 + m_2)g R$, kde $D = 2R$ je priemer kotúča. Aby nevznikla sila vychylujúca os kotúča, volíme počas merania závažia tak, aby platila podmienka $m_1 = m_2$. Ak uvedený moment sily dosadíme do vzťahu (32) spolu s využitím vzťahu (34), pre experimentálne určenie modulu pružnosti dostaneme vzťah

$$G = \frac{16gDL}{\pi d^4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{\varphi}. \quad (36)$$

Pomôcky

Zariadenie na meranie skrútenia tyče, tyče (drôtu) rôznych materiálov, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, mikrometrické meradlo, sada závaží, digitálne váhy.

Postup merania

1. Odmeriame teplotu prostredia bezprostredne pred meraním a po meraní.
2. Po upevnení tyče (drôtu) do príslušného meracieho zariadenia, mikrometrickým meradlom odmeriame priemer drôtu d posuvným meradlom, priemer otočného kotúča D a dĺžkovým meradlom odmeriame dĺžku drôtu L . Príslušné veličiny meriame aspoň 10-krát na rôznych miestach.
3. Namerané údaje priemeru tyče d_i , priemeru kotúča D_i , vzdialenosti L_i zapisujeme do tabuľky 1.
4. Určíme aritmetické priemery \bar{D} , \bar{L} , \bar{d} a ich štandardné neistoty merania $\sigma_{\bar{D}}$, $\sigma_{\bar{L}}$, $\sigma_{\bar{d}}$.
5. Výsledky uvádzame v tvare $D = (\bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}})$, $d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}})$, $L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$.

Tabuľka 1.

i	d_i (m)	$\Delta_{d_i}^2$ (m ²)	D_i (m)	$\Delta_{D_i}^2$ (m ²)	L_i (m)	$\Delta_{L_i}^2$ (m ²)
1						
2						
⋮						
n						
	$\bar{d} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{d_i}^2 = \dots$	$\bar{D} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{D_i}^2 = \dots$	$\bar{L} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{L_i}^2 = \dots$

6. Tyč upevnenú v meracom zariadení postupne rovnomerne zaťažujeme pridávaním závaží na obidve meracie misky a meriame príslušný uhol skrútenia φ v závislosti od súčtu hmotností závaží $m_1 + m_2$.
7. Namerané údaje zapisujeme do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

i	$m_1 + m_2$ (kg)	φ (rad)	$k_i = \varphi / (m_1 + m_2)$ (rad · kg ⁻¹)	$\Delta_{k_i}^2$ (rad ² · kg ⁻²)
1				
2				
⋮				
n				
			$\bar{k} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{k_i}^2 = \dots$

Vyhodnotenie merania

1. Overíme linearitu torznej deformácie tak, že namerané hodnoty uhla skrútenia φ a hmotnosti m vynesieme do grafickej závislosti $\varphi = f(m)$.
2. Pre jednotlivé zaťaženia drôtu určíme konštantu úmernosti k_i .
3. Určíme aritmetický priemer \bar{k} a k nemu príslušnú neistotu merania $\sigma_{\bar{k}}$ a výsledok zapíšeme v tvare $k = (\bar{k} \pm \sigma_{\bar{k}})$.
4. Hodnotu modulu pružnosti v šmyku G určíme využitím vzťahu (36), v ktorom pomer $\frac{(m_1+m_2)}{\varphi}$ vo vzťahu nahradíme prevrátenou hodnotou konštanty úmernosti $1/\bar{k}$.

$$G = \frac{16g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \cdot \frac{1}{\bar{k}}$$

Do vzťahu dosadíme priemerné hodnoty priemeru kotúča \bar{D} , priemeru drôtu \bar{d} , dĺžky drôtu \bar{L} a konštanty úmernosti \bar{k} .

5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu merania veličiny G pomocou neistôt priamo meraných veličín D, L, d podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{G}} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \bar{D}}\right)^2 \sigma_{\bar{D}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{L}}\right)^2 \sigma_{\bar{L}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{d}}\right)^2 \sigma_{\bar{d}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{k}}\right)^2 \sigma_{\bar{k}}^2}$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{D}} = \frac{16g\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{L}} = \frac{16g\bar{D}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}},$$

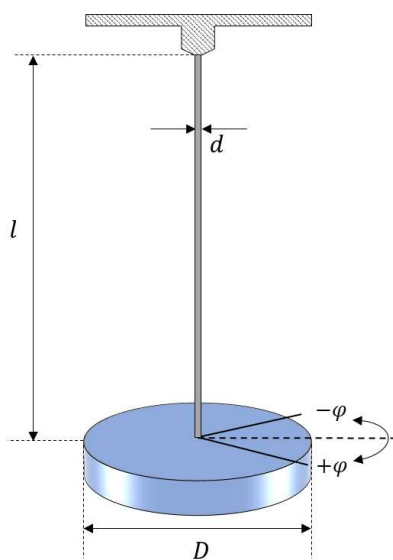
$$\frac{\partial G}{\partial \bar{d}} = -\frac{64g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^5} \frac{1}{\bar{k}}, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{k}} = -\frac{16g\bar{D}\bar{L}}{\pi\bar{d}^4} \frac{1}{\bar{k}^2}.$$

6. Určíme, ktorá z týchto veličín (D, L, d, k) prispieva k výslednej neistote veličiny G najväčšou mierou, t. j. ktorý zo sčítancov v rovnici je najväčší.
7. Finálny výsledok hodnoty modulu pružnosti v šmyku uvedieme v tvare $G = (\bar{G} \pm \sigma_{\bar{G}})$.
8. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v šmyku G s tabuľkovou hodnotou G_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|G - G_t|}{G_t} 100 \text{ \%}.$$

C. Určenie modulu pružnosti v šmyku dynamickou metódou s použitím torzného kyvadla

Jednou z metód na meranie modulu pružnosti v torzii je dynamická metóda s použitím torzného kyvadla, kedy je experiment podobne usporiadaný ako v úlohe Určenie modulu pružnosti v šmyku statickou metódou, ale namiesto kotúča upevníme na koniec tyče (drôtu) teleso, ktorého moment zotrvačnosti I je voči pozdĺžnej osi tyče niekoľkokrát väčší ako moment zotrvačnosti samotnej tyče. Pod torzným kyvadlom rozumieme teleso (napr. dosku tvaru kruhu, alebo valec) upevnené v jeho strede na zvislom pružnom vlákne tak, že os súmernosti je totožná s osou vlákna (Obr. 8).



Obr. 8. Grafické znázornenie pohybu torzného kyvadla

Ak vytočíme zavesené teleso z jeho rovnovážnej polohy o uhol φ (uhol potočenia z rovnovážnej polohy), po uvoľnení sa teleso bude otáčať okolo osi drôtu. Tento pohyb je vyvolaný torznými silami, ktorých pôvod je v deformácii vlákna. Moment týchto síl M vzhľadom na os otáčania je podľa Hookeovho zákona v každom okamihu v hraniciach pružnej deformácie drôtu úmerný okamžitej výchylke φ . Keďže torzné sily pôsobia proti výchylke, moment torzných síl má opačné znamienko ako výchylka, ktorá ho vyvolala a platí

$$M = -M_0\varphi, \quad (37)$$

kde M_0 je konštanta úmernosti a nazýva sa direkčný moment závesu alebo torzná tuhosť. Jej fyzikálny význam je moment sily, potrebný na vytočenie závesu o jednotkový uhol. Závisí len od elastických vlastností závesu (modulu pružnosti v šmyku G materiálu závesu) a jeho geometrických rozmerov.

Ak teleso zavesené na skrútenom vlákne pustíme, budú ho torzné sily skrúteného drôtu vracat do rovnovážnej polohy a teleso sa rozkmitá rotačnými (torznými) kmitmi okolo osi symetrie idúcej osou periodicky skrúcaného sa drôtu. Pohybová rovnica torzného kyvadla má tvar pohybovej rovnice telesa konajúceho rotačný pohyb okolo pevnej osi

$$\mathbf{M} = I_T \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (38)$$

kde \mathbf{M} je vektor momentu síl spôsobujúcich otáčavý pohyb okolo pevnej osi, I_T je moment zotrvačnosti zaveseného telesa vzhľadom na os vlákna a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Moment zotrvačnosti vlákna je veľmi malý, a preto ho v rovnici (38) môžeme zanedbať. Veľkosť vektora uhlového zrýchlenia je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (39)$$

Keď pohybovú rovnicu (38) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I_T \varepsilon$ a dosadíme do nej vzťah (39) dostaneme

$$M = I_T \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (40)$$

Následne do rovnice (39) dosadíme vzťah (37) a vzťah (35), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po matematickej úprave pohybovú rovnicu torzného kyvadla v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{GI}{LI_T} \varphi = 0. \quad (41)$$

Ak zavedieme substitúciu $\omega^2 = \frac{GI}{LI_T}$, získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou v tvare

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \quad (42)$$

Jej riešenie môžeme nájsť v tvare

$$\varphi = \varphi_m \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (43)$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka z rovnovážnej polohy v danom čase t , φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 je začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Z rovnice (43) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva harmonické kmity s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{GI}{LI_T}}. \quad (44)$$

Použitím vzťahu medzi uhlovou rýchlosťou a periódou $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a následnou matematickou úpravou môžeme z rovnice (44) vyjadriť modul pružnosti G v tvare

$$G = \frac{4\pi^2 LI_T}{T^2 I}. \quad (45)$$

Ak ako teleso pre torzné kyvadlo využijeme kruhovú dosku (valec) z rovnorodého materiálu, pre moment zotrvačnosti I_T bude platiť

$$I_T = \frac{mD^2}{8}, \quad (46)$$

kde m je hmotnosť a D je priemer valca, ktoré môžeme zistiť priamym meraním. Meraním doby kmitu torzného kyvadla o známom plošnom momente zotrvačnosti závesu torzného kyvadla I (vzťah 34) a známom momente zotrvačnosti telesa I_T (vzťah 46) vieme určiť modul pružnosti G . Pre náš experiment hľadaný modul pružnosti v šmyku bude mať tvar

$$G = \frac{16\pi mLD^2}{T^2 d^4}. \quad (47)$$

Pomôcky

Stojan na upevnenie torzného kyvadla, záves torzného kyvadla, známy zotrvačník (teleso v tvare kruhovej dosky, valca), stopky, digitálne váhy, posuvné meradlo, mikrometrické meradlo.

Postup merania

1. Opakovaným meraním odmeriame priemer D zaveseného telesa tvaru valca, priemer d skúmaného drôtu a dĺžku L závesu torzného kyvadla. Hodnoty zapisujeme do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

i	d_i (m)	$\Delta_{d_i}^2$ (m ²)	D_i (m)	$\Delta_{D_i}^2$ (m ²)	L_i (m)	$\Delta_{L_i}^2$ (m ²)
1						
2						
⋮						
n						
	$\bar{d} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{d_i}^2 = \dots$	$\bar{D} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{D_i}^2 = \dots$	$\bar{L} = \dots$	$\sum_{i=1}^n \Delta_{L_i}^2 = \dots$

2. Určíme hmotnosť m zotrvačníka, torzného kyvadla.
3. Určíme štandardnú neistotu merania hmotnosti σ_m , pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde z_{\max} je hodnota najmenšieho dielikera meracieho zariadenia.
4. Zostrojíme meraciu aparatúru podľa obrázka 8.
5. Odmeriame teplotu miestnosti pred začiatkom merania ako aj po ukončení merania.
6. Kyvadlo uvedieme do pohybu vychýlením telesa o uhol φ v horizontálnej rovine, kde uhol musí byť malý, tak aby platili pre kmity odvodené rovnice. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov torzného kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Hodnota t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 2.

m (kg)					
i	t_{i*10} (s)	$i + 5$	$t_{(i+5)*10}$ (s)	$T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s)	$\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s ²)
1.	t_{10}	6.	t_{60}	$T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$	
2.	t_{20}	7.	t_{70}	$T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$	
3.	t_{30}	8.	t_{80}		
4.	t_{40}	9.	t_{90}		
5.	t_{50}	10.	t_{100}		
				$\bar{T} = \dots$	$\sum_{i=1}^5 \Delta_i^2 = \dots$

Vyhodnotenie merania

1. Určíme aritmetické priemery priamo meraných veličín $\bar{D}, \bar{L}, \bar{d}$ a stredné kvadratické odchýlky aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{D}}, \sigma_{\bar{L}}, \sigma_{\bar{d}}$.
2. Vypočítame aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla \bar{T} , strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$.
3. Výsledky merania uvádzame v tvare $m = (m \pm \sigma_{\bar{m}})$, $D = (\bar{D} \pm \sigma_{\bar{D}})$, $d = (\bar{d} \pm \sigma_{\bar{d}})$, $L = (\bar{L} \pm \sigma_{\bar{L}})$, $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}})$.
4. Z nameraných hodnôt vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu modulu pružnosti v šmyku G s použitím vzťahu (47), kde za príslušné veličiny dosadíme ich stredné hodnoty.
5. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu G pomocou neistôt priamo meraných veličín podľa vzťahu

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 (\sigma_L)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)^2 (\sigma_m)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial D}\right)^2 (\sigma_D)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2 (\sigma_T)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d}\right)^2 (\sigma_d)^2},$$

kde pre jednotlivé parciálne derivácie platia vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial L} &= \frac{16\pi m D^2}{T^2 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial D} &= \frac{32\pi L m D}{T^2 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial m} &= \frac{16\pi L D^2}{T^2 d^4}, \\ \frac{\partial G}{\partial T} &= -\frac{32\pi L m D^2}{T^3 d^4}, & \frac{\partial G}{\partial d} &= -\frac{64\pi L m D^2}{T^2 d^5}. \end{aligned}$$

6. Určíme, ktorá z veličín prispieva k výslednej neistote veličiny G najväčšou mierou.
7. Výsledok merania uvedieme v tvare $G = (G \pm \sigma_G)$.
8. Porovnáme náš výsledok merania modulu pružnosti v šmyku G s tabuľkovou hodnotou G_t (príloha, tabuľka 9, strana 160) použitím vzťahu

$$\varepsilon_r = \frac{|G - G_t|}{G_t} 100 \%$$

9. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch a možných príčinách chýb.

Tabuľka 9. Elastické vlastnosti rôznych tuhých látok

Látka	Modul pružnosti v ťahu E ($\cdot 10^9$ Pa)	Modul pružnosti v šmyku G ($\cdot 10^9$ Pa)	Poissonovo číslo μ
hliník	71	26,4	0,34
meď	123	45,5	0,35
nikel	205	78	0,32
olovo	16	5,6	0,44
volfrám	390	151	0,29
železo	212	82	0,29
mosadz	99	36,5	0,36
oceľ (do 5 % Ni)	200 – 210	79 – 89	0,25 – 0,33
plexisklo	3,3	1,2	0,35
kremeň	73	31	0,17
sklo kremenné	75	32	0,17
Drevo ihličnaté	10	0,3	
Drevo dubové	12,5	0,6	

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjániová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023
ako svoju 4933. publikáciu

Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk