ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Fakulta elektrotechniky
a informačných technológií

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

NÁVODY K LABORATÓRNYM CVIČENIAM 1

Žilinská univerzita v Žiline
EDIS-vydavateľstvo UNIZA
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021: Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

ISBN 978-80-554-2044-8

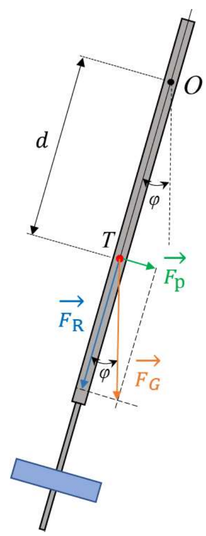
URČENIE TIAŽOVÉHO ZRÝCHLENIA REVERZNÝM KYVADLOM

Úlohy

A. ***Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia v mieste fyzikálneho laboratória***

Teoretický úvod

Vo fyzike sa pojem kyvadlo používa veľmi často. Má niekoľko prívlastkov ako matematické, torzné, fyzikálne alebo reverzné. **Reverzné kyvadlo** je špeciálnym druhom fyzikálneho kyvadla, ktoré je schopné konať kmitavý pohyb okolo dvoch osí (asymetricky uložených vzhľadom na ťažisko kyvadla), pričom perióda kmitania okolo jednej osi je rovnaká ako okolo druhej osi. Fyzikálne kyvadlo je teleso, ktoré vykonáva periodický kmitavý pohyb okolo osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom. Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy pôsobením vonkajšej sily $\boldsymbol{F}$, je príčinou pohybu fyzikálneho kyvadla tiažová sila $\boldsymbol{F}_G$ pôsobiaca v ťažisku telesa. Teleso vychýlené z rovnovážnej polohy o uhol φ do rovnovážnej polohy vracia zložka tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ (Obr. 1).



Obr. 1. Fyzikálne kyvadlo upravené konkrétnym spôsobom pri vychýlení o uhol φ

Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla je

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{M}$ je vektor momentu sily, I moment zotrvačnosti a $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor uhlového zrýchlenia. Nech kyvadlo vykonáva kmitavý pohyb v rovine nákresne okolo osi O kolmej na nákres kyvadla (Obr. 1.). Veľkosť momentu sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ je určená vzťahom

$$M = -F_\mathrm{p} d = -F_G \sin(\varphi)\, d = -mgd \sin(\varphi), \tag{2}$$

kde m je hmotnosť telesa, g je veľkosť tiažového zrýchlenia a d je vzdialenosť ťažiska od osi, okolo ktorej kyvadlo kmitá. Po vychýlení sa kyvadlo snaží dostať naspäť do rovnovážnej polohy, preto sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ vždy smeruje do rovnovážnej polohy, čo vo vzťahu vyjadruje znamienko mínus. Veľkosť uhlového zrýchlenia je určená vzťahom

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}. \tag{3}$$

Keď rovnicu (1) vyjadríme v skalárnom tvare $M = I\varepsilon$, dosadíme do nej vzťahy (2) a (3), a keď neuvažujeme tlmiace sily (teda máme na mysli netlmené harmonické kmity), dostaneme po úprave pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla v tvare

$$I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + mgd\sin(\varphi) = 0, \tag{4}$$

ktorá nemá analytické riešenie. Pre malé výchylky (do 10°), kedy platí $\sin(\varphi) \approx \varphi$ a vydelením rovnice (4) veličinou I, dostávame rovnicu v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0, \tag{5}$$

čo je diferenciálna rovnica 2. rádu s konštantnými koeficientami a nulovou pravou stranou a jej riešenie môžeme nájsť v tvare

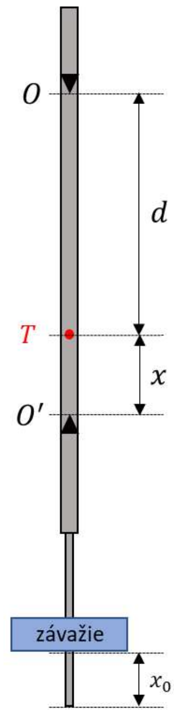
$$\varphi(t) = \varphi_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{6}$$

kde φ je okamžitá uhlová výchylka v danom čase t, φ_m je maximálna uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, φ_0 začiatočná fáza alebo tiež fázová konštanta a veličina $(\omega t + \varphi_0)$ je fáza kmitania. Ak urobíme druhú deriváciu funkcie vyjadrenej vzťahom (6) podľa času a túto deriváciu ako i samotnú funkciu popisujúcu okamžitú uhlovú výchylku dosadíme do rovnice (5), zistíme, že $\omega^2 = mgd/I$, z čoho

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}. \tag{7}$$

Veličina ω je tzv. vlastná uhlová rýchlosť kyvadla (frekvencia). Zo známeho vzťahu vyjadrujúceho súvis periódy T a uhlovej rýchlosti hmotného bodu pohybujúceho sa po kružnici ($\omega = 2\pi/T$) dostávame vzťah pre periódu kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{8}$$



Obr. 2. Grafický model reverzného kyvadla

V tejto úlohe si ukážeme, ako sa dá využitím fyzikálneho kyvadla, ktoré je upravené určitým spôsobom, určiť tiažové zrýchlenie (zrýchlenie voľného pádu). Predstavme si fyzikálne kyvadlo upravené určitým spôsobom (Obr. 2.). Položme si otázku, či sa môže takéto kyvadlo kývať s rovnakou periódou T okolo osi O a aj okolo osi O', ktorá sa nachádza na opačnej strane od ťažiska. Pre prípad reverzného kyvadla, schematicky naznačeného na obrázku (Obr. 2), ako už bolo spomenuté, platí, že perióda kmitania okolo jednej osi O je rovnaká ako okolo druhej osi O'. Čiže pre periódu T' kyvadla vzhľadom na os O' platí analogický vzťah ako pre periódu T

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgx}}, \tag{9}$$

kde I' je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os O' a x je vzdialenosť tejto osi od ťažiska T (Obr. 2.). Ak požadujeme, aby tieto periódy boli rovnaké, musí platiť $T = T'$ a po dosadení vzťahu (8) a (9) do tejto rovnosti a po matematickej úprave dostaneme

$$\frac{I}{d} = \frac{I'}{x}. \tag{10}$$

Použitím Steinerovej vety, ktorá hovorí: Moment zotrvačnosti I telesa vzhľadom na os neprechádzajúcu ťažiskom sa rovná momentu zotrvačnosti I_0 vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, ktorá je s danou osou rovnobežná, zväčšenému o $mr_{\mathrm{o}}{}^2$, kde m je hmotnosť telesa a r_{o} je vzájomná vzdialenosť oboch spomínaných osí, pre momenty zotrvačnosti I a I' platí

$$\begin{aligned} I &= I_{\mathrm{o}} + md^2, \\ I' &= I_{\mathrm{o}} + mx^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Po dosadení vzťahov (11) do vzťahu (10) dostávame rovnosť

$$\frac{I_{\mathrm{o}} + md^2}{d} = \frac{I_{\mathrm{o}} + mx^2}{x}, \tag{12}$$

odkiaľ po matematickej úprave dostávame kvadratickú rovnicu

$$mdx^2 - (I_{\mathrm{o}} + md^2)x + I_{\mathrm{o}}d = 0. \tag{13}$$

Táto rovnica poskytuje pre x nasledovné dve riešenia

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{I_{\mathrm{o}}}{md}, \\ x_2 &= d. \end{aligned} \tag{14}$$

Z riešenia kvadratickej rovnice vidíme, že pre príslušné kyvadlo existujú na druhej strane ťažiska dve osi, okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou ako okolo osi O. Jedna je symetricky a druhá nesymetricky položená voči osi O vzhľadom na ťažisko. Riešenie $x_2 = d$ určuje polohu symetricky položenej osi. Riešenie $x_1 = I_{\mathrm{o}}/md$ určuje polohu nesymetricky položenej osi. Vzájomnú vzdialenosť osi O a nesymetricky položenej osi O' (okolo ktorých sa kyvadlo kýva s rovnakou periódou) nazývame redukovaná dĺžka fyzikálneho kyvadla, pre ktorú platí

$$l_{\mathrm{r}} = d + \frac{I_{\mathrm{o}}}{md} = \frac{md^2 + I_{\mathrm{o}}}{md} = \frac{I}{md}. \tag{15}$$

Ak vzťah (15) dosadíme do vzťahu (8), pre periódu fyzikálneho kyvadla dostaneme

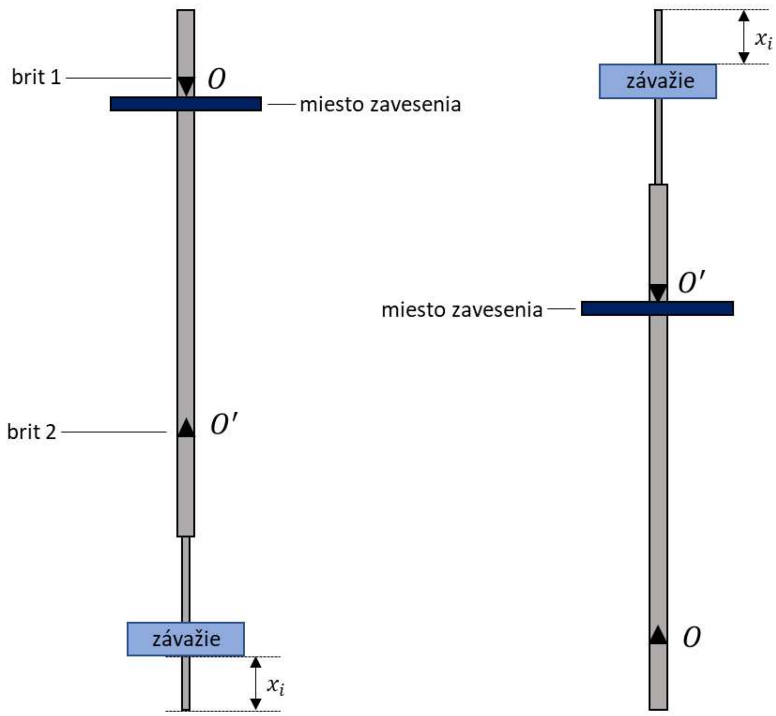
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\mathrm{r}}}{g}}. \tag{16}$$

Zo vzťahu (16) môžeme vyjadriť tiažové zrýchlenie v tvare

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\mathrm{r}}}{T^2}. \tag{17}$$

Vzťah (17) umožňuje určiť tiažové zrýchlenie g, ak poznáme redukovanú dĺžku l_{r} a periódu T použitého kyvadla.

Kyvadlo, ktoré má vyššie popísané vlastnosti, nazývame **reverzné kyvadlo**. Reverzné kyvadlo je tyč s dvomi osami s britmi obrátenými proti sebe (Obr. 3.). Na jednom konci tyče je posúvateľné závažie, ktoré spôsobuje, že osi O a O' sú vzhľadom na ťažisko T nesymetricky položené. Posúvaním tohto závažia na vhodné miesto a jeho zafixovaním (fixačnou skrutkou) môžeme dosiahnuť, aby perióda kyvadla bola vzhľadom na osi O a O' rovnaká. Potom vzdialenosť $\overline{OO'}$ (čo je vzdialenosť britov) je redukovaná dĺžka l_r reverzného kyvadla.



Obr. 3. Spôsoby zavesenia reverzného kyvadla

A. Experimentálne určenie hodnoty tiažového zrýchlenia v mieste fyzikálneho laboratória

Pomôcky

Reverzné kyvadlo, stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo.

Postup merania

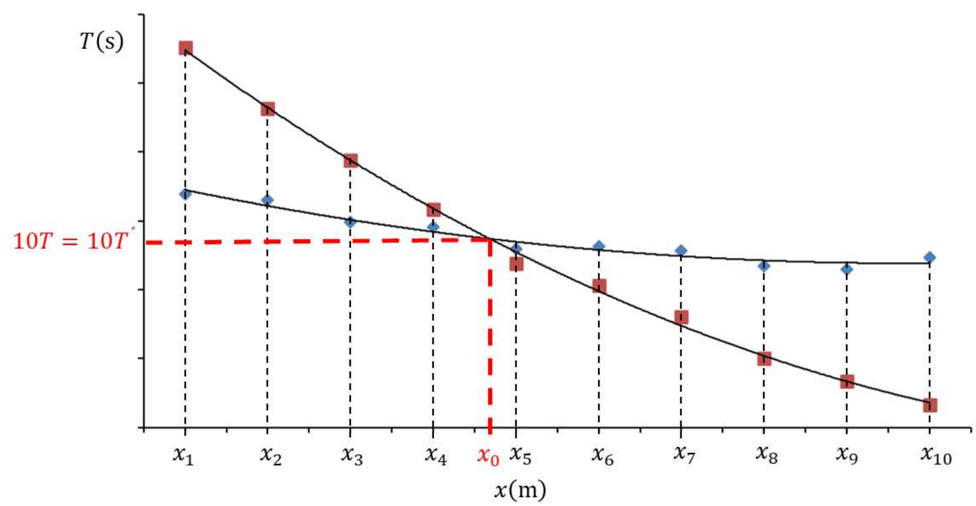
1. Posúvateľné závažie nastavíme do polohy x_1 (napr. 1 cm) a odmeriame stopkami dobu kmitov desiatich periód $10T$ okolo osi O.
2. Po zavesení kyvadla na druhý brit podobne zmeriame dobu kmitov desiatich periód $10T'$, kyvadlo sa kýva okolo osi O' (Obr. 3.).

3. Postup opakujeme pre ďalšie polohy posúvateľného závažia, napr. x_2 (napr. 3 cm), x_3 (napr. 5 cm), x_4 (napr. 7 cm), ... a hodnoty zapisujeme do tabuľky 1 s presnosťou na najmenší dielik.

Tabuľka 1.

i	1	2	3	...	n
x_i (m)					
$10T_i$ (s)					
$10T'_i$ (s)					

4. Získané hodnoty doby kmitov $10T$ a $10T´$ pre rôzne polohy x_i vynesieme do grafu (Obr. 4.), preložíme regresiou kvadratického polynómu (pretože teoretická závislosť je parabolická). To urobíme pre konfiguráciu so závažím hore aj dole a určíme priesečník kriviek graficky alebo vypočítaním pomocou regresných koeficientov.
Pozn.: Nakreslíme graf v príslušnom tabuľkovom procesore Excel, ktorý zobrazí závislosť periódy T_i od polohy závažia x_i. Bodmi preložíme polynomickú funkciu druhého stupňa $y = ax^2 + bx + c$. V Exceli (ktorý by mal imitovať LibreOffice) vytvoríme preloženie kliknutím na bod v grafe pravým tlačidlom na myši. Z ponuky vyberieme „pridať trendovú spojnicu“, z možnosti vyberieme typ spojnice „polynomická“, stupeň 2 a zároveň odklikneme možnosť „zobraziť v grafe rovnicu“.



Obr. 4. Závislosť doby kmitu T od vzdialenosti x vzhľadom na os O a $O´$

5. Z takto zostrojeného grafu určíme polohu x_0 posúvateľného závažia (Obr. 2.), ktorá zodpovedá prípadu, keď $10T = 10T'$, t. j. keď perióda okolo obidvoch osí O a O' je rovnaká.

6. Po nastavení závažia na túto hodnotu polohy x_o experimentálne overíme súhlas $10T$ a $10T'$ okolo obidvoch osí. Ak je rozdiel týchto dvoch hodnôt väčší ako $0{,}09$ s, posúvateľné závažie jemne posunieme (približne o $0{,}5\ \mathrm{cm}$) na jednu alebo druhú stranu okolo polohy x_o. Postup opakujeme.
7. Určíme štandardnú neistotu redukovanej dĺžky σ_{l_r}, pričom jej hodnota približne zodpovedá $z_{\max}/\sqrt{3}$, kde $z_{\max}$ je hodnota najmenšieho dielika meracieho zariadenia, t. j. dĺžkového meradla.
8. Po získaní rovnosti $10T = 10T'$ vykonáme meranie periódy okolo jednej z osí postupnou metódou. Odporúčame vzdialenejšiu os O od ťažiska kyvadla (Obr. 3.) a namerané hodnoty zaznamenávame do tabuľky 2.
9. Kyvadlo uvedieme do pohybu tak, aby amplitúda (uhlová výchylka z rovnovážnej polohy) bola v intervale 5° až 10° od zvislej polohy kyvadla. Po rozkmitaní kyvadla vo zvolenej krajnej polohe spustíme stopky a postupnou metódou určíme periódu kmitov kyvadla. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2. Kyvadlo počas merania nezastavujeme a príslušné hodnoty času získavame pomocou stopiek s medzičasom. Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky 2, kde údaj t_{10} v prvom riadku tabuľky je doba 10 kmitov, t_{20} v druhom riadku tabuľky je doba 20 kmitov, atď.

Tabuľka 2.

i	t_{i*10} (s)	$i+5$	$t_{(i+5)*10}$ (s)	$T_i = (t_{(i+5)*10} - t_{i*10})/50$ (s)	$\Delta_i^2 = (\bar{T} - T_i)^2$ (s^2)
1.	t_{10}	6.	t_{60}	$T_1 = (t_{60} - t_{10})/50$	
2.	t_{20}	7.	t_{70}	$T_2 = (t_{70} - t_{20})/50$	
3.	t_{30}	8.	t_{80}		
4.	t_{40}	9.	t_{90}		
5.	t_{50}	10.	t_{100}		
				$\bar{T} = \cdots$	$\sum_{i=1}^{5} \Delta_i^2 = \cdots$

Vyhodnotenie merania

1. Určíme aritmetický priemer periódy kmitov kyvadla $\bar{T}$ a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru $\sigma_{\bar{T}}$.
2. Výsledok určenia periódy kmitov kyvadla uvádzame v tvare $T = (\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}})$.
3. Hodnotu tiažového zrýchlenia určíme podľa vzťahu (17), do ktorého dosadíme nameranú hodnotu redukovanej dĺžky l_r (vzdialenosť britov) a priemernú hodnotu periódy $\bar{T}$, t. j.

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 l_r}{\bar{T}^2}.$$

4. Pomocou metódy pre určenie neistoty merania nepriamo meranej veličiny nájdeme neistotu $\sigma_{\bar{g}}$ pomocou neistôt priamo meraných veličín $\bar{T}$, l_{r} podľa vzťahu

$$\sigma_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{T}}\right)^2 \sigma_{\bar{T}}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l_{\mathrm{r}}}\right)^2 \sigma_{l_{\mathrm{r}}}^2}.$$

5. Určíme, ktorá z týchto veličín ($\bar{T}$, l_{r}) prispieva k výslednej neistote veličiny g najväčšou mierou, t. j. ktorý z dvoch sčítancov v rovnici je najväčší.
6. Výsledok merania tiažového zrýchlenia uvedieme v tvare $g = (\bar{g} \pm \sigma_{\bar{g}})$.
7. Určenú hodnotu tiažového zrýchlenia porovnáme s vypočítanou hodnotou, určenou pre konkrétnu polohu „Žilina“ (uhol a nadmorskú výšku určíme kartograficky). Hodnoty stredného polomeru a hmotnosti Zeme použijeme z tabuliek.
8. Ak ste absolvovali meranie v úlohe s názvom Matematické kyvadlo, potom porovnajte určenú hodnotu tiažového zrýchlenia v tejto úlohe s experimentálne určenou hodnotou tiažového zrýchlenia v úlohe s matematickým kyvadlom.
9. V závere zistite, ktorá z metód na určenie tiažového zrýchlenia je presnejšia.

Tabuľka 5. Vybrané základné fyzikálne konštanty podľa SI

Názov konštanty	**Značka a hodnota konštanty**
ťiažové zrýchlenie (45° zemepisnej šírky)	$g = 9{,}806\ 65\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
rýchlosť svetla vo vákuu	$c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
elementárny náboj	$e = 1{,}602\ 177\ 634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
permeabilita vákua	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{H \cdot m^{-1}} = 1{,}256\ 637 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot\ A^{-2}}$
permitivita vákua	$\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot\ m^{-1}}$
normálny tlak	$p_\mathrm{n} = 101\ 325\ \mathrm{Pa}$
normálna teplota	$T_\mathrm{n} = 273{,}15\ \mathrm{K}$
gravitačná konštanta	$\kappa = 6{,}672\ 59 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Boltzmannova konštanta	$k = 1{,}380\ 649 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Avogadrova konštanta	$N_A = 6{,}022\ 140\ 76 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
molárna plynová konštanta	$R = 8{,}314\ 510\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
molárny objem ideálneho plynu pri p_n a T_n	$V_\mathrm{n} = 22{,}413\ 83 \cdot 10^3\ \mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$
Faradayova konštanta	$F = 96\ 485{,}332\ 12\ \mathrm{C \cdot mol^{-1}}$
Planckova konštanta	$h = 6{,}626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
atómová hmotnostná konštanta	$m_u = 1{,}660\ 539\ 066 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Stefan-Boltzmanova konštanta	$\sigma = 5{,}670\ 374\ 419 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$
1 eV	$1{,}602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023
ako svoju 4933. publikáciu

Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

www.edis.uniza.sk