



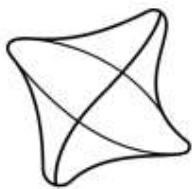
ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE

Fakulta elektrotechniky  
a informačných technológií

# NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1

Gabriela Tarjániová, Tomáš Mizera

Žilinská univerzita v Žiline  
EDIS-vydavateľstvo UNIZA  
2023



**ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE**

---

Fakulta elektrotechniky a informačných technológií

**RNDr. Gabriela Tarjányiová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.**

# **NÁVODY K LABORATÓRNÝM CVIČENIAM 1**

Žilinská univerzita v Žiline  
EDIS-vydavateľstvo UNIZA  
2023

Vydanie tejto publikácie bolo finančne podporené projektom KEGA č. 023ŽU-4/2021:  
Rozvoj intelektuálnych spôsobilostí a manuálnych zručností v STEM vzdelávaní.

Recenzenti prof. Mgr. Ivan Martinček, PhD.  
RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

---

© Gabriela Tarjányiová, Tomáš Mizera, 2023

ISBN 978-80-554-2044-8

# URČENIE KOEFICIENTU STATICKÉHO A DYNAMICKÉHO TRENIA

## Úlohy

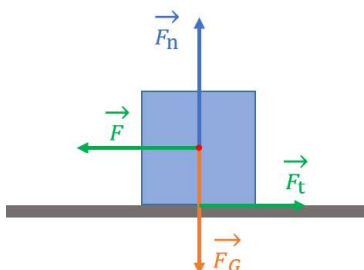
- A. Určenie koeficientu statického trenia
- B. Určenie koeficientu dynamického trenia
- C. Overiť závislosť trecej sily od obsahu dotykovej plochy

## Teoretický úvod

Za vodorovnú rovinu vo všeobecnosti môžeme považovať akúkoľvek plochu (podložka, podlaha...), ktorá je rovnobežná so zemským povrchom. Teleso položené na takejto podložke pôsobí na podložku svojou tiažou  $G = mg$ , ktorá sa prejavuje ako tlaková sila na podložku a je spôsobená tiažovou silou  $F_G$ . Podľa zákona akcie a reakcie na toto teleso pôsobí reakcia podložky, ktorú nazývame normálová sila  $F_n$ . Normálová sila (Obr. 1) je vždy kolmá na dotykovú rovinu, v prípade telesa nachádzajúceho sa na vodorovnej ploche v pokoji musí byť splnená podmienka

$$F_n + F_G = 0. \quad (1)$$

Predstavme si kváder, ktorý leží na podlahe. Snažíme sa ho tlačiť vodorovne konštantnou silou  $F$ , ale kváder sa nepohne. Je to spôsobené tým, že sila  $F$ , ktorou na kváder pôsobíme, je kompenzovaná vodorovnou trecou silou  $F_t$ , ktorou podlaha pôsobí opačným smerom v mieste spodnej podstavy kvádra (Obr. 1). Zaujímavosťou je, že veľkosť a smer tejto trecej sily je taký, aby sa rušil účinok akejkoľvek sily, ktorou by sme na kváder pôsobili. Sily trenia vznikajú medzi pevnými telesami, ktoré sa navzájom dotýkajú a sú k sebe pritláčané určitou silou. Ak je teleso napriek pôsobeniu sily v pokoji, hovoríme o **statickom trení**. Ani jedna z kontaktných síl (sila trenia a reakcia podložky) nemôžu samostatne zmeniť pohybový stav telesa.



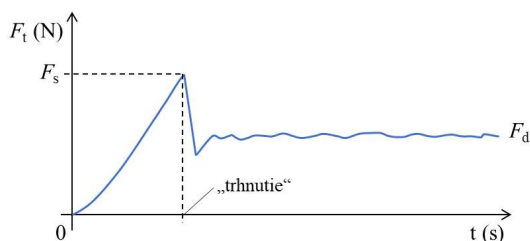
Obr. 1. Smer pôsobenia tiažovej sily  $F_G$ , normálovej sily  $F_n$  a smer trecej sily  $F_t$  pri pôsobení sily  $F$

Ak trecie sily vznikajú pri vzájomnom pohybe dvoch dotýkajúcich sa telies, hovoríme o **dynamickom trení**. Dynamické trenie sa prejavuje silami pôsobiacimi proti smeru vzájomného pohybu telies. Má vždy opačný smer ako je smer okamžitej rýchlosti. Pri dynamickom trení rozlišujeme **šmykové trenie** a **valivé trenie**. Ak sú dotýkajúce sa povrchy suché, hovoríme o suchom trení a ak je medzi nimi vrstva viskózneho látky (maziva), hovoríme o viskóznom trení. V prípade rovinných dotykových plôch sa používa pri určení trenia **Amontonsov-Coulombov zákon**. Pri suchom trení, podľa tohto zákona, veľkosť trecej sily  $F_t$  nezávisí od obsahu dotykovej plochy, ale je priamo úmerná veľkosti normálovej zložky sily  $F_n$

$$F_t = \mu F_n. \quad (2)$$

Konštanta  $\mu$  sa nazýva **koeficient trenia** a je to bezrozmerná fyzikálna veličina. Keďže rozlišujeme dve sily trenia, statickú a dynamickú, potom hovoríme o koeficientoch statického trenia  $\mu_s$  a dynamického trenia  $\mu_d$ .

Silu statického trenia si možno ozrejmiť pomocou nasledovného experimentu. Po horizontálnej rovine začneme na kváder pôsobiť malou ťahovou silou  $F$ , ktorá je rovnobežná s horizontálnou rovinou. Kváder, aj napriek pôsobeniu malej sily, svoju začiatočnú polohu nezmení. Pozorujeme, že poloha kvádra sa so vzrastajúcou veľkosťou sily nemení, a kváder sa pohne, až keď sila nadobudne určitú kritickú hodnotu  $F_s$ . Hraničnú hodnotu (Obr. 2), ktorú musíme prekonať, aby sme teleso uviedli do pohybu, nazývame silou statického trenia  $F_s$  a vypočítame ju ako  $F_s = \mu_s F_n$ . Koeficient  $\mu_s$  závisí od materiálu, od povrchovej úpravy jednotlivých dotykových plôch telesa a podložky (drsnosti, resp. hladkosti) a na množstve iných vplyvov ako je napr. teplota. Koeficient  $\mu_s$  prakticky nezávisí od veľkosti plochy vzájomného dotyku telies.

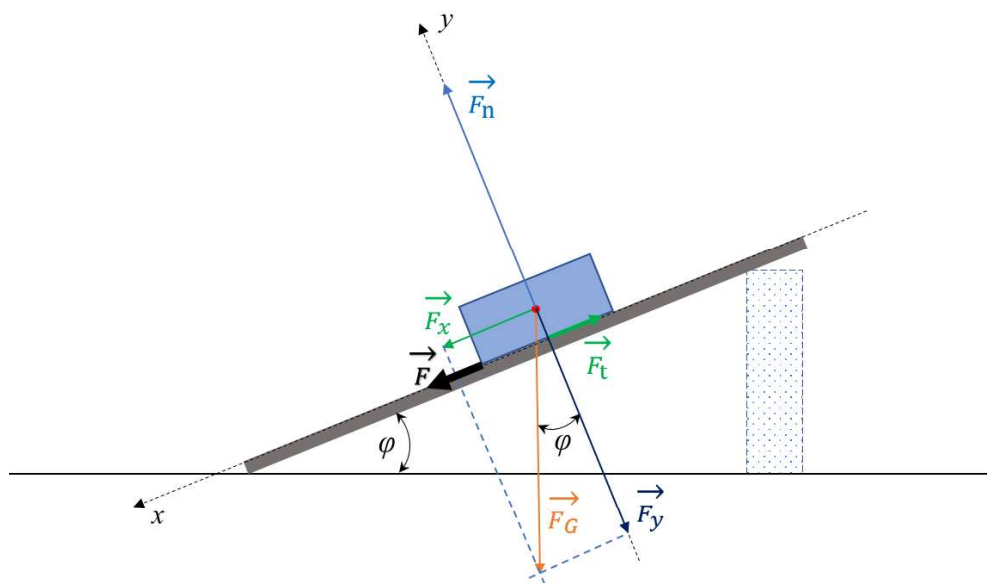


Obr. 2. Meranie šmykovej trecej sily od začiatku pôsobenia, kedy je kváder v pokoji, cez začiatok pohybu, až po približne rovnomerný pohyb

Keď veľkosť pôsobiacej sily  $F$  prekročí hodnotu sily statického trenia  $F_s$ , kváder sa „trhne“, stratí svoj pokojový kontakt s podložkou a začne sa pohybovať so zrýchlením  $a$ , na čo však už stačí len sila o veľkosti  $F_d$ . Ak sa teleso v dôsledku pôsobenia ťahovej sily  $F$  šmyka po drsnej podložke konštantnou rýchlosťou  $v$ , podľa zákona akcie a reakcie pôsobí na teleso rovnako veľká, opačne orientovaná sila, nazývaná **sila dynamického trenia**  $F_d$ . Aj pre silu dynamického trenia platí Amontonsov-Coulombov zákon, t. j.  $F_d = \mu_d F_n$ .

Ak je teleso na naklonenej rovine, tak sa situácia so silami trochu komplikuje, lebo tiaž telesa  $\mathbf{G}$  má iný smer ako normálová sila  $\mathbf{F}_n$  (Obr. 3). Tiaž telesa má vždy zvislý smer a normálová sila je vždy kolmá na povrch roviny, ktorej sa telesá svojimi povrchmi dotýkajú. Pri šmýkaní telesa po naklonenej rovine je výsledná sila spôsobujúca pohyb telesa rovná vektorovým súčtom tiažovej sily  $\mathbf{F}_G$ , normálovej sily (reakcie podložky)  $\mathbf{F}_n$  a sily trenia  $\mathbf{F}_t$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t. \quad (3)$$



Obr. 3. Teleso na naklonenej rovine a sily pôsobiace na teleso pri šmýkaní smerom nadol

Pri pohybe po naklonenej rovine, zvierajúcej s vodorovnou podložkou uhol  $\varphi$  je vhodné rozložiť pôsobiace sily na zložky rovnobežné s naklonenou rovinou (os  $x$ ) a na zložky kolmé na naklonenú rovinu (os  $y$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_G = [F_x, F_y] &= [G \sin(\varphi), -G \cos(\varphi)], & \mathbf{F}_n &= [0, F_n], \\ \mathbf{F}_t &= [-F_t, 0], & \mathbf{F} &= [ma, 0]. \end{aligned} \quad (4)$$

V smere rovnobežnom (os  $x$ ) s naklonenou rovinou platí

$$ma = G \sin(\varphi) - F_t. \quad (5)$$

V smere kolmom (os  $y$ ) na naklonenú rovinu platí

$$0 = -G \cos(\varphi) + F_n \quad \text{a teda} \quad F_n = G \cos(\varphi). \quad (6)$$

Po dosadení vyjadrenia normálovej sily z rovnice (6) do vzťahu (2) pre silu trenia dostávame

$$F_t = \mu_d F_n = \mu_d G \cos(\varphi) \quad (7)$$

a použitím rovnice (5), dostaneme

$$ma = mg \sin(\varphi) - \mu_d mg \cos(\varphi). \quad (8)$$

Z rovnice (8) matematickou úpravou dostaneme vzťah pre koeficient dynamického trenia

$$\mu_d = \frac{g \sin(\varphi) - a}{g \cos(\varphi)}, \quad (9)$$

kde  $\mu_d$  je koeficient dynamického trenia a  $a$  je zrýchlenie telesa. Keďže predpokladáme, že sila trenia nie je funkciou rýchlosti, tak šmykový pohyb je rovnomerne zrýchlený s konštantným zrýchlením (výsledná sila  $F = ma$  v rovnici (8) je konštantná). Ak zmeriame časový interval  $t$  od začiatku pohybu, za ktorý teleso prejde dráhu  $s$ , tak potom zrýchlenie vypočítame zo vzťahu

$$a = \frac{2s}{t^2}. \quad (10)$$

V prípade, že chceme určiť koeficient statického trenia, koniec dosky, na ktorom je položené teleso, budeme postupne dvíhať nahor, v dôsledku čoho zväčšujeme uhol  $\varphi$  naklonenej roviny. V hraničnom prípade, kedy  $\varphi = \varphi_k$ , je ešte zrýchlenie kvádra nulové ( $a = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ), potom z rovnice (8) pre koeficient statického trenia platí vzťah

$$\mu_s = \frac{\sin(\varphi_k)}{\cos(\varphi_k)} = \text{tg}(\varphi_k). \quad (11)$$

### **Pomôcky**

Naklonená rovina s regulovateľným uhlom sklonu, univerzálne teleso pre pokusy so šmykovým trením s trecími plochami telesa z rôznych materiálov (drevo, guma, koža a brúsny papier), teleso pre pokusy so šmykovým trením s možnosťou rozloženia telesa za účelom zdvojnásobenia trecej plochy, dĺžkové meradlo, stopky, zarážka.

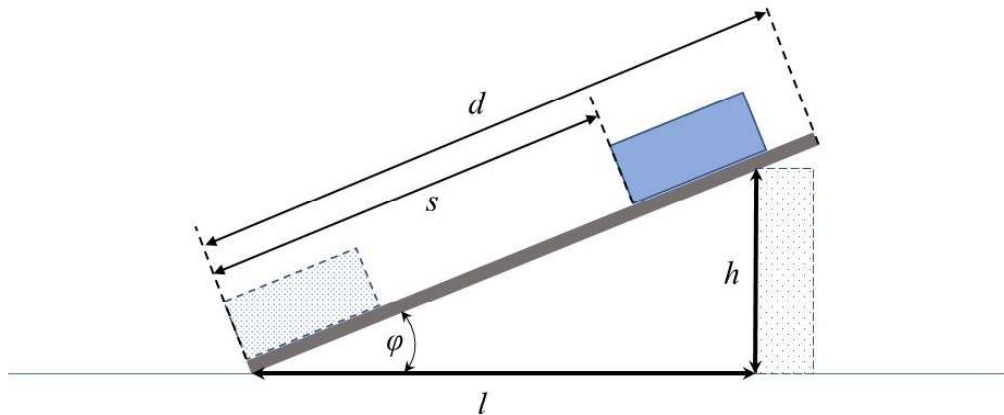
*Pozn.: Na domáci experiment nám ako naklonená rovina postačí zostrojená z podpretej dosky s dostatočnou šírkou, aby po nej dokázalo kĺzať teleso celou vyšetrovanou plochou, ako podložka môže poslúžiť pomerne ťažký a geometricky symetrický predmet a teleso s povrchom vhodným na kĺzanie.*

### **A. Určenie koeficientu statického trenia**

#### **Postup merania**

1. Na koniec dosky položíme teleso. Vzdialenosť prednej steny telesa od začiatku naklonenej roviny označíme  $s$ .
2. Dosku postupne dvíhame na jednom konci do určitej výšky naklonenej roviny  $h$ , pri ktorej je teleso v danom okamihu uvedené do pohybu, t. j. začne sa šmykať

(Obr. 4). Odmeriame výšku  $h$  a vzdialenosť  $l$  a hodnoty  $l$ ,  $h$  zaznamenáme do tabuľky 1. Meranie zopakujeme 10-krát.



Obr. 4. Parametre pri meraní na naklonenej rovine

- Opakujeme meranie podľa pokynov uvedených v bode 1 a 2 postupu merania pre rôzne materiály trecích plôch telesa. Hodnoty jednotlivých parametrov zaznamenávame do tabuľky 1.

Tabuľka 1.

$i$	$h_i$ (m)	$l_i$ (m)	$\varphi_i$ ( $^\circ$ )	$\mu_{s_i}$	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$
1					
2					
$\vdots$					
n					
				$\bar{\mu}_s = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

### Vyhodnotenie merania

- Vypočítame koeficienty statického trenia  $\mu_{s_i}$  pre jednotlivé hodnoty výšky  $h$  a vzdialenosti  $l$  podľa vzťahu

$$\mu_{s_i} = \frac{h_i}{l_i}.$$

- Určíme priemernú hodnotu (aritmetický priemer) koeficientu statického trenia  $\bar{\mu}_s$ , strednú kvadratickú odchýlku jedného merania  $\sigma_{\mu_s}$  a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru  $\sigma_{\bar{\mu}_s}$ . Ak je niektorá z 10 hodnôt  $\mu_{s_i}$  mimo interval  $(\mu_s - 3\sigma, \mu_s + 3\sigma)$ , vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a neistoty merania znovu prepočítame.
- Výsledok merania uvádzame v tvare  $\mu_s = (\bar{\mu}_s \pm \sigma_{\bar{\mu}_s})$ .
- Vypočítame kritický uhol zo vzťahu  $\varphi_k = \arctg(\mu_s)$ .



## B. Určenie koeficientu dynamického trenia

### Postup merania

1. Meranie parametrov pre určenie koeficientu dynamického trenia uskutočníme s telesom s materiálmi trecích plôch vyšetřovaných v úlohe po A.
2. Na naklonenú rovinu, ktorá zvierá s podložkou uhol  $\varphi > \varphi_k$  (kritický uhol  $\varphi_k$  poznáme z úlohy A. Určenie koeficientu statického trenia) umiestnime teleso tak, aby jeho predná stena bola vo vzdialenosti  $s$  od začiatku naklonenej roviny (Obr. 4). Toto teleso pridržíme v začiatkovej polohe a súčasne so spustením stopiek ho uvoľníme. Meriame časový interval  $t$ , za ktorý sa teleso presunie z jedného konca naklonenej roviny na druhý koniec (prejde vzdialenosť  $s$ ). Uhol  $\varphi$  určíme na základe odmeraných vzdialeností  $h$  a  $l$  výpočtom zo vzťahu  $\varphi = \arctg\left(\frac{h}{l}\right)$ .
3. Meranie opakujeme 10-krát pre 2 rôzne uhly  $\varphi$  väčšie ako kritický uhol  $\varphi_k$ , t. j. vykonáme 2-krát po 10 meraní. Namerané hodnoty  $s$ ,  $t$ ,  $h$  a  $l$  zapisujeme do tabuľky 2.

Tabuľka 2.

$\varphi_1 = \arctg(h/l) = \dots$					
	$h = \dots \text{ m}$		$l = \dots \text{ m}$		
$i$	$t_i$ (s)	$s$ (m)	$a_i$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$\mu_{d_i}$	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$
1					
2					
⋮					
n					
				$\bar{\mu}_d = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

$\varphi_2 = \arctg(h/l) = \dots$					
	$h = \dots \text{ m}$		$l = \dots \text{ m}$		
$i$	$t_i$ (s)	$s$ (m)	$a_i$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$\mu_{d_i}$	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_d - \mu_{d_i})^2$
1					
2					
⋮					
n					
				$\bar{\mu}_d = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

### Vyhodnotenie merania

1. Z nameraných hodnôt doby šmýkania  $t$  a dráhy  $s$ , po ktorej sa teleso pohybovalo, určíme zrýchlenie  $a$  zo vzťahu (10) a koeficient dynamického trenia  $\mu_d$  zo vzťahu (9).
2. Určíme priemernú hodnotu  $\mu_d$  a prislúchajúce neistoty merania  $\sigma_{\mu_d}$  a  $\sigma_{\bar{\mu}_d}$ .
3. Ak je niektorá z hodnôt  $\mu_{d_i}$  mimo interval  $(\mu_d - 3\sigma, \mu_d + 3\sigma)$ , vylúčime ju spomedzi meraných hodnôt a priemernú hodnotu a neistoty merania znovu prepočítame.

4. Výsledok merania uvádzame v tvare  $\mu_{d_i} = (\bar{\mu}_{d_i} \pm \sigma_{\bar{\mu}_{d_i}})$ .
5. Vypočítame vážený priemer koeficientu dynamického trenia a jeho neistotu z dvoch priemerných hodnôt  $\mu_d$  získaných pre dva uhly  $\varphi$ .
6. Výslednú hodnotu koeficientu dynamického trenia uvádzame v tvare  $\mu_d = (\bar{\mu}_d \pm \sigma_{\bar{\mu}_d})$ .

### C. Overiť závislosť trecej sily od obsahu dotykovej plochy

#### Postup merania

1. Zostavíme meraciu aparátúru podľa obrázku (Obr. 4).
2. Na jeden koniec dosky položíme teleso s obsahom trecej plochy  $S_1$ . Vzdialenosť prednej steny telesa od začiatku dosky (vytvorenej naklonenej roviny) označíme  $s$ .
3. Koniec dosky, na ktorom je položené teleso, postupne dvíhame do určitej výšky  $h$ , pri ktorej je teleso v danom okamihu uvedené do pohybu, t. j. začne sa šmýkať (Obr. 4). Odmeriame výšku  $h$  a vzdialenosť  $l$  a hodnoty  $l$ ,  $h$  zaznamenáme do tabuľky 3. Meranie zopakujeme 10-krát.
4. Na koniec dosky položíme teleso rovnakej hmotnosti s trecou plochou vytvorenou z rovnakého materiálu ako v bode 2 postupu merania no s veľkosťou dotykovej plochy  $S_2$ . Opakujeme meranie podľa pokynov uvedených v bode 2 a 3 postupu merania a hodnoty jednotlivých parametrov zaznamenávame do tabuľky 3.

Tabuľka 3.

$S_1 = a_1 b_1$					
$a_1 = \dots$ m			$b_1 = \dots$ m		
$i$	$h_i$ (m)	$l_i$ (m)	$\varphi_i$ (°)	$\mu_{s_i}$	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$
1					
2					
⋮					
n					
				$\bar{\mu}_s = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

$S_2 = a_2 b_2$					
$a_2 = \dots$ m			$b_2 = \dots$ m		
$i$	$h_i$ (m)	$l_i$ (m)	$\varphi_i$ (°)	$\mu_{s_i}$	$\Delta_i^2 = (\bar{\mu}_s - \mu_{s_i})^2$
1					
2					
⋮					
n					
				$\bar{\mu}_s = \dots$	$\sum \Delta_i^2 = \dots$

### Vyhodnotenie merania

1. Vypočítame koeficienty statického trenia  $\mu_{s_i}$  pre jednotlivé hodnoty výšky  $h_i$  a vzdialenosti  $l_i$  podľa vzťahu

$$\mu_{s_i} = \frac{h_i}{l_i}.$$

Koeficient statického trenia vypočítame pre teleso s obsahom dotykovej plochy  $S_1$  aj teleso s obsahom dotykovej plochy  $S_2$ .

2. Určíme priemernú hodnotu koeficientu statického trenia  $\bar{\mu}_s$ , strednú kvadratickú odchýlku jedného merania  $\sigma_{\mu_s}$  a strednú kvadratickú odchýlku aritmetického priemeru  $\sigma_{\bar{\mu}_s}$ .
3. Výsledok merania uvádzame pre obidve merania v tvare  $\mu_s = (\bar{\mu}_s \pm \sigma_{\bar{\mu}_s})$ .
4. Vypočítame kritický uhol zo vzťahu  $\varphi_k = \arctg(\mu_s)$ .
5. Porovnáme hodnoty koeficientov statického trenia.

*Pozn.:* Podľa Amontonsovho-Coulombovho zákona, veľkosť trecej sily  $F_t$  nezávisí od obsahu dotykovej plochy, ale je priamo úmerná veľkosti normálovej zložky sily  $F_n$ , vzťah (2). Tento výrok možno jednoducho overiť, ak položíme do rovnosti dve trecie sily, ktoré vznikajú pri vzájomnom pôsobení telesa s rôznou dotykovou plochou  $S_1$ ,  $S_2$  s podložkou, t. j. ak platí  $F_{t_1} = F_{t_2}$ . Po dosadení za  $F_t$  zo vzťahu (2) platí  $\mu_{s_1} F_n = \mu_{s_2} F_n$ , pričom veľkosť normálovej zložky sily sa pri identickom telese a konštantnom uhle nemení. Z toho vyplýva, že veľkosť koeficientu statického trenia je rovnaká pre rôzne veľkosti dotykových plôch, t. j.  $\mu_{s_1} = \mu_{s_2}$ .

6. V závere diskutujeme o získaných výsledkoch, možných príčinách chýb a platnosti Amontonsovho-Coulombovho zákona.

Za odbornú náplň tohto vydania zodpovedá odborný redaktor prof. Ing. Dušan Pudiš, PhD.

Autori RNDr. Gabriela Tarjániová, PhD., Ing. Tomáš Mizera, PhD.

Názov **Návody k laboratórnym cvičeniam 1**

Vydala Žilinská univerzita v Žiline v EDIS-vydavateľstve UNIZA v roku 2023  
ako svoju 4933. publikáciu

Vydanie prvé, publikované elektronicky

AH 10,14

ISBN 978-80-554-2044-8

Rukopis vo vydavateľstve neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

[www.edis.uniza.sk](http://www.edis.uniza.sk)