

## OPERÁCIE S VEKTORMI (TÝŽDEŇ 1)

- 1a.) Vypočítajte skalárny súčin vektora  $a = (2,3,-1)$  s vektorom  $b = (1,-1,4)$ .
- 2a.) Vypočítajte zložky vektora  $c = a - b$ , keď  $a = (5,-2,4)$ ;  $b = (1,-1,4)$ .
- 3a.) Nájdite zložky vektora  $k \cdot v$ , keď  $k = 2$ ,  $v = 4i - 3j + k$ .
- 4b.) Nájdite zložky jednotkového vektora, rovnobežného s vektorom  $u = (5,0,-12)$ .
- 5b.) Nájdite zložky vektorového súčinu  $r \times v$ , kde  $r = (-1,3,-2)$ ;  $v = (4,-1,2)$ .
- 6c.) Vyjadrite vektor  $c = 5i + 3j - 6k$  ako lineárnu kombináciu vektorov  $e_1 = j + k$ ,  $e_2 = i + k$ ,  $e_3 = i + j$ .
- 1a.) Skalárny súčin dvoch vektorov je rovný 10. Aký uhol (v radiánoch) zvierajú tieto vektory, ak ich veľkosti sú rovné 6 a 3.
- 2a.) Vypočítajte veľkosť vektora  $a = (3,4,-12)$ .
- 3a.) Nájdite zložky súčtu dvoch vektorov  $a = (5,-3,8)$  a  $b = (-4,6,-2)$ .
- 4b.) Vypočítajte vektorový súčin vektorov  $v = i - 3j + 2k$ ,  $u = 2i + k$ .
- 5b.) Rozložte vektor veľkosti 10 na dva navzájom kolmé vektory, z ktorých jeden má dĺžku 6. Aká je veľkosť druhého vektora?
- 6c.) Nájdite konštanty  $r, s$  tak, aby platilo  $ra + sb = c$ , kde  $a = (3,2,0)$ ,  $b = (1,4,0)$ ,  $c = (5,1,0)$ .
- 1a.) Vypočítajte, aký uhol (v radiánoch) zvierajú vektory  $a, b$  a aký uhol zvierajú vektory  $a, c$  keď viete, že  $c = a \times b$ ,  $|a| = 3$ ,  $|b| = 2$ ,  $|c| = 4$ .
- 2a.) Vypočítajte veľkosť vektora  $c = (4,-7,3)$ .
- 3a.) Čomu sa rovná súčet vektorov  $a = (2,1,-3)$ ,  $b = (3,-1,0)$ ?
- 4b.) Nájdite zložky vektora  $v$ , aby platilo  $a + v = b$ , keď  $a = (-1,1,0)$ ,  $b = (2,0,1)$ .
- 5b.) Vypočítajte veľkosť skalárneho súčinu  $(a \times b) \cdot a$ , keď  $a = (3,-2,4)$ ,  $b = (2,-1,1)$ .
- 6c.) K vektoru  $a$  veľkosti 5 pripočítame vektor  $b$  veľkosti 2. Výsledný vektor má veľkosť 5. Čomu je rovný skalárny súčin  $a \cdot b$ ?
- 1a.) Vypočítajte veľkosť vektora  $a = (4,2,-4)$ .
- 2a.) Vypočítajte zložky vektora  $2a + 3b$ , kde  $a = (1,2,1)$ ,  $b = (-1,2,3)$ .
- 3a.) Vektory  $a$  a  $b$  zvierajú uhol  $\pi/6$ , ich veľkosti sú  $a = 4$ ,  $b = 3$ . Nájdite ich skalárny súčin.
- 4b.) Aký uhol zvierá vektor  $v = i + 3j - 2k$  s osou  $Y$ ?
- 5b.) Vektory  $a, b$  zvierajú uhol  $\pi/4$ . Nájdite veľkosť vektora  $a + b$ , keď  $a = 3$ ,  $b = 2$ .
- 6c.) Vektor  $c$  veľkosti 13 je kolmý na vektor  $a = (4,-1,0)$  aj na vektor  $b = (0,1,-3)$ . Nájdite jeho zložky.
- 7) Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme preplávali kolmo cez rieku? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [ $\cos\alpha = -0,6$ ; 250 s]
- 8) Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme sa dostali najrýchlejšie na druhý breh? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [ $\cos\alpha = 0$ ; 0,58 m/s; 200 s]

## KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - DERIVÁCIE (TÝŽDEŇ 2)

PRVÉ štyri príklady = matematika

Príklady 5 a 6 = fyzika:

- grafy polohy  $x(t)$
- okamžitá rýchlosť
- okamžité zrýchlenie
- priemerná rýchlosť

Posledný príklad: spája týždeň 1 a 2

Domáca úloha: dva **podobné** príklady

### Derivácie

1.  $x(t) = t^3 + 2, \frac{d}{dt}x(t) = ?$

2.  $x(t) = 2\sin t + 2t^2$

3.  $x(t) = t \sin t$

4.  $x(t) = 3e^{2t} + \sin 3t$

5.  $x(t) = k_1 t + k_2, k_1 = 2\text{ms}^{-1}, k_2 = -2\text{m}$

a) graf  $x(t)$  ?

b) aký je to pohyb ?

6.  $x(t) = k_1 t^3 + k_2 t^2 + k_3 t,$

$k_1 = 2\text{ms}^{-3}, k_2 = -3\text{ms}^{-2}, k_3 = -2\text{ms}^{-1}$

a) graf  $x(t)$ , aký je to pohyb ?

b) okamžitá rýchlosť  $v = \frac{d}{dt}x(t)$  ?

c) okamžité zrýchlenie  $a = \frac{d}{dt}v$  ?

d) priemerná rýchlosť

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  na intervale  $(0, 2)\text{s}$  ?

7) Polohový vektor hmotného bodu závisí od času nasledovne:

$$\mathbf{r} = A \cdot \cos(C \cdot t) \cdot \mathbf{i} + A \cdot \sin(C \cdot t) \cdot \mathbf{j} + B \cdot t \cdot \mathbf{k},$$

kde  $A, B, C$  sú konštanty. Nájdite závislosť vektora rýchlosti a zrýchlenia od času, a tiež veľkosť polohového vektora, rýchlosti a zrýchlenia v čase  $t = 0$ .

## KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - INTEGRÁLY (TÝŽDEŇ 3)

- Daná poloha  $x(t)$ 
  - okamžitá rýchlosť  $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
  - okamžité zrýchlenie  $a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$
  - priemerná rýchlosť  $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$
- Dané  $a(t)$ 
  - okamžitá rýchlosť  $v(t) = \int a(t) dt$
  - poloha  $x(t) = \int v(t) dt$
- špeciálny prípad  $a(t) = a = \text{konšt}$ 
  - $v(t) = at + v_0$
  - $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

1.) Aká je priemerná rýchlosť pohybu automobilu v prípade, že:

a) prvú polovicu času svojho pohybu sa pohybuje rýchlosťou  $v_1 = 100 \text{ km.h}^{-1}$  a druhú polovicu času sa pohybuje rýchlosťou  $v_2 = 60 \text{ km.h}^{-1}$ ;

b) polovicu z celkovej svojej dráhy prejde rýchlosťou  $v_1 = 100 \text{ km.h}^{-1}$  a druhú polovicu dráhy rýchlosťou  $v_2 = 60 \text{ km.h}^{-1}$ ?

[a)  $v_p = 80 \text{ km.h}^{-1}$ ; b)  $v_p = 75 \text{ km.h}^{-1}$ ]

2.) Elektrický rušeň sa rozbíha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie, a to tak, že v čase  $t_1 = 100 \text{ s}$  má zrýchlenie hodnotu  $a_1 = 0.5 \text{ ms}^{-2}$ . Vypočítajte, akú dráhu prejde za prvú minútu svojho pohybu a aká je jeho rýchlosť na konci prvej minúty. [180 m; 9 m/s]

3.) Automobil idúci rýchlosťou 90 km/hod rovnomerne spomalí na rýchlosť 54 km/hod na dráhe 100 m. Aké je zrýchlenie automobilu a ako dlho trvá brzdenie? [2 m.s<sup>-2</sup>; 5 s]

4.) Teleso bolo vrhnuté zo zemského povrchu zvisle nahor rýchlosťou  $v_0 = 4,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Súčasne z maximálnej výšky, ktorú toto teleso dosiahne, je vrhnuté zvisle nadol druhé teleso tou istou začiatočnou rýchlosťou  $v_0$ . Treba určiť čas  $t^*$ , v ktorom sa obidve telesá stretnú, vzdialenosť  $h$  od zemského povrchu, v ktorej sa stretnú a rýchlosti obidvoch telies  $v_1^*$  a  $v_2^*$  v okamihu stretnutia. Odpor vzduchu zanedbajte!

[ $t = 0,125 \text{ s}$ ;  $d = 0,535 \text{ m}$  od zemského povrchu;  $v_1^* = 3,675 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $v_2^* = 6,125 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ]

## KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU – KRUHOVÝ POHYB (TÝŽDEŇ 4)

daný polárny uhol  $\varphi = \varphi(t)$

okamž. uhlová rýchlosť  $\omega = \frac{d}{dt} \varphi(t)$

okamžité uhlové zrýchlenie  $\varepsilon = \frac{d}{dt} \omega(t)$

$|\vec{v}| = v = \omega r$

$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_m$

dané  $\varepsilon = \varepsilon(t)$

$|\vec{a}_t| = a_t = \frac{d}{dt} v = \varepsilon r$

uhlová rýchlosť  $\omega = \int \varepsilon(t) dt$

polárny uhol  $\varphi = \int \omega(t) dt$

$|\vec{a}_m| = a_m = \frac{v^2}{r}$

$= \omega^2 r$

1) Koleso sa z pokojového stavu dáva do otáčavého pohybu so stálym uhlovým zrýchlením  $\varepsilon = 2 \text{ s}^{-2}$ . Koľkokrát sa otočí za prvých 15 sekúnd svojho otáčania? [ $N = 35,8$ ]

2) Koleso otáčajúce sa s frekvenciou 600 otáčok za minútu sa vplyvom trenia zastaví, pričom vykoná ešte 500 otáčok. Za aký čas sa koleso zastaví a aké bude pritom jeho uhlové zrýchlenie? [ $167 \text{ s}$ ;  $22,6 \text{ s}^{-2}$ ]

3) Hmotný bod koná pohyb po kružnici s polomerom  $R = 20 \text{ cm}$  so stálym uhlovým zrýchlením  $\varepsilon = 2 \text{ s}^{-2}$ . Vypočítajte hodnotu tangenciálneho, normálneho a celkového zrýchlenia na konci 4-tej sekundy od začiatku pohybu, keď v čase  $t = 0 \text{ s}$  bol hmotný

bod v pokoji!

$$[a_t = 40 \text{ cm.s}^{-2}; a_n = 1280 \text{ cm.s}^{-2}; a = 1280,6 \text{ cm.s}^{-2}]$$

4) Po opustení stanice rýchlosť vlaku rovnomerne narastá a po troch minútach od opustenia stanice dosahuje na dráhe zakrivenej do tvaru kružnice s polomerom  $R = 800 \text{ m}$  hodnotu  $72 \text{ km.h}^{-1}$ . Treba určiť hodnotu tangenciálneho, normálového a celkového zrýchlenia po dvoch minútach od okamihu opustenia stanice.

$$[a_t = 0,111 \text{ m.s}^{-2}; a_n = 0,222 \text{ m.s}^{-2}; a = 0,248 \text{ m.s}^{-2}]$$

5) Koleso polomeru  $10 \text{ cm}$  sa otáča tak, že bod na jeho obvode má počas pohybu rovnako veľké tangenciálne aj normálové zrýchlenie. Za aký čas dosiahne rýchlosť tohoto bodu hodnotu  $5 \text{ cm/s}$ , keď na začiatku mala veľkosť  $2 \text{ cm/s}$  ? [3 s]

## DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU – NEWTONOVE ZÁKONY (TÝŽDEŇ 5)

1) Na hmotný bod hmotnosti 2 kg pôsobia sily  $F_1 = (3, 2, -4)$  N,  $F_2 = (2, -6, -2)$  N a  $F_3 = (7, 0, 1)$  N. Nájdite zložky a veľkosť zrýchlenia hmotného bodu.  
[[6,-2,-2.5) m.s<sup>-2</sup>; 6.8 m.s<sup>-2</sup>]

2) Motor auta celkovej hmotnosti 960 kg má ťažnú silu 1600 N. Za koľko sekúnd môže auto dosiahnuť rýchlosť  $v = 54$  km.h<sup>-1</sup>?  
[ $t = 9$  s]

3) Železničný vozeň sa pohybuje po vodorovnej priamej trati a brzdíme ho silou, ktorá sa rovná 0,1 tiaže vozňa. Vypočítajte čas meraný od začiatku brzdenia, za ktorý vozeň zastaví, ako aj dráhu, ktorú od začiatku brzdenia až do zastavenia prejde, ak v okamihu, keď sa začalo brzdiť, mal vozeň rýchlosť  $v_0 = 72$  km.h<sup>-1</sup>!  
[ $t = 20,4$  s;  $s = 204$  m]

4) Na hmotné teleso pôsobí stále v tom istom smere sila, ktorej hodnota závisí od času podľa vzťahu  $F = F_0 - kt$ , kde  $F_0 = 36$  N a  $k = 6$  N.s<sup>-1</sup>. Na začiatku bolo teleso v pokoji. Počas prvých 10 sekúnd urazilo dráhu 100 m. Vypočítajte jeho hmotnosť! [ 8 kg ]

5) Teleso hmotnosti  $m$  leží na naklonenej rovine, zvierajúcej uhol  $\pi/6$  s vodorovnou rovinou. Vypočítajte, s akým zrýchlením sa bude teleso pohybovať, keď koeficient trenia telesa o podložku je 0.2 a koľko percent potenciálnej energie telesa sa pri pohybe premení trením na teplo ? [3,2 m.s<sup>-2</sup>]

## DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU – PRÁCA SILY, MOMENT SILY, ZACHOVANIE ENERGIE (TÝŽDEŇ 6)

- 1) Sila pôsobiaca na teleso má veľkosť 5 N. Pod účinkom tejto sily sa teleso presunie o 3 m, pričom sila vykoná prácu 9 J. Aký uhol zvierá sila s vektorom posunutia? [ $\cos\alpha = 0,6$ ]
- 2) Vypočítajte, akú prácu vykoná sila  $F = (3, 2, 4)$  N, keď sa jej pôsobisko presunie z bodu  $A = (2, 1, 0)$  m do bodu  $B = (3, -4, 5)$  m. [13 J]
- 3) Akú prácu je treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o 5 cm, keď na jej stlačenie o 1 cm treba silu 30 kN, a keď platí, že sila je priamo úmerná skráteniu pružiny? [3750 J]
- 4) Drevený valec je ponorený vo vode do  $2/3$  svojej výšky. Akú prácu treba vykonať na vytiahnutie valca z vody, keď polomer valca je  $r = 10$  cm a jeho výška  $h = 60$  cm? [ $A = 24,1$  J]
- 5) Sila veľkosti 15 N má otáčavý účinok na teleso 45 Nm. Aký uhol zvierá sila s polohovým vektorom pôsobiska sily, ak je veľkosť tohoto vektora 6 m? [ $\alpha = \pi/6$ ]
- 6) Vypočítajte veľkosť a zložky momentu sily, keď sila  $F = (3, 4, 0)$  N, ktorej pôsobisko leží v bode  $A = (2, 5, 0)$  m uvádza do otáčavého pohybu teleso okolo bodu  $B = (-1, 4, 3)$  m. [17,5 N.m; (12;-9;9)]
- 7) Ak na pružinu, ktorá sa nachádza vo zvislom puzdre, položíme guľôčku hmotnosti  $m = 0,1$  kg, stlačí sa pružina o  $\Delta s = 2$  mm. Do akej výšky vyletí guľôčka, keď pružinu stlačíme o  $s_1 = 15$  cm a náhle uvoľníme? [ $h = s_1^2 / (2 \Delta s) = 5,62$  m]



## DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU – GRAVITAČNÉ POLE, ZACHOVANIE ENERGIE (TÝŽDEŇ 7)

1) Ako sa líši gravitačná sila, ktorou pôsobí Zem na telesá na zemskom povrchu v nadmorskej výške  $h = 6400$  m a pri hladine mora (polomer Zeme  $R = 6378$  km)?

$$[F_h = 0,998 F_0]$$

2) Nájdite zrýchlenie, ktorým by telesá padali na povrchu Mesiaca, ak predpokladáme, že na telesá pôsobí len gravitačné pole Mesiaca, a keď vieme, že hmotnosť a polomer Mesiaca sú  $M_M = 1/81 M_Z$ ,  $R_M = 1/4 R_Z$ , kde  $M_Z$  je hmotnosť Zeme a  $R_Z$  je polomer Zeme.

$$[g_M = 0,2 g_Z = 1,962 \text{ m.s}^{-2}]$$

3) Teleso bolo vrhnuté šikmo nahor pod uhlom  $\pi/4$  tak, že po 2 sekundách letu bola jeho rýchlosť rovnako veľká, ako na začiatku. Aká bola počiatočná rýchlosť telesa? [14 m/s]

4) V akej vzdialenosti  $r_l$  od stredu Zeme bude predmet, ktorý sa nachádza medzi Zemou a Mesiacom, v beztiažovom stave?. Vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme  $r = 384400$  km, hmotnosť Mesiaca =  $1/81$  hmotnosti Zeme. ( $r_l = 346000$  km)

5) Nájdite hodnotu rýchlosti  $v_0$ , ktorú treba udeliť v smere zvislom nahor telesu nachádzajúcemu sa na povrchu Zeme, aby sa dostalo do výšky rovnajúcej sa zemskému polomeru, ktorý má hodnotu  $R = 6378$  km. (Odpor vzduchu zanedbajte.)

$$[v_0 = 7,9 \text{ km.s}^{-1}]$$

## DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV A TUHÉHO TELESA - ŤAŽISKO, ZRÁŽKY, MOMENT ZOTRVAČNOSTI (TÝŽDEŇ 8)

1) Štyri hmotné body s hmotnosťami  $m_1 = 2$  g,  $m_2 = 5$  g,  $m_3 = 10$  g a  $m_4 = 7$  g sú rozložené v priestore postupne tak, že zaujímajú polohy  $A_1(3,4,5)$ ,  $A_2(-2,-3,-4)$ ,  $A_3(-4,2,7)$ ,  $A_4(1,-4,-6)$ , kde súradnice v zátvorkách sú udané v cm. Nájdite polohu ťažiska sústavy hmotných bodov!  $[(-1,54;-0,62;0,75)$  cm]

2) Nájdite polohu ťažiska drôtu ohnutého do tvaru štvrtkružnice s polomerom  $R = 10$  cm.  $[x^* = y^* = 2R / \pi = 6,3$  cm, pričom začiatok súradnicovej sústavy je v strede kružnice a súradnicové osi sú polomery ohraničujúce štvrtkružnicu]

3) Nájdite polohu ťažiska drôtu ohnutého do tvaru polkružnice s polomerom  $R = 10$  cm.

4) Do telesa tvaru gule, zaveseného na vlákne, narazí vodorovne letiaci náboj, ktorého hmotnosť je 1000-krát menšia ako je hmotnosť telesa, a uviazne v tomto telese. Aká bola rýchlosť náboja pri náraze, keď sa teleso po náraze vychýlilo zo svojej rovnovážnej polohy tak, že záves zvieral so zvislým smerom uhol  $10^\circ$ ? Dĺžka závesu od miesta upevnenia do stredu gule je  $l = 1$  m.

$[v = 550$  m.s<sup>-1</sup>]

5) O koľko treba predĺžiť homogénnu tyč dĺžky  $l = 0,75$  m, aby sa jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os kolmú na tyč a prechádzajúcu ťažiskom tyče zdvojnásobil?

$[pre m = konšt. \Delta l = 0,31$  m;  $pre S = konšt. \Delta l = 0,19$  m]

6) Tyč dĺžky 1 m je upevnená tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi prechádzajúcej koncovým bodom tyče. Akú rýchlosť musíme udeliť koncovému bodu tyče, aby sa tyč pri svojom vychýlení zastavila vo vodorovnej polohe?  $[5,43$  m/s]

## KMITAVÝ POHYB (TÝŽDEŇ 9)

1) Aká je frekvencia netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti 2 g, keď amplitúda pohybu je 5 cm a celková energia hmotného bodu pri tomto pohybe je 0.3 J ?

2) Horizontálna doska koná harmonický pohyb vo vodorovnom smere s periódou  $T = 5$  s. Teleso, ktoré leží na doske, sa začína klzať, keď amplitúda kmitov dosiahne hodnotu  $x_0 = 0,5$  m. Aký je koeficient trenia medzi závažím a doskou?  
[ $\mu = 0,08$ ]

3) Na doske leží závažie hmotnosti  $m = 2$  kg. Doska koná harmonický pohyb vo zvislom smere s periódou  $T = 0,5$  s a s amplitúdou  $x_0 = 3$  cm. Vyjadrite silu  $F$ , ktorou závažie tlačí na dosku a vypočítajte amplitúdu tejto sily.  
[ $F_{max} = 29$  N]

4) Homogénna kruhová doska polomeru 15 cm a hmotnosti 2 kg je upevnená na okraji tak, že sa môže kývať okolo vodorovnej osi kolmej na dosku. Vypočítajte jej dobu kmitu.

5) V akej vzdialenosti od stredu máme upevniť homogénnu kruhovú dosku s polomerom 10 cm, aby sa kývala ako fyzikálne kyvadlo s minimálnou periódou ? [7 cm]

## VLASTNOSTI LÁTOK, MECHANIKA KVAPALÍN (TÝŽDEŇ 10)

1) V nádobe tvaru hranola je v bočnej stene kruhový otvor polomeru  $r = 20$  cm uzavretý zátkou. Aká je celková sila, ktorá pôsobí na zátku, keď stred kruhového otvoru je vo výške  $h_1 = 50$  cm nad dnom, a keď nádoba je naplnená vodou do výšky  $h = 1$  m?

$$[F = \pi r^2 \rho g (h - h_1) = 616 \text{ N}]$$

2) Aká je celková sila, ktorou voda pôsobí na hať, keď šírka hate je 20m a hĺbka vody je 5m?

3) O koľko sa predĺži oceľový prút dĺžky 25 m pôsobením vlastnej váhy, keď visí upevnený za jeden koniec? Prierez prútu je  $1 \text{ cm}^2$ , hustota ocele je  $7800 \text{ kg/m}^3$ , modul pružnosti v ťahu je 210 GPa.

4) Železná tyč sa dotýka obidvoma koncami pevných stien. Vypočítajte, o koľko ju musíme zohriať, aby na steny pôsobila tlakom 5 MPa? Modul pružnosti v ťahu železa je  $E = 206 \text{ GPa}$ .