

OPERÁCIE S VEKTORMI – OPAKOVANIE ZÁKLADOV FYZIKY (TÝŽDEŇ 1)

1. Vypočítajte skalárny súčin vektora $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ s vektorom $\mathbf{b} = (1, -1, 4)$.
2. Vyjadrite, zapíšte zložky vektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, keď $\mathbf{a} = (5, -2, 4)$; $\mathbf{b} = (1, -1, 4)$.
3. Nájdite zložky vektora $k \cdot \mathbf{v}$, keď $k = 2$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
4. Nájdite zložky jednotkového vektora, rovnobežného s vektorom $\mathbf{u} = (5, 0, -12)$.
5. Nájdite zložky vektorového súčinu $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, kde $\mathbf{r} = (-1, 3, -2)$; $\mathbf{v} = (4, -1, 2)$.
6. Vyjadrite vektor $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{e}_1 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.
7. Skalárny súčin dvoch vektorov je rovný 10. Aký uhol (v radiánoch) zvierajú tieto vektory, ak ich veľkosti sú rovné 6 a 3.
8. Vypočítajte veľkosť vektora $\mathbf{a} = (3, 4, -12)$.
9. Nájdite zložky súčtu dvoch vektorov $\mathbf{a} = (5, -3, 8)$ a $\mathbf{b} = (-4, 6, -2)$.
10. Vypočítajte vektorový súčin vektorov $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
11. Rozložte vektor veľkosti 10 na dva navzájom kolmé vektory, z ktorých jeden má dĺžku 6. Aká je veľkosť druhého vektora?
12. Nájdite konštanty r, s tak, aby platilo $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{a} = (3, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 4, 0)$, $\mathbf{c} = (5, 1, 0)$.
13. Vypočítajte, aký uhol (v radiánoch) zvierajú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a aký uhol zvierajú vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ keď viete, že $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 4$.
14. Vypočítajte veľkosť vektora $\mathbf{c} = (4, -7, 3)$.
15. Čomu sa rovná súčet vektorov $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (3, -1, 0)$?
16. Nájdite zložky vektora $\mathbf{v}$, aby platilo $\mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{b}$, keď $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 1)$.
17. Vypočítajte veľkosť súčinu $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$, keď $\mathbf{a} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$.
18. K vektoru $\mathbf{a}$ veľkosti 5 pripočítame vektor $\mathbf{b}$ veľkosti 2. Výsledný vektor má veľkosť 5. Čomu je rovný skalárny súčin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$?
19. Vypočítajte veľkosť vektora $\mathbf{a} = (4, 2, -4)$.
20. Vypočítajte zložky vektora $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 3)$.
21. Vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ zvierajú uhol $\pi/6$, ich veľkosti sú $a = 4$, $b = 3$. Nájdite ich skalárny súčin.
22. Aký uhol zvierá vektor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ s osou y ?
23. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ zvierajú uhol $\pi/4$. Nájdite veľkosť vektora $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, keď $a = 3$, $b = 2$.
24. Vektor $\mathbf{c}$ veľkosti 13 je kolmý na vektor $\mathbf{a} = (4, -1, 0)$ aj na vektor $\mathbf{b} = (0, 1, -3)$. Nájdite jeho zložky.
25. Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme preplávali kolmo cez rieku? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [$\cos\alpha = -0,6$; 250 s]
26. Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme sa dostali najrýchlejšie na druhý breh? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [$\cos\alpha = 0$; 0,58 m/s; 200 s]
27. V rieke širokej 300 metrov tečie voda rýchlosťou veľkosti 1,2 m/s. Loď sa pohybuje vzhľadom na vodu rýchlosťou veľkosti 5 m/s. V akom smere sa má pohybovať loď, keď sa má dostať na druhý breh za najkratší čas a aký je tento čas? O koľko sa odkloní od svojho pôvodného smeru? [$\alpha = 13,5^\circ$; $t = 60$ s]

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU (FUNKCIE A DIFERENCIÁLNY POČET) (TÝŽDEŇ 2)

- (1) Analýzou pohybu vozidla bolo zistené: vozidlo z pôvodnej rýchlosti 108 km/h brzdilo podľa časovej závislosti $v = v_0 - b \cdot t^2$ a zastavilo za čas 20 s . Na akej vzdialenosti vozidlo zastavilo a akú maximálnu hodnotu dosiahla veľkosť zrýchlenia počas pohybu? (400 m ; -3 m/s^2)
- (2) Vlaková súprava TGV sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie – z nulovej hodnoty na 0.48 ms^{-2} po 100 sekundách. Vypočítajte, akú dráhu prejde za $2,5$ minúty pohybu a akú rýchlosť dosiahne na konci prvej minúty. ($2,7\text{ km}$; $31,1\text{ km/h}$)
- (3) Auto na vzdialenosti 50 m rovnomerne zrýchľuje z hodnoty 18 km/h na 54 km/h . Za aký čas sa to udialo? (5 s)
- (4) Zrýchlenie objektu klesá exponenciálne s časom. Akú dráhu prejde objekt za prvých 5 sekúnd, ak sa objekt rozbiehal z pokoja so zrýchlením 4 ms^{-2} a po piatich sekundách pohybu dosiahne hodnota zrýchlenia 2 ms^{-2} ($40,26\text{ m}$)
- (5) Vypočítajte dráhový rozdiel po 6 sekundách pohybu, ak sa zrýchlenie mení z nulovej hodnoty na 5 ms^{-2} v čase 10 sekúnd: a) lineárne s časom b) kvadraticky s časom. ($\Delta=12,6\text{ m}$)

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - (DIFERENCIÁLNY POČET PRI POHYBE PO KRUŽNICI) (TÝŽDEŇ 3)

(1) Koleso polomeru 10 cm sa otáča tak, že bod na jeho obvode má počas pohybu rovnako veľké tangenciálne aj normálové zrýchlenie. Za aký čas dosiahne rýchlosť tohoto bodu hodnotu 5 cm/s, keď na začiatku mala veľkosť 2 cm/s ? [3 s]

(2) Koleso sa z pokojového stavu dáva do otáčavého pohybu so stálym uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 2 \text{ s}^{-2}$. Koľkokrát sa otočí za prvých 15 sekúnd svojho otáčania? ($N = 35,8$)

(3) Hriadel' elektrickej turbíny s polomerom $R=0,20\text{m}$ sa otáča tak, že jeho okamžité uhlové zrýchlenie je priamo úmerné uhlovej rýchlosti, ale má opačný smer. Z analýzy pohybu bolo zistené, že po 30 sekundách klesne uhlová rýchlosť na polovicu. Určte obvodovú rýchlosť po 2 minútach pohybu ak na začiatku experimentu bola uhlová rýchlosť 10rad/s . (0,125 m/s)

(4) Hriadel' elektromotora sa otáča tak, že jeho uhlová rýchlosť sa mení podľa závislosti $\omega(t) = 0,2 \cdot t^2 \text{ (rad/s)}$. Vypočítajte čas kedy bude tangenciálne zrýchlenie rovnaké ako normálové zrýchlenie. Polomer hriadel'a je 1,5cm. (2,15 s)

(5) Hriadel' elektromotora sa otáča tak, že tangenciálne zrýchlenie sa mení podľa závislosti $a_t = 0,012 \cdot t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Vypočítajte čas kedy bude tangenciálne zrýchlenie rovnaké ako normálové zrýchlenie. Polomer hriadel'a je 1,5cm. (1,71 s)

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - (VEKTOROVÝ A DIF.POČET) (TÝŽDEŇ 4)

(1) Polohový vektor hmotného bodu závisí od času nasledovne:

$$\mathbf{r} = A \cdot \cos(C \cdot t) \cdot \mathbf{i} + A \cdot \sin(C \cdot t) \cdot \mathbf{j} + B \cdot t \cdot \mathbf{k},$$

kde A, B, C sú konštanty. Nájdite závislosť vektora rýchlosti a zrýchlenia od času, a tiež veľkosť polohového vektora, rýchlosti a zrýchlenia v čase $t = 0$. ($\mathbf{v} = A \cdot C \cdot \mathbf{j} + B \cdot \mathbf{k}$, $v = (A^2 \cdot C^2 + B^2)^{1/2}$, $\mathbf{a} = -A \cdot C^2 \cdot \mathbf{i}$, $a = A \cdot C^2$)

(2) Hriadel' veternej turbíny sa otáča s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 0,1 \text{ s}^{-2}$. Vypočítajte zložky obvodovej a uhlovej rýchlosti hriadel'a v 10 sekunde, ak je jeho polomer 2cm. ($\mathbf{v} = -0,019 \cdot \mathbf{i} + 0,057 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 1 \cdot \mathbf{k}$)

(3) Vektor rýchlosti hmotného bodu závisí od času nasledovne:

$$\mathbf{v} = 3 \cdot \cos(2 \cdot t) \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot t \cdot \mathbf{j} + 2/t^2 \cdot \mathbf{k},$$

Nájdite veľkosť a zložky polohového vektora v čase 5 sekúnd a veľkosť a zložky vektora zrýchlenia v čase 10 sekúnd. ($\mathbf{r} = -0,82 \cdot \mathbf{i} + 62,5 \cdot \mathbf{j} + 0,4 \cdot \mathbf{k}$, $r = 62,5 \text{ m}$, $\mathbf{a} = -5,5 \cdot \mathbf{i} + 5 \cdot \mathbf{j} - 0,004 \cdot \mathbf{k}$, $a = 7,42 \text{ m/s}^2$)

(4) Hriadel' elektrickej turbíny sa otáča s konštantným uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 0,5 \text{ s}^{-2}$. Vypočítajte zložky obvodovej, uhlovej rýchlosti, veľkosť a zložky zrýchlení $\mathbf{a}_t$ a $\mathbf{a}_n$ hriadel'a v 5 sekunde, ak je jeho polomer 5cm. ($\mathbf{v} = -0,004 \cdot \mathbf{i} + 0,125 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega} = 0 \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} + 2,5 \cdot \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_t = 0,0008 \cdot \mathbf{i} + 0,025 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$, $a_t = 0,025$, $\mathbf{a}_n = -0,312 \cdot \mathbf{i} + 0,01 \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$, $a_n = 0,313$.)

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU - (SILA A DIFERENCIÁLNY POČET) (TÝŽDEŇ 5)

(1) Na hmotné teleso pôsobí stále v tom istom smere sila, ktorej hodnota závisí od času podľa vzťahu $F = F_0 - kt$, kde $F_0 = 36 \text{ N}$ a $k = 6 \text{ N.s}^{-1}$. Na začiatku bolo teleso v pokoji. Počas prvých 10 sekúnd urazilo dráhu 100 m. Vypočítajte jeho hmotnosť!

($m = 8 \text{ kg}$)

(2) Vypočítajte hybnosť a rýchlosť telesa na konci druhej sekundy, ktoré bolo v pokoji a pôsobila naň konštantná sila 10 N v intervale 2 sekúnd. Hmotnosť telesa je 3 kg. Predpokladáme, lineárny odpor prostredia s rastúcou rýchlosťou pri koeficiente odporu $k = 2 \text{ kg/s}$. ($v = 3,7 \text{ m/s}$, $p = 11,1 \text{ kg.m/s}$)

(3) Profesionálny cyklista Peter Sagan (hmotnosťou 78 kg) ide na rovinatom úseku pretekov Tour de France v samostatnom úniku rýchlosťou 62 km/h. Hmotnosť bicykla je 6,8 kg (minimálny limit UCI). V dôsledku technického problému prestane šliapať a 10 sekúnd ide na voľnobeh. Predpokladajme: zanedbateľný valivý odpor, kvadratickú závislosť odporu s použitím aerodynamickej konštanty odporu pre profesionálneho cyklistu $K \approx 0,18 \text{ kg/m}$. Uvažujte s protivetrom 3 m/s. Vypočítajte jeho zostatkovú rýchlosť po 10 sekundách. ($v = 40 \text{ km/h}$)

(4) Vypočítajte rýchlosť telesa na konci šiestej sekundy, ktoré bolo v pokoji a pôsobila naň konštantná sila 10 N v intervale 2 sekúnd. Hmotnosť telesa je 3 kg. Predpokladáme, lineárny odpor prostredia s rastúcou rýchlosťou pri koeficiente odporu $k = 2 \text{ kg/s}$. ($v = 0,26 \text{ m/s}$)