OPERÁCIE S VEKTORMI – OPAKOVANIE ZÁKLADOV FYZIKY (TÝŽDEŇ 1)

1. Vypočítajte skalárny súčin vektora **a** = (2,3,-1) s vektorom **b** = (1,-1,4).
2. Vyjadrite, zapíšte zložky vektora **c** = **a** - **b**, keď **a** = (5,-2,4); **b** = (1,-1,4).
3. Nájdite zložky vektora k.**v**, keď k = 2, **v** = **4**i - 3**j** + **k**.
4. Nájdite zložky jednotkového vektora, rovnobežného s vektorom **u** = (5,0,-12).
5. Nájdite zložky vektorového súčinu **r** x **v**, kde **r** = (-1,3,-2); **v** = (4,-1,2).
6. Vyjadrite vektor **c** = 5**i** + 3**j** - 6**k** ako lineárnu kombináciu vektorov $\mathbf{e}_1$ = **j** + **k**, $\mathbf{e}_2$ = **i** + **k**, $\mathbf{e}_3$ = **i** + **j**.
7. Skalárny súčin dvoch vektorov je rovný 10. Aký uhol (v radiánoch) zvierajú tieto vektory, ak ich veľkosti sú rovné 6 a 3.
8. Vypočítajte veľkosť vektora **a** = (3,4,-12).
9. Nájdite zložky súčtu dvoch vektorov **a** = (5,-3, 8) a **b** = (-4, 6,-2).
10. Vypočítajte vektorový súčin vektorov **v** = **i** - 3**j** + 2**k**, **u** = 2**i** + **k**.
11. Rozložte vektor veľkosti 10 na dva navzájom kolmé vektory, z ktorých jeden má dĺžku 6. Aká je veľkosť druhého vektora?
12. Nájdite konštanty r, s tak, aby platilo r**a** + s**b** = **c**, kde **a** = (3,2,0), **b** = (1,4,0), **c** = (5,1,0).
13. Vypočítajte, aký uhol (v radiánoch) zvierajú vektory **a**, **b** a aký uhol zvierajú vektory **a**, **c** keď viete, že **c** = **a** x **b**, |**a**| =3, |**b**| = 2, |**c**| = 4.
14. Vypočítajte veľkosť vektora **c** = (4,-7,3).
15. Čomu sa rovná súčet vektorov **a** = (2,1,-3), **b** = (3,-1,0)?
16. Nájdite zložky vektora **v**, aby platilo **a** + **v** = **b**, keď **a** = (-1,1,0), **b** = (2,0,1).
17. Vypočítajte veľkosť súčinu (**a** x **b**).**a**, keď **a**=(3,-2,4), **b** = (2,-1,1).
18. K vektoru **a** veľkosti 5 pripočítame vektor **b** veľkosti 2. Výsledný vektor má veľkosť 5. Čomu je rovný skalárny súčin **a**.**b**?
19. Vypočítajte veľkosť vektora **a** = (4,2,-4).
20. Vypočítajte zložky vektora 2**a** + 3**b**, kde **a** = (1,2,1), **b** = (-1,2,3).
21. Vektory **a** a **b** zvierajú uhol ⍰/6, ich veľkosti sú a = 4, b = 3. Nájdite ich skalárny súčin.
22. Aký uhol zviera vektor **v** = **i** + 3**j** - 2**k** s osou y?
23. Vektory **a**, **b** zvierajú uhol ⍰/4. Nájdite veľkosť vektora a + b, keď a = 3, b = 2.
24. Vektor **c** veľkosti 13 je kolmý na vektor **a** = (4,-1,0) aj na vektor **b** = (0,1,-3). Nájdite jeho zložky.
25. Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme preplávali kolmo cez rieku? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [cosα= -0,6; 250 s]

26. Rieka šírky 100 m tečie rýchlosťou 0,3 m/s. Čln vyvinie na nehybnej hladine rýchlosť 0,5 m/s. Ako treba nasmerovať čln, aby sme sa dostali najrýchlejšie na druhý breh? Aká bude pritom rýchlosť člna vzhľadom k brehu a ako dlho trvá plavba? [cosα = 0; 0,58 m/s; 200 s]

27. V rieke širokej 300 metrov tečie voda rýchlosťou veľkosti 1,2 m/s. Loď sa pohybuje vzhľadom na vodu rýchlosťou veľkosti 5 m/s. V akom smere sa má pohybovať loď, keď sa má dostať na druhý breh za najkratší čas a aký je tento čas? O koľko sa odkloní od svojho pôvodného smeru? [*α = 13,5 °, t = 60 s*]

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU (FUNKCIE A DIFERENCIÁLNY POČET) (TÝŽDEŇ 2)

(1) Analýzou pohybu vozidla bolo zistené: vozidlo z pôvodnej rýchlosti *108km/h* brzdilo podľa časovej závislosti $v = v_o - b.t^2$ a zastavilo za čas *20s*. Na akej vzdialenosti vozidlo zastavilo a akú maximálnu hodnotu dosiahla veľkosť zrýchlenia počas pohybu? (400 m; -3 m/s^2)

(2) Vlaková súprava *TGV* sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie – z nulovej hodnoty na *0.48 ms*$^{-2}$ po *100* sekundách. Vypočítajte, akú dráhu prejde za *2,5* minúty pohybu a akú rýchlosť dosiahne na konci prvej minúty. (2,7km; 31,1 km/h)

(3) Auto na vzdialenosti 50m rovnomerne zrýchľuje z hodnoty *18km/h* na *54km/h*. Za aký čas sa to udialo? (5s)

(4) Zrýchlenie *objektu* klesá exponenciálne s časom. Akú dráhu prejde objekt za prvých 5 sekúnd, ak sa objekt rozbiehal z pokoja so zrýchlením *4 ms*$^{-2}$ a po piatich sekundách pohybu dosiahne hodnota zrýchlenia *2 ms*$^{-2}$ (40,26 m)

(5) Vypočítajte dráhový rozdiel po *6* sekundách pohybu, ak sa zrýchlenie mení z nulovej hodnoty na *5 ms*$^{-2}$ v čase *10* sekúnd: *a) lineárne s časom b) kvadraticky s časom*. (Δ=12,6 m)

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - (DIFERENCIÁLNY POČET PRI POHYBE PO KRUŽNICI) (TÝŽDEŇ 3)

(1) Koleso polomeru 10 cm sa otáča tak, že bod na jeho obvode má počas pohybu rovnako veľké tangenciálne aj normálové zrýchlenie. Za aký čas dosiahne rýchlosť tohoto bodu hodnotu 5 cm/s, keď na začiatku mala veľkosť 2 cm/s ? [3 s]

(2) Koleso sa z pokojového stavu dáva do otáčavého pohybu so stálym uhlovým zrýchlením $\varepsilon = 2\ s^{-2}$. Koľkokrát sa otočí za prvých 15 sekúnd svojho otáčania? (*N = 35,8*)

(3) Hriadeľ elektrickej turbíny s polomerom R=0,20m sa otáča tak, že jeho okamžité uhlové zrýchlenie je priamo úmerné uhlovej rýchlosti, ale má opačný smer. Z analýzy pohybu bolo zistené, že po 30 sekundách klesne uhlová rýchlosť na polovicu.
Určte obvodovú rýchlosť po 2 minútach pohybu ak na začiatku experimentu bola uhlová rýchlosť 10rad/s. (0,125 m/s)

(4) Hriadeľ elektromotora sa otáča tak, že jeho uhlová rýchlosť sa mení podľa závislosti $\omega(t) = 0{,}2.t^2$ (rad/s). Vypočítajte čas kedy bude tangenciálne zrýchlenie rovnaké ako normálové zrýchlenie. Polomer hriadeľa je 1,5cm. (2,15 s)

(5) Hriadeľ elektromotora sa otáča tak, že tangenciálne zrýchlenie sa mení podľa závislosti $a_t = 0{,}012.t$ (m/s^2). Vypočítajte čas kedy bude tangenciálne zrýchlenie rovnaké ako normálové zrýchlenie. Polomer hriadeľa je 1,5cm. (1,71 s)

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU - (VEKTOROVÝ A DIF.POČET) (TÝŽDEŇ 4)

(1) Polohový vektor hmotného bodu závisí od času nasledovne:

$$\boldsymbol{r} = A.\cos(C.t).\boldsymbol{i} + A.\sin(C.t).\boldsymbol{j} + B.t.\boldsymbol{k},$$

kde A, B, C sú konštanty. Nájdite závislosť vektora rýchlosti a zrýchlenia od času, a tiež veľkosť polohového vektora, rýchlosti a zrýchlenia v čase t = 0. ($\boldsymbol{v} = A.C.\boldsymbol{j} + B.\boldsymbol{k}$, $v = (A^2.C^2 + B^2)^{1/2}$, $\boldsymbol{a} = -A.C^2.\boldsymbol{i}$, $a = A.C^2$)

(2) Hriadeľ veternej turbíny sa otáča s konštantným uhlovým zrýchlením ε = 0,1s^{-2}. Vypočítajte zložky obvodovej a uhlovej rýchlosti hriadeľa v 10 sekunde, ak je jeho polomer 2cm. ($\boldsymbol{v} = -0{,}019.\boldsymbol{i} + 0{,}057.\boldsymbol{j} + 0.\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\omega} = 0.\boldsymbol{i} + 0.\boldsymbol{j} + 1\ \boldsymbol{k}$)

(3) Vektor rýchlosti hmotného bodu závisí od času nasledovne:

$$\boldsymbol{v} = 3.\cos(2.t).\boldsymbol{i} + 5.t.\boldsymbol{j} + 2/t^2.\boldsymbol{k},$$

Nájdite veľkosť a zložky polohového vektora v čase 5 sekúnd a veľkosť a zložky vektora zrýchlenia v čase 10 sekúnd. ($\boldsymbol{r} = -0{,}82.\boldsymbol{i} + 62{,}5.\boldsymbol{j} + 0{,}4.\boldsymbol{k}$, $r = 62{,}5$m, $\boldsymbol{a} = -5{,}5.\boldsymbol{i} + 5.\boldsymbol{j} - 0{,}004\boldsymbol{k}$, $r = 7{,}42$m)

(4) Hriadeľ elektrickej turbíny sa otáča s konštantným uhlovým zrýchlením ε = 0,5s^{-2}. Vypočítajte zložky obvodovej, uhlovej rýchlosti, veľkosť a zložky zrýchlení a_t a a_n - hriadeľa v 5 sekunde, ak je jeho polomer 5cm. ($\boldsymbol{v} = -0{,}004.\boldsymbol{i} + 0{,}125.\boldsymbol{j} + 0.\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\omega} = 0.\boldsymbol{i} + 0.\boldsymbol{j} + 2{,}5\ \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a_t} = 0{,}0008.\boldsymbol{i} + 0{,}025.\boldsymbol{j} + 0.\boldsymbol{k}$, $a_t = 0{,}025$, $\boldsymbol{a_n} = -0{,}312.\boldsymbol{i} + 0{,}01.\boldsymbol{j} + 0.\boldsymbol{k}$, $a_n = 0{,}313$,)

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU - (SILA A DIFERENCIÁLNY POČET) (TÝŽDEŇ 5)

(1) Na hmotné teleso pôsobí stále v tom istom smere sila, ktorej hodnota závisí od času podľa vzťahu $F = F_0 - kt$, kde $F_0 = 36$ N a $k = 6$ $N.s^{-1}$. Na začiatku bolo teleso v pokoji. Počas prvých 10 sekúnd urazilo dráhu 100 m. Vypočítajte jeho hmotnosť!

(m = 8kg)

(2) Vypočítajte hybnosť a rýchlosť telesa na konci druhej sekundy, ktoré bolo v pokoji a pôsobila naň konštantná sila 10 N v intervale 2 sekúnd. Hmotnosť telesa je 3kg. Predpokladáme, lineárny odpor prostredia s rastúcou rýchlosťou pri koeficiente odporu k = 2kg/s. (v = 3,7 m/s, p = 11,1 kg.m/s)

(3) Profesionálny cyklista Peter Sagan (hmotnosťou 78kg) ide na rovinatom úseku pretekov Tour de France v samostatnom úniku rýchlosťou 62km/h. Hmotnosť bicykla je 6,8kg (minimálny limit UCI). V dôsledku technického problému prestane šliapať a 10 sekúnd ide na voľnobeh. Predpokladajme: zanedbateľný valivý odpor, kvadratickú závislosť odporu s použitím aerodynamickej konštanty odporu pre profesionálneho cyklistu K≈ 0,18kg/m. Uvažujte s protivetrom 3 m/s.
Vypočítajte jeho zostatkovú rýchlosť po 10 sekundách. (v = 40 km/h)

(4) Vypočítajte rýchlosť telesa na konci šiestej sekundy, ktoré bolo v pokoji a pôsobila naň konštantná sila 10 N v intervale 2 sekúnd. Hmotnosť telesa je 3kg. Predpokladáme, lineárny odpor prostredia s rastúcou rýchlosťou pri koeficiente odporu k = 2 kg/s. (v = 0,26 m/s)

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU - (PRÁCA, VÝKON A DIFERENCIÁLNY POČET, MOMENT SILY) (TÝŽDEŇ 6)

(1) Akú prácu je treba vykonať pri stlačení nárazníkovej pružiny vagóna o 5 cm, keď na jej stlačenie o 1 cm treba silu 30 kN, a keď platí, že sila je priamo úmerná skráteniu pružiny? (3750 J)

(2) V záverečnej časti horskej etapy TDF s 8% stúpaním sa z pelotónu idúceho rýchlosťou 18km/h rozhodne zaútočiť na etapové víťazstvo Tadej Pogačar prechodom do samostatného uniku. V cieľovej pasáži mu namerali rýchlosť 25km/h a výkon z biometrických senzorov ukazoval 450W. Vypočítajte aký časový náskok získal vďaka záverečnému úniku oproti pelotónu. (t = 9,5s)

(3) Arnold Schwarzenegger dvíha v posilňovni závažie s hmotnosťou 20kg na biceps po ¼ kruhovej dráhe. Dĺžka Arnieho predlaktia je 40cm. Vypočítajte veľkosť momentu sily (v lakťovom kĺbe) pri 0°, 45°, 90°. Vypočítajte prácu pri jednom zdvihu o 90°. (M(0) = 80Nm, M(45) = 56,6Nm, M(90) = 0Nm, W=80J)

(4) Arnold Schwarzenegger napína v posilňovni elastickú pružinu s tuhosťou 500N/m tak, že paže rúk robia pohyb po ¼ kružnici (cvik na biceps). Dĺžka Arnieho predlaktia je 40cm. Pružina je upevnená 30cm pod lakťovým kĺbom. Pri polohe paží 0° dosahuje pružina pokojovú veľkosť L(0). Vypočítajte veľkosť momentu sily (v lakťovom kĺbe) pri 0°, 45°, 90°. Vypočítajte prácu pri jednom zdvihu o 90°. (M(0) = 0Nm, M(45) = 56,6Nm, M(90) = 80Nm, W=80J)

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU - (GRAVITAČNÉ POLE) (TÝŽDEŇ 7)

(1) Nad rovníkom sa nachádza geostacionárna družica ktorá sa pohybuje po kruhovej trajektórii. Družica má rovnakú uhlovú rýchlosť ako rotácia zeme. Vypočítajte, v akej výške nad povrchom zeme je orbita družice ak polomer zeme je 6371km. (42164 km)

(2) Teleso bolo vrhnuté šikmo nahor pod uhlom $\pi/4$ tak, že po 2 sekundách letu bola jeho rýchlosť rovnako veľká, ako na začiatku. Aká bola počiatočná rýchlosť telesa ?
(14 m/s)

(3) Určte vzdialenosť od stredu Zeme na priamej spojnici medzi Zemou a Mesiacom kde je vzájomné silové pôsobenie oboch telies rovnako veľké. Vzdialenosť stredu Mesiaca od stredu Zeme je 384400 km a hmotnosť Mesiaca je1/81 hmotnosti Zeme.
(x=346000 km)

(4) Vypočítajte intenzitu a potenciál tyče s hmotnosťou 20kg a dĺžkou 1m v bode A ktorý leží v jej predĺžení vo vzdialenosti 5cm od jej konca.
($\varphi=-3{,}2.10^{-9}$J/kg, $E=1{,}2.10^{-8}$ m/s)

DYNAMIKA TUHÉHO TELESA (ŤAŽISKO A MOMENT ZOTRVAČNOSTI) (TÝŽDEŇ8)

(1) Štyri hmotné body s hmotnosťami m1 = 2 g, m2 = 5 g, m3 = 10 g a m4 = 7 g sú rozložené v priestore postupne tak, že zaujímajú polohy A1(3,4,5), A2(-2,-3,-4), A3(-4,2,7), A4(1,-4,-6), kde súradnice v zátvorkách sú udané v cm. Nájdite polohu ťažiska sústavy hmotných bodov! (-1,54;-0,62;0,75) cm

(2) Nájdite polohu ťažiska drôtu ohnutého do tvaru štvrťkružnice s polomerom R = 10cm. (x*=6,3 cm, y*=6,3 cm)

(3) Vypočítajte moment zotrvačnosti tyče dĺžky 0,8m a hmotnosti 0,5kg ktorá sa otáča kolmo na vlastnú os ako vrtuľa v polovici tyče. (J=0,0416 kg.m^2)

(4) Vypočítajte polohu ťažiska polkruhovej dosky s hmotnosťou 500g a polomerom 20cm. (x*=0, y*= 8,5cm)

(5) Vypočítajte moment zotrvačnosti kruhovej dosky s polomerom 0,4m a hmotnosťou 0,5kg. Os otáčania prechádza stredom - kolmo na rovinu dosky. (J=0,08kg.m^2)

KMITAVÝ POHYB (NETLMENÉ, TLMENÉ KMITY) (TÝŽDEŇ9)

(1) Kruhová doska s priemerom 15cm a hmotnosťou 2kg je upevnená na okraji tak, že sa môže kývať okolo vodorovnej osi kolmej na dosku ako kyvadlo. Vypočítajte periódu kmitov. (0,7s)

(2) Skúmavka, na dne ktorej je trochu piesku, pláva vo vode vo zvislej polohe tak, že je ponorená do 2/3 svojho objemu. Skúmavka má tvar valca výšky 15 cm a prierezu 2 cm^2. Ak skúmavku trochu zodvihneme a pustíme, začne vykonávať kmitavý pohyb vo zvislej rovine. Vypočítajte periódu kmitov. Hustota vody je 1000 kg/m^3. (T=0,63s)

(3) V U trubici vnútorného prierezu 0.5 cm^2 je naliate 100 g ortuti. Ak hladinu ortuti v jednom ramene znížime voči rovnovážnej polohe (napr. fúknutím do trubice), začne ortuť v trubici kmitať. Vypočítajte periódu kmitov. Hustota ortute je 13 600 kg/m3. (T=0,54s)

(4) Aká je frekvencia netlmeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti 2 g, keď amplitúda pohybu je 5 cm a celková energia hmotného bodu pri tomto pohybe je 0.3J? (f=55Hz)

(5) Aký je koeficient útlmu tlmených harmonických kmitov hmotného bodu, keď podiel dvoch za sebou idúcich maximálnych výchyliek hmotného bodu na tú istú stranu sa rovná 2 a perióda tlmených kmitov je T = 0,5s. Aká by bola perióda netlmených kmitov za rovnakých podmienok?($b=1,33 s^{-1}$, $T_0=0,497 s$)

KMITAVÝ POHYB (VIAZANÉ OSCILÁTORY, VLNY) (TÝŽDEŇ10)

(1) Máme sústavu dvoch netlmených mechanických lineárnych oscilátorov s hmotnosťami 1kg a tuhosťou pružiny k=1N/m ktoré sú zviazané cez väzobnú pružinu s tuhosťou k_c=0,1N/m. Na začiatku experimentu (t=0s) bola hmota prvého oscilátora vychýlená o 0,1m z rovnovážnej pohohy ($x_1(0)$). Po uvoľnení nastal vzájomný oscilačný proces. Vypočítajte frekvenciu – symetrického a asymetrického módu. Vypočítajte frekvenciu obálky a frekvenciu oscilačnej frekvenciu. Energiu ktorá sa prenáša z prvý na druhý oscilátor a periódu prenosu energie (beats). (ω_1= 1rad/s, ω_2=1,095rad/s, ω_{obalka} = 0.0475rad/s, $\omega_{oscilacie}$ = 1.05 rad/s, $E_1(t) \approx \cos2(0.0475t)$, T_{beats}= 66s)

(2) Reťazec N hmôt (0,25kg) tvoria sústavu zviazaných oscilátorov. Tuhosť pružín medzi susednými hmotnosťami K je 100M/m a vzdialenosti medzi hmotami sú a=0,1m. Z disperzného vzťahu vypočítajte frekvencie pre (k=0,π/2a,π/a). Fázovú rýchlosť pre k= π/2a, skupinovú (grupovú) rýchlosť pre k=0 a k= π/a. (k=0: ω=0rad/s, k=π/2a: ω=28,3rad/s, k= π/a: ω=40rad/s, v_f =1,8m/s, k=0: v_g =1,8m/s, k= π/a: v_g =0m/s