

Reprezentacie grupy $SO(3)$

M. Gintner

definicna podmienka:

$$R^T R = \mathbf{I} \quad (1)$$

kde R je realna matica, kedze ide o rotacie na realnom vektorovom priestore.
V infinitezimalnom tvare

$$(\mathbf{I} + iJ)^T (\mathbf{I} + iJ) = \mathbf{I} \quad (2)$$

odkial

$$J^T = -J \quad (3)$$

To znamena, ze J je antisymetricka matica. Vzhľadom na realnosť matice R , je realna aj matica iJ , takže

$$J^* = -J. \quad (4)$$

Z (3) a (4) dostaneme, ze J je hermitovska matica

$$J^\dagger = J. \quad (5)$$

To znamena, ze J ma realne vlastne hodnoty a ze vlastne vektory prisluchajuce roznyim vlastnym hodnotam su navzajom ortogonalne.

Matica J je vektorom v 3dim vektorovom priestore algebry grupy $SO(3)$. Zvolime bazu (generatory) J_1, J_2, J_3 , v ktorej ma $SO(3)$ algebra tvar

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Potom

$$J = \phi_a J_a, \quad (7)$$

kde ϕ_a su realne koeficienty. Aj pre J_a platia vzťahy (3), (4) a (5).

Definujme pomocou generatorov nasledovne matice

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (8)$$

$$J_\pm \equiv J_1 \pm iJ_2. \quad (9)$$

Mozeme odvodiť nasledovne vzťahy

$$[J^2, J_a] = 0, \quad \forall a, \quad (10)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \quad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J^2, J_\pm] = 0 \quad (11)$$

$$J^2 - J_3 \pm J_3 = \begin{cases} J_+ J_- \\ J_- J_+ \end{cases} \quad (12)$$

Matica J^2 je ocividne hermitovska. Pre transponovane $J_\pm$ dostaneme

$$J_\pm^T = J_1^T \pm iJ_2^T = J_1^* \pm iJ_2^* = (J_1 \mp iJ_2)^* = J_\mp^*$$

takže

$$J_\pm^\dagger = J_\mp. \quad (13)$$

Kedze J_3 a J^2 komutuju, maju spolocne vlastne vektory $\vec{v}$

$$J_3 \vec{v} = m \vec{v}, \quad J^2 \vec{v} = \mu^2 \vec{v}. \quad (14)$$

Definujme vektory $\vec{v}_\pm$

$$\vec{v}_\pm \equiv J_\pm \vec{v}. \quad (15)$$

Ukazuje, ze $\vec{v}_\pm$ su tiez vlastne vektory matic J_3 a J^2

$$J_3 \vec{v}_\pm = J_3 J_\pm \vec{v} = J_\pm (J_3 \pm \mathbf{I}) \vec{v} = (m \pm 1) \vec{v}_\pm$$

$$J^2 \vec{v}_\pm = J^2 J_\pm \vec{v} = J_\pm J^2 \vec{v} = \mu^2 \vec{v}_\pm$$

Kedze vektory $\vec{v}$, $\vec{v}_+$ a $\vec{v}_-$ zodpovedaju roznyim vlastnym hodnotam — menovite m , $m+1$ a $m-1$ — su navzajom ortogonalne. Zdalo by sa, ze tymto sposobom sa da pomocou matic $J_\pm$ skonstruovat nekonecna postupnost navzajom ortogonalnych vlastnych vektorov matice J_3 , pricom jej jednotlivé vlastne hodnoty sa od seba lisia o 1. Sucasne su to aj vlastne vektory matice J^2 s jedinou vlastnou hodnotou μ^2 . Znamenalo by to, ze matice J_3 a J^2 “ziju” na nekonecnorozmernom vektorovom priestore, co by zodpovedalo nekonecnorozmernej reprezentácii grupy $SO(3)$.

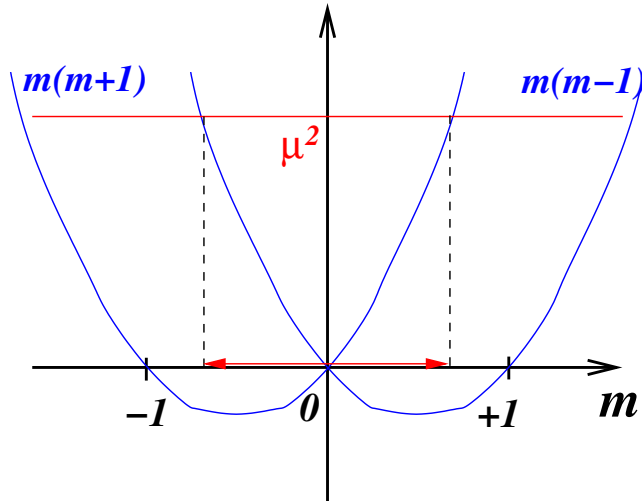
Da sa ale ukazat, ze vlastne hodnoty m su zdola aj zhora ohranicene:

$$0 \leq \vec{v}_\pm^T \vec{v}_\pm = \vec{v}_\pm^\dagger \vec{v}_\pm = (J_\pm \vec{v})^\dagger (J_\pm \vec{v}) = \vec{v}^\dagger J_\mp J_\pm \vec{v} = \vec{v}^\dagger (J^2 - J_3^2 \mp J_3) \vec{v} = [\mu^2 - m(m \pm 1)] \vec{v}^\dagger \vec{v},$$

kde v druhom kroku sme vyuzili realnost vektoroveho priestoru a v dalsich krokoch rovnice (12) a (13). Kedze $\vec{v}^\dagger \vec{v} > 0$, dostaneme podmienku

$$m(m \pm 1) \leq \mu^2 \quad (16)$$

co sa graficky da znazornit nasledovne:



Povolene hodnoty m lezia vo vnútri červeného intervalu vyznačeného na osi x . Takže ak μ^2 je konečne nezáporné číslo, dana reprezentácia by mala byť konecnorozmerná, pricom jej rozmernosť závisí na hodnote μ^2 . (Čím väčšie μ^2 , tým viac rozmerov.)

Spektrum vlastných hodnôt môže byť ohraňované zdola iba vtedy, ak existuje vlastný vektor $\vec{v}_1$, pre ktorý platí

$$J_- \vec{v}_1 = \vec{0}. \quad (17)$$

Zodpovedajúce vlastné hodnoty matic J_3 a J^2 označme m_1 a μ^2

$$J_3 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1, \quad J^2 \vec{v}_1 = \mu^2 \vec{v}_1. \quad (18)$$

Opakovaným posobením matice J_+ na $\vec{v}_1$ môžeme v princípe generovať ďalšie vlastné vektory, ktoré zodpovedajú vlastným hodnotám matice J_3 zväčšeným oproti predoslej hodnote vždy o jednotku. Zo vzťahu (17) vyplýva

$$0 = \vec{v}_1^\dagger J_+ J_- \vec{v}_1 = \vec{v}_1^\dagger (J^2 - J_3^2 + J_3) \vec{v}_1 = [\mu^2 - m_1(m_1 - 1)] \vec{v}_1^\dagger \vec{v}_1$$

Nakolko $\vec{v}_1^\dagger \vec{v}_1 > 0$, dostaneme

$$m_1(m_1 - 1) = \mu^2. \quad (19)$$

Spektrum vlastných hodnôt môže byť ohraničené zhora iba ak po konečnom počte aplikácii J_+ na $\vec{v}_1$ dostaneme vektor $\vec{v}_d$ taký, že

$$J_+ \vec{v}_d = 0, \quad (20)$$

pricom

$$J_3 \vec{v}_d = m_d \vec{v}_d, \quad J^2 \vec{v}_d = \mu^2 \vec{v}_d. \quad (21)$$

Z rovnice $0 = \vec{v}_d^\dagger J_- J_+ \vec{v}_d$ potom vyplýva

$$m_d(m_d + 1) = \mu^2. \quad (22)$$

Kombináciou (19) a (22) dostaneme rovnicu

$$(m_1 - m_d)(m_1 + m_d) = (m_1 + m_d).$$

Tato rovnica má niekoľko riešení:

1. $m_1 = m_d = 0$:
potom aj $\mu^2 = 0$ a to zodpovedá jednorozmernej reprezentácii
2. $m_1 = m_d + 1$:
toto je v rozpore s $m_d \geq m_1$
3. $m_d = -m_1$:
- ak d označuje počet vlastných vektorov, ktoré súčasne tvoria bazu, potom d je aj rozmernosť reprezentácie
- platí:

$$m_d = m_1 + d - 1$$

keďže $m_1 = -m_d$, dostaneme

$$2m_d + 1 = d$$

vzhľadom na to, že $d = 0, 1, 2, 3, \dots$, možné hodnoty m_d sú $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$, pričom μ^2 zodpovedajúce danému m_d je dané rovnicou (22).

- toto riešenie zahŕňa aj prípad 1, t.j. $m_1 = m_d = 0$

Zhrnme teraz, čo sme sa na základe týchto riešení dozvedeli o možných reprezentáciách $SO(3)$ algebry. V zhode so zvyklosťami zmeníme označenie m_d na j . Dana reprezentácia $SO(3)$ algebry je charakterizovaná fixovanou vlastnou hodnotou μ^2 matice J^2 , pre ktorú platí

$$\mu^2 = j(j + 1), \quad (23)$$

pricom premenna j moze nadobudat hodnoty

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (24)$$

Ocividne, hodnota j moze indexovat jednotlivé reprezentácie rovnako dobre ako μ^2 , pricom rozmer-nost danej reprezentácie je dana vzťahom

$$d = 2j + 1. \quad (25)$$

V reprezentácii j zodpovedajú jednotlivým vlastným vektorom matice J_3 vlastné hodnoty

$$m = -j, -j + 1, \dots, +j \quad (26)$$

Teraz by sme si mohli mysliet, že nájdením reprezentácii $SO(3)$ algebry sme súčasne našli aj reprezentácie $SO(3)$ grupy. Ukáže sa, že to tak nie je. Algebra Lieovej grupy definuje štruktúru grupy v okolí jednotkového prvku. Pre niektoré grupy môže ich algebra odzrkadliť štruktúru celej grupy, pre niektoré nie. Môžu byť dve rozdielne grupy, ktoré majú rovnakú štruktúru v okolí jednotkového prvku a budú mať aj rovnakú algebru (hovoríme, že sú navzájom lokálne izomorfné), ale môžu sa od seba líšiť na väčších vzdialenostiach od jednotkového prvku. Týmto grupám zodpovedajú rôzne diferencovateľné variety, to znamená, že sa líšia vo svojich globálnych vlastnostiach.

Môžeme to ilustrovať práve na vzťahu grup $SO(3)$ a $SU(2)$. Uvažujme 3D rotáciu okolo osi z o uhol ϕ . Takáto rotácia je reprezentovaná maticou $\exp(i\phi J_3)$. V d -rozmernej reprezentácii sa pri tom vektor $\vec{v}$ bazového priestoru transformuje nasledovne

$$e^{i\phi J_3} \vec{v} = e^{i\phi J_3} (c_{-j} \vec{v}_{-j} + c_{-j+1} \vec{v}_{-j+1} + \dots + c_j \vec{v}_j) = c_{-j} e^{i(-j)\phi} \vec{v}_{-j} + c_{-j+1} e^{i(-j+1)\phi} \vec{v}_{-j+1} + \dots + c_j e^{i(+j)\phi} \vec{v}_j,$$

kde sme využili možnosť rozkladu vektora $\vec{v}$ do bazy vlastných vektorov operátora J_3 . Pri 3D rotáciách je otáčenie o $\phi = 2\pi$ identická transformácia. Identitu pre $e^{i\pi J_3}$ však dostaneme len vtedy, keď $j = 0, 1, 2, 3, \dots$. V prípade polociselných hodnôt j dostaneme $e^{i\phi J_3} \vec{v} = -\vec{v}$. Takže grupu $SO(3)$ reprezentujú len tie riešenia algebry $SO(3)$, ktoré zodpovedajú celociselným hodnotám premennej j .

Identickú algebru ako grupa $SO(3)$ má grupa $SU(2)$. Tieto dve grupy sú navzájom lokálne izomorfné. Reprezentácie algebry $SO(3)$ — ktorá je ale súčasne aj algebrou grupy $SU(2)$ — s polociselným j generujú reprezentácie grupy $SU(2)$. Kvôli vytvoreniu dostatočného chaosu sa týmto reprezentáciám zvykne hovoriť spinorové reprezentácie grupy $SO(3)$. Reprezentácie grupy $SO(3)$, ktoré zodpovedajú celociselným hodnotám j sú súčasne aj reprezentáciami grupy $SU(2)$. Treba tiež poznamenať, že reprezentácie grupy $SU(2)$ nie sú obmedzené na reálne matice, čiže bazový priestor reprezentácie môže byť aj komplexný. A to je presne to, čo potrebujeme v QM, pretože Hilbertov priestor je komplexný a my chceme vedieť, ako sa transformujú pri rotáciách stavové vektory.