O symetrických transformáciách fyzikálneho systému

Uvažujme fyzikálny systém (FS) opísaný stavovou veličinou (alebo veličinami) f, ktorej časový vývoj $f(t)$ je daný príslušnou pohybovou rovnicou (EofM). Transformáciou FS budeme chápať zmeny FS, ktoré majú za následok transformácie jeho stavových veličín,

$$T : f \to f'. \tag{1}$$

Napríklad, ak uvažujeme hmotný bod, ktorý je opísaný polohou $\vec{x}$ a rýchlosťou $\dot{\vec{x}}$, uvedenou transformáciou môže byť jeho posunutie alebo rotácia v priestore, zmena jeho rýchlosti, posunutie v čase, priestorová inverzia, atď. Ak si predstavíme fyzikálne pole $\varphi(\vec{x})$, kde stavovými veličinami môžu byť φ a $\dot{\varphi}$, potom spomenuté časopriestorové transformácie sú tiež vhodnými tranformáciami FS, pretože indukujú zmeny stavových veličín. V prípade, že fyzikálny systém sa skladá z viacerých polí, vieme si predstaviť transformácie jednotlivých polí medzi sebou bez toho, aby sa menili časopriestorové súradnice. Takýmto transformáciám FS sa zvykne tiež hovoriť interné.

Každú transformáciu FS možno interpretovať dvoma spôsobmi: v aktívnom alebo pasívnom zmysle. V aktívnom zmysle vzťah (1) interpretujeme tak, že FS bol prevedený zo stavu f do stavu f'. V pasívnom zmysle je zmena f interpretovaná ako dôsledok zmeny referenčnej sústavy, vzhľadom na ktorú je veličina f meraná. Ak sa napríklad zmenia súradnice hmotného bodu, potom v aktívnom zmysle možno túto transformáciu chápať ako jeho premiestnenie v priestore a v pasívnom ako dôsledok zmeny súradnicovej sústavy. Konkrétnejšie, nech napríklad transformáciu súradníc reprezentuje lineárny operátor $\hat{T}_L$ na trojrozmernom vektorovom priestore. V aktívnom zmysle takýto operátor premiestni hmotný bod z polohy $\vec{r}$ do $\vec{r}' = \hat{T}_L\vec{r}$. V báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ má vektor $\vec{r}$ súradnice x^i a vektor $\vec{r}'$ súradnice x'^i,

$$\vec{r}' = x'^i\vec{e}_i = \hat{T}_L(x^j\vec{e}_j) = \hat{T}_L\vec{r}. \tag{2}$$

Ak zavedieme nové bázové vektory $\vec{e}'_i = \hat{T}_L^{-1}\vec{e}_i$, potom túto rovnicu môžme prepísať v tvare

$$x'^i\vec{e}'_i = x^j\vec{e}_j. \tag{3}$$

Táto rovnica nám umožňuje interpretovať čiarkované súradnice ako súradnice pôvodného vektora $\vec{r}$, ale v novej báze $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$.

Pre daný FS môže existovať transformácia s nasledovnou význačnou vlastnosťou: pre ľubovoľné riešenie $f(t)$ pohybovej rovnice je aj $\hat{T}f(t)$ riešením pohybovej rovnice. Takúto transformáciu nazývame symetriou FS a o príslušnej EofM hovoríme, že je invariantnou voči danej transformácii.

V Lagrangeovom formalizme je FS opísaný Lagrangiánom a jeho časový vývoj je daný Euler-Lagrangeovou pohybovou rovnicou. Uvažujme napríklad diskrétny FS so stavovými premennými q a $\dot{q}$, opísaný Lagrangiánom $L(q, \dot{q}, t)$. Jeho pohybová rovnica má tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} = 0. \tag{4}$$

Nech $q(t)$ je riešením tejto rovnice. Uvažujme transformáciu[1] T, ktorá zmení súradnice q na q' a $\dot{q}$ na $\dot{q}'$. Táto transformácia by bola symetriou rovnice (4), keby funkcia $q'(t) = \hat{T}q(t)$, pre ľubovoľné riešenie $q(t)$, bola tiež riešením (4), t.j.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial L(q', \dot{q}', t)}{\partial q'} = 0. \tag{5}$$

[1]Pre zjednodušenie úvah neuvažujeme také transformácie, ktoré menia časovú súradnicu.

Uvažovaný FS je po premiestnení zo stavu $(q, \dot{q})$ do $(q', \dot{q}')$ opísaný Lagrangiánom $L(q', \dot{q}', t)$. Po vyjadrení čiarkovaných stavových veličín cez nečiarkované dostaneme

$$L(q', \dot{q}', t) = L'(q, \dot{q}, t). \tag{6}$$

Interpretácia tejto rovnosti je nasledovná: riešenia pre FS s Lagrangiánom $L'(q, \dot{q}, t)$ sú po ich transformácii súčasne riešeniami FS s Lagrangiánom $L(q', \dot{q}', t)$. Z toho vyplýva, že aby daná transformácia bola symetriou pôvodného FS, musí mať EofM$[L'(q, \dot{q}, t)]$ rovnaké riešenia ako EofM$[L(q, \dot{q}, t)]$. Rovnaké riešenia majú Lagrangiány, ktoré sa od seba líšia o multiplikatívnu konštantu alebo aditívny člen v tvare totálnej derivácie ľubovoľnej funkcie súradníc a času. Násobenie Lagrangiánu konštantou má za následok iba zmenu jednotiek, takže táto možnosť z nášho hľadiska nie je zaujímavá. Takto prichádzame k záveru, že daná transformácia FS je jeho symetriou práve vtedy, keď

$$L(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}F(q, t), \tag{7}$$

kde F je ľubovoľná funkcia.

Pozrime sa teraz na to, ako sa pri transformácii FS správa účinok. Účinok študovaného FS má tvar

$$S[q(t); q_A, t_A, q_B, t_B] = \int_{t_A(q_A)}^{t_B(q_B)} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt, \tag{8}$$

čiže je funkcionálom trajektórie $q(t)$ a funkciou okrajových podmienok. Po transformácii $(q, \dot{q}) \to (q', \dot{q}')$ dostaneme

$$S[q'(t); q'_A, t_A, q'_B, t_B] = \int_{t_A(q'_A)}^{t_B(q'_B)} L(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt. \tag{9}$$

Ak je daná transformácia symetriou, potom môžme využiť (7) a dosadiť to do (9). Dostaneme

$$\begin{aligned} S[q'(t); q'_A, t_A, q'_B, t_B] &= \int_{t_A(q_A)}^{t_B(q_B)} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt + \int_{t_A(q_A)}^{t_B(q_B)} \frac{d}{dt}F(q, t)\, dt \\ &= S[q(t); q_A, t_A, q_B, t_B] + F(q_B, t_B) - F(q_A, t_A). \end{aligned} \tag{10}$$

Ak je teda daná transformácia symetriou, potom pre všetky okrajové podmienky sa tranformovaný účinok bude od pôvodného líšiť nanajvýš o aditívny faktor daný vzťahom (10).

Platí aj opačná implikácia: ak sa danou transformáciou účinok pre všetky možné okrajové podmienky zmení podľa (10), potom je táto transformácia symetriou. Naozaj. Rovnica (10) hovorí, že účinok pre každú funkciu $q(t)$ z množiny všetkých mysliteľných trajektórií spájajúcich body (q_A, t_A) a (q_B, t_B) sa od účinku pre transformovanú funkciu $q'(t)$ líši o tú istú konštantu[2]. To znamená že ak nájdeme $q(t)$, ktoré minimalizuje S pred transformáciou, potom $q'(t) = \hat{T}q(t)$ minimalizuje S po transformácii. Inými slovami, funkcia, ktorú dostaneme transformáciou riešenia EofM, je tiež riešením EofM. A preto daná transformácia je symetriou.

[2]Ak by F bola funkciou rýchlosti, toto tvrdenie by už neplatilo.