

## Geometria nelineárneho sigma modelu

M. Gintner

## 1 Prípád $SO(3)$ symetrie

### 1.1 Lineárny sigma model

Majme triplet skalárnych polí

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ktorého fyzika je opísaná klasickým poľovým Lagrangiánom

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - V(|\Phi|), \quad |\Phi| = \sqrt{\Phi^T \Phi}, \quad (2)$$

kde potenciál  $V(|\Phi|)$  má minimum nie pre nulové polia  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$ , ale pre konfigurácie polí, ktoré spĺňajú podmienku

$$\Phi^T \Phi = v^2 > 0. \quad (3)$$

Takýto Lagrangian sa nazýva *lineárny sigma model*. Rovnica (3) definuje guľovú plochu  $S_v^2$  o polomere  $v$ . Pre stavy  $\Phi$  z tejto guľovej plochy platí

$$\frac{\partial V}{\partial |\Phi|} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial |\Phi|^2} > 0. \quad (4)$$

Ak  $\Phi$  je  $SO(3)$  vektor, čiže

$$\Phi' = O(g)\Phi, \quad g \in SO(3), \quad (5)$$

kde  $O(g)$  je  $3 \times 3$  matica spĺňajúca podmienky

$$O^T(g)O(g) = \mathbf{I}, \quad \det O = 1, \quad (6)$$

potom Lagrangian (2) je  $SO(3)$  invariantný. O tom sa presvedčíme ľahko, ak si uvedomíme, že  $\Phi^2 = \Phi^T \Phi$  je invariantom  $SO(3)$  transformácií.

Matice  $O(g)$  sú fundamentálnou reprezentáciou grupy  $SO(3)$ . Možno ich vyjadriť v tvare

$$O(g) = \exp(i\alpha_a J_a), \quad a = 1, 2, 3, \quad (7)$$

kde generátory  $J_a$  spĺňajú komutačný vzťah  $[J_a, J_b] = i\varepsilon_{abc}J_c$ . Vo fundamentálnej reprezentácii tomu vyhovujú matice

$$(J_a)_{bc} = -i\varepsilon_{abc}. \quad (8)$$

Potom infinitezimálne malá  $SO(3)$  transformácia má tvar

$$O(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{I} + i\alpha_a J_a = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

čo pre transformáciu skalárnych polí  $\pi_i$  dáva

$$\pi_1' = \pi_1 + \alpha_3 \pi_2 - \alpha_2 \pi_3, \quad (10)$$

$$\pi_2' = \pi_2 - \alpha_3 \pi_1 + \alpha_1 \pi_3, \quad (11)$$

$$\pi_3' = \pi_3 + \alpha_2 \pi_1 - \alpha_1 \pi_2, \quad (12)$$

kde  $\alpha_a$  sú nekonečne malé reálne parametre.

Základný stav (energetické minimum) systému, ktorý je opísaný Lagrangianom (2), nie je jedinečný. Takýchto stavov je nekonečne veľa a všetky ležia na guľovej ploche definovanej rovnicou (3). Aby sme mohli tento systém kvantovať, tak spomedzi všetkých týchto miním treba zvoliť skutočné fyzikálne vákuum. Pokiaľ nám túto voľbu neurčia okolnosti situácie, ktorú opisujeme, môžeme si za vákuum zvoliť ľubovoľný bod na ploche  $S_v^2$ . Nech je to napríklad konfigurácia

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Toto vákuum (ani žiadne iné, ktoré by sme mohli zvoliť) nie je invariantné voči  $SO(3)$  transformáciám, aj keď všetky  $SO(3)$  transformácie ľubovoľného minima nás opäť dostanú do minima<sup>1</sup>. Je však invariantné voči rotáciám okolo osi 3, ktoré tvoria podgrupu  $SO(2)$  grupy  $SO(3)$ . Grupu rotácií okolo osi 3 budeme označovať<sup>2</sup> ako  $SO(2)_3$ . Túto podgrupu grupy  $SO(3)$  tvoria matice  $H$  v tvare

$$H = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{21} & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W^T W = \mathbf{I}_{2 \times 2}, \quad \det W = 1. \quad (14)$$

Tieto transformácie sú generované generátorom  $J_3$

$$H = \exp(i\alpha_3 J_3) \xrightarrow{\alpha_3 \ll 1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Vákuum (13) má teda menšiu symetriu ako Lagrangian (2). Hovoríme, že voľbou vákua je symetria systému spontánne narušená z  $SO(3)$  na  $SO(2)_3$ .

Vzhľadom na charakter potenciálu v Lagrangiane (2) zmeny konfigurácie poľa, ktoré nás ponechávajú na povrchu  $S_v^2$ , nemenia energiu systému a teda nevyžadujú konanie žiadnej práce. Naproti tomu každá konfigurácia poľa ležiaca mimo plochy  $S_v^2$  má väčšiu energiu ako na  $S_v^2$  a preto na prechod do tejto konfigurácie z  $S_v^2$  prácu konat' treba. Pozrieme sa na dôsledky tejto skutočnosti pri voľbe vákua podľa (13).

Uvažujme excitácie poľa  $\Phi$  z vákuového stavu  $\Phi_0$ . Tieto excitácie môžeme parametrizovať poliami  $\pi_1, \pi_2, \sigma$  tak, že

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \delta\Phi(x), \quad \delta\Phi(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \pi_2(x) \\ \sigma(x) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

<sup>1</sup>Pre znalcov poznamenávame, že plocha (3) je  $SO(3)$  orbitou pre každý bod na tejto ploche. Tiež, že táto plocha je homogénny priestor pôsobenia transformácií grupy  $SO(3)$ , nakoľko obsahuje len jednu orbitu.

<sup>2</sup>Korektnejšie by bolo povedať, že  $SO(2)_3$  označuje reprezentáciu rotácií okolo osi 3.

Fyziku excitácií  $\pi_1, \pi_2, \sigma$  opisuje Lagrangian, ktorý dostaneme zodpovedajúcou reparametrizáciou Lagrangianu (2)

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_1 \partial^\mu \pi_1 + \partial_\mu \pi_2 \partial^\mu \pi_2 + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) - V(|\Phi|), \quad (17)$$

kde  $|\Phi| = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + (v + \sigma)^2}$ . Tie členy Lagrangianu, ktoré udávajú hmotnosti jednotlivých polí, sú kvadratickými funkciami týchto polí. Zo (17) je zrejmé, že takéto členy sa môžu nachádzať len v potenciáli  $V(|\Phi|)$ . Koeficienty týchto členov dostaneme ako druhé derivácie potenciálu  $V(|\Phi|)$  podľa jednotlivých excitácií

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial^2 V}{\partial |\Phi|^2} \frac{\partial |\Phi|}{\partial \eta} \frac{\partial |\Phi|}{\partial \zeta} + \frac{\partial V}{\partial |\Phi|} \frac{\partial^2 |\Phi|}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (18)$$

kde  $\eta, \zeta \in (\pi_1, \pi_2, \sigma)$  a derivácie berieme v bode  $\Phi_0$ . Keď zvažíme (4) a to, že

$$\left. \frac{\partial |\Phi|}{\partial \pi_i} \right|_{\Phi_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial |\Phi|}{\partial \sigma} \right|_{\Phi_0} = 1, \quad (19)$$

dostaneme

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \right|_{\Phi_0} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial \sigma} \right|_{\Phi_0} = 0 \quad (20)$$

kde  $i, j = 1, 2$  a

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\Phi_0} > 0. \quad (21)$$

Odtiaľ vyplýva<sup>3</sup>, že excitácie  $\pi_1$  a  $\pi_2$  majú nulovú hmotnosť, zatiaľčo  $\sigma$  má hmotnosť nenulovú. Dôsledkom spontánneho narušenia symetrie z trojparametrickej (tri generátory) Lieovej grupy  $SO(3)$  na jednoparametrickú (jeden generátor)  $SO(2)$  sú  $3 - 1 = 2$  nehmotné skalárne bozóny, ktoré sa zvyknú nazývať aj *Nambu-Goldstonove bozóny*, a jeden skalárny bozón, hovoríme mu *Higgsov*, s nenulovou hmotnosťou.

## 1.2 Nelineárny sigma model

Uvažujme fyzikálny systém, v ktorom budú skalárne polia viazané len na povrch<sup>4</sup>  $S_v^2$ . Matematicky to znamená, že sú prípustné len také konfigurácie tripletu polí  $\Phi$ , ktoré spĺňajú podmienku (3). Takáto väzba nás ponechá len s dvoma nezávislými poliami, povedzme  $\pi_1$  a  $\pi_2$ , pričom  $\pi_3$  je funkciou prvých dvoch

$$\pi_3 = \pm \sqrt{v^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2}. \quad (22)$$

Všimnime si, že polia  $\pi_{1,2}$  sú vlastne súradnicami bodov na povrchu gule  $S_v^2$ . Po dosadení (22) Lagrangian (2) nadobudne tvar

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_a)(\partial^\mu \pi_a) + \frac{1}{2} \frac{(\pi_a \partial_\mu \pi_a)(\pi_b \partial^\mu \pi_b)}{v^2 - \pi_1^2 - \pi_2^2}, \quad a, b = 1, 2. \quad (23)$$

<sup>3</sup>Lagrangian pre voľné reálne skalárne pole  $\phi$  má tvar  $L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ , kde  $m$  je hmotnosť poľa  $\phi$ .

<sup>4</sup>Takýto systém môže predstavovať nízkoenergetickú limitu systému (2), keď energia popisovaných dejov je oveľa menšia ako hmotnosť Higgsovho bozónu a všetky energeticky dosiahnuteľné konfigurácie poľa budú v tesnej blízkosti plochy  $S_v^2$ .

Druhý výraz v (23) sá dá previesť do polynomiálneho tvaru v poliach za cenu rozvoja do nekonečného radu v mocninách  $\pi/v$ , kde  $\pi^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2$ . Potom, využíjúc

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \dots, \quad (24)$$

dostaneme pre fyziku polí na guli  $S_v^2$  Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} g_{ab} (\partial_\mu \pi_a) (\partial^\mu \pi_b), \quad a, b = 1, 2, \quad (25)$$

kde

$$g_{ab} = \delta_{ab} + \frac{\pi_a \pi_b}{v^2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{v^2} + \dots \right). \quad (26)$$

Tento Lagrangian opisuje tzv. *nelineárny sigma model*. Polia  $\pi_1, \pi_2$  sa voči grupe  $SO(3)$  transformujú vo všeobecnosti nelineárne. Príslušné transformačné vzťahy pre infinitezimálne transformácie dostaneme z (10), (11) a (22)

$$\pi'_1 = \pi_1 + \alpha_3 \pi_2 \mp \alpha_2 \sqrt{v^2 - \pi^2}, \quad (27)$$

$$\pi'_2 = \pi_2 - \alpha_3 \pi_1 \pm \alpha_1 \sqrt{v^2 - \pi^2}, \quad (28)$$

kde horné znamienka platia pre  $\pi_3 > 0$  a dolné pre  $\pi_3 < 0$ . Pre malé excitácie v okolí bodu  $\Phi_0$  a s využitím  $\sqrt{1-x^2} = 1 - x^2/2 + \dots$  môžeme napísať

$$\pi'_1 = \pi_1 + \alpha_3 \pi_2 \mp \alpha_2 v \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{v^2} \right), \quad (29)$$

$$\pi'_2 = \pi_2 - \alpha_3 \pi_1 \pm \alpha_1 v \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{v^2} \right), \quad (30)$$

Lineárne sa polia  $\pi_1$  a  $\pi_2$  transformujú voči podgrupe  $SO(2)_3$ , čo vidíme, keď porovnáme (27) a (28) s rovnicou (14). Keďže väzba (22), ktorou sa prechádza od lineárneho k nelineárnemu modelu, je  $SO(3)$  symetrická, táto symetria sa preniesla aj na Lagrangian (25). Skomplikovali sa však transformačné vzťahy a demonštrovať túto symetriu je teraz o dosť pracnejšie.

### 1.3 O faktormnožine $G/H$

Majme grupu  $G$  a jej podgrupu  $H$  a nejaký prvok  $g \in G$ . Potom *ľavou zvyškovou triedou* (*left coset*)  $gH$  nazveme množinu  $\{gh | \forall h \in H\}$ . Analogicky môžeme definovať *pravú zvyškovú triedu* (*right coset*)  $Hg = \{hg | \forall h \in H\}$ . Vo všeobecnosti  $gH \neq Hg$ . V ďalšom budeme pre konkrétnosť uvažovať ľavé zvyškové triedy, pričom vynecháme prívlastok "ľavá". Analogické tvrdenia ako pre ľavé budú platiť aj pre pravé zvyškové triedy.

Každý prvok grupy  $G$  patrí práve do jednej zvyškovej triedy. Takže zvyškové triedy definujú rozklad grupy  $G$  na triedy ekvivalencie. Tento rozklad je úplný a všetky triedy majú rovnakú mohutnosť. Zvyškovou triedou, ktorá obsahuje jednotkový prvok, je samotná podgrupa  $H$ .

*Faktormnožinou* (*quotient set, coset space*)  $G/H$  nazveme množinu všetkých ľavých zvyškových tried, na ktoré grupu  $G$  rozkladá podgrupa  $H$ . Triviálnymi faktormnožinami sú  $G/G$  a  $G/\{e\}$ , kde  $e \in G$  je jednotkový prvok grupy  $G$ . Faktormnožina  $G/G$  obsahuje len jednu zvyškovú triedu, ktorá obsahuje všetky prvky grupy  $G$ . Faktormnožina  $G/\{e\}$  je totožná s  $G$ . Každý prvok grupy  $G$  je tu samostatnou zvyškovou triedou.

Podgrupa  $H' \subset G$  je *konjugovaná* s podgrupou  $H \subset G$  práve vtedy, keď

$$\exists g \in G : H' = gHg^{-1}. \quad (31)$$

Podgrupa  $H'$  je izomorfná s podgrupou  $H$ . Všetky navzájom konjugované podgrupy tvoria triedu ekvivalencie.

Podgrupa  $H$  grupy  $G$  je *normálnou* podgrupou, ak pre všetky  $g \in G$  je  $H$  konjugovaná sama so sebou

$$\forall g \in G : H = gHg^{-1}. \quad (32)$$

Ak  $H$  je normálna podgrupa grupy  $G$ , potom  $G/H$  tiež tvorí grupu. Grupové násobenie tejto grupy je definované nasledovne

$$[g] * [g'] = [gg'], \quad (33)$$

kde  $[g]$  označuje ľavú zvyškovú triedu  $gH$ . Jednotkovým prvkom tejto grupy je  $[e] = H$ , inverzným prvkom je  $[g^{-1}]$ . Takáto grupa sa nazýva *faktorgrupa* (*quotient group*).

## 1.4 Akcia Lieovej grupy na variete

*Ľavá (pravá) akcia* Lieovej grupy  $G$  na variete  $M$  je diferencovateľné zobrazenie  $G \times M \rightarrow M$ , ktoré spĺňa nasledovné kritériá

$$\text{ľavá akcia: } L_{gh}(x) = L_g(L_h(x)), \quad L_e(x) = x, \quad (34)$$

$$\text{pravá akcia: } R_{gh}(x) = R_h(R_g(x)), \quad R_e(x) = x, \quad (35)$$

kde  $x$  je ľubovoľný bod variety  $M$ ,  $g$  a  $h$  sú ľubovoľné prvky grupy  $G$  a  $e$  je jednotkový prvok grupy  $G$ . Skrátené by sa ľavá akcia grupy  $G$  dala zapísať ako  $gx$  a pravá akcia ako  $xg$ . V tejto notácii budú mať definičné vzťahy (34), (35) tvar

$$\text{ľavá akcia: } (gh)x = g(hx), \quad ex = x, \quad (36)$$

$$\text{pravá akcia: } x(gh) = (xg)h, \quad xe = x. \quad (37)$$

Akcia grupy na variete je *tranzitívna*, ak pre

$$\forall x_1, x_2 \in M, \exists g \in G : gx_1 = x_2, \quad \text{resp.} \quad x_1g = x_2. \quad (38)$$

To znamená, že ľubovoľné dva body variety  $M$  je možné spojiť pôsobením nejakého prvku grupy  $G$ .

*Orbita*  $\mathcal{O}_x$  bodu  $x \in M$  je podmnožina variety  $M$ , ktorú dostaneme akciou celej grupy  $G$  na bod  $x$

$$\mathcal{O}_x = \{gx | \forall g \in G\}. \quad (39)$$

V obecnosti je varieta  $M$  zjednotením svojich orbít, ktoré medzi sebou pôsobením grupy  $G$  nekomunikujú. Každý bod variety  $M$  patrí práve do jednej orbity. Orbity definujú na  $M$  reláciu ekvivalencie. Bod variety  $M$ , ktorý je totožný so svojou orbitou, sa nazýva *stabilným bodom* pôsobenia grupy  $G$  na variete  $M$ .

Akcia grupy na variete, ktorá je súčasne orbitou, je tranzitívna. Varieta, ktorá obsahuje len jednu orbitu sa nazýva *homogénnym priestorom*. Homogénny priestor je homomorfný s grupou  $G$ . Každému prvku  $G$  vieme jednoznačne priradiť bod homogénneho priestoru a to tak, že akcie

grupy na tomto priestore reprodukovujú grupové operácie. Homogénny priestor je orbitou každého svojho bodu.

*Stabilizátor* bodu  $x \in M$  sa nazýva taká podgrupa  $G_x$  grupy  $G$ , voči pôsobeniu ktorej je bod  $x$  invariantný

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}. \quad (40)$$

Podgrupa  $G_x$  sa zvykne tiež nazývať *stacionárna podgrupa*, *malá grupa* alebo *izotropná grupa*. Ak je stabilizátorom bodu  $x \in M$  podgrupa  $G_x$ , potom stabilizátorom bodu  $gx \in M$  je podgrupa  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ , čiže grupa konjugovaná s  $G_x$ .

Nech  $G$  je grupa a  $H$  jej podgrupa. Na faktormnožine  $G/H$  sa dá zaviesť ľavá akcia grupy  $G$ , pričom  $G/H$  je voči tomuto pôsobeniu homogénnym priestorom. Ak  $g, g' \in G$ ,  $[g] \in G/H$ , potom ľavá akcia  $G$  na  $G/H$  sa dá definovať nasledovne

$$g'[g] = [g'g]. \quad (41)$$

Skutočne,  $e[g] = [eg] = [g]$  a pre  $\forall g', g'' \in G$  platí

$$g'(g''[g]) = g'[g''g] = [g'(g''g)] = [(g'g'')g] = (g'g'')[g]. \quad (42)$$

Keďže pre  $\forall g_1, g_2 \in G, \exists g_3 \in G : g_2 = g_3g_1$ , neexistujú také dve ľavé zvyškové triedy, ktoré by nebolo možné spojiť akciou grupy  $G$ . Akcia grupy  $G$  na  $G/H$  je teda skutočne tranzitívna.

Všetky homogénne priestory grupy  $G$  sú, až na izomorfizmus, vyčerpané faktormnožinami  $G/H$ . Dva ľavé homogénne priestory  $(M, L_g)$  a  $(N, \tilde{L}_g)$  grupy  $G$  sú izomorfné (ekvivalentné), ak medzi nimi existuje *ekvivariantné* bijektívne zobrazenie  $f : M \rightarrow N$ :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L_g} & M \\ f \downarrow & & f \downarrow, \quad L_g \circ f = f \circ \tilde{L}_g. \\ N & \xrightarrow{\tilde{L}_g} & N \end{array} \quad (43)$$

Ak  $H$  a  $H'$  sú dve navzájom konjugované podgrupy grupy  $G$ , potom homogénne priestory  $G/H$  a  $G/H'$  sú izomorfné. Najväčší homogénny priestor grupy  $G$  je priestor izomorfný samotnej grupe  $G$ . Nazýva sa *hlavný homogénny priestor*.

Nech  $M$  je homogénny<sup>5</sup> priestor grupy  $G$  a  $G_x \subset G$  stabilizátor<sup>6</sup> bodu  $x \in M$ . Potom zobrazenie

$$f : gx \mapsto [g] \in G/G_x \quad (44)$$

je izomorfizmom  $M \rightarrow G/G_x$ . To znamená, že priestory  $M$  a  $G/G_x$  sú ekvivalentné.

Dôkaz:

1) bijektívnosť zobrazenia  $f$ : Ukážeme, že  $f$  je zobrazenie, t.j. platí

$$[g_1] \neq [g_2] \Rightarrow g_1x \neq g_2x.$$

Negácia je

$$[g_1] \neq [g_2] \wedge g_1x = g_2x.$$

Ale

$$g_1x = g_2x \Rightarrow h \equiv g_1^{-1}g_2 \in G_x \Rightarrow [g_2] = [g_1g_1^{-1}g_2] = [g_1h] = [g_1],$$

<sup>5</sup>Keďže  $M$  je homogénny priestor, je orbitou bodu  $x$  a teda každý bod  $M$  sa dá vyjadriť ako  $gx$  alebo, v alternatívnej notácii,  $L_g(x)$ .

<sup>6</sup>To znamená, že  $gx = x, \forall g \in G_x$ .

čo je spor s predpokladom a teda  $f$  je zobrazenie. Zobrazenie  $f$  je očividne surjektívne (na množinu  $G/G_x$ ), nakoľko každé  $[g]$  má svoj vzor, menovite  $gx$ . Nakoniec musíme ukázať, že  $f$  je injektívne, t.j. že

$$g_1x \neq g_2x \Rightarrow [g_1] \neq [g_2].$$

Opäť sporom. Testujeme negáciu pôvodného výroku

$$g_1x \neq g_2x \wedge [g_1] = [g_2].$$

Ale

$$[g_1] = [g_2] \Rightarrow \exists h \in G_x : g_2 = g_1h \Rightarrow g_2x = g_1hx = g_1x,$$

čo je spor s predpokladom. Takže zobrazenie  $f$  je injektívne a berúc do úvahy všetky dokázané vlastnosti — bijektívne.

2)  $f$  je ekvivariantné zobrazenie: Nech  $L_g$  je akcia grupy  $G$  na  $M$

$$L_{g'}(y) = g'y = y', \quad g' \in G, \quad y, y' \in M$$

a  $\tilde{L}_g$  akcia grupy  $G$  na  $G/G_x$

$$\tilde{L}_{g'}([g]) = g'[g] = [g'g] = [g''], \quad g, g', g'' = gg' \in G, \quad [g], [g'], [g''] \in G/G_x.$$

Potom

$$\begin{array}{ccc} y = gx \in M & \xrightarrow{L_{g'}} & M \ni y' = g'y = (g'g)x \\ f \downarrow & & f \downarrow \\ [g] \in G/G_x & \xrightarrow{\tilde{L}_{g'}} & G/G_x \ni g'[g] = [g'g] \end{array}, \quad L_g \circ f = f \circ \tilde{L}_g, \quad (45)$$

čiže  $f$  je naozaj ekvivariantné zobrazenie. Bijektivnosť a ekvivariantnosť zobrazenia  $f$  znamená, že priestory  $M$  a  $G/G_x$  sú ekvivalentné (viď (43)), čo *bolo treba dokázať*.

Z ekvivalencie medzi priestormi  $M$  a  $G/G_x$  vyplýva, že každý bod z  $M$  reprezentuje práve jednu ľavú zvyškovú triedu z  $G/G_x$  a naopak.

Pri hľadaní ekvivalencie medzi faktormnožinou  $G/H$  a homogénnym podpriestorom variety  $V$  môžeme postupovať podľa nasledovného receptu:

1. Nájdeme nejakú akciu  $L_g$  grupy  $G$  na variete  $V$ .
2. Nájdeme orbitu  $\mathcal{O}_x$  nejakého bodu  $x \in V$ . Táto orbita je homogénnym priestorom.
3. Nájdeme stabilizátor  $H$  bodu  $x$ .
4. Potom faktorpriestor  $G/H$  je ekvivalentný orbite  $\mathcal{O}_x$ , t.j.  $G/H = \mathcal{O}_x$ .

Pripomeňme, že  $G/H$  má štruktúru grupy, ak  $H$  je normálna podgrupa.

## 1.5 Akcia $SO(3)$ na $\mathcal{R}^3$

Pôsobenie (ľavá akcia) grupy  $G = SO(3)$  na priestore  $\mathcal{R}^3$  je zobrazením  $G \times \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ . Toto pôsobenie môže byť realizované linárne, násobením vektorov (1) maticami (6) a môžeme si ho predstaviť ako 3dim rotácie okolo osí prechádzajúcich počiatkom  $\Phi_p = (0, 0, 0)$ .

Orbitou ľubovoľného bodu  $\Phi \in \mathcal{R}^3$  je plocha  $S^2$ , ktorá je povrchom gule s polomerom  $|\Phi|$ . Každý bod priestoru  $\mathcal{R}^3$  patrí práve do jednej orbity. Bod  $\Phi_p$  je stabilným bodom pôsobenia  $SO(3)$  na  $\mathcal{R}^3$ , pretože je sám sebe orbitou.

Stabilizátorom (malou grupou) ľubovoľného bodu  $\Phi \in \mathcal{R}^3$  sú rotácie okolo osi prechádzajúcej týmto bodom. Tieto rotácie zachovávajú bod  $\Phi$  a sú podgrupou  $SO(2)$  grupy  $SO(3)$ .

Ľavá akcia grupy  $SO(3)$  na ploche  $S^2$  je tranzitívna a plocha  $S^2$  je z tohoto pohľadu homogénnym priestorom: každý bod v  $S^2$  je nejakou  $SO(3)$  rotáciou dosiahnuteľný z ľubovoľného iného bodu  $S^2$ .

Postupujúc podľa receptu zo záveru časti 1.4 dospejeme k záveru, že faktormnožina  $SO(3)/SO(2)$  je ekvivalentná povrchu gule  $S^2$ ,

$$SO(3)/SO(2) = S^2. \quad (46)$$

Každý bod z  $S^2$  reprezentuje práve jednu ľavú triedu faktormnožiny  $SO(3)/SO(2)$  a naopak.

Zvoľme na orbite  $S^2$  o polomere  $v$  bod  $\Phi_0 = (0, 0, v)$ . Stabilizátorom tohoto bodu sú  $SO(2)$  rotácie okolo osi 3, ktoré v tomto špeciálnom prípade budeme označovať  $SO(2)_3$ . Tieto rotácie

$$H(\varphi_3) \equiv O(0, 0, \varphi_3) = \exp(i\varphi_3 J_3) \in SO(2)_3 \quad (47)$$

transformujú bod  $\Phi_0$  na seba samého. Každý bod priestoru  $S^2 \setminus \{\Phi_0\}$  je možné z bodu  $\Phi_0$  dosiahnuť rotáciou okolo osi, ktorá leží v rovine kolmej na os 3. Takúto rotáciu môžeme zapísať v tvare

$$X(\varphi_1, \varphi_2) \equiv O(\varphi_1, \varphi_2, 0) = e^{i(\varphi_1 J_1 + \varphi_2 J_2)} \in SO(3) \setminus SO(2)_3. \quad (48)$$

Každý<sup>7</sup> bod  $\Phi$  priestoru  $S^2$  je jednoznačne zadaný hodnotami parametrov  $\varphi_{1,2}$  v súvislosti s transformáciou

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = X(\varphi_1, \varphi_2)\Phi_0. \quad (49)$$

Čísla  $(\varphi_1, \varphi_2)$  teda môžu slúžiť ako súradnice bodov v  $S^2$ . Vzhľadom na ekvivalenciu (46) tieto súradnice súčasne parametrizujú ľavé zvyškové triedy faktorpriestoru  $SO(3)/SO(2)_3$ . Matice  $X(\varphi_1, \varphi_2)$  sú reprezentatívnymi prvkami jednotlivých zvyškových tried.

Pôsobením ľubovoľného prvku grupy  $SO(3)$  na reprezentanta faktormnožiny  $X(\varphi_1, \varphi_2)$  dostaneme opäť prvok grupy  $SO(3)$

$$O(g)X(\varphi_1, \varphi_2) = O(g') \in SO(3) \quad (50)$$

Matica  $O(g')$  určite patrí do niektorej zvyškovej triedy, ale nie je nevyhnutne totožná s jej reprezentatívnym prvkom. Od reprezentatívneho prvku svojej triedy sa však líši nanajvýš o maticu podgrupy  $SO(2)_3$

$$O(g') = X(\varphi'_1, \varphi'_2)H(\varphi'_3). \quad (51)$$

Je ovšem zrejmé, že  $H$  bude vo všeobecnosti závisieť od pôvodného  $X$  a aj od  $g$ . Keď toto všetko dáme dohromady s (50) a (51), dostaneme

$$O(g)X(\varphi_1, \varphi_2) = X(\varphi'_1, \varphi'_2)H(\varphi'_3(\varphi_1, \varphi_2, g)). \quad (52)$$

Odtiaľ je už len krok k formálnemu transformačnému vzťahu pre prvky  $X$  faktorpriestoru  $SO(3)/SO(2)_3$  voči transformáciám grupy  $SO(3)$

$$X(\varphi'_1, \varphi'_2) = O(g)X(\varphi_1, \varphi_2)H^{-1}(\varphi'_3(\varphi_1, \varphi_2, g)). \quad (53)$$

Táto rovnica súčasne definuje nelineárny transformačný vzťah pre súradnice  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . V infinitezimálnom tvare a pre bezprostredné okolie bodu  $\Phi_0$  má vzťah (53) tvar

$$\varphi'_1 = \varphi_1 + \alpha_3 \varphi_2 + \alpha_1 \left[ 1 - \frac{1}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right], \quad (54)$$

$$\varphi'_2 = \varphi_2 - \alpha_3 \varphi_1 + \alpha_2 \left[ 1 - \frac{1}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right]. \quad (55)$$

<sup>7</sup>Pri tomto tvrdení treba byť opatrný a pri jednotlivých Lieových grupách zvažovať, aké veľké okolie jednotkového prvku príslušnej grupy je možné parametrizovať v exponenciálnom tvare.

Prechod medzi súradnicami  $(\varphi_1, \varphi_2)$  a  $(\pi_1, \pi_2)$  v blízkom okolí bodu  $\Phi_0$  je daný vzt'ahmi

$$\pi_1 = v\varphi_2, \quad (56)$$

$$\pi_2 = -v\varphi_1. \quad (57)$$

Ked' dosadíme (56) a (57) do (54) a (55), dostaneme

$$\pi'_1 = \pi_1 + \alpha_3\pi_2 + \alpha_2v \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{v^2}\right), \quad (58)$$

$$\pi'_2 = \pi_2 - \alpha_3\pi_1 - \alpha_1v \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{v^2}\right). \quad (59)$$

V prípade, že  $O(g) = H(\alpha_3) \in SO(2)_3$ , dostaneme pre tieto parametre lineárnu transformáciu

$$X(\varphi'_1, \varphi'_2) = H(\alpha_3)X(\varphi_1, \varphi_2)H^{-1}(\alpha_3), \quad (60)$$

čo v infinitezmálnom tvare je

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 \\ -\alpha_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

## 1.6 Geometrizačia nelineárneho sigma modelu

V predošlých častiach sme prišli k záveru, že polia nelineárneho sigma modelu “žijú” na povrchu gule, ktorá je ekvivalentná faktormnožine  $SO(3)/SO(2)$ . Polia nelineárneho sigma modelu sú však súčasne Nambu-Goldstonove bozóny (NGB) s nulovou hmotnosťou, ktoré sa objavili v lineárnom sigma modeli v dôsledku spontánneho narušenia symetrie  $SO(3) \rightarrow SO(2)$ . Je zrejmé, že počet NGB zodpovedá rozmernosti faktormnožiny, ktorá je zas daná počtom generátorov grupy  $SO(3)$ , ktoré nezachovávajú vákuum (stabilný bod). Takže

$$n(\text{NGB}) = \dim SO(3)/SO(2) = \dim SO(3) - \dim SO(2) = 2. \quad (62)$$

Začali sme so sigma modelom, ktorý opisoval triplet skalárnych polí. Nie je problém túto situáciu zovšeobecniť na  $N+1$  skalárnych polí. Symetria Lagrangianu bude  $SO(N+1)$  a symetria zvoleného vákua  $SO(N)$ . V takom prípade NGB budú “žiť” na povrchu  $N$  rozmernej gule  $S^N = SO(N+1)/SO(N)$  a ich počet bude

$$n(\text{NGB}) = \dim SO(N+1)/SO(N) = \dim SO(N+1) - \dim SO(N) = N. \quad (63)$$

V skutočnosti je tento výsledok dost' všeobecný a platí vždy pre každý systém so spontánnym narušením symetrie. Ak máme systém s globálnou symetriou  $G$ , ktorá je narušená na nejakú svoju podgrupu  $H$ , potom v spektre takéhoto modelu sa objaví

$$n(\text{NGB}) = \dim G/H = \dim G - \dim H \quad (64)$$

Nambu-Goldstonových bozónov, ktoré budú “žiť” na faktormnožine  $G/H$ .

Dá sa ukázať, že  $S$ -maticové elementy, a teda fyzikálne predpovede, nelineárneho sigma modelu nezávisia na voľbe súradníc parametrizujúcich faktormnožinu  $G/H$ , pokiaľ sa tieto od seba líšia podľa vzt'ahu

$$\pi'_a = \pi_a + f_a(\pi_b), \quad (65)$$

kde  $f$  je analytická funkcia, ktorej mocniný rozvoj obsahuje členy prinajmenšom druhého rádu v súradniciach  $\pi$ . To znamená, že na popis fyziky NGB si môžeme zvolit' ľubovoľné analytické súradnice parametrizujúce faktormnožinu  $G/H$  a dostaneme vždy rovnaké fyzikálne výsledky<sup>8</sup>.

V prípade  $SO(3)$  nelineárneho modelu môžeme napríklad pri opise NGB zamenit' polia  $(\pi_1, \pi_2)$  za súradnice  $(\varphi_1, \varphi_2)$  priestoru  $S^2$ , prenášobené škálovacím faktorom  $v$ . Pripomeňme, že vzťah medzi  $\pi$  a  $\phi \equiv v\varphi$  je aproximovaný v blízkom okolí vákua  $\Phi_0$  rovnicami (56) a (57). Výhoda parametrizácie NGB pomocou polí  $\phi$  spočíva v tom, že z týchto polí vieme zostrojit' objekty s dobre definovanými transformačnými vlastnosťami voči grupe symetrie  $SO(3)$ . Menovite, ukázali sme v predošlej časti, že reprezentatívny prvok zvyškovej triedy  $\xi(\phi_1, \phi_2) = \exp(i\phi_a J_a/v) \in SO(3)/SO(2)$  sa voči  $SO(3)$  transformuje podľa vzťahu (53), ktorý môžeme schématicky zapísať v tvare

$$\xi(\phi') = g\xi(\phi)h^{-1}(\phi, g), \quad g \in SO(3), h \in SO(2)_3 \quad (66)$$

Za predpokladu, že pracujeme s unitárnymi reprezentáciami grupy  $SO(3)$ , je pre  $\forall g \in G : g^{-1} = g^\dagger$ , čiže

$$\xi' = g\xi h^\dagger, \quad \xi'^\dagger = h\xi^\dagger g^\dagger. \quad (67)$$

Matice  $J_1$  a  $J_2$  spolu s  $J_3$  definujú algebru  $so(3)$  grupy  $SO(3)$ . Matica  $J_3$  navyše generuje algebru  $so(2)$  podgrupy  $SO(2)$ . Vzhľadom na vzájomnú "kolmost" generátorov  $J_i$ , ktorá je implikovaná splnením podmienky  $\text{Tr}(J_i J_j) \sim \delta_{ij}$ , je každý objekt  $\hat{\phi} \equiv \phi_1 J_1 + \phi_2 J_2$  prvkom  $so(3) \setminus so(2)$ . To znamená, že je z doplnkového (kolmého) podpriestoru k  $so(2)$ . Z komutačných vzťahov medzi  $SO(3)$  generátormi vyplýva

$$[J_3, J_3] = 0 \in so(2), \quad (68)$$

$$[J_3, J_a] = i\varepsilon_{3ab} J_b \in so(3) \setminus so(2), \quad (69)$$

$$[J_a, J_b] = i\varepsilon_{ab3} J_3 \in so(2), \quad (70)$$

kde  $a = 1, 2$ . Odtiaľ dostaneme

$$[so(2), so(2)] \subset so(2), \quad (71)$$

$$[so(2), so(3) \setminus so(2)] \subset so(3) \setminus so(2), \quad (72)$$

$$[so(3) \setminus so(2), so(3) \setminus so(2)] \subset so(2). \quad (73)$$

Na grupe  $SO(3)$  je možné zdefinovať automorfizmus  $\tau : SO(3) \rightarrow SO(3)$ , ktorý je involutívny. To znamená, že  $\tau^2$  je identické zobrazenie. Vzhľadom na (70) sa tento automorfizmus dá realizovať tak, že pre prvky grupy  $SO(3)$  v exponenciálnom tvare  $g = \exp(i\hat{\theta})$  bude platiť

$$\tau(g) = \exp(i\tau(\hat{\theta})), \quad \text{kde } \tau(\hat{\theta}) = \begin{cases} +\hat{\theta}, & \text{pre } \hat{\theta} \in so(2) \\ -\hat{\theta}, & \text{pre } \hat{\theta} \in so(3) \setminus so(2) \end{cases}. \quad (74)$$

Keď aplikujeme automorfizmus  $\tau$  na transformačnú rovnicu (67), dostaneme

$$\xi(-\phi') = \xi^\dagger(\phi') = \tau(g)\xi^\dagger(\phi)h^\dagger, \quad \xi(-\phi')^\dagger = \xi(\phi') = h\xi(\phi)\tau(g^\dagger). \quad (75)$$

Keďže  $\phi_a$  sú polia, závisia na časopriestorových súradniciach. Definujme objekt<sup>9</sup>

$$\alpha_\mu(\phi) = i\xi^\dagger(\phi)\partial_\mu\xi(\phi) = ie^{-i\hat{\phi}/v}\partial_\mu e^{i\hat{\phi}/v}, \quad (76)$$

<sup>8</sup>Greenove funkcie vo všeobecnosti ale na voľbe súradníc závisia.

<sup>9</sup>V učenejších kruhoch sa  $\alpha_\mu$  zvykne nazývať *Maurer-Cartanova 1-forma*.

kde  $i$  sme do definície zaviedli kvôli tomu, aby  $\alpha_\mu$  bola hermitovská<sup>10</sup> matica,  $\alpha_\mu^\dagger = \alpha_\mu$ . Dá sa ukázať platnosť nasledujúceho vzťahu<sup>11</sup>

$$\exp(\pm i\hat{\phi}/v)\partial_\mu \exp(\mp i\hat{\phi}/v) = \mp \frac{i}{v}\partial_\mu \hat{\phi} - \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{v}\right)^2[\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] \mp \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{v}\right)^3[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}]] - \dots \quad (77)$$

Vďaka (70) a (77) vidíme, že mocninový rozvoj objektu  $\alpha_\mu(\phi)$  sa skladá striedavo z členov patriacich do algebry  $so(2)$  — párne členy — a do doplnkového priestoru  $so(3) \setminus so(2)$  — nepárne členy, takže  $\alpha_\mu \in so(3)$ . S použitím (67) sa dá ukázať, že voči grupe  $SO(3)$  sa  $\alpha_\mu(\phi)$  transformuje ako  $SO(2)$  kalibračný bozón

$$\alpha_\mu(\phi') = h(\phi, g)\alpha_\mu(\phi)h^\dagger(\phi, g) + ih(\phi, g)\partial_\mu h^\dagger(\phi, g). \quad (78)$$

S použitím (75) sa dá ukázať, že rovnako sa transformuje aj  $\alpha_\mu(-\phi) = i\xi(\phi)\partial_\mu \xi^\dagger(\phi)$

$$\alpha_\mu(-\phi') = h(\phi, g)\alpha_\mu(-\phi)h^\dagger(\phi, g) + ih(\phi, g)\partial_\mu h^\dagger(\phi, g). \quad (79)$$

Projekcia  $so(3)$  vektora  $\alpha_\mu$  na priestor  $so(2)$  je vektor<sup>12</sup>

$$\alpha_\mu^\parallel = \frac{1}{2}\text{Tr}(J_3\alpha_\mu)J_3 = i\left\{-\frac{1}{2!}\left(\frac{i}{v}\right)^2[\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] - \dots\right\} \in so(2), \quad (80)$$

ktorý vo svojom mocninnom rozvoji obsahuje len párne členy. Projekcia  $so(3)$  vektora  $\alpha_\mu$  na doplnkový priestor  $so(3) \setminus so(2)$  je vektor<sup>13</sup>

$$\alpha_\mu^\perp = \frac{1}{2}\text{Tr}(J_a\alpha_\mu)J_a = i\left\{\frac{i}{v}\partial_\mu \hat{\phi} + \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{v}\right)^3[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}]] + \dots\right\} \in so(3) \setminus so(2), \quad a = 1, 2, \quad (81)$$

ktorý vo svojom mocninnom rozvoji obsahuje len nepárne členy. Pôsobením automorfizmu  $\tau$  na projekcie  $\alpha_\mu^{\parallel, \perp}$  dostaneme

$$\tau(\alpha_\mu^\parallel(\phi)) = \alpha_\mu^\parallel(\phi) = \alpha_\mu^\parallel(-\phi) = \alpha_\mu^\parallel(\tau(\phi)), \quad (82)$$

$$\tau(\alpha_\mu^\perp(\phi)) = -\alpha_\mu^\perp(\phi) = \alpha_\mu^\perp(-\phi) = \alpha_\mu^\perp(\tau(\phi)). \quad (83)$$

Z (anti)symetrie  $\alpha_\mu^{(\perp)\parallel}$  v argumente  $\phi$  vyplýva

$$\alpha_\mu^{\parallel, \perp}(\phi) = \frac{1}{2}(\alpha_\mu(\phi) \pm \alpha_\mu(-\phi)) = \frac{i}{2}(\xi^\dagger \partial_\mu \xi \pm \xi \partial_\mu \xi^\dagger), \quad (84)$$

čo je v súlade s rozvojom (77). Pri takto definovaných priemetoch platí

$$\alpha_\mu = \alpha_\mu^\parallel + \alpha_\mu^\perp. \quad (85)$$

Transformačné vlastnosti  $\alpha_\mu^{\parallel, \perp}$  voči  $SO(3)$  rotáciám dostaneme pomocou (78) a (79)

$$\alpha_\mu^\parallel(\phi') = h(\phi, g)\alpha_\mu^\parallel(\phi)h^\dagger(\phi, g) + ih(\phi, g)\partial_\mu h^\dagger(\phi, g), \quad (86)$$

$$\alpha_\mu^\perp(\phi') = h(\phi, g)\alpha_\mu^\perp(\phi)h^\dagger(\phi, g). \quad (87)$$

<sup>10</sup>Hermitovosť  $\alpha_\mu$  ukážeme ľahko, keď si uvedomíme, že  $\xi^\dagger \xi = \mathbf{I}$ , čiže  $(\partial_\mu \xi^\dagger)\xi = -\xi^\dagger \partial_\mu \xi$ .

<sup>11</sup>Tento vzťah platí pre ľubovoľný operátor závisiaci na časopriesotorových súradniciach.

<sup>12</sup>Tento vektor sa po anglicky zvykne nazývať *natural connection*.

<sup>13</sup>Tento vektor sa v anglickej literatúre zvykne nazývať *vielbein*.

Zadefinujme objekt

$$U(\phi) \equiv \xi(\phi)\tau(\xi^\dagger(\phi)) = \xi(\phi)\xi^\dagger(-\phi) = \xi(\phi)\xi(\phi). \quad (88)$$

Jeho transformačné vlastnosti voči grupe  $SO(3)$  dostaneme z (67) a (75)

$$U(\phi') = gU(\phi)\tau(g^\dagger), \quad U^\dagger(\phi') = \tau(g)U^\dagger(\phi)g^\dagger. \quad (89)$$

Nie je ťažké overiť nasledovný vzťah medzi  $U$  a  $\alpha_\mu^\perp$

$$\alpha_\mu^\perp = \frac{i}{2}\xi^\dagger(\partial_\mu U)\xi^\dagger = -\frac{i}{2}\xi(\partial_\mu U^\dagger)\xi. \quad (90)$$

Najjednoduchší  $SO(3)$  invariantný Lagrangian, ktorý môžeme pomocou doteraz zadaných objektov skonštruovať, má tvar

$$L = \frac{v^2}{4}\text{Tr}[\alpha_\mu^\perp(\phi)\alpha^{\perp\mu}(\phi)] = \frac{v^2}{16}\text{Tr}[(\partial_\mu U)(\partial^\mu U^\dagger)]. \quad (91)$$

Po dosadení (81) do (91) a s využitím

$$[\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}] = i\varepsilon_{ab3}\phi_a(\partial_\mu \phi_b)J_3, \quad (92)$$

$$[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}]] = \{(\phi_a \phi_a)\partial_\mu \phi_b - (\phi_a \partial_\mu \phi_a)\phi_b\}J_b, \quad (93)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} L &= \frac{v^2}{4}\text{Tr}\{(-\frac{1}{v}\partial_\mu \hat{\phi} + \frac{1}{3!}\frac{1}{v^3}[\hat{\phi}, [\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi}]] - \dots)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)(\partial^\mu \phi_a) + \frac{2}{3v^2}(\phi_a \partial_\mu \phi_a)^2 - \frac{2}{3v^2}(\phi_a \phi_a)(\partial_\mu \phi_b \partial^\mu \phi_b) + \dots \end{aligned} \quad (94)$$

## 2 Appendix

Naznačíme odvodenie infinitezimálnych transformácií (54) a (55) z rovnice (53).

Generátory  $J_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , grupy  $SO(3)$  vo fundamentálnej reprezentácii sú dané vzťahom (8). Odtiaľ dostaneme

$$\text{Tr}(J_a) = 0, \quad (95)$$

$$\text{Tr}(J_a J_b) = 2\delta_{ab}, \quad (96)$$

$$\text{Tr}(J_a J_b J_c) = i\varepsilon_{abc}. \quad (97)$$

Rovnica (53) v exponenciálnom tvare je

$$e^{i\varphi'_a J_a} = e^{i\vec{\alpha}\vec{J}} e^{i\varphi_a J_a} e^{-i\varphi'_3(\varphi_1, \varphi_2, \vec{\alpha})J_3}, \quad a = 1, 2. \quad (98)$$

Infinitezimálny tvar v blízkom okolí bodu  $\Phi_0$  je

$$\mathbf{I} + i\varphi'_a J_a = (\mathbf{I} + i\vec{\alpha}\vec{J})(\mathbf{I} + i\varphi_a J_a)(\mathbf{I} - i\varphi'_3 J_3), \quad (99)$$

kde

$$\varphi'_3(\varphi_1, \varphi_2, \vec{\alpha}) = \underbrace{\varphi'_3(\varphi_1, \varphi_2, 0)}_0 + \vec{f}(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \vec{\alpha}. \quad (100)$$

Po roznásobení (99) a dosadení (100) dostaneme

$$\begin{aligned} i\varphi'_a J_a &= i(\alpha_1 + \phi_1)J_1 + i(\alpha_2 + \phi_2)J_2 + i[\alpha_3 - (\vec{f} \cdot \vec{\alpha})]J_3 \\ &\quad - (\vec{\alpha} \vec{J})(\phi_a J_a) + (\vec{f} \cdot \vec{\alpha})(\phi_a J_a)J_3 \end{aligned} \quad (101)$$

Ked' zoberieme stopu rovnice (101), dostaneme

$$\alpha_1 \varphi_1 = -\alpha_2 \varphi_2. \quad (102)$$

Ked' rovnicu (101) vynásobíme maticou  $J_3$  a zoberieme stopu, dostaneme

$$\vec{f} \cdot \vec{\alpha} = \alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_1 \varphi_2 - \alpha_2 \varphi_1). \quad (103)$$

Ked' rovnicu (101) vynásobíme maticou  $J_1$ , resp.  $J_2$ , a zoberieme stopu, dostaneme

$$\varphi'_{1,2} = \varphi_{1,2} + \alpha_{1,2} \pm \frac{\varphi_{2,1}}{2}[\alpha_3 + (\vec{f} \cdot \vec{\alpha})]. \quad (104)$$

Po dosadení (103) do (104) dostaneme transformačné rovnice (58) a (59). Infinitesimalne transformácie (61) z (60) dostaneme z

$$\begin{aligned} \mathbf{I} + i\varphi'_a J_a &= (\mathbf{I} + i\alpha_3 J_3)(\mathbf{I} + \varphi_a J_a)(\mathbf{I} - i\alpha_3 J_3) \\ &= \mathbf{I} + i(\varphi_1 + \alpha_3 \varphi_2)J_1 + i(\varphi_2 - \alpha_3 \varphi_1)J_2 \end{aligned} \quad (105)$$

porovnaním koeficientov pri jednotlivých generátoroch na ľavej a pravej strane.

**Ukážeme, že transformačný vzt'ah  $\xi(\pi') = g\xi(\pi)h^\dagger(\pi, g)$ , kde  $g \in G$ ,  $\xi \in G/H$ ,  $h \in H$ , naozaj definuje realizáciu grupy  $G$ .**

Nech  $g = g_2 g_1$ , kde  $g_1, g_2 \in G$ . Nech  $\pi$  sú súradnice na priestore  $G/H$ . Potom

$$g_1 \xi(\pi) = \xi(\pi') h_1(\pi, g_1), \quad h_1 \in H \quad (106)$$

$$g_2 \xi(\pi') = \xi(\pi'') h_2(\pi', g_2), \quad h_2 \in H. \quad (107)$$

Dosadením z rovnice (106) do (107) dostaneme

$$(g_2 g_1) \xi(\pi) = \xi(\pi'') h_{21}(\pi, g_2 g_1), \quad (108)$$

kde

$$h_{21}(\pi, g_2 g_1) = h_2(\pi', g_2) h_1(\pi, g_1) \in H. \quad (109)$$

**Ukážeme, že ak v transformačnom vzt'ahu  $\xi(\pi') = g\xi(\pi)h^\dagger(\pi, g)$  je  $g = h_0 \in H$  a  $\xi(\pi) = \exp(i\hat{\pi})$ , kde  $\hat{\pi} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ , potom súradnice  $\pi$  sa transformujú lineárne.**

Ak  $h_0 \in H$ , potom  $h_0 \xi(\pi) = \xi(\pi') h(\pi, h_0)$ , odkiaľ

$$h_0 \xi(\pi) h_0^{-1} = \xi(\pi') h(\pi, h_0) h_0^{-1}. \quad (110)$$

Ak  $\xi(\pi) = \exp(i\hat{\pi})$ , potom

$$h_0 \xi(\pi) h_0^{-1} = h_0 \exp(i\hat{\pi}) h_0^{-1} = \exp[i(h_0 \hat{\pi} h_0^{-1})] = \exp(i\hat{\pi}'') = \xi(\pi''), \quad (111)$$

kde  $\hat{\pi}'' \equiv h_0 \hat{\pi} h_0^{-1}$ . Dostali sme

$$\xi(\pi'') = \xi(\pi') h(\pi, h_0) h_0^{-1}. \quad (112)$$

Objekty  $\xi(\pi')$  a  $\xi(\pi'')$  sú prvky faktormnožiny  $G/H$ . Keďže sa od seba líšia len o  $h(\pi, h_0) h_0^{-1} \in H$ , patria do tej istej ľavej triedy. Keďže však každú triedu reprezentuje práve jedno  $\xi$ , musí platiť

$$\xi(\pi'') = \xi(\pi'), \quad \pi' = \pi'', \quad h(\pi, h_0) = h_0. \quad (113)$$

To znamená, že súradnice  $\pi$  sa voči podgrupe  $H$  transformujú lineárne

$$\hat{\pi}' = h_0 \hat{\pi} h_0^{-1} = h_0 \hat{\pi} h_0^\dagger, \quad (114)$$

podľa pridruženej (adjoint) reprezentácie.