Rozmerová analýza

M. Gintner

1.1 Rozmerová analýza – ako a prečo to funguje

Skúsenosť nás učí, že náš svet je poznateľný po častiach. Napriek tomu, že si to bežne neuvedomujeme, nie je to triviálny fakt. Nepoznáme princíp, ktorý by bránil aj takému usporiadaniu reality, v ktorej by na predpovedanie priebehu ľubovoľného javu bola potrebná detailná znalosť stavu celého nášho vesmíru[1]. Napriek tomu Isaac Newton dokázal spočítať pohyb planét okolo Slnka, aj keď nemal žiadne znalosti o elektromagnetickom poli, o elementárnych časticiach, či o rozpínaní vesmíru.

Toto je ilustrácia našej skúsenosti, že každý doteraz skúmaný jav v našom vesmíre zjavne súvisel len s malým počtom iných skutočností. Pohyb Mesiaca okolo Zeme dokážeme opísať, ak poznáme hmotnosť Zeme a vzájomnú vzdialenosť týchto dvoch telies. Na základe týchto skutočností spolu so znalosťou univerzálnej gravitačnej konštanty dostaneme pomerne presný opis pohybu Mesiaca. Isté malé nepresnosti dokážeme odstrániť, ak zvážime aj vplyv Slnka a ostatných planét Slnečnej sústavy. Drvivá väčšina javov prebiehajúcich v tomto vesmíre však nemá pozorovateľný vplyv na pohyb Mesiaca okolo Zeme. Na druhej strane je ale celkom možné, že vplyv celého vesmíru na tento alebo hociktorý iný jav je efektívne zosumarizovaný do hodnôt základných fyzikálnych konštánt. Toto ale nie je (a ešte asi dlho nebude) v našich silách overiť priamym pozorovaním , nakoľko nedokážeme prevádzať experimenty s celým vesmírom.

Základným aspektom poznávacej práce fyzikov je teda zisťovanie skutočností, ktoré sú pre daný jav dôležité. Poznateľnosť sveta po častiach sa v matematickej rovine prejavuje tak, že veličiny charakterizujúce skúmaný jav typicky závisia len na malom počte iných veličín. Zvyčajne veličina každého druhu má pre daný jav len jedného dôležitého zástupcu (jednu dôležitú hmotnosť, jednu dôležitú dĺžku, jednu dôležitú rýchlosť, atd.) Tieto veličiny musia byť skombinované takým spôsobom, aby sme dostali správne jednotky pre výslednú veličinu. Pokiaľ do vzorca vstupujú veličiny s rôznymi jednotkami, potom doň vstupujú v súčinoch a mocninách. Na tejto úvahe je založená metóda *rozmerovej analýzy*: vytipujeme si veličiny dôležité pre daný jav a tieto skombinujeme do jedného výrazu tak, aby sme dostali správnu jednotku pre hľadanú veličinu.

Rozmerová analýza nie je "zaručený recept" na hľadanie zákonov fyziky. Určite nedokáže identifikovať bezrozmerné konštanty, ktoré sú často vo fyzikálnych výrazoch prítomné. Skúsenosť ale ukazuje, že sa tieto konštanty nezvyknú dramaticky líšiť od jednotky a tak vzťahy odvodené metódou rozmerovej analýzy dávajú často prinajmenšom dobré rádové odhady a správne funkčné závislosti. V tejto kapitole sa pokúsime využiť rozmerovú analýzu na identifikáciu javov, ktoré sú podstatné pre vysvetlenie stavby atómu.

[1] Otázkou samozrejme ostáva, či by v takomto vesmíre bol možný vznik inteligencie a rozvoj poznávania.

1.2 Príklady použitia rozmerovej analýzy v klasickej fyzike

1.2.1 Perióda matematického kyvadla

Uvažujme matematické kyvadlo: na závese dĺžky l je malá gulička hmotnosti m. Chceme nájsť dobu kmitu T.

Tip na dôležité veličiny, ktoré by mohli ovplyvňovať správanie sa kyvadla: dĺžka l, hmotnosť m a ak kyvadlo visí pri zemskom povrchu, potom gravitačné zrýchlenie g. V nasledujúcej tabuľke zosumarizujeme údaje o jednotkách uvedených veličín

veličina	jednotka	rozmer
l	m	m
m	kg	kg
g	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$	$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$
T	s	s

(1)

Funkčná závislosť T na l, m, g má tvar

$$T = l^\alpha m^\beta g^\gamma, \tag{2}$$

kde α, β, γ sú neznáme konštanty. Výsledné jednotky na pravej aj ľavej strane rovnice (2) sa musia zhodovať, čiže

$$[T] = [l]^\alpha [m]^\beta [g]^\gamma, \tag{3}$$

kde ako $[x]$ sme označili rozmer veličiny x. Keď dosadíme jednotky z tabuľky (1) do (3), dostaneme

$$\mathrm{s} = \mathrm{m}^{\alpha+\gamma} \cdot \mathrm{kg}^\beta \cdot \mathrm{s}^{-2\gamma}. \tag{4}$$

Porovnaním ľavej a pravej strany tejto rovnice nájdeme, že $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ a $\gamma = -1/2$. To znamená, že na základe dimenzionálnej analýzy sme našli, že

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5}$$

Oproti správnemu vzťahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6}$$

sa vzťah (5) líši bezrozmernou konštantou 2π. Náš odhad sa teda od presného výsledku líši skoro faktorom sedem. To nie je ale až také zlé, keď si uvedomíme, že líšiť sa dá aj faktorom milión alebo aj podstatne viac. Čo je ale najdôležitejšie, rozmerovou analýzou sme dostali správnu závislosť na premenných (prišli sme napríklad na to, že doba kmitu nezávisí na m, hoci sme túto veličinu do našich pôvodných úvah zahrnuli). Naviac sme číselne dostali správny rádový odhad výsledku. To je rozhodne výborný zisk pri tak malej investícii.

1.2.2 Doba obehu Zeme okolo Slnka

Na prvý pohľad sa tu zdá byť situácia pre rozmerovú analýzu príliš komplikovaná. V hre je totiž viac ako jedna dôležitá hmotnosť, hmotnosť Zeme m_Z a hmotnosť Slnka m_S. Pri pozornom postupe však zistíme, že toto je len zdanlivý problém.

Pre pohyb Zeme okolo Slnka je zrejme dôležitá hmotnosť samotnej Zeme ako i sila, ktorá na Zem pôsobí(viď 2. Newtonov zákon). Sila F, ktorou pôsobí Slnko na Zem, závisí od vzdialenosti r Zeme od Slnka a od gravitačných nábojov Slnka a Zeme, ktoré označíme g_S a g_Z, takže

$$F = \kappa \frac{g_S g_Z}{r^2}. \tag{7}$$

Dôležité veličiny a ich jednotky zosumarizujeme v nasledovnej tabuľke

veličina	jednotka	rozmer
m_Z	kg	kg
r	m	m
$\kappa g_S g_Z$	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
T	s	s

(8)

Keď dosadíme jednotky z tabuľky do rozmerovej rovnice

$$[T] = [\kappa g_S g_Z]^\alpha [m_Z]^\beta [r]^\gamma, \tag{9}$$

dostaneme

$$\mathrm{s} = \mathrm{kg}^{\alpha+\beta} \cdot \mathrm{m}^{3\alpha+\gamma} \cdot \mathrm{s}^{-2\alpha}. \tag{10}$$

Táto rovnica je splnená, ak $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$ a $\gamma = 3/2$. Takže

$$T = r^{3/2} \sqrt{\frac{m_Z}{\kappa g_S g_Z}}. \tag{11}$$

Podľa *princípu ekvivalencie* je gravitačný náboj úmerný (pri vhodnej voľbe jednotiek rovný) hmotnosti telesa. Keď teda dosadíme do (11) vzťahy $g_S = m_S$ a $g_Z = m_Z$, dostaneme

$$T = r^{3/2} \sqrt{\frac{1}{\kappa m_S}}. \tag{12}$$

Toto sa líši od presného výsledku opäť iba bezrozmerným faktorom 2π

$$T = 2\pi r^{3/2} \sqrt{\frac{1}{\kappa m_S}}. \tag{13}$$

Niektoré závery ohľadom pohybu planét okolo Slnka sa dajú z rozmerovej analýzy získať presne. Napríklad Keplerov zákon pre pomer obežných dôb dvoch planét

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 \tag{14}$$

dostaneme aj z rovnice (12), pretože v podiele obežných dôb sa spoločné konštanty vykrátia.

1.3 Hľadanie veličín, ktoré sú dôležité pre fyziku atómu

Typický rozmer atómu je $a \approx 10^{-10}$ m. Horný odhad tohoto čísla urobil už v 18. storočí Benjamin Franklin pomocou experimentu s olejom. Rozlial 5 cm^3 oleja na vodnú hladinu. Vďaka povrchovým napätiam sa olej na vode snaží rozliať na čo najväčšiu plochu, ktorá je limitovaná tým, že hrúbka olejovej vrstvy nemôže byť menšia ako veľkosť molekúl oleja. Franklinov olej sa rozlial na plochu 0,2 ha. To znamená, že hrúbka olejovej vrstvy bola okolo $2,5 \times 10^{-9}$ m.

Keď poznáme typický rozmer atómu, môžeme rozmerovú analýzu použiť na hľadanie veličín, ktoré majú určujúci vplyv na veľkosť atómov. Na začiatok buďme konzervatívni a pozrime sa, aký odhad veľkosti atómu by sme dostali použitím veličín a konštánt klasickej fyziky 19. storočia. Pri Planetárnom modeli (ako už samo meno naznačuje) je situácia analogická ako pri obiehaní planét okolo Slnka. Očakávame preto, že podstatnými veličinami budú hmotnosť elektrónu m_e a elektrické náboje elektrónu a jadra v súčine $e^2 \equiv q_e^2/(4\pi\varepsilon_0)$. Rovnica

$$[a] = [m_e]^\alpha [e^2]^\beta \tag{15}$$

vedie na

$$\mathrm{m} = \mathrm{kg}^{\alpha+\beta} \cdot \mathrm{m}^{3\beta} \cdot \mathrm{s}^{-2\beta}. \tag{16}$$

Táto rovnica však nemá pre α, β riešenie, čo ani nie je prekvapujúce, keď si uvedomíme, že ani Slnečná sústava nemá svoj typický rozmer, ktorý by bol určený príťažlivosťou Slnka a hmotnosťou planét. Ľubovoľne ťažké planéty (alebo umelé družice) si môžu obiehať okolo Slnka v ľubovoľnej vzdialenosti.

Ak sme teda neuspeli pri vysvetľovaní veľkosti atómu s klasickou fyzikou 19. storočia, musíme sa poobzerať po nejakých novinkách na trhu. A v dobe, o ktorej je reč, sa vynorili hneď dve nové konštanty; rýchlosť svetla c a Planckova konštanta $\hbar$. Skúsme to najskôr s rýchlosťou svetla. Táto konštanta by zrejme vstúpila do hry, ak by elektrón v atóme bol relativistický objekt a ak by vysvetlenie veľkosti atómu malo korene v relativistických javoch. Jednotky a hodnoty dôležitých veličín zhrnieme v nasledujúcej tabuľke.

veličina	jednotka	rozmer	hodnota
m_e	kg	kg	$9,1 \times 10^{-31}$
$e^2 \equiv q_e^2/(4\pi\varepsilon_0)$	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$2,3 \times 10^{-28}$
c	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$	3×10^8
a	m	m	?

(17)

Rozmerovou analýzou odvodíme pre a vzorec

$$a = \frac{e^2}{m_e c^2}. \tag{18}$$

Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$a \approx 3 \times 10^{-15} \text{ m}. \tag{19}$$

Táto hodnota je o 5 rádov menšia ako je typický rozmer atómu. Zdá sa teda, že relativistické efekty nie sú zodpovedné za veľkosti atómov.

Skúsme to teraz s Planckovou konštantou

veličina	jednotka	rozmer	hodnota
m_e	kg	kg	$9,1 \times 10^{-31}$
$e^2 \equiv q_e^2/(4\pi\varepsilon_0)$	$\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$2,3 \times 10^{-28}$
$\hbar$	$\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$	$\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$	$1,1 \times 10^{-34}$
a	m	m	?

(20)

Z rozmerovej analýzy dostaneme

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \tag{21}$$

čo po dosadení číselných hodnôt dá rozmer

$$a \approx 0,4 \times 10^{-10} \text{ m}. \tag{22}$$

Toto číslo už spĺňa naše očakávania. Mohlo by to znamenať, že sa nám podarilo identifikovať kľúčové veličiny pre výpočet rozmeru atómu a že novým fundamentálnym parametrom fyziky mikrosveta na úrovni atómov je Planckova konštanta $\hbar$.

Zaujímavé bude tiež získať odhad pre typické rýchlosti a energie elektrónu v atóme. Z rozmerovej analýzy dostaneme

$$v = \frac{e^2}{\hbar} \approx 2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 0,007c \tag{23}$$

a[2]

$$E = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \approx 4 \times 10^{-18} \text{ J} \approx 25 \text{ eV}. \tag{24}$$

Vidíme, že typická rýchlosť elektrónu v atóme je veľmi malá v porovnaní s rýchlosťou svetla. To je v súlade s predošlým zistením, že c nie je dôležitým parametrom pre opis atómu. Odhad typickej energie dáva tiež uspokojujúcu hodnotu, keď zvážime, že väzbová energia elektrónu v atóme vodíka je 13,5 eV.

Vidíme, že vďaka rozmerovej analýze sme dostali najzákladnejšiu predstavu o javoch a číslach, ktoré budú dôležité pre vybudovanie skutočnej teórie schopnej opísať svet na úrovni jednotlivých atómov. Z doteraz zistného môžme povedať, že v tejto novej teórii bude veľmi dôležitú úlohu zohrávať Planckova konštanta a že pri jej budovaní budeme asi nútení prekročiť hranice platnosti klasických fyzikálnych teórií 19. storočia.

[2] 1 eV je energia, ktorú získa elektrón, keď ho urýchlime potenciálovým rozdielom 1 V. Menovite 1 eV$= 1,602 \times 10^{-19}$ J.