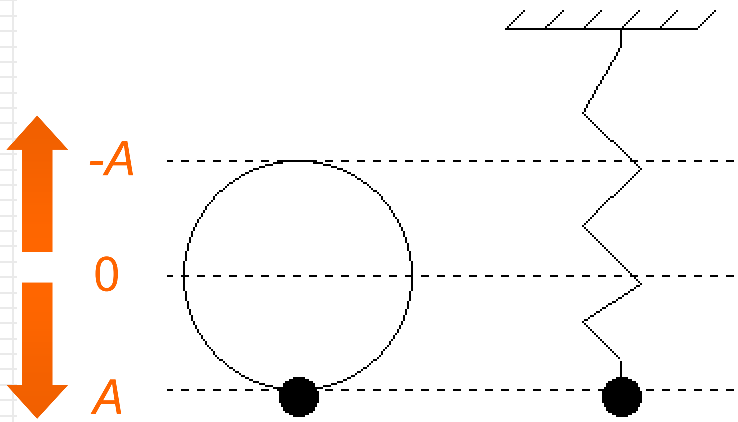
Mechanické kmity

- *Netlmené harmonické kmity*
- *Skladanie rovnosmerných harmonických kmitov s rôznou fázou a frekvenciou*
- *Tlmené kmity*
- *Vynútené kmity, rezonancia*

Okamžitá výchylka … x



Harmonické netlmené kmity

$$F = -kx \qquad ma = -kx \qquad m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

Pohybová rovnica hm. bodu konajúceho harmonický pohyb

$$(2\pi\nu)^2 = \frac{k}{m} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$ *Riešenie pohybovej rovnice*

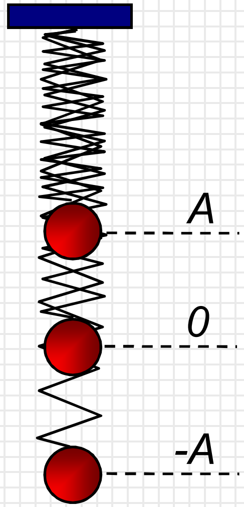
V čase t=0s $x_0 = A\cos(\alpha)$

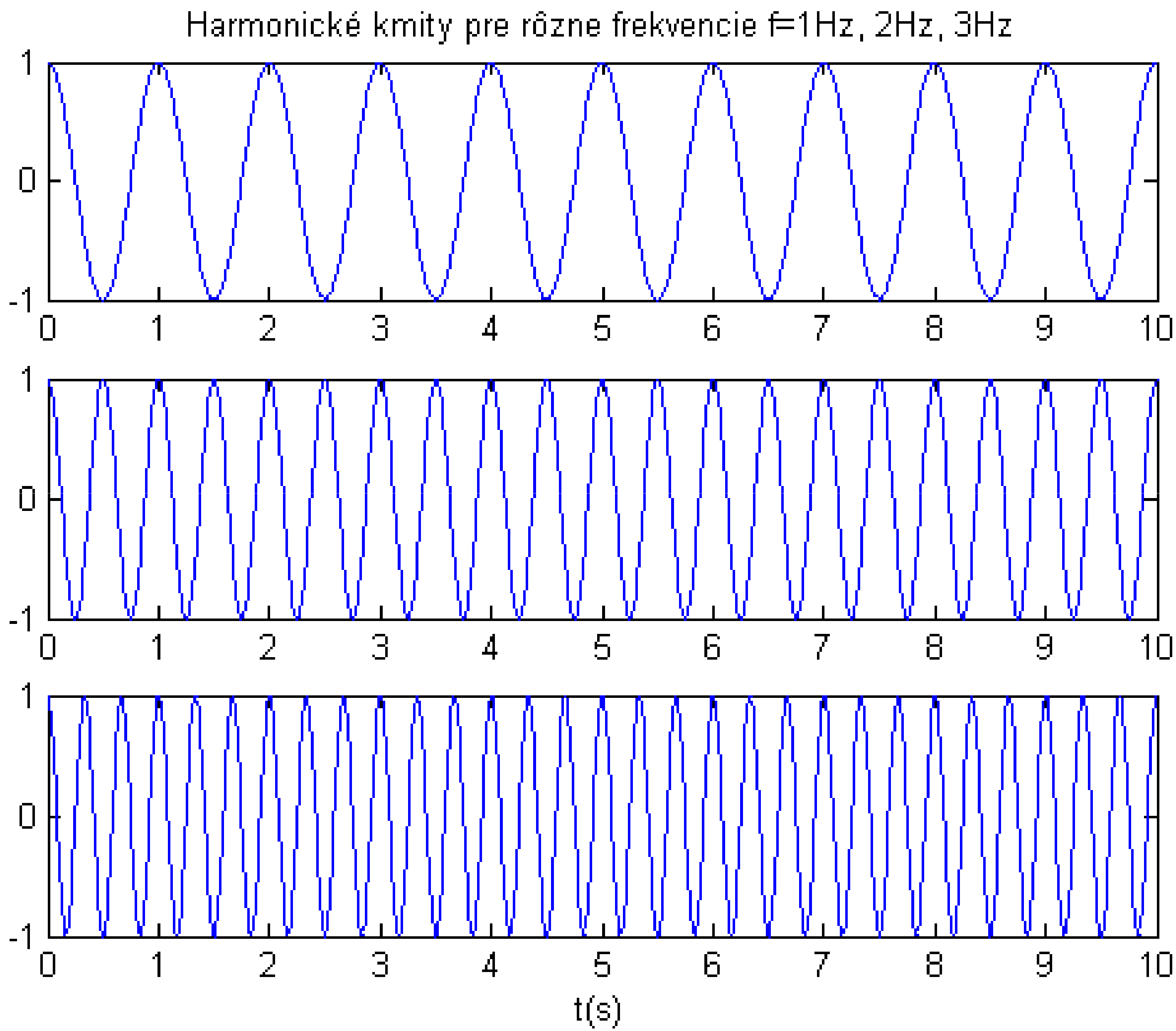
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$ *Rýchlosť kmitavého harmonického pohybu*

V čase t=0s $v_0 = -A\omega\sin(\alpha)$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$tg\alpha = \frac{v_0}{\omega x_0}$$





Harmonické kmity pre rôzne frekvencie f=1Hz, 2Hz, 3Hz
1
0
-1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t(s)

Skladanie rovnobežných kmitov - rôzna fáza, rovnaká frekvencia

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

$$= A_1(\cos \omega t \cos \alpha_1 - \sin \omega t \sin \alpha_1) + A_2(\cos \omega t \cos \alpha_2 - \sin \omega t \sin \alpha_2)$$

$$= \cos \omega t (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) - \sin \omega t (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)$$

Substitúcia:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 = A \cos \alpha$$

$$A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = A \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$= A(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha)$$

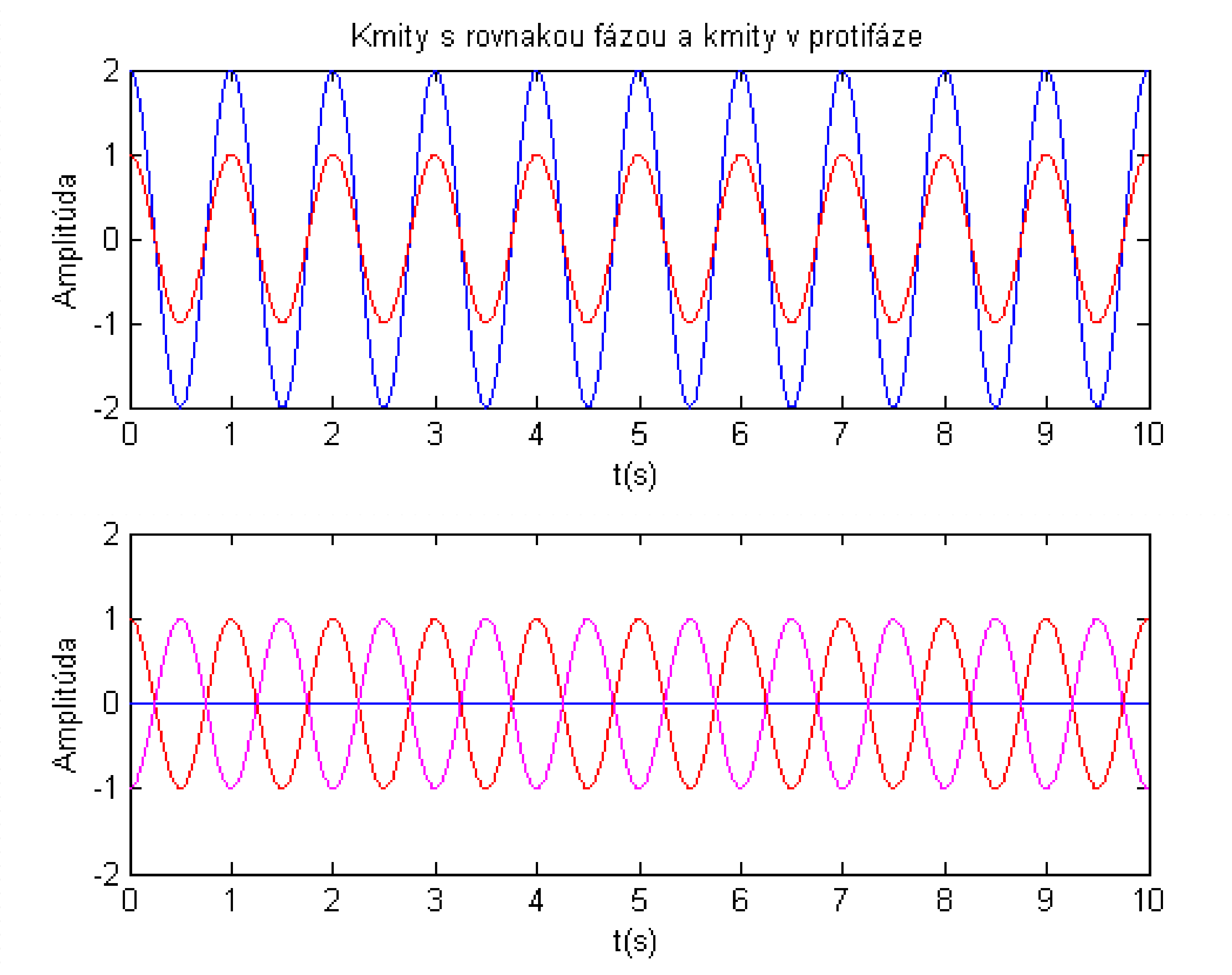
$$\boxed{x = A \cos(\omega t + \alpha)}$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2k.\pi$$

$$A = A_1 - A_2$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (2k+1).\pi$$



Kmity s rovnakou fázou a kmity v protifáze
Amplitúda
t(s)
Amplitúda
t(s)

Skladanie rovnobežných kmitov - rôzna frekvencia

$$x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t)$$
$$x_2 = A_0 \cos(\omega_2 t)$$

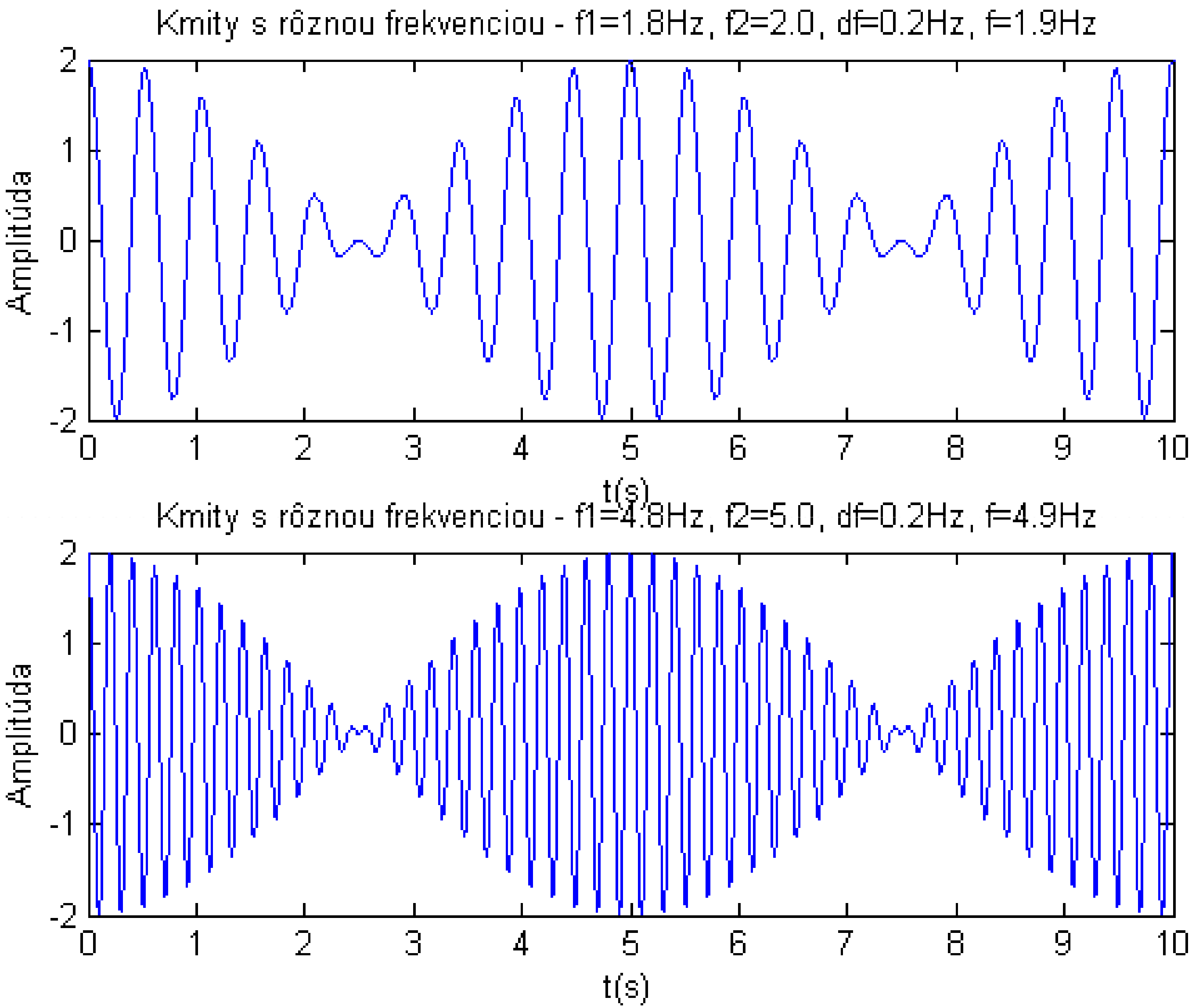
Fáza a amplitúda je rovnaká.

$$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad = A_0 \cos(\omega_1 t) + A_0 \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\underbrace{= 2A_0 \cos\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{\boxed{\omega^*}} t}_{A^*} \cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{\omega} t\right)$$

Je zrejmé, že amplitúda osciluje … amplitúdová modulácia

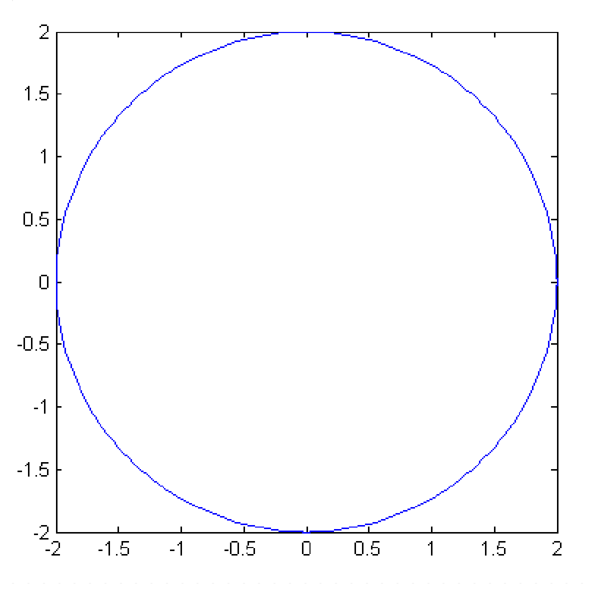


$$\frac{f_1 + f_2}{2} = 1{,}9\mathrm{Hz}$$

$\Delta f = 0{,}2$ Hz

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = 4{,}9\mathrm{Hz}$$

Kmity kolmé na seba



$$x = x_0 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$y = y_0 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Riešenie pohybovej rovnice v dvoch rozmeroch

Pre $\omega_2 = \omega_1$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = k\pi$$

Pohyb po priamke

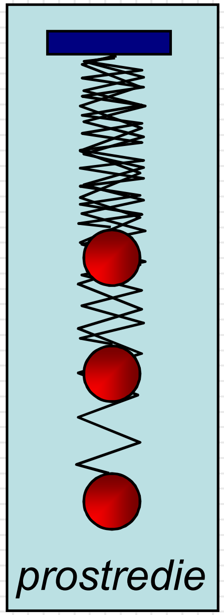
$$\alpha_2 - \alpha_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Pohyb po kružnici, lebo dosadením vznikne rovnica kružnice $x^2 + y^2 = x_0^2$

Pre $\omega_2 \neq \omega_1$

Zložitá krivka, vznikajú tzv. Lissajousove krivky

Tlmené kmity



$\boxed{F = -kx}$ $\boxed{F = -rv}$ Odporová sila namierená proti pohybu

$$\Rightarrow \boxed{ma = -kx - rv} \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ 2b = \frac{r}{m}} \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

Riešenie pohybovej rovnice pre $\omega_0 > b$

$$x = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \alpha) = A^*\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{A^* = Ae^{-bt}} \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

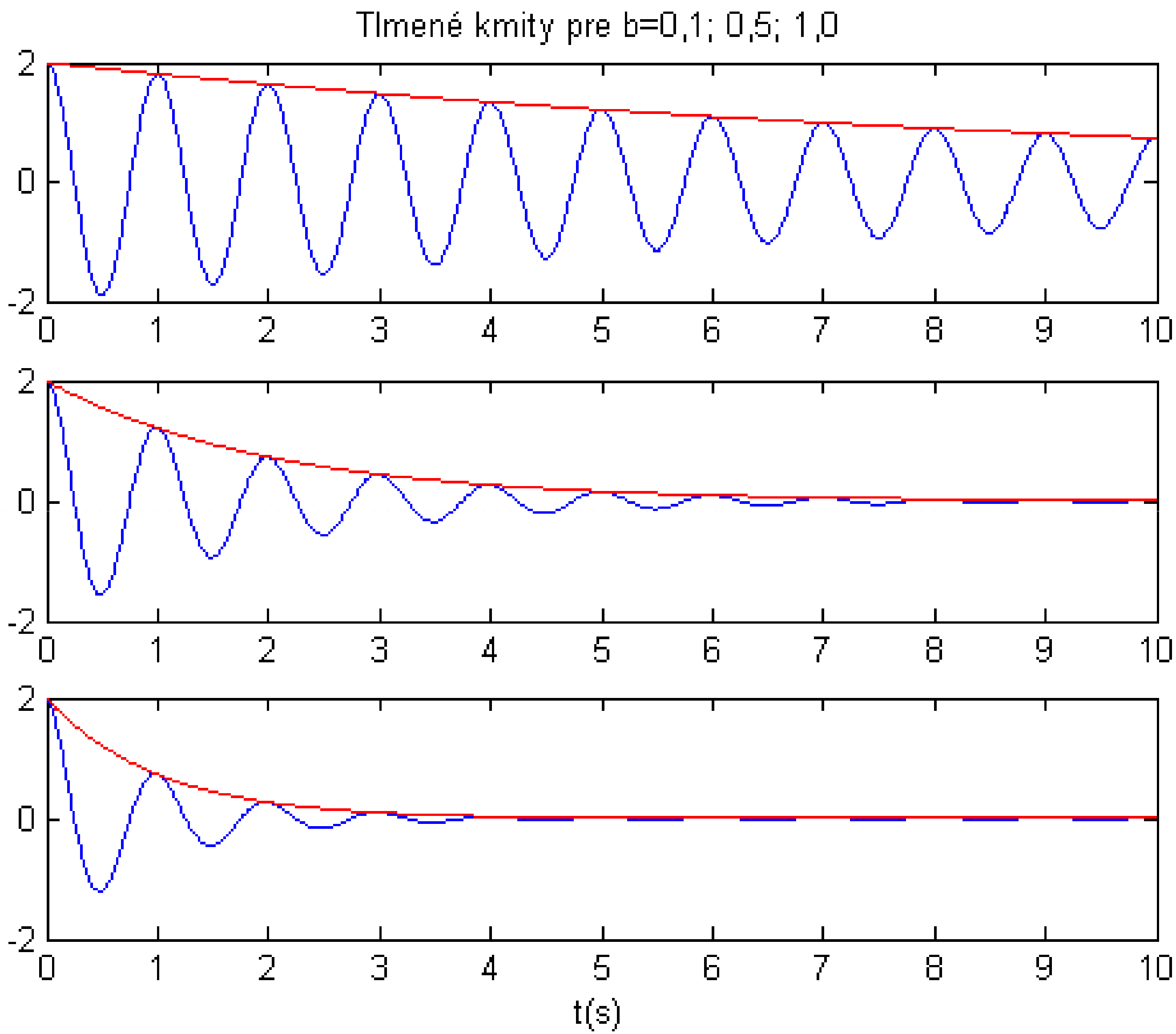
b… koeficient útlmu

δ… logaritmický dekrement útlmu

λ… útlm

$$\lambda = \frac{A^*(t)}{A^*(t+T)} \Rightarrow = \frac{Ae^{-bt}}{Ae^{-bt}e^{-bT}} = e^{bT}$$

$$\boxed{\delta = \ln\lambda = bT}$$


Tlmené kmity pre b=0,1; 0,5; 1,0
2
0
-2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t(s)

Vynútené kmity

$$F_1 = -kx$$

$$F_2 = -rv$$ Odporová sila namierená proti pohybu

$$F_3 = F_0 \cos \omega_v t$$ Vynucujúca sila

$$ma = -kx - rv + F_0 \cos \omega_v t$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + f_0 \cos \omega_v t$$

f_0… amplitúda vynútených kmitov

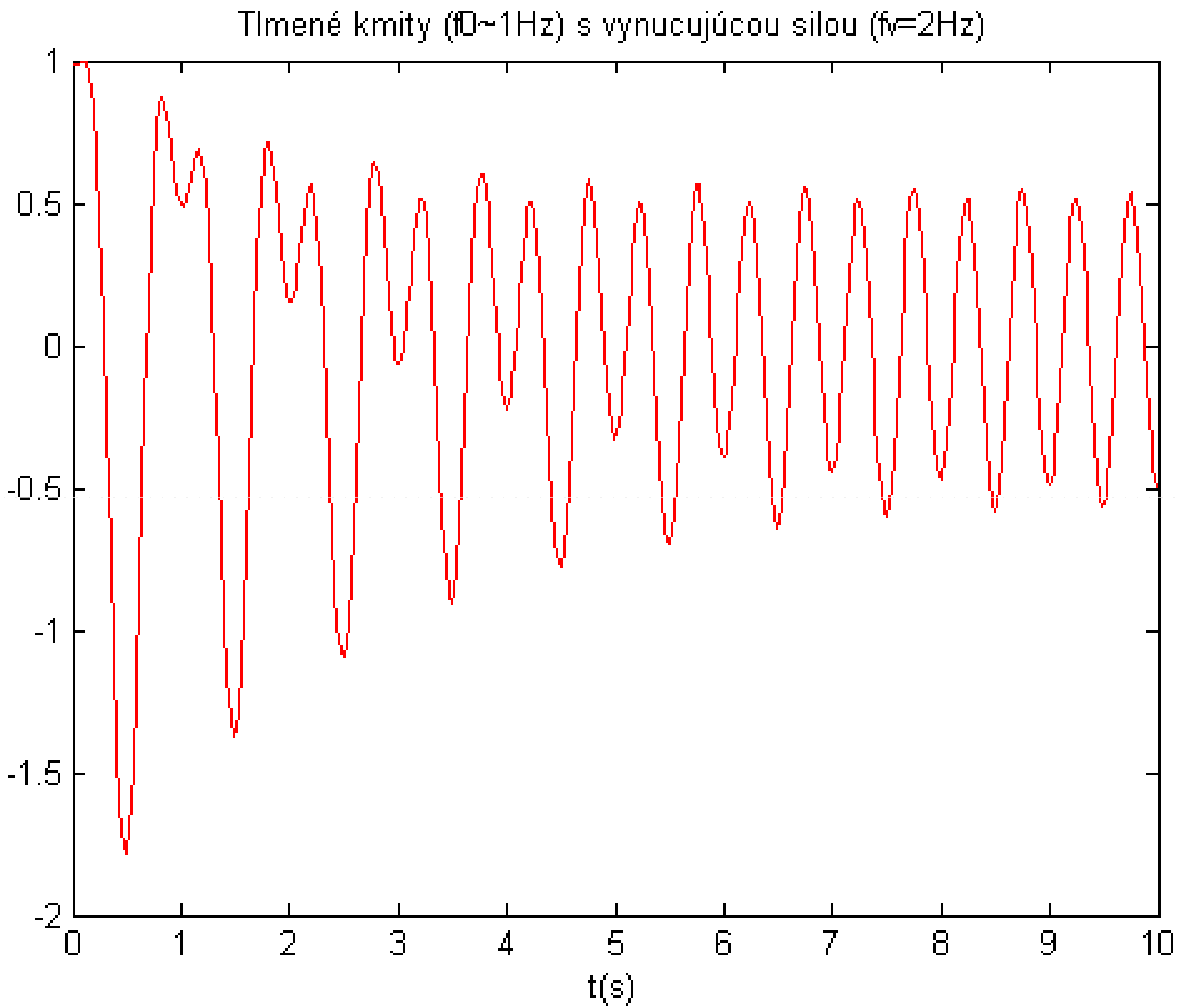
ω_v… uhlová rýchlosť vynútených kmitov

Riešenie pohybovej rovnice

$$x = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \alpha) + B\cos(\omega_v t + \alpha_v)$$

Pre veľké t sa pôvodné kmity utlmia a prvý člen vo vzťahu bude nulový.

$$x = B\cos(\omega_v t + \alpha_v)$$


Tlmené kmity (f0~1Hz) s vynucujúcou silou (fv=2Hz)
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t(s)

Odvodenie rezonancie

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_0 \cos\omega_v t$$

Dosadiť a dopočítať

Pre veľké t sa pôvodné kmity utlmia a prvý člen vo vzťahu bude nulový.

$$x = B\cos(\omega_v t + \alpha_v)$$

Príslušné derivácie

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -B\omega_v \sin(\omega_v t + \alpha_v)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -B\omega_v^2 \cos(\omega_v t + \alpha_v)$$

vzťah pre amplitúdu a fázu

Rezonancia

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4b^2\omega_v^2}}$$

Celková amplitúda

Keď amplitúda kmitov B dosiahne maximum nastáva rezonancia. Hľadáme teda frekvenciu vynútených kmitov pre maximálne B.

$$y = \left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4b^2\omega_v^2$$

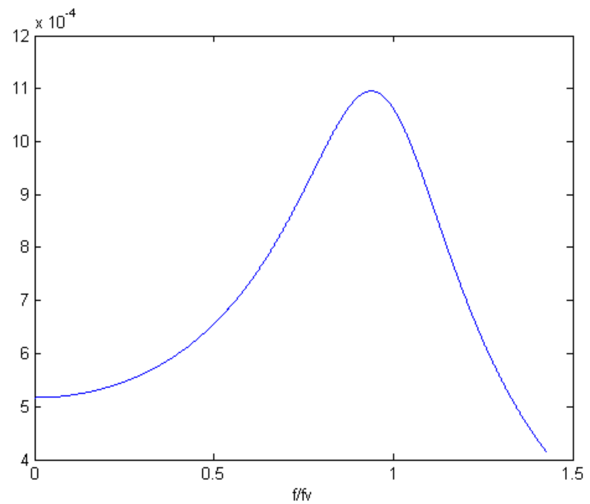
y musí byť minimálne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega_v} = 2\left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)\left(-2\omega_v\right) + 8b^2\omega_v = 0$$

$$\omega_0^2 - \omega_v^2 = 2b^2$$

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}}$$

V prípade nulového tlmenia (b=0) $\boxed{\omega_r = \omega_0^2}$



Pre tlmenie b=10 a fv=7Hz